UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA COM CRESCIMENTO CRÍTICO

por

FERNANDO BRUNO MARTINS NUNES

BELÉM
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA COM CRESCIMENTO CRÍTICO

Por

FERNANDO BRUNO MARTINS NUNES[*]

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPa, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 04 de março de 2013

Comissão Examinadora:

____

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva - UFPA (Orientador)

____

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa - PPGME/UFPA (Membro)

____

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - MAT/UnB (Membro)

[*]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Dedicatória

Aos meus pais e irmão.

Agradecimento

À Deus, acima de tudo.

Aos meus pais José Fernando e Maria do Socorro pelo apoio que tive e tenho ao longo destes 26 anos de vida.

Ao meu irmão Fernando Sales por sempre me incentivar nos estudos.

Ao professor Dr. João Pablo Pinheiro da Silva pela excelente orientação.

Aos professores Doutores Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa e Marcelo Fernandes Furtado por aceitarem fazer parte desta banca examinadora.

Aos professores do PPGME que muito me ajudaram na minha formação.

À minha turma de mestrado, Mirelson pela ajuda nestes dois anos de formação.

Aos amigos Alex Alcântara, Alex Pantoja, Alan, Hilton, Marcelo, Mateus e Raimundo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho iremos estudar a existência de múltiplas soluções para o problema elíptico semilinear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda|u|^{2^*-2}u + f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ um domínio limitado, com fronteira suave, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev e $\lambda > 0$.

Palavras chaves: problemas elípticos semilineares, expoente crítico de Sobolev, Teorema do Passo da Montanha, Lema de Concentração de Lions.

Abstract

In this work study the existence of multiple solutions for semilinear elliptic problem

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2}u + f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is a bounded smooth domain, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ is the critical Sobolev exponent and $\lambda > 0$.

Key words: semilinear elliptic problems, crititical growth, Mountain Pass Theorem, Lema concentration of Lions.

Conteúdo

Introdução

Vamos estudar neste trabalho a existência de multiplas soluções para o problema elíptico semilinear com crescimento crítico dado abaixo

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2}u + f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com fronteira suave, $\lambda > 0$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o chamado expoente crítico de Sobolev e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função que satisfaz a condição de Carathéodory,

$$\sup_{\Omega \times [-M,M]} |f(x,s)| = f_{_M} < \infty, \forall M > 0,$$

e ainda as condições abaixo

(f_1) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω;

(f_2) existem $\sigma \in [0,2)$ e $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}f(x,s)s - F(x,s) \geq -a_1 - a_2|s|^{\sigma}, \forall\ s\ \in \mathbb{R}, \text{q.t.p. em } \Omega,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) existe uma constante $B > 0$ tal que $F(x,s) \geq \mu_k \frac{|s|^2}{2} - B$, $\forall s \in \mathbb{R}$, q.t.p. em Ω;

(f_4) $\displaystyle\limsup_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = a(x) \leq \mu_j$, uniformemente q.t.p. em Ω e $a(x) \neq \mu_j$,

onde μ_j são autovalores de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ com a condição de Dirichlet.

O estudo de equações dessa natureza começou em 1983 com o trabalho pioneiro de Brezis e Nirenberg [5], no qual obtiveram existência de solução positiva para o problema

$$(BN) \qquad -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u, \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

com $\lambda \in (0, \mu_1(\Omega))$. Este trabalho motivou um estudo profundo de problemas com essa natureza. Em 2003 Silva e Xavier [16] obtiveram múltiplas soluções para o problema (P), a grande dificuldade para a obtenção de soluções para os problemas (P) e (BN) está na falta de compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, assim o funcional associado ao problema estudado por Brezis e Nirenberg não satisfaz a condição de Palais-Smale em todos os níveis, entretanto utilizando funções de corte adequadas mostra-se que o nível minimax esta abaixo do nível crítico para o qual a condição de Palais-Smale é verdadeira. Não podemos aplicar aqui a mesma técnica, pois o problema (P) com $f(x,u) = u$ é equivalente a obter solução de (BN) com $\lambda > 0$ e suficientemente grande. Para obter multiplas soluções, Silva e Xavier fizeram uma abordagem variacional para o problema, utilizando uma versão do teorema do passo da montanha com simetria [1, 2, 15], além disso eles trabalharam com uma condição mais fraca do que a de Ambrosetti e Rabinowitz. Para superar a falta de compacidade utilizaram o lema de concentração de compacidade de Lions [12, 13]

O principal resultado deste trabalho pode ser encontrado em [16] o qual enunciamos abaixo

Teorema 0.1 Considere o problema (P). Suponha que $f(x,s)$ seja ímpar em s e satisfaça (f_1), (f_2),(f_3) e (f_4). Então existe $\lambda_k^* \in (0,\infty]$ tal que (P) possui pelo menos $k-j+1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0,\lambda_k^*)$.

As soluções fracas de (P) são precisamente os pontos críticos do funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde $I_\lambda \in C^1$ é dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x,u) dx.$$

Portanto para resolver (P) iremos utilizar métodos variacionais para mostrar existência de multiplos pontos críticos para o funcional associado ao problema (P).

No Capítulo 1 vamos demonstrar uma versão do Teorema do Passo da Montanha com simetria, esta demonstração será feita através de dois lemas de deformação baseados na prova de Clark em [6], no Capítulo 2 iremos demonstrar o Lema de Concentração de compacidade de Lions, este lema descreve como ocorre a falta de compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, no Capítulo 3 demonstraremos o Teorema 1.1, para provarmos a condição de Palais-Smale utilizaremos (f_1) e (f_2), resaltamos que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz [1] implica na condição (f_2), sendo assim ela é uma condição mais fraca, as condições (f_3) e (f_4) fornecem as condições geométrica para o teorema do passo da montanha com simetria. No capítulo 5 provamos que o funcional associado é de classe C^1 e nos capítulos 4 e 6 apresentamos alguns resultados e definições que foram usadas no decorrer do trabalho.

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo trataremos da generalização da versão do Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [1]. Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, e escreveremos que I satisfaz $(PS)_c$, se qualquer sequência $(u_n) \subset E$ que satisfaz

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad E^*$$

possui uma subsequência convergente.

Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale para sequências limitadas no nível c, e escreveremos que I satisfaz $(PSB)_c$, se qualquer sequência limitada $(u_n) \subset E$ que satisfaz

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad E^*$$

possui uma subsequência convergente.

Vamos agora enunciar o uma versão do teorema do passo da montanha com simetria que pode ser encontrada em [2, 15] .

Teorema 1.1 Seja $E = V \oplus X$ um espaço de Banach real com $\dim V = k < \infty$. Suponha que $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ seja um funcional par satisfazendo $I(0) = 0$ e

$I_1)$ Existe $\widehat{r} > 0$ tal que $I(u) \geq 0$, $\forall u \in X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0)$;

$I_2)$ Existem $b > 0$, $m > k$ e uma variedade $M = \phi(\mathbb{R}^m) \subset E$, onde $\phi : \mathbb{R}^m \to M$ é um homeomorfismo ímpar satisfazendo $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \|\phi(y)\| = \infty$, tais que $\sup\limits_{u\in M} I(u) < b < \infty$;

$I_3)$ I satisfaz $(PSB)_0$ e $(PS)_c$ para $0 < c < b$;

Então I possui pelo menos $l = m - k$ pares de pontos críticos não triviais $\pm u_1$,...,$\pm u_l$ tais que $I(u_j) \in [0, b)$ para $j = 1, ..., l$.

Para demonstrar este teorema, apresentaremos dois lemas auxiliares e estabeleceremos algumas notações. Definimos

$$
\begin{aligned}
K_c &= \{u \in E; \quad I(u) = c; \quad I'(u) = 0\}, \\
I^c &= \{u \in E; \quad I(u) \leq c\}, \\
\widetilde{K_0} &= K_0 \cap \partial B_{\widehat{r}}(0).
\end{aligned}
$$

Para $A \subset E$, denotamos por $N_\delta(A)$ a δ-vizinhança fechada de A, isto é,

$$N_\delta(A) = \{u \in E; \quad \|u - A\| \leq \delta\}.$$

Definimos $N_\delta(\emptyset) = \emptyset$ e para um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$

$$\|a - X\| = \inf \left\{ \|a - x\|_{\mathbb{R}^N} \quad ; \quad x \in X \right\}.$$

1.1 Lemas de Deformação

Definição 1.1 . Seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e $\widehat{E} = \{u \in E : I'(u) \neq 0\}$. Dizemos que $v \in E$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in \widehat{E}$ se,

i) $\|v\| \leq 2\|I'(u)\|$.

ii) $\langle I'(u), v\rangle \geq \|I'(u)\|^2$.

Dizemos que $h : \widehat{E} \to E$ é um campo pseudo-gradiente para I em $u \in E$ quando,

a) h é localmente Lipschitziana, $\forall u \in \widehat{E}$.

b) Para todo $u \in \widehat{E}$ $h(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u.

Lema 1.1 Se $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ então existe um campo pseudo-gradiente para I em $\widehat{E}$.

Demonstração:

Por definição temos que.

$$\|I'(v)\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \langle I'(v), x\rangle, \ \ \forall v \in \widehat{E}.$$

Segue da definição de supremo que, dados $v \in \widehat{E}$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_{v_\varepsilon} \in E$ satisfazendo $\|x_{v_\varepsilon}\| = 1$ e

$$\|I'(v)\| - \varepsilon < \langle I'(v), x_{v_\varepsilon}\rangle.$$

Como $I'(v) \neq 0$, então para $\varepsilon = \frac{\|I'(v)\|}{3} > 0$ obtemos

$$\frac{2\|I'(v)\|}{3} < \langle I'(v), x_{v_\varepsilon}\rangle.$$

Então $u_v = \frac{3\|I'(v)\|x_{v_\varepsilon}}{2}$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $v \in \widehat{E}$. De fato,

$$\|u_v\| = \frac{3\|I'(v)\| \cdot \|x_{v_\varepsilon}\|}{2} = \frac{3\|I'(v)\|}{2} < 2\|I'(v)\|$$

e

$$\begin{aligned} \langle I'(v), u_v\rangle &= \langle I'(v), \frac{3\|I'(v)\|x_{v_\varepsilon}}{2}\rangle \\ &= \frac{3\|I'(v)\|}{2}.\langle I'(v), x_{v_\varepsilon}\rangle \\ &> \frac{3\|I'(v)\|}{2}.\frac{2\|I'(v)\|}{3} \\ &= \|I'(v)\|^2. \end{aligned}$$

Sendo $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, a função norma contínua e $\widehat{E}$ aberto, existe uma vizinhança aberta V_v de v contida em $\widehat{E}$ tal que

$$\|z_v\| \leq 2\|I'(w)\|, \tag{1.1}$$

$$\langle I'(w), z_v\rangle \geq \|I'(w)\|^2 \tag{1.2}$$

Para todo $w \in V_v$. Note que

$$V = \{V_v\}_{v\in\widehat{E}}$$

é uma cobertura aberta de $\widehat{E}$. Como $\widehat{E}$ é um espaço métrico completo, então é paracompacto (Ver [11]). Da definição de paracompacidade, existe uma cobertura aberta de $\widehat{E}$

$$U = \{V_{v_\lambda}\}_{\lambda \in \Sigma},$$

localmente finita que refina V, ou seja, para cada $\lambda \in \Sigma$ existe $v \in \widehat{E}$ tal que

$$V_{v_\lambda} \subset V_v.$$

Logo, por (1.1) e (1.2) tem-se que

$$\begin{aligned} \|u_v\| &\leq 2\|I'(w)\|, & (1.3)\\ \langle I'(w), u_v\rangle &\geq \|I'(w)\|^2 & (1.4) \end{aligned}$$

$\forall w \in V_{v_\lambda}$.

Para cada $\lambda \in \Sigma$, definamos $\beta_\lambda : \widehat{E} \to \mathbb{R}$ por

$$\beta_\lambda(w) = d(w, E\backslash V_{v_\lambda}).$$

Sabendo que, dado $v \in \widehat{E}$ arbitrário, existe V_{v_λ} tal que $v \in V_{v_\lambda} \subset V_v$, podemos definir $h : \widehat{E} \to E$ por

$$h(w) = \sum_{\lambda \in \Sigma} \left(\frac{\beta_\lambda(w)}{\displaystyle\sum_{\iota \in \Sigma} \beta_\iota(w)} \cdot z_\lambda \right),$$

onde $u_\lambda = \frac{3}{2} \cdot \|I'(v_\lambda)\| x_{v_\lambda}$.

Como $\widehat{E} \subset E$, então

$$\begin{cases} \beta_\lambda(w) = 0; \quad w \in \widehat{E}\backslash V_{v_\lambda}, \\ \beta_\lambda(w) = d(w, \widehat{E}\backslash V_{v_\lambda}); \quad w \in V_{v_\lambda}. \end{cases}$$

Como U é localmente finito, então dado $w \in \widehat{E}$, existe apenas um número finito p_w de índices tais que $\lambda \in \Sigma$ e $\beta_\lambda(w) \neq 0$, sendo assim temos que

$$\begin{aligned} h(w) &= \sum_{\lambda\in\Sigma}\left(\frac{\beta_\lambda(w)}{\displaystyle\sum_{\iota\in p}\beta_\iota(w)}\cdot z_\lambda\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p_w}\left(\frac{\beta_{\lambda_k}(w)}{\displaystyle\sum_{q=1}^{p_w}\beta_{\iota_q}(w)}\cdot z_\lambda\right). \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{k=1}^{p_w}\left(\frac{\beta_{\lambda_k}(w)}{\displaystyle\sum_{q=1}^{p_w}\beta_{\iota_q}(w)}\right) = 1.$$

Usando (1.4)

$$\begin{aligned} \|h(w)\| &= \left\|\sum_{k=1}^{p_w}\left(\frac{\beta_{\lambda_k}(w)}{\displaystyle\sum_{q=1}^{p_w}\beta_{\iota_q}(w)}\cdot z_\lambda\right)\right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p_w}\left(\frac{\beta_{\lambda_k}(w)}{\displaystyle\sum_{q=1}^{p_w}\beta_{\iota_q}(w)}\right)\cdot\|u_\lambda\| \\ &\leq 2\|I'(w)\|, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \langle I'(w), h(w)\rangle &= \sum_{k=1}^{p_w}\left(\frac{\beta_{\lambda_k}(w)}{\displaystyle\sum_{q=1}^{p_w}\beta_{\iota_q}(w)}\right)\cdot\langle I'(w), z_\lambda\rangle \\ &= \langle I'(w), u_\lambda\rangle \\ &\overbrace{\geq}^{\text{por } (1.4)} \|I'(w)\|^2. \end{aligned}$$

Portanto $h(w)$ é um vetor pseudo-gradiente para I pem w. Note ainda que h é localmente Lipschitziana. De fato, pela definição de h vem que, localmente h é uma soma finita de funções que são localmentes Lipschitzianas, para uma determinada vizinhança, pois a cobertura U de $\widehat{E}$ é um refinamento localmente finito de V e as funções d_λ são localmente Lipschitzianas. Sendo assim, existe uma vizinhança onde h é localmente Lipschitziana. Portanto h é um campo pseudo-gradiente para I em $\widehat{E}$ o que conclui a nossa demonstração. $\blacksquare$

Além disso, seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com I par, então I possui um campo pseudo-gradiente ímpar. De fato, como acabamos de provar, existe um campo pseudo-gradiente para I. Denotemos por V um tal campo, definindo $W : \widehat{E} \to E$ dada por $W(u) = \frac{1}{2}(V(u) - V(-u))$, segue da definição que W é ímpar e localmente Lipschitzianas e

$$\begin{aligned} \|W(u)\| &= \|\frac{1}{2}(V(u) - V(-u))\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|V(u)\| + \frac{1}{2}\|V(u)\| \\ &\leq 2\|I'(u)\|_{E^*} \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \langle I'(u), W(u)\rangle &= \langle I'(u), \frac{1}{2}(V(u) - V(-u))\rangle \\ &\overbrace{=}^{I'(u) linear} \frac{1}{2}\langle I'(u), V(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle I'(u), -V(-u))\rangle \\ &\overbrace{=}^{Ipar} \frac{1}{2}\langle I'(u), V(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle I'(-u), V(-u))\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}\|I'(u)\|^2_{E^*} + \frac{1}{2}\|I'(-u)\|^2_{E^*} \\ &\overbrace{=}^{Ipar} \|I'(u)\|^2_{E^*}. \end{aligned}$$

Isto é, W é um campo pseudo-gradiente de I, onde W é ímpar. Note que quando escrevemos $\langle I'(u), -V(-u))\rangle = \langle I'(-u), V(-u))\rangle$ estamos usando o fato de $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ ser par. Mostremos que $\langle I'(-u), v)\rangle = \langle I'(u), -v)\rangle$, para todo $u, v \in E$.

Da definição temos,

$$\begin{aligned}
\langle I'(-u), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{I(-u+tv)-I(-u)}{t}\\
&= \frac{I(-u+tv)-I(-u)}{t}+o_t(1)\\
&\overbrace{=}^{Ipar} \frac{I(-(u-tv))-I(u)}{t}+o_t(1)\\
&\overbrace{=}^{Ipar} \frac{I(u-tv)-I(u)}{t}+o_t(1)\\
&= \frac{I(u+t(-v))-I(u)}{t}+o_t(1)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{I(u+t(-v))-I(u)}{t}\\
&= \langle I'(u), -v\rangle.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|I'(-u)\|_{E^*} &= \sup_{\|v\|=1}|\langle I'(-u), v\rangle|\\
&= \sup_{\|v\|=1}|\langle I'(u), -v\rangle|\\
&= \sup_{\|-v\|=1}|\langle I'(u), -v\rangle|\\
&= \|I'(u)\|_{E^*}.
\end{aligned}$$

Lema 1.2 Seja $E = V\oplus X$ um espaço de Banach real com $\dim V<\infty$. Suponha que $I\in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaça $I(0)=0$, (I_1) e $(PSB)_0$. Então dado $\delta>0$, existem $\nu>0$, $r>0$, e um homeomorfismo $\eta: E\to E$, satisfazendo

(η_1) $\eta(z)=z$, para cada $z\in E\backslash\overline{B_{\widehat{r}+r}(0)}$;

(η_2) $I(\eta(z))\geq\nu>0$, para cada $z\in\partial B_{\widehat{r}}(0)\cap X\backslash N_\delta(\widetilde{K_0})$;

(η_3) η é ímpar, se I é par.

Demonstração:

Primeiro faremos o caso $\widetilde{K_0}\neq\emptyset$. Definimos

$$A_\varepsilon=\{z\in E:\|z-\partial B_{\widehat{r}}(0)\cap X\|\leq\varepsilon\}\bigcap\{z\in E:\|z-\widetilde{K_0}\|\geq\tfrac{\delta}{2}\}\bigcap\{z\in E:|I(z)|\leq\varepsilon\}.$$

Por $(PSB)_0$, existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\|I'(u)\| \geq \overline{\varepsilon}, \forall u \in A_{\overline{\varepsilon}}. \tag{1.5}$$

De fato, suponha que não ocorre (1.5). Então existe uma sequência $\varepsilon_n \to 0$ tal que

$$\|I'(u_n)\| < \varepsilon_n, u_n \in A_{\varepsilon_n}.$$

Como $z_n \in A_{\varepsilon_n}$ então $|I(z_n)| < \varepsilon_n \to 0$, por $(PSB)_0$ a sequência (z_n) possue uma subsequência que converge em A_0, o que é um absurdo, pois $A_0 = \emptyset$. Logo ocorre (1.5).

Note que vale (1.5) para qualquer ε menor que $\overline{\varepsilon}$. Consideremos $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$, $\varepsilon < 1$. Dados dois conjuntos A e B fechados disjuntos então existe $\psi : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ Lipschtz contínua tal que $\psi(A) = \{0\}$ e $\psi(B) = \{1\}$ (veja [11]). Além disso, podemos argumentar como no último lema e supor que ψ é par. Tomemos funções pares e Lipschitz contínuas $f, g, \varphi : E \to [0,1]$ que satisfaçam

$$f(z) = 0, \text{ se } \|z - \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X\| \geq \overline{\varepsilon},$$

$$f(z) = 1, \text{ se } \|z - \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X\| \leq \varepsilon,$$

$$g(z) = 0, \text{ se } I(z) \notin [-\overline{\varepsilon}, \overline{\varepsilon}],$$

$$g(z) = 1, \text{ se } I(z) \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

$$\varphi(z) = 0, \text{ se } \|z - \widetilde{K_0}\| \leq \tfrac{\delta}{2},$$

$$\varphi(z) = 1, \text{ se } \|z - \widetilde{K_0}\| \geq \tfrac{3\delta}{4}.$$

Definimos $W : E \to E$ dada por

$$W(z) = \begin{cases} g(z)f(z)\varphi(z)h(\|V(z)\|)V(z) & , z \in E \backslash K, \\ 0, & z \in K, \end{cases}$$

sendo I como vimos podemos tomar um campo pseudo-gradiente (V) de I ímpar. Com $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 1$ se $x \in [0,1]$ e $h(x) = \frac{1}{x}$ se $x > 1$, por construção se $x \in \partial K$ então existe uma vizinhança V_x tal que W é nula. Além disso, W restrita a $intK$ e $E \backslash K$ é localmente Lipschtiz por poder ser escrita como produto de funções localmente Lipschtiz. Portanto W é localmente Lipschitiz, e pelo que provamos W é ímpar, decorre da definição de h e do fato de que as imagens de g, f e φ estarem em $[0,1]$ que $0 \leq \|W(z)\| \leq 1$, com $z \in E$. Então, para cada $z \in E$ o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,z) = W(\eta(t,z)), \\ \eta(0,z) = z, \end{cases} \tag{1.6}$$

possui uma única solução $\eta(\cdot,z)$ definida na reta e $\eta \in C([0,1]\times E, E)$ e ainda $\eta(t,\cdot)$ é um homeomorfismo de E em E, com $t \in [0,1]$ (Veja [7]).

Como η é solução de (1.6) temos que $\eta(0,z) = z$ para todo $z \in E$. Seja $t_0 \in (0, \min\{\varepsilon, \frac{\delta}{4}\})$. Afirmamos que $\eta(z) = \eta(t_0, z)$ satisfaz as condições desejadas.

Mostremos (η_2). Considere $z \in \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X \backslash N_\delta(\widetilde{K_0})$. Dividiremos em dois casos. Antes note que se $W(z) = 0$ segue que $\eta(t,z) = z$ é solução de (1.6). De fato,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,z) = \frac{d}{dt}z = 0 = W(z) = W(\eta(t,z)), \\ \eta(0,z) = z, \end{cases}$$

se $W(z) \neq 0$, então $z \in E\backslash K$ para $t \in [0,1]$, assim $\eta(t,z) \in E\backslash K$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\eta(t,z)) &= \langle I'(\eta(t,z)), \frac{d}{dt}\eta(t,z)\rangle \\ &= \langle I'(\eta(t,z)), W(\eta(t,z))\rangle \\ &= g(\eta(t,z))f(\eta(t,z))\varphi(\eta(t,z))h(\|V(\eta(t,z))\|)\langle I'(\eta(t,z)), V(\eta(t,z))\rangle \\ &\geq g(\eta(t,z))f(\eta(t,z))\varphi(\eta(t,z))h(\|V(\eta(t,z))\|)\|I'(V(\eta(t,z)))\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Logo, $I(\eta(\cdot,z)) : [0,1] \to \mathbb{R}$ é não-decrescente para $z \in E\backslash K$, sendo $I(\eta(\cdot,z))$ é constante em K, logo $I(\eta(\cdot,z))$ e não-decrescente para $z \in E$

Caso 1. Se para algum $t \in [0,t_0]$ tivermos $I(\eta(t,z)) > \varepsilon$, como $I(\eta(.,z))$ é não-decrescente, segue que

$$\varepsilon < I(\eta(t,z)) \leq I(\eta(t_0,z)) = I(\eta(z)),$$

fazendo $\varepsilon = \nu$ vale (η_2)

Caso 2. Se para todo $t \in [t, t_0]$ tivermos

$$I(\eta(t,z)) \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Note que

$$\varepsilon \geq I(\eta(t,z)) \geq I(\eta(0,z)) = I(z) \overbrace{\geq}^{\text{por } (I_1)} 0 > -\varepsilon.$$

Logo $g(\eta(t,z)) = 1$, para $t \in [0, t_0]$. Usando o fato de $\|W(\eta(t,z))\| \leq 1$ e $\eta(0,z) = z$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\eta(t,z) - z\| &= \|\eta(t,z) - \eta(0,z)\| \\
&= \|\int_0^t \frac{d}{ds}\eta(s,z)ds\| \\
&= \|\int_0^t W(\eta(s,z))ds\| \\
&\leq \int_0^t \|W(\eta(s,z))\|ds \\
&\leq \int_0^t ds \\
&= t \\
&\leq t_0,
\end{aligned}$$

sendo $t_0 \in (0, \min\{\varepsilon, \frac{\delta}{4}\})$ vem que

$$\|\eta(t,z) - z\| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Sendo $z \in \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap \Big(X \backslash N_\delta(\widetilde{K_0})\Big)$, logo $z \notin N_\delta(\widetilde{K_0})$.

Daí,

$$\|\eta(t,z) - \widetilde{K_0}\| > \delta > \delta - t_0 > \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3\delta}{4}. \tag{1.9}$$

Pela definição de φ temos que $\varphi(\eta(t,z)) = 1$, para todo $t \in [0, t_0]$. Por (1.4), (1.5), (1.6) e (I_1) temos que $\eta(t,z) \in A_{\overline{\varepsilon}}$, para todo $t \in [0, t_0]$. Por (1.2) vem que

$$\|I'(\eta(t,z))\| \geq \overline{\varepsilon}$$

e por (1.1),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\eta(t,z)) &\geq g(\eta(t,z))f(\eta(t,z))\varphi(\eta(t,z))h(\|V(\eta(t,z))\|)\|I'(V(\eta(t,z)))\|^2 \\
&\geq \|I'(V(\eta(t,z)))\|^2 \\
&\geq \overline{c} = \min\{\overline{\varepsilon}^2, \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\} > 0,
\end{aligned}$$

de (I_1) e do Teorema do Valor Médio na reta, existe $t_1 \in (0, t_0)$ tal que

$$\frac{I(\eta(t_0, z)) - I(\eta(0, z))}{t_0} = \frac{d}{dt} I(\eta(t_1, z)),$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} I(\eta(t_0, z)) - I(\eta(0, z)) &= \left(\frac{d}{dt} I(\eta(t_1, z)) \right) t_0 \\ &\geq \overline{c} t_0. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} I(\eta(t_0, z)) &\geq \overline{c}.t_0 + I(\eta(0, z)) \\ &= \overline{c}.t_0 + I(z) \\ &\geq \overline{c}.t_0 > 0, \end{aligned}$$

fazendo $\overline{c}.t_0 = \nu$, mostramos (η_2).

Vamos mostrar (η_1). Seja $z \in E \backslash \overline{B_{\widehat{r}+\overline{\varepsilon}}(0)}$ arbitrário, logo $\|z\| > \widehat{r} + \overline{\varepsilon}$. Seja $a \in \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X$ qualquer, logo $\|a\| = \widehat{r}$

Daí,

$$\|z - a\| \geq \|z\| - \|a\| = \|z\| - \widehat{r} > \overline{\varepsilon},$$

como $a \in \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X$ temos que $f(z) = 0$, segue da definição que $W(z) = 0$, como já vimos, neste caso $v(t, z)$ é constante, logo

$$\eta(z) = \eta(t_0, z) = \eta(0, z) = z.$$

mostrando (η_1).

Da definição de η, vem que $\eta(t, \cdot)$ é ímpar.

Note que no caso em que $\widetilde{K_0} = \emptyset$ as contas são análogas ao caso anterior, apenas fazendo

$$A_\varepsilon = \{z \in E : \|z - \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X\| \leq \varepsilon; |I(z)| \leq \varepsilon\},$$

obtemos $\varphi = 1$ em E e $t_0 = \varepsilon$. ∎

Lema 1.3 Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Suponha que $\alpha \leq \beta$ e que I satisfaça $(PS)_c$ para $c \in [\alpha, \beta]$. Então dado $\overline{\varepsilon} > 0$, existem $c_1, R_0 > 0$, $\widehat{\varepsilon} \in (0, \overline{\varepsilon})$, e um homeomorfismo $\tau : E \to E$ tal que

(τ_1) $\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}$, $\forall z \in I^{\beta}\backslash\overline{B_{R_0}(0)}$;

(τ_2) $I(\tau(z)) \leq I(z)$, $\forall z \in E$;

(τ_3) $\|\tau(z) - z\| \leq c_1$, $\forall z \in E$;

(τ_4) τ é ímpar se I é par

Demonstração:

Primeiramente, observemos que existem $c, \overline{\varepsilon} > 0$ e $R > 0$ tal que

$$\|I'(z)\| \geq c > 0, \forall z \in I^{\beta+\varepsilon_1}\backslash(I^{\alpha-\varepsilon_1} \cup \overline{B_R(0)}). \tag{1.10}$$

Do contrário, seria possível construir sequências $R_n \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$ e $c_n \to 0$ tais que

$$z_n \in I^{\beta+\varepsilon_n}\backslash(I^{\alpha-\varepsilon_n} \cup \overline{B_{R_n}(0)})$$

e $\|I'(z)\| \leq c_n$.

Da condição $(PS)_c$ para $c \in [\alpha, \beta]$, concluímos que existe uma subsequência de (z_n) que converge para $z \in I^{\beta}\backslash(I^{\alpha} \cup E)$, o que é um absurdo pois $I^{\beta}\backslash(I^{\alpha} \cup E) = \emptyset$. Logo (1.10) ocorre. Note que (1.10) vale ainda para qualquer constante positiva menor que $\overline{\varepsilon}$, ou seja, $\varepsilon_1 \in (0, \overline{\varepsilon})$. Vamos supor sem perda de generalidade, $c \in (0, \frac{1}{2})$ e $\widehat{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_1)$.

Definimos,

$$\begin{aligned} A &= \{z \in E : I(z) \leq \alpha - \varepsilon_1\} \cup \{z \in E : I(z) \geq \beta + \varepsilon_1\}, \\ B &= \{z \in E : \alpha - \widehat{\varepsilon} \leq I(z) \leq \beta + \widehat{\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Por construção segue que $A \cap B = \emptyset$. Analogamente ao lema anterior podemos construir $f, g : E \to [0, 1]$ com $g = 0$ em A, $g = 1$ em B, g par e localmente Lipschitziana e f de modo que $f = 0$ em $\overline{B_E(R)}$, $f = 1$ em $E\backslash\overline{B_R(0)}$, f par e localmente Lipschitziana.

Definimos agora $W : E \to E$ por

$$W(z) = \begin{cases} -g(z)f(z)h(\|V(z)\|)V(z) & , z \in E\backslash K, \\ 0, & z \in K, \end{cases}$$

onde K é o conjunto dos pontos críticos de I e $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h(x) = \begin{cases} 1 \ , x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x}, \ x > 1, \end{cases}$$

como no lema anterior, temos que W é localmente Lipschitziana em E, $0 \leq \|W(\cdot)\| \leq 1$ e W é ímpar quando I é par.

Para cada $z \in E$ dado, considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{\eta}(t,z) = W(\widetilde{\eta}(t,z)), \\ \widetilde{\eta}(0,z) = z, \end{cases} \tag{1.11}$$

seja

$$T > \frac{\beta - \alpha + \widehat{\varepsilon}}{c^2}. \tag{1.12}$$

Com argumentos análogos aos usados no lema anterior temos a garantia que para cada $z \in E$, existe $\widetilde{\eta} \in C([0,T] \times E, E)$ que é a única solução de (1.11).

Definindo

$$\eta(t,z) = \widetilde{\eta}(tT, z)$$

segue que $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ e $\eta(t,\cdot)$ é um homeomorfismo de E em E. Para cada $t \in [0,1]$, definimos agora $\tau : E \to E$ por

$$\tau(z) = \eta(1,z).$$

Pelo lema anterior, sendo I par, então η é ímpar. Consequentemente τ é ímpar, o que acaba mostrando (τ_4).

Sendo $\widetilde{\eta}(t,z)$ solução de (1.11), $\widetilde{\eta}(0,z) = z$ e $\|W(\cdot)\| \leq 1$ segue que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\eta}(t,z) - z\| &= \|\widetilde{\eta}(t,z) - \widetilde{\eta}(0,z)\| \\ &= \|\int_0^t \frac{d}{ds}\widetilde{\eta}(s,z)ds\| \\ &= \|\int_0^t W(\widetilde{\eta}(s,z))ds\| \\ &\leq \int_0^t \|W(\eta(s,z))\|ds \\ &\leq \int_0^t ds \\ &= t. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\widetilde{\eta}(t,z) - z\| \leq t, \forall\ z \in E \text{ e } t \in [0,T] \tag{1.13}$$

tomando $t = T$ temos

$$\|\widetilde{\eta}(T,z) - z\| \leq T, \forall\ z \in E$$

mas

$$\widetilde{\eta}(T,z) = \eta(1,z) = \tau(z).$$

Portanto

$$\|\tau(z) - z\| \leq c_1, \forall z \in E$$

onde $c_1 = T$, o que acaba mostrando (τ_3).

Mostremos (τ_2)

Note que se $W(z) = 0$ então $\widetilde{\eta}(t,z)$ é solução de (1.11) e ainda $\widetilde{\eta}(t,z)$ é constante em K, onde $t \in [0,T]$ logo

$$\widetilde{\eta}(t,z) = \widetilde{\eta}(T,z) = \eta(1,z) = z$$

sendo assim

$$I(\tau(z)) = I(z), z \in K.$$

se $W(z) \neq 0$, segue $z \in E \backslash K$ para $t \in [0,T]$, então $\widetilde{\eta}(t,z) \in E \backslash K$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} I(\widetilde{\eta}(t,z)) &= \langle I'(\widetilde{\eta}(t,z)), \frac{d}{dt}\widetilde{\eta}(t,z)\rangle \\
&= \langle I'(\widetilde{\eta}(t,z)), W(\widetilde{\eta}(t,z))\rangle \\
&= -g(\widetilde{\eta}(t,z)) f(\widetilde{\eta}(t,z)) h(\|V(\widetilde{\eta}(t,z))\|) \langle I'(\widetilde{\eta}(t,z)), V(\widetilde{\eta}(t,z))\rangle \\
&\leq -g(\widetilde{\eta}(t,z)) f(\widetilde{\eta}(t,z)) h(\|V(\widetilde{\eta}(t,z))\|) \|I'(\widetilde{\eta}(t,z))\|^2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Logo, para z fixo a $t \to I(\eta(t,z))$ é não-crescente em $[0,T]$.

Daí,

$$\begin{aligned}
I(\widetilde{\eta}(t,z)) &\leq I(\widetilde{\eta}(0,z)) \\
&= I(z), z \in E \backslash K \text{ e } \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

fazendo $t = T$ vem que

$$
\begin{aligned}
I(\tau(z)) &= I(\eta(1,z)) \\
&= I(\widetilde{\eta}(t,z)) \\
&\leq I(z), \forall z \in E \backslash K
\end{aligned}
$$

de onde concluímos (τ_2).

Mostremos agora (τ_1), note que

$$I^{\beta} \backslash \overline{B_{R_0}(0)} \subset I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \{I^{\beta} \backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}\}$$

afirmamos que (τ_1) é satisfeita para $R_0 > 2R + T$. Tomemos $z \in I^{\beta} \backslash \overline{B_{R_0}(0)}$ logo

$$z \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \{I^{\beta} \backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}\}.$$

Se $z \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}$, então $I(z) \leq \alpha - \widehat{\varepsilon}$, temos que

$$I(\tau(z)) \leq I(z), \forall\ z \in E,$$

em particular vale para $z \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}$ então

$$I(\tau(z)) \leq I(z) \leq \alpha - \widehat{\varepsilon}.$$

ou seja,

$$\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}$$

Se $z \in I^{\beta} \backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$.

Note que

$$
\begin{aligned}
\|z\| &= \|z - \widetilde{\eta}(t,z) + \widetilde{\eta}(t,z)\| \\
&\leq \|z - \widetilde{\eta}(t,z)\| + \|\widetilde{\eta}(t,z)\|
\end{aligned}
$$

o que fornece

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\eta}(t,z)\| &\geq \|z\| - \|z - \widetilde{\eta}(t,z)\| \\
&\overbrace{\geq}^{\text{por } (1.13)} \|z\| - t \\
&\overbrace{\geq}^{\text{pois } t\in[0,T]} \|z\| - T.
\end{aligned}
$$

Como $\|z\| > R_0$. De fato, caso $\|z\| \leq R_0$, vem que

$$z \in \overline{B_{R_0}(0)} \subset I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$$

absurdo, pois $z \in I^{\beta} \backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$.

Então

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\eta}(t,z)\| &> \|z\| - T \\ &> R_0 - T \\ &> 2R \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widetilde{\eta}(t,z) \in E \backslash \overline{B_{2R}(0)}, \forall t \in [0,T], \tag{1.14}$$

pela definição da f temos que

$$f(\widetilde{\eta}(t,z)) = 1, \forall t \in [0,T].$$

Afirmamos que

$$\tau(z) = \eta(1,z) = \widetilde{\eta}(T,z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}. \tag{1.15}$$

Vamos supor, por contradição que não ocorre (1.15), ou seja,

$$I(\widetilde{\eta}(T,z)) > \alpha - \widehat{\varepsilon},$$

sendo $I(\widetilde{\eta}(\cdot,z))$ não-crescente $t \in [0,T]$ então

$$\begin{aligned} I(\widetilde{\eta}(t,z)) &\geq I(\widetilde{\eta}(T,z)) \\ &> \alpha - \widehat{\varepsilon}, \ \forall t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Como estamos tomando $z \in I^{\beta} \backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$ segue que

$$I(z) \leq \beta < \beta + \widehat{\varepsilon}$$

por outro lado, como $z \in I^{\beta}$ segue que

$$\begin{aligned}
\beta + \widehat{\varepsilon} &> I(z) \\
&= I(\eta(0,z)) \\
&= I(\widetilde{\eta}(0,z)) \\
&\geq I(\widetilde{\eta}(t,z)) \\
&> \alpha - \widehat{\varepsilon}, \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

logo $\widetilde{\eta}(t,z) \in B$ então

$$g(\widetilde{\eta}(t,z)) = 1, \ \forall t \in [0,T].$$

Note que sendo $\varepsilon_1 > \widehat{\varepsilon}$, implica que $I(\widetilde{\eta}(t,z)) > \alpha - \widehat{\varepsilon} > \alpha - \varepsilon_1$, ou seja,

$$\widetilde{\eta}(t,z) \notin I^{\alpha - \varepsilon_1}, \ \forall t \in [0,T].$$

Por (1.14) tem-se $\widetilde{\eta}(t,z) \notin \overline{B_{2R}(0)}$, $t \in [0,T]$ segue de imediato que $\widetilde{\eta}(t,z) \notin \overline{B_R(0)}$, $t \in [0,T]$. Então $\widetilde{\eta}(t,z) \notin I^{\alpha-\varepsilon_1} \cup \overline{B_R(0)}$, como tomamos $z \in I^{\beta} \backslash I^{\alpha - \widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$ vem que $I(z) \leq \beta$, e mais

$$\begin{aligned}
I(\widetilde{\eta}(t,z)) &\leq I(\widetilde{\eta}(0,z)) \\
&= I(z) \\
&\leq \beta \\
&< \beta + \varepsilon_1, \ \forall t \in [0,T]
\end{aligned}$$

isto é,

$$\widetilde{\eta}(t,z) \in I^{\beta + \varepsilon_1}, \ \forall t \in [0,T]$$

logo

$$\widetilde{\eta}(t,z) \in I^{\beta + \varepsilon_1} \backslash I^{\alpha - \varepsilon_1} \cup \overline{B_R(0)}, \ \forall t \in [0,T].$$

Por (1.10)

$$\|I'(\widetilde{\eta}(t,z))\| \geq c > 0$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\widetilde{\eta}(t,z)) &\leq -g(\widetilde{\eta}(t,z))f(\widetilde{\eta}(t,z))h(\|V(\widetilde{\eta}(t,z))\|)\|I'(\widetilde{\eta}(t,z))\|^2 \\
&\leq -c^2.
\end{aligned}$$

Veja

$$\begin{aligned}
I(\widetilde{\eta}(T,z)) - I(\widetilde{\eta}(0,z)) &= \int_0^T \frac{d}{ds}I(\widetilde{\eta}(s,z))ds \\
&\leq \int_0^T -c^2 ds \\
&= -c^2T,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
I(\tau(z)) &= I(\eta(1,z)) \\
&= I(\widetilde{\eta}(T,z)) \\
&\leq I(\widetilde{\eta}(0,z)) - c^2T \\
&= I(z) - c^2T \\
&\leq \beta - c^2T \\
&\overbrace{<}^{\text{por}(1.12)} \alpha - \widehat{\varepsilon}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}$$

o que é um absurdo, pois supomos $I(\tau(z)) > \alpha - \widehat{\varepsilon}$, logo vale (1.15). Portanto

$$\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}},\ \forall z \in I^{\beta}\backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}$$

de onde

$$\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}},\ \forall z \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \{I^{\beta}\backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}\},$$

sendo $I^{\beta}\backslash\overline{B_{R_0}(0)} \subset I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \{I^{\beta}\backslash I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}} \cup \overline{B_{R_0}(0)}\}$ vem que

$$\tau(z) \in I^{\alpha-\widehat{\varepsilon}}, \ \forall z \ \in \ I^{\beta}\backslash\overline{B_{R_0}(0)}$$

sendo assim mostrando (τ_1). ■

Com a ajuda dos lemas anteriores já provados, vamos provar o **Teorema 1.1**.

Vamos primeiro mostrar $0 \notin \widetilde{K_0}$. De fato, caso contrário teríamos $\|0\| = \widehat{r} > 0$ o que é um absurdo.

Mostremos que $\widetilde{K_0}$ é simétrico. Desde que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ é um funcional par, vem que

$$I(-u) = I(u) \tag{1.16}$$

e

$$\langle I'(-u), v\rangle = \langle I'(u), -v\rangle, \tag{1.17}$$

$\forall u, v \in E$.

Seja $u \in \widetilde{K_0}$, logo

$$u \in K_0 \text{ e } \ \|u\| = \widehat{r}.$$

Como $u \in K_0$ tem-se $I(u) = 0$ e $I'(u) = 0$, por (1.17)

$$\begin{aligned} \langle I'(-u), v\rangle &= \langle I'(u), -v\rangle \\ &= \langle 0, -v\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\forall v \in E$, sendo assim

$$I'(-u) = 0.$$

De (1.16) temos que $I(-u) = 0$, então $-u \in K_0$ e ainda

$$\| - u\| = \|u\| = \widehat{r}$$

conclui-se que

$$-u \in \widetilde{K_0}, \forall\ u \in \widetilde{K_0},$$

ou seja,

$$\widetilde{K_0} \subset -\widetilde{K_0}.$$

Analogamente se mostra a outra inclusão, sendo assim temos que $\widetilde{K_0}$ é simétrico em relação a origem.

Agora mostremos que $\widetilde{K_0}$ é compacto.

Seja $(u_n) \subset \widetilde{K_0}$ logo

$$(u_n) \subset K_0 \text{ e } \|u_n\| = \widehat{r}$$

sendo $(u_n) \subset K_0$ vem que

$$I(u_n) = 0 \quad \text{e} \quad I'(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.18}$$

(u_n) é limitada em E, pois $\|u_n\| = \widehat{r}, \forall n \in \mathbb{N}$ e pela hipótese de I, isto é, de verificar $(PSB)_0$ temos que existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ que converge em E, isto é,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad E.$$

Como $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ temos que

$$I(u_{n_k}) \to I(u)$$

e

$$I'(u_{n_k}) \to I(u) \text{ em } E^*.$$

Por (1.18) tem-se

$$I(u_{n_k}) = 0 \quad \text{e} \quad I'(u_{n_k}) = 0 \tag{1.19}$$

e da unicidade do limite temos que

$$I(u) = 0 \quad \text{e} \quad I'(u) = 0 \tag{1.20}$$

e da continuidade da função norma vem que $\|u\| = \widehat{r}$, isto nos da

$$u \in K_0 \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) = \widetilde{K_0}$$

então $\widetilde{K_0}$ é compacto (fechado). Sendo assim $\widetilde{K_0} \in \mathcal{E}$, onde

$$\mathcal{E} = \{A \subset E \backslash \{0\}, A \text{ é fechado em } E \text{ e simétrico em relação a origem}\},$$

Veja no Apêndice C, que existe $\delta > 0$ tais que

$$N_{2\delta}(\widetilde{K_0}) \in \varepsilon \quad \text{e} \quad \gamma(N_{2\delta}(\widetilde{K_0})) = \gamma(\widetilde{K_0}).$$

Para este δ acima, aplicamos o **Lema 1.2**, ou seja, existem $\nu > 0$, $r > 0$ e um homeomorfismo ímpar $\eta : E \to E$ onde

$\eta_1)$ $\eta(z) = z$, para cada $z \in E \backslash \overline{B_{\widehat{r}+r}(0)}$;

$\eta_2)$ $I(\eta(z)) \geq \nu > 0$, para cada $z \in \partial B_{\widehat{r}}(0) \cap X \backslash N_\delta(\widetilde{K_0})$;

Pela condição (I_2) escolhemos β tal que $\sup\limits_{z \in M} I(z) < \beta < b$, podemos ainda supor sem perda de generalidade que $0 < \nu < \beta$. Seja $\alpha \in (0, \nu]$ e usando (I_3) estamos nas condições do **Lema 1.3**, portanto existem $c_1, R_0, \widehat{\varepsilon} > 0$ e um homeomorfismo ímpar $\tau : E \to E$ tal que

$\tau_1)$ $\tau(z) \in I^{\alpha - \widehat{\varepsilon}}$, $\forall z \in I^\beta \backslash \overline{B_{R_0}(0)}$;

$\tau_2)$ $I(\tau(z)) \leq I(z) > 0$, $\forall z \in E$;

$\tau_3)$ $\|\tau(z) - z\| \leq c_1$, $\forall z \in E$.

tomando $R_1 > \max\{R_0, \widehat{r} + c_1 + r\}$, por (I_2) existe $R > 0$ tal que

$$\|\phi(y)\| > R_1, \forall y \in \partial B_{R^m}(R) \tag{1.21}$$

Definimos $D = \phi(\overline{B_R})$,onde $B_{R^m}(R) = B_R$, $G = \{h \in C(D, E) : \ h \text{ é ímpar e } \ h = \tau \text{ em } \ \partial D\}$ e, com $j = 1, ..., m$ tem-se $\Gamma_j = \{h(\overline{D \backslash Y}) : h \in G, Y \in \mathcal{E}, \gamma(Y) \leq m - j\}$, onde $\mathcal{E}$ esta definido em (6.1) e os conjuntos Γ_j apresentam as seguintes propriedades (Veja [14]) :

(Γ_1) $\Gamma_j \neq \emptyset$, $\forall j = 1, ..., m$;

(Γ_2) $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$, $\forall j = 1, ..., m-1$;

(Γ_3) Se $\varphi \in C(E, E)$ é ímpar e $\varphi = Id$ em $I^{\alpha - \widehat{\varepsilon}}$ ou em $E \backslash \overline{B_{\rho+r}(0)}$, então $\varphi(B) \in \Gamma_j$, $\forall B \in \Gamma_j$;

(Γ_4) Se $B \in \Gamma_j$, $Z \in \varepsilon$ e $\gamma(Z) \leq s < j$, então $\overline{B \backslash Z} \in \Gamma_{j-s}$.

Vamos definir uma sequência de valores minimax para o funcional I, onde

$$c_j = \inf_{B \in \Gamma_j} \max_{z \in B} I(z),$$

com $j = 1, ..., m$.

Para todo $B \in \Gamma_1$, B pode ser escrito como imagem de uma função ímpar, logo $0 \in B$, portanto

$$\max I(z) \geq I(z), \forall z \in B$$

em particular temos

$$\max I(z) \geq I(0) = 0$$

sendo assim

$$c_1 = \inf_{B \in \Gamma_1} \max_{z \in B} I(z) \geq 0.$$

Por (Γ_2) segue que $c_{j+1} \geq c_j$, onde $j = 1, ..., m-1$. Por outro lado, como $\tau(D) \in \Gamma_m$ e agora usando (τ_2) e (I_2) temos que

$$0 \leq c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_m < b.$$

Para concluírmos a demonstração do Teorema 1.1 precisaremos dos lemas a seguir.

Lema 1.4 Se $j > k = \dim V$, $B \in \Gamma_{j+q}$ e $\gamma(\widetilde{K_0}) \leq q$, $q \geq 0$, então

$$B \cap \eta(L),$$

onde $L = X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \backslash N_\delta(\widetilde{K_0})$.

Demonstração:

Vamos por um momento afirmar que dado $j > k$ para cada $B \in \Gamma_j$ tem-se que

$$B \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \neq \emptyset. \tag{1.22}$$

Considere $j > k$, $\gamma(\widetilde{K_0}) \leq q$ e $B \in \Gamma_{j+q}$, usando η obtida no **Lema 1.2** tem-se que $\eta^{-1} : E \to E$ é uma função contínua ímpar, e por (η_1) segue que

$$\eta^{-1} = Id, \quad \text{em} \quad E \backslash \overline{B_{\widehat{r}+r}(0)}.$$

Sendo assim podemos usar (Γ_3), para concluir que, $\eta^{-1} \in \Gamma_{j+q}$.

Usando o fato de $\widetilde{K_0} \in \mathcal{E}$ ser compacto segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$N_{2\delta}(\widetilde{K_0}) \in \varepsilon \text{ e } \gamma(N_{2\delta}(\widetilde{K_0})) = \gamma(\widetilde{K_0})) \leq q,$$

note que agora estamos nas condições de (Γ_4), isto é,

$$\overline{\eta^{-1}(B) \backslash N_{2\delta}(\widetilde{K_0})} \in \Gamma_{(j+q)-q} = \Gamma_j.$$

De (1.22) temos que

$$\overline{\eta^{-1}(B) \backslash N_{2\delta}(\widetilde{K_0})} \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \neq \emptyset.$$

Usando o fato de

$$\overline{\eta^{-1}(B) \backslash N_{2\delta}(\widetilde{K_0})} \subset \eta^{-1}(B) \backslash N_{\delta}(\widetilde{K_0}),$$

então

$$\begin{aligned} \overline{\eta^{-1}(B) \backslash N_{2\delta}(\widetilde{K_0})} \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) &\subset \eta^{-1}(B) \backslash N_{\delta}(\widetilde{K_0}) \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \\ &= B \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \backslash N_{\delta}(\widetilde{K_0}) \\ &= B \cap L \\ &= B \cap \eta(L) \end{aligned}$$

ou seja,

$$B \cap \eta(L) \neq \emptyset$$

como queríamos. Agora provemos que de fato vale (1.22). Dado $B = h(\overline{D \backslash Y}) \in \Gamma_j$ onde $j > k$, considere os seguintes conjuntos

$$\vartheta = \{z \in D : h(z) \in B_E(\widehat{r})\} \;\text{ e }\; S_h = \{z \in D : h(z) \in \partial B_E(\widehat{r})\}.$$

Seja $z \in \partial D$, como $D = \phi(\overline{B_R})$ e da continuidade de ϕ tem-se que

$$\partial D = \partial \phi(\overline{B_R}) = \phi(\partial \overline{B_R}).$$

Logo, $z \in \phi(y)$ onde $y \in \partial \overline{B_R} = \partial B_R$, segue de (1.21)

$$\|z\| = \|\phi(y)\| > R_1, \quad y \in \partial B_R$$

de (τ_3) temos que $\|\tau(z) - z\| \leq c_1$, desde que $R_1 > \widehat{r} + c_1 + r$ e $h = \tau$ em ∂D.

Daí,

$$\begin{array}{rcl}
\|h(z)\| & = & \|\tau(z)\| \\
& = & \|z - z + \tau(z)\| \\
& = & \|z - (z - \tau(z))\| \\
& \geq & \|z\| - \|z - \tau(z)\| \\
& > & R_1 - c_1 \\
& > & \widehat{r} + r \\
& > & \widehat{r},
\end{array}$$

então $\partial D \cap \vartheta = \emptyset$ e ainda $\vartheta = \phi(A)$, onde $A = (h \circ \phi_{|B_R})^{-1}(B_{\widehat{r}}(0)) \subset \mathbb{R}^m$ é um conjunto aberto, limitado e simétrico com respeito a origem. Como consequência do Teorema de Borsuk-Ulam tem-se que $\gamma(\partial A) = m$, e usando o fato de ϕ ser um homeomorfismo segue que

$$\gamma(\partial \vartheta) = \gamma(\partial \phi(A)) = \gamma(\phi(\partial A)) = m$$

e ainda

$$\begin{array}{rcl}
h(\partial \vartheta) & = & h(\partial \phi(A)) \\
& = & h \circ \phi(\partial A) \\
& = & h \circ \phi(\partial((h \circ \phi_{|B_R})^{-1}(B_{\widehat{r}}(0)))) \\
& = & h \circ \phi((h \circ \phi_{|B_R})^{-1}(\partial B_{\widehat{r}}(0))) \subset \partial B_{\widehat{r}}(0)
\end{array}$$

isto nos dá

$$\partial \vartheta \subset S_h.$$

Decorre das popriedades de gênero que

$$\begin{aligned}
\gamma(h(\overline{S_h \backslash Y})) &\geq \gamma(\overline{S_h \backslash Y}) \\
&\geq \gamma(S_h \backslash Y) \\
&= \gamma(S_h) - \gamma(Y) \\
&\geq \gamma(\partial\vartheta) - \gamma(Y) \\
&= m - (m-j) \\
&= j \\
&> k.
\end{aligned}$$

Como codim $X = k$, segue que

$$h(\overline{S_h \backslash Y}) \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \neq \emptyset$$

e sendo $h(\overline{S_h \backslash Y}) \subset B$ temos que

$$B \cap X \cap \partial B_{\widehat{r}}(0) \neq \emptyset$$

como queríamos. ∎

Lema 1.5 Se $n > k$ e $c_n \leq ... \leq c_{n+q} < \nu$, $q \geq 0$ então $\gamma(\widetilde{K_0}) \geq q + 1$.

Demonstração:

Note que

$$\gamma(\widetilde{K_0}) \geq q + 1 > q.$$

Vamos supor, por contradição, que não vale a desigualdade acima, ou seja,

$$\gamma(\widetilde{K_0}) \leq q.$$

Pelo lema anterior, dado $B \in \Gamma_{n+q}$, tem-se

$$B \cap \eta(L) \neq \emptyset,$$

isto é, existe $z_0 \in B \cap \eta(L)$, usando o fato de $z_0 \in \eta(L)$ logo por (η_2) segue que

$$I(z_0) \geq \nu > 0$$

daí

$$\max_{z \in B} I(z) \geq I(z_0) \geq \nu$$

onde $B \in \Gamma_{n+q}$ então

$$\begin{aligned} c_{n+q} &= \inf_{B \in \Gamma_{n+q}} \max_{z \in B} I(z) \\ &\geq \nu \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois pela hipótese tem-se $c_{n+q} < \nu$, então $\gamma(\widetilde{K_0}) \geq q+1$. ■

Lema 1.6 Se $j > k$ e $c_j = ... = c_{j+p} \equiv c \geq \alpha$, onde $p \geq 0$ então $\gamma(K_c) \geq p+1$.

Demonstração:

Desde que $c \geq \alpha > 0$ e $I(0) = 0$, temos que $0 \notin K_c$. De fato, se $0 \in K_c$ vem que

$$0 = I(0) = c$$

o que é um absurdo, pois $c > 0$. Como já provamos anteriormente K_c é um conjunto fechado e simétrico , segue que $K_c \in \mathcal{E}$, da condição (I_3) temos que K_c é compacto. Note que,

$$\gamma(K_c) \geq p+1 > p.$$

Vamos supor, por contradição, que não vale a desigualdade acima, ou seja, $\gamma(K_c) \leq p$, vem das propriedades básicas de gênero que existe $\overline{\delta} > 0$ tal que

$$N_{\overline{\delta}}(K_c) \in \varepsilon \text{ e } \gamma(N_{\overline{\delta}}(K_c)) = \gamma(K_c) \leq p.$$

Dividimos em dois casos,

Caso 1. Se $p = 0$, segue que $K_c = N_{\overline{\delta}}(K_c) = \emptyset$ o que é um absurdo, pois sendo $K_c \neq \emptyset$.

Caso 2. Se $p > 0$, fazendo $\vartheta = N_{\overline{\delta}}(K_c)$ e $\overline{\varepsilon} = \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}$, obtemos $\varepsilon \in (0, \frac{\widehat{\varepsilon}}{2})$ e $\overline{\eta} \in C(E, E)$ ímpar e satisfazendo

$(\overline{\eta_1})$ $\overline{\eta}(z) = z$, se $I(z) \notin [c - \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}, c + \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}]$;

$(\overline{\eta_2})$ $\overline{\eta}(I^{c+\varepsilon} \backslash \vartheta) \subset I^{c-\varepsilon}$.

Escolhendo $B \in \Gamma_{j+p}$ de modo que

$$\max_{z \in B} I(z) \leq c + \varepsilon. \tag{1.23}$$

Desde que $B \in \Gamma_{j+p}$, $N_{\overline{\delta}}(K_c) \in \varepsilon$ e $\gamma(N_{\overline{\delta}}(K_c)) \leq p$ então, por (Γ_4) segue que

$$\overline{B \backslash \vartheta} = \overline{B \backslash N_{\overline{\delta}}(K_c)} \in \Gamma_j.$$

Note que

$$\begin{aligned} I(z) &\leq \alpha - \widehat{\varepsilon} \\ &\leq c - \widehat{\varepsilon} \\ &< c - \frac{\widehat{\varepsilon}}{2} \end{aligned}$$

ou seja

$$z \notin I^{c - \frac{\widehat{\varepsilon}}{2}}$$

De $(\overline{\eta_1})$ temos que $\overline{\eta}(z) = z = Id(z)$ em $I^{c-\frac{\widehat{\varepsilon}}{2}}$ e consequentemente

$$\overline{\eta} = Id, \text{ em } \quad I^{\alpha - \widehat{\varepsilon}},$$

sendo assim estamos nas condições de (Γ_3), ou seja,

$$\overline{\eta}(\overline{B \backslash \vartheta}) \in \Gamma_j.$$

De (1.23) temos que

$$\begin{aligned} c + \varepsilon &\geq I(z), \forall z \in B \\ &\Rightarrow B \subset I^{c+\varepsilon} \\ &\Rightarrow B \backslash \vartheta \subset I^{c+\varepsilon} \backslash \vartheta. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\overline{B\backslash\vartheta} \subset I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta. \tag{1.24}$$

Vamos supor, por contradição que não vale (1.24), ou seja, existe $b \in \overline{B\backslash\vartheta}$ tal que $b \notin I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta$, então existe uma sequência $(b_n) \subset B\backslash\vartheta$ tal que

$$b_n \to b,$$

note que $(b_n) \subset B\backslash\vartheta \subset I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta$, ou seja

$$I(b_n) \leq c + \varepsilon$$

e

$$\|b_n - K_c\| > \overline{\delta}, \quad \text{pois} \quad b_n \notin \vartheta = N_{\overline{\delta}}(K_c)$$

fazendo $n \to \infty$ e usando o fato de I ser contínuo, vem que

$$I(b) \leq c + \varepsilon \quad \text{e} \quad \|b - K_c\| > \overline{\delta}$$

ou seja

$$b \in I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta$$

o que é um absurdo, pois estamos tomando $b \notin I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta$. Então vale (1.24)

$$\overline{B\backslash\vartheta} \subset I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta,$$

usando o fato de $\overline{\eta}$ ser contínua tem-se que

$$\overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta}) \subset \overline{\eta}(I^{c+\varepsilon}\backslash\vartheta),$$

e por $(\overline{\eta_2})$

$$\overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta}) \subset I^{c-\varepsilon},$$

daí, $\forall z \in \overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta})$ temos que

$$\begin{aligned} c-\varepsilon &\geq \max_{z\in\overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta})} I(z) \\ &\geq \inf_{\overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta})\in\Gamma_j} \max_{z\in\overline{\eta}(\overline{B\backslash\vartheta})} I(z) \\ &= c \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto temos que

$$\gamma(K_c) \geq p+1.$$

Vamos agora, concluir a demonstração do teorema. Vamos avaliar dois casos.

Caso 1. Consideremos ν de modo que $\nu \leq c_{k+1} \leq ... \leq c_m$, onde $\nu \geq \alpha$ vem que estamos nas condições do corolário anterior, ou seja, existem infinitos pares de pontos críticos.

Caso 2. Consideremos ν de modo que $c_{k+1} \leq ... \leq c_{k+1+q} < c_{k+2+q} \leq ... \leq c_m$, onde $c_{k+1+q} < \nu \leq c_{k+2+q}$, note que pelo **Lema 1.5** fazendo $n = k+1$ segue que $\gamma(\widetilde{K_0}) \geq q+1$. Se $q \geq 1$ segue que há um número infinito, porém enumerável de pares de pontos críticos não nulos, considerando o nível zero. Se $q = 0$ segue que $\gamma(\widetilde{K_0}) \geq 1$, ou seja, da Teoria de Gênero temos pelo menos um par de pontos críticos não nulo no nível zero, e ainda pelo **Lema 1.6** vem que $\gamma(K_{c_j}) \geq 1$ onde $j = k+2, ..., m$. Portanto temos que o funcional I possui pelo menos $m-k$ pares de pontos críticos não nulos. ∎

Capítulo 2

Lema de concentração de compacidade

O principal resultado deste capítulo é devido a Pierre Louis Lions, cuja prova pode ser encontrado em [12, 13]. A demonstração será feita por etapas. Inicialmente provaremos o lema a seguir.

Lema 2.1 Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\left(\int |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \left(\int |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

para uma constante $C_0 \geq 0$ e $1 \leq p < q < \infty$. Então

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j} \\ \mu &\geq C_0^{-p} \sum_{j \in J} {\nu_j}^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j}, \end{aligned}$$

onde J é finito ou enumerável, $(\nu_j)_{j \in J} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $(x_j) \subset \mathbb{R}^N$. Além disso, se $\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{q}} \geq C_0 \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p}}$, então

$$\nu = \gamma \delta_{x_0} \text{ e } \mu = C_0^{-P} \gamma^{\frac{p}{q}} \delta_{x_0}$$

com $\gamma \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração:

Por densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ no espaço das funções mensuráveis e limitadas, segue que para φ mensurável e limitada existe $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ em } C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$\left(\int |\varphi_n|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \left(\int |\varphi_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

passando o limite, vem que

$$\left(\int |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \left(\int |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

$\forall \varphi$ limitada e mensurável e limitada.

Pelo Teorema de Decomposição de Lebesgue (ver [10]) temos que

$$\mu = g\nu + \sigma, \text{ onde } g \in L^1(\nu),\ g \geq 0$$

onde $\nu \perp \sigma$, isto é, existem conjuntos disjuntos A e B tais que $A \cup B = \mathbb{R}^N$ e $\sigma(A) = \nu(B) = 0$. Fazendo $\widetilde{\mu} = g\nu$ e $\varphi = \chi_{_A}\psi$, como φ é limitada e mensurável, ψ também o é,

$$\widetilde{\mu}(X) = \int_X d\widetilde{\mu} = \int_X g d\nu$$

e

$$\mu(X) = \int_X d\mu = \int_X g d\nu + d\sigma.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left(\int_A |\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_A |\chi_{_A}\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{A\cup B} |\chi_{_A}\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overbrace{\leq}^{\text{por } (2.1)} C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left(\int_A |\varphi|^p d\mu + \int_B |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left(\int_A |\chi_{_A}\psi|^p d\mu + \int_B |\chi_{_A}\psi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left(\int_A |\chi_{_A}\psi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

então

$$\left(\int_A |\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

E ainda, note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu &= \int_A |\varphi|^p d\mu + \int_B |\varphi|^p d\mu \\
&= \int_A |\chi_A \psi|^p d\mu + \int_B |\chi_A \psi|^p d\mu \\
&= \int_A |\psi|^p d\mu \\
&= \int_A |\psi|^p (g d\nu + d\sigma) \\
&= \int_A |\psi|^p g d\nu + \int_A |\psi|^p d\sigma \\
&\overbrace{=}^{\sigma(A)=0} \int_A |\psi|^p g d\nu \\
&= \int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu = \int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu}. \tag{2.3}$$

Veja que,

$$\begin{aligned}
C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} &= C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu} + \int_B |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu} + \int_B |\psi|^p g d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overbrace{=}^{\nu(B)=0} C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

então

$$C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} = C_0 \left(\int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^q d\nu = \int_A |\psi|^q d\nu + \int_B |\psi|^q d\nu = \int_A |\psi|^q d\nu. \tag{2.5}$$

Portanto, usando o resultado obtido em (2.4)

$$\begin{aligned}
C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} &= C_0\left(\int_A |\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overbrace{=}^{por(2.3)} C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overbrace{\geq}^{por(2.1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_A |\chi_A\psi|^q d\nu + \int_B |\chi_A\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overbrace{=}^{\nu(B)=0} \left(\int_A |\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overbrace{=}^{por(2.5)} \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

Portanto

$$C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.6}$$

Dado E um conjunto de Borel do $\mathbb{R}^N$, fazendo $\chi_E = \psi$, logo $|\psi|^p = |\psi|^q = \chi_E$, por (2.6) temos que

$$C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}\chi_E d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\chi_E d\nu\right)^{\frac{1}{q}}$$

o que fornece

$$C_0\widetilde{\mu}(E)^{\frac{1}{p}} \geq \nu(E)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.7}$$

Por (2.7) temos que ν é absolutamente contínua em relação a $\widetilde{\mu}$ (Ver Apêndice A).

Tomemos $\nu_k = g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}\nu$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\nu_k(X) = \int_X g(x)^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}(x)d\nu. \tag{2.8}$$

Logo, para toda função mensurável e limitada, fazendo $g^{\frac{1}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}\varphi = \psi$ em (2.6) segue que

$$C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N}|g^{\frac{1}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}\varphi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|g^{\frac{1}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.9}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{p}{q-p}+1}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} &= C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{p}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^p g d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overbrace{=}^{d\widetilde{\mu}=gd\nu} C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} |g^{\frac{1}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}\varphi|^p d\widetilde{\mu}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overbrace{\geq}^{por(2.9)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]} d\nu\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overbrace{=}^{por(2.8)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

então

$$C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{p}{q-p}+1}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.10}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{p}{q-p}+1}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]}|\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p g^{\frac{q}{q-p}}\chi_{[g\leq k]} d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overbrace{=}^{por(2.8)} C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

logo

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.11}$$

Mostremos que (2.11) implica que ν_k pode ser escrita como a soma finita de massas de Dirac, isto é, existem $x_1, ..., x_r$ e $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tais que

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_{x_i}.$$

De fato, fazendo $\varphi = \chi_E$ onde E é um conjunto qualquer de Borel, logo

$$\left(\int_E \chi_E d\nu_k\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \left(\int_E \chi_E d\nu_k\right)^{\frac{1}{p}}$$

que implica

$$\nu_k(E)^{\frac{1}{q}} \leq C_0 \nu_k(E)^{\frac{1}{p}}.$$

Caso $C_0 = 0$ segue de imediato que $\nu_k(E) = 0$.

Caso $C_0 > 0$ temos que $\nu_k(E) \geq C_0{}^{\frac{-pq}{q-p}} = \delta > 0$.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$, logo

$$\nu_k(\{x_0\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu_k(B_\varepsilon(x_0))$$

então $\nu_k(\{x_0\}) \geq \delta > 0$ ou existe $\varepsilon > 0$ tal que $\nu_k(B_\varepsilon(x_0)) = 0$.

Definimos $A_k = \{x \in \mathbb{R}^N; \nu_k \geq \delta\}$, note que A_k é finito.

De fato, supomos que A_k não é finito, ou seja, $A_k = \{x_1, x_2, ...\} \subset \mathbb{R}^N$ com $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, daí $\nu_k(x_1, x_2, ..) \leq \nu_k(\mathbb{R}^N) < \infty$, isto é,

$$\sum_{\infty}^{j=1} \delta \leq \nu_k(x_1) + \nu_k(x_2) + ... < \infty$$

o que é um absurdo, mostrando que A_k é finito. Se $x \notin A_k$, logo existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que

$$\nu_k(B_{\varepsilon(x)}(x)) = 0.$$

Seja $K \subset {A_k}^C$ compacto, da definição de compacto, K é coberto por um número finito de bolas $B_{\varepsilon(x)}(x)$, $x \notin A_k$ com

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon(x)}(x)$$

note que $\nu_k\left(\bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon(x)}(x)\right) = 0$, caso contrário, existiria pelo menos um $x \in K$ tal que

$$\nu_k(B_{\varepsilon(x)}(x)) > 0,$$

então $x \in A_k$, o que contradiz o fato de $K \subset {A_k}^C$, mostrando que $\nu_k\left(\bigcup_{x \in K} B_{\varepsilon(x)}(x)\right) = 0$, e ainda $\nu_k(K) = 0$, como $K \subset \mathbb{R}^N \backslash S_k$ com K compacto, segue que

$$\nu_k(\mathbb{R}^N \backslash A_k) = \sup\{\nu_k(K); K \subset \mathbb{R}^N \backslash A_k, K compacto\}$$

o que nos da

$$\nu_k(\mathbb{R}^N \backslash A_k) = 0.$$

Fazendo

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

S é um conjunto enumerável, pois A_k é finito.

Seja $x \in S$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{k_0}$, logo

$$\nu_{k_0}(\{x\}) = g(x)^{\frac{q}{q-p}} \chi_{[g \leq k_0]} \nu(\{x\}) > 0$$

$$\Rightarrow \nu(\{x\}) > 0, \forall x \in A.$$

Por sua vez, sendo $\nu_k(\mathbb{R}^N \backslash A_k) = 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash A_k} d\nu_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash A_k} g(x)^{\frac{q}{q-p}} \chi_{[g \leq k]} d\nu \\ &= \int_{[g \leq k] \backslash A_k} g(x)^{\frac{q}{q-p}} d\nu \end{aligned}$$

isto implica que

$$g \equiv 0 \ q.t.p.[\nu] \text{ em } [g \leq k] \backslash A_k.$$

Como $\widetilde{\mu} = g\nu \Rightarrow d\widetilde{\mu} = g d\nu$ vem que

$$0 = \int_{[g \leq k] \backslash A_k} g(x) d\nu = \int_{[g \leq k] \backslash A_k} d\widetilde{\mu}$$

$$\Rightarrow \widetilde{\mu}([g \leq k] \backslash A_k) = 0$$

por (2.7)

$$
\begin{aligned}
\nu([g \leq k] \backslash A_k) &\leq \left[C_0 \widetilde{\mu}([g \leq k] \backslash A_k)^{\frac{1}{p}}\right]^q \\
&= 0
\end{aligned}
$$

então

$$
\nu([g \leq k] \backslash A_k) = 0, k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}
$$

Usando o fato de

$$
\mathbb{R}^N = \bigcup^{\infty} [g \leq k] \cup [g \equiv +\infty].
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}^N \backslash A) &= \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [g \leq k] \backslash A\right) + \nu([g \equiv +\infty] \backslash A) \\
&\leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [g \leq k] \backslash A_k\right) + \nu([g \equiv +\infty] \backslash A)
\end{aligned}
$$

pois $A_k \subset A$

e ainda $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [g \leq k] \backslash A_k\right) = 0$, caso contrário, existiria um $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\nu\left([g \leq \widetilde{k}] \backslash A_{\widetilde{k}}\right) > 0
$$

o que contradiz (2.12), e ainda sendo $g \in L^1(\nu)$ vem que

$$
\nu([g \equiv +\infty]) = 0.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}^N \backslash A) &\leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} [g \leq k] \backslash A_k\right) + \nu([g \equiv +\infty] \backslash A) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nu(E) &= \nu\left(E \cap \{x_1, ..., x_n\} + E \cap (\mathbb{R}^N \backslash \{x_1, ..., x_n\})\right) \\
&= \nu(E \cap \{x_1, ..., x_n\}) + \nu(E \cap (\mathbb{R}^N \backslash \{x_1, ..., x_n\}) \\
&= \nu(E \cap \{x_1, ..., x_n\}) \\
&= \nu\{x_1\} + ... + \nu\{x_n\} \\
&= \sum_{j \in J} \nu(x_j), \quad \nu(x_j) = \nu_j \\
&= \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}(E)
\end{aligned}$$

então

$$\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

como queríamos.

Por outro lado, usando (2.1) e fazendo $\varphi = \chi_{_E}$ segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{_E} d\nu\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{_E} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow \nu(\{x_j\})^{\frac{1}{q}} &\leq C_0 \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

que nos da

$$\mu(\{x_j\}) \geq C_0{}^{-p} \nu_j{}^{\frac{p}{q}}.$$

Portanto

$$\sum_{\substack{j \in J \\ x_j \in E}} \mu(\{x_j\}) \geq C_0{}^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j}(E). \tag{2.13}$$

Como

$$\mu(E) \geq \mu\{x_j / x_j \in E\}$$

então voltando em (2.13) concluímos que

$$\mu \geq C_0{}^{-p} \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{q}} \delta_{x_j}$$

como queríamos.

Desde que $\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{q}} \geq C_0\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p}}$ e por (2.7) temos que

$$\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{q}} = C_0\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.14}$$

Note que usando a desigualdade (2.1) segue

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{p}{q}} &\leq C_0{}^p \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu \\
&= C_0{}^p \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p 1 d\mu \\
&\overbrace{\leq}^{\text{des.de Holder}} C_0{}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p\frac{q}{p}} d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= C_0{}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}} \\
&= C_0{}^p \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

fazendo $|\varphi| = \chi_E$ vem que

$$\nu(E)^{\frac{p}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_E{}^q d\nu\right)^{\frac{p}{q}} \leq C_0{}^p \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_E{}^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} = C_0{}^p \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \mu(E)^{\frac{p}{q}},$$

logo

$$\nu(E) \leq C_0{}^q \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(E).$$

Afirmo que

$$\nu(\mathbb{R}^N) = C_0{}^q \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N). \tag{2.15}$$

Vamos supor, por contradição que não vale (2.15), isto é, existe um conjunto $F \subset \mathbb{R}^N$ de Borel tal que

$$\nu(F) < C_0{}^q \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(F). \tag{2.16}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathbb{R}^N) &= \int_F d\nu + \int_{\mathbb{R}^N\setminus F} d\nu \\
&= \nu(F) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus F} d\nu \\
&\overbrace{<}^{por(2.16)} {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(F) + {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N\setminus F) \\
&= {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \{\mu(F) + \mu(\mathbb{R}^N\setminus F)\} \\
&= {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N) \\
&= {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q-p}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{p}{p}} \\
&= {C_0}^q\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}
$$

o que contradiz (2.14). Portanto vale (2.15) para toda φ mensurável e limitada, usando (2.1) e (2.15) e note que de (2.15) tem-se $d\mu = {C_0}^{-q}\mu(\mathbb{R}^N)^{-\frac{q-p}{p}} d\nu$,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \left({C_0}^{-q}\mu(\mathbb{R}^N)^{-\frac{q-p}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_0 \cdot {C_0}^{\frac{-q}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{-\frac{q-p}{p^2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= {C_0}^{\frac{p-q}{p}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{-\frac{q-p}{p^2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= {C_0}^{q\frac{-(q-p)}{pq}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{-\frac{q-p}{p^2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= {C_0}^{q\frac{-(q-p)}{pq}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q}{q}\cdot\frac{-(q-p)}{p^2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= {C_0}^{q\frac{-(q-p)}{pq}} \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q}{p}\cdot\frac{-(q-p)}{pq}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left({C_0}^q \cdot \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{q}{p}}\right)^{-\frac{q-p}{pq}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overbrace{=}^{por(2.14)} \left(\nu(\mathbb{R}^N)\right)^{-\frac{q-p}{pq}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

o que nos da

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^q d\nu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\nu(\mathbb{R}^N)\right)^{-\frac{q-p}{pq}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.17}
$$

Por (2.7) podemos escrever $\nu = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \delta_{x_j}$ para algum $n \geq 1$, escolhende-se $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, distintos e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tais que $\varphi(x_j) = \alpha_j > 0$.

Por (2.17), segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{-\frac{q-p}{pq}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{\frac{q-p}{pq}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{-\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{-\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \nu_j\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\right)^{-\frac{1}{p}} \\
&\Leftrightarrow \\
\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\frac{\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j} = \sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j}.
$$

Então

$$
\left(\sum_{j=1}^{m} {\alpha_j}^q \cdot \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n} \nu_j}\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Portanto

$$\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n}\nu_j}\right)^{\frac{p}{q}} \leq \sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n}\nu_j}. \tag{2.18}$$

Note que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n}\nu_j} = 1$, fazendo $\dfrac{\nu_j}{\sum_{j=1}^{n}\nu_j} = \beta_j$ voltando em (2.18)

$$\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^q \cdot \beta_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \beta_j\right)^{\frac{q}{p}} \tag{2.19}$$

Usando o fato da função $f(x) = x^{\lambda}$, $\lambda > 1$ ser estritamente convexa, vem que

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \beta_j\right) < \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot f({\alpha_j}^p).$$

Mostremos que $n = 1$. De fato, se $n > 1$ e fazendo $\lambda = \frac{q}{p} > 1$ segue que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \beta_j\right)^{\frac{q}{p}} &= f\left(\sum_{j=1}^{n} {\alpha_j}^p \cdot \beta_j\right) \\
&< \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot f({\alpha_j}^p) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot ({\alpha_j}^p)^{\frac{q}{p}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot {\alpha_j}^q
\end{aligned}$$

que contradiz (2.19) então temos que $n = 1$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\nu &= \sum_{j=1}^{n} \nu_j \delta_{x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{1} \nu_j \delta_{x_j} \\
&= \nu_1 \delta_{x_1} \\
&= \gamma \delta_{x_0},
\end{aligned}$$

onde $\nu_1 = \gamma$ e $\delta_{x_1} = \delta_{x_0}$, como queríamos.

Por outro lado, usando o fato de $\nu = {C_0}^q \cdot \mu^{\frac{q}{p}}$ segue que

$$\begin{aligned}
\mu &= ({C_0}^{-q})^{\frac{p}{q}} \cdot \nu^{\frac{p}{q}} \\
&= {C_0}^{-p} \cdot (\gamma \delta_{x_0})^{\frac{p}{q}} \\
&= {C_0}^{-p} \cdot \gamma^{\frac{p}{q}} \cdot (\delta_{x_0})^{\frac{p}{q}} \\
&= {C_0}^{-p} \cdot \gamma^{\frac{p}{q}} \cdot \delta_{x_0}
\end{aligned}$$

que completa a demonstração do lema. ∎

Teorema 2.1 Seja $(u_n) \subset \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, suponhamos que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

$$|\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \text{ em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N),$$

e

$$|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N),$$

Então,

i) Existem J um conjunto no máximo enumerável, $(\nu_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $(x_j) \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde δ_x é a massa de Dirac concentrada em $x \in \mathbb{R}^N$.

ii) Ocorre também

$$\mu \geq |\nabla u|^p + S\sum_{j\in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j},$$

onde $S = \inf\{\|\nabla u\|_{1,p}^p; u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N); \|u\|_{p^*} = 1\}$ é a melhor constante de Sobolev para a imersão $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

iii) Se $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla(u_n + v)|^p \rightharpoonup \widetilde{\mu} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, então $\widetilde{\mu} - \mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\widetilde{\mu} \geq |\nabla(u + v)|^p + S\sum_{j\in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j},$$

iv) Se $u \equiv 0$ e $\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p^*}} \geq S^{-\frac{1}{p}} \mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p}}$ então

$$\nu = \gamma\delta_{x_0} \text{ e } \mu = S\gamma^{\frac{p}{p^*}}\delta_{x_0}$$

com $\gamma \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1. Se $u \equiv 0$, então $u_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ logo

$$\begin{aligned} S &= \inf\left\{\frac{\|\nabla(\varphi u_n)\|_{1,p}^p}{\|\varphi u_n\|_{p^*}^p}; \|\varphi u_n\|_{p^*} = 1\right\} \\ &\leq \frac{\|\nabla(\varphi u_n)\|_{1,p}^p}{\|\varphi u_n\|_{p^*}^p} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi u_n)|^p dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} S^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi u_n)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\overbrace{=}^{\text{prop. do operador}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \nabla u_n + \nabla\varphi u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Então

$$S^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi \nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.20}$$

Como $u \equiv 0$, então $u_n \rightharpoonup 0$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue pela imersão compacta, a menos de subsequência tem-se que

$$u_n \to 0, \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

ou seja,

$$u_n \to 0, \text{ em } L^p(K)$$

onde $K \subset\subset \mathbb{R}^N$.

Fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to 0, \text{ em } L^p(supp\varphi).$$

Por hipótese temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p\psi dx=\int_{\mathbb{R}^N}\psi d\mu,\quad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}\phi dx=\int_{\mathbb{R}^N}\phi d\nu,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\psi=|\varphi|^p$, $\phi=|\varphi|^{p^*}$ e usando (2.20) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left[S^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi u_n|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\right]\le\lim_{n\to\infty}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]+\lim_{n\to\infty}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi u_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\Rightarrow S^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\phi d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}\le\left(\int_{\mathbb{R}^N}\psi d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+0.$$

Então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^{p^*}d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}\le S^{-\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

sendo assim estamos nas condições do lema anterior. Logo

$$\nu=\sum_{j=1}^{m}\nu_j\delta_{x_j}$$

e

$$\mu\ge S\sum_{j\in J}{\nu_j}^{\frac{p}{p^*}}\delta_{x_j}$$

onde J é finito ou enumerável, $(\nu_j)_{j\in J}\subset\mathbb{R}_+^*$ e $(x_j)_{j\in J}\subset\mathbb{R}^N$.

Como $u\equiv 0$ temos que $|u|^{p^*}=|\nabla u|^p=0$.

Então

$$\nu=|u|^{p^*}+\sum_{j=1}^{m}\nu_j\delta_{x_j}$$

e

$$\mu\ge|\nabla u|^p+S\sum_{j\in J}{\nu_j}^{\frac{p}{p^*}}\delta_{x_j}.$$

E ainda, se $\nu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{q}} \geq S^{-\frac{1}{p}}\mu(\mathbb{R}^N)^{\frac{1}{p}}$, fazendo $S^{-\frac{1}{p}} = C_0$ e pelo lema anterior temos

$$\nu = \gamma\delta_{x_0}$$

e

$$\mu = S\gamma^{\frac{p}{p^*}}\delta_{x_0},$$

$\gamma \geq 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Mostrando (i),(ii) e (iv).

Caso 2. Tomenos $u \neq 0$, façamos $v_n = u_n - u$, logo

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - u \rightharpoonup 0, \text{ em } \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ v_n(x) &= u_n(x) - u(x) \to 0, \text{ q.s. em } \mathbb{R} \\ |\nabla v_n| &\rightharpoonup \mu' \text{ em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \\ |v_n|^{p^*} &\rightharpoonup \nu' \text{ em } \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

Pelo caso 1, temos que

$$\overline{\nu} = \sum_{j=1}^{m} \overline{\nu_j}\delta_{x_j}.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, vem que (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema de Brezis-Lieb e pela imersão $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(|u_n|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} - |u_n - u|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\right) = |u|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u_n|^{p^*}dx-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u_n-u|^{p^*}dx\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u_n|^{p^*}dx-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u_n-u|^{p^*}dx\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|(\varphi)^{\frac{1}{p^*}}u_n|^{p^*}dx-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|(\varphi)^{\frac{1}{p^*}}(u_n-u)|^{p^*}dx\\
&= \lim_{n\to\infty}|(\varphi)^{\frac{1}{p^*}}u_n|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}-\lim_{n\to\infty}|(\varphi)^{\frac{1}{p^*}}(u_n-u)|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\\
&= \lim_{n\to\infty}|\varphi||u_n|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}-\lim_{n\to\infty}|\varphi||u_n-u|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\\
&= |\varphi|\lim_{n\to\infty}\left(|u_n|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}-|u_n-u|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\right)\\
&= |\varphi||u|^{p^*}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u|^{p^*}dx.
\end{aligned}$$

Pela hipótese temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}\psi dx=\int_{\mathbb{R}^N}\psi d\nu,\quad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p^*}\phi dx=\int_{\mathbb{R}^N}\phi d\nu',\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\psi=\phi=|\varphi|$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}\psi dx-\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p^*}\phi dx\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}\psi dx-\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|v_n|^{p^*}\phi dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\psi d\nu-\int_{\mathbb{R}^N}\phi d\overline{\nu}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\nu-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\overline{\nu}.
\end{aligned}$$

Pela unicidade do limite, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u|^{p^*}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\nu-\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\overline{\nu}.$$

Daí

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\nu=\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|d\nu'+\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi||u|^{p^*}dx.$$

Usando o fato de $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e $|\varphi| = \varphi^+ + \varphi^-$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+ d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+ d\overline{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^+ |u|^{p^*} dx \tag{2.21}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^- d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^- d\overline{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^- |u|^{p^*} dx \tag{2.22}$$

fazendo (2.21) - (2.22) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\overline{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |u|^{p^*} dx.$$

Note que $F(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\overline{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |u|^{p^*} dx$, com $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que F é um funcional linear positivo, então pelo Teorema da Representação de Riesz (Ver Apêndice A)existe uma única medida de Radon $\widehat{\nu}$ em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \widehat{\nu}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\widehat{\nu} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\overline{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |u|^{p^*} dx$$

que implica

$$\begin{aligned} \widehat{\nu} &= \overline{\nu} + |u|^{p^*} \\ &= |u|^{p^*} + \sum_{j=1}^{m} \overline{\nu_j} \delta_{x_j} \end{aligned}$$

o que mostra (i).

Por outro lado, sabendo que

$$S^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^{p^*} d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^p |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.23}$$

Tomando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(0) = 1$ e $supp\varphi = B_1(0)$.

Note que sendo $supp\varphi = B_1(0) \Rightarrow B_\varepsilon(x_j) = supp\widehat{\varphi}$, $\widehat{\varphi}(B_\varepsilon(x_j)) = \varphi(B_1(0))$ e ainda

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi}|^p d\mu = \int_{B_\varepsilon(x_j)} |\widehat{\varphi}|^p d\mu$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(x)|^p |u(x)|^p dx = \int_{B_1(0)} |\nabla \varphi(x)|^p |u(x)|^p.$$

Usando (2.23) para $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$, com $\varepsilon > 0$ e $j \in J$, veja que $\nabla\widehat{\varphi}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \nabla\varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$ então

$$\begin{aligned}
\nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{\varphi}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |\widehat{\varphi}(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \frac{1}{\varepsilon^p} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Holder com os expoentes $\frac{N}{p}$ e $\frac{p^*}{p}$, onde $\dfrac{1}{\frac{N}{p}} + \dfrac{1}{\frac{p^*}{p}} = 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
\nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}} &\leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^p |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left[\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{p\cdot\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p\cdot\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left[\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{p\cdot\frac{N}{p}} dx\right)^{\frac{p}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p\cdot\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{N} dx\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{N} dx\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{\varepsilon}\nabla\varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)\right|^{N} dx\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widehat{\varphi}(x)|^N dx\right)^{\frac{1}{N}} \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + C\cdot\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}
$$

onde, $C \geq 0$.

Daí,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}} &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + C\cdot\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\mu(B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[C\cdot\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\right] \\
&= \mu(\lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon(x_j))^{\frac{1}{p}} + C\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u(x)|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\right] \\
&= \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}} + C\cdot 0 \\
&= \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}} = \nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}}.$$

Então

$$\nu_j^{\frac{1}{p^*}} \cdot S^{\frac{1}{p}} \leq \mu(\{x_j\})^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto

$$\mu \geq S \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j}.$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e note que

$$g \mapsto \int \varphi |\nabla g|^p dx$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ e $p \geq 1$. É uma função convexa contínua, então

$$\lim_{n \to \infty} \inf \int \varphi |\nabla u_n|^p dx \geq \int \varphi |\nabla u|^p dx.$$

Pela hipótese temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \inf \int \varphi |\nabla u_n|^p dx &= \lim_{n \to \infty} \int \varphi |\nabla u_n|^p \\ &= \int \varphi d\mu. \end{aligned}$$

Então

$$\int \varphi d\mu \geq \int \varphi |\nabla u|^p dx$$

ou seja

$$\mu \geq |\nabla u|^p.$$

Note que $|\nabla u|^p \perp S \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j}$. De fato, seja

$$A = \{x_j \in \mathbb{R}^N; j \in J\} \text{ e } B = \mathbb{R}^N \backslash A,$$

onde $A \cup B = \mathbb{R}^N$, A e B disjuntos e ainda

$$\int_B S \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j}(x) = 0$$

e

$$\int_A |\nabla u|^p dx = 0.$$

Então

$$\mu \geq |\nabla u|^p + S \sum_{j \in J} \nu_j{}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j}$$

mostrando (ii).

Vamos mostrar (iii), seja $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e suponhamos que

$$|\nabla(u_n + v)|^p \rightharpoonup \widetilde{\mu}.$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\varphi \geq 0$ daí pela propriedade da norma,

$$\left| \left(\int \varphi |\nabla(u_n + v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \varphi |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| = \left(\int \varphi |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sendo assim,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \left(\int \varphi |\nabla(u_n + v)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \varphi |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\int \varphi |\nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

desde que $v \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tem-se que $|\nabla v| \in L^p$, ou seja, $|\nabla v|^p \in L^1$, fazendo $h = |\nabla v|^p \geq 0$ segue que

$$\left| \left(\int \varphi d\widetilde{\mu} \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \varphi d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right| = \left(\int \varphi h dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $h \geq 0$

de onde concluímos que $\widetilde{\mu} - \mu \ll L^N$, ou seja, $\widetilde{\mu} - \mu$ é absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, então pelo Teorema de Radon-Nikodym (ver [10]) temos $\widetilde{\mu} - \mu \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e consequentemente

$$\widetilde{\mu} \geq |\nabla(u+v)|^p + S\sum_{j\in J} {\nu_j}^{\frac{p}{p^*}} \delta_{x_j},$$

sendo assim mostrando (iii). Portanto esta concluída a demonstração do Teorema. ■

Capítulo 3

Existência de múltiplas soluções para um problema semilinear

Vamos estudar neste capítulo a existência de multiplas soluções para problema elíptico quasilinear dado abaixo

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2}u + f(x,u), x \in \Omega \\ u = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, com fronteira suave, $\lambda > 0$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o chamado expoente crítico de Sobolev e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz a condição de Carathéodory,

$$\sup_{\Omega \times [-M,M]} |f(x,s)| = f_{_M} < \infty, \, \forall M > 0,$$

e ainda as condições abaixo

(f_1) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} = 0$, uniformemente q.s. em Ω;

(f_2) existem $\sigma \in [0,2)$ e $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$\frac{1}{2}f(x,s)s - F(x,s) \geq -a_1 - a_2|s|^{\sigma}, \forall \; s \;\in \mathbb{R}, \text{q.t.p. em } \Omega,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$;

(f_3) existe uma constante $B > 0$ tal que $F(x,s) \geq \mu_k \frac{|s|^2}{2} - B$, $\forall s \in \mathbb{R}$, q.t.p. em Ω;

(f_4) $\displaystyle\limsup_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = a(x) \leq \mu_j$, uniformemente q.t.p. em Ω e $a(x) \neq \mu_j$,

onde μ_j são autovalores de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ com a condição de Dirichlet.

Teorema 3.1 Suponha que $f(x,s)$ seja ímpar em s e satisfaça (f_1), (f_2),(f_3) e (f_4). Então existe $\lambda_k \in (0,\infty]$ tal que (P) possui pelo menos $k-j+1$ pares de soluções não triviais para todo $\lambda \in (0,\lambda_k)$.

Antes de demonstrar este Teorema iremos pecisar enunciar e demonstrar alguns lemas e proposições.

Lema 3.1 Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $|u_n|^{2^*}dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}\psi dx = \int_\Omega \psi d\nu,\ \forall\ \psi \in\ C_0^\infty(\Omega).$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx = \int_{\overline{\Omega}} d\nu.$$

Demonstração:

Observe que ν é restrição de uma medida $\widehat{\nu}$ a $\overline{\Omega}$ com $\widehat{\nu}\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}$.

Tome $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tal que $0\le\varphi\le 1$ e $\varphi\equiv 1$ em $\overline{\Omega}$. Daí

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\varphi|u_n|^{2^*}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\varphi d\widehat{\nu}\\
&= \int_{\overline{\Omega}}\varphi d\widehat{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}}\varphi d\widehat{\nu}\\
&= \int_{\overline{\Omega}} d\widehat{\nu} + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\overline{\Omega}}\varphi d\widehat{\nu}\\
&= \int_{\overline{\Omega}} d\nu.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.2 Suponha que f satisfaça (f_1) e seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx = 0.$$

Demonstração:

Note que de (f_1), dado $\varepsilon>0$ existe $A_\varepsilon>0$ tal que

$$\left|\frac{f(x,s)}{|s|^{2^*-1}} - 0\right| < \varepsilon, \quad |s| > A_\varepsilon$$

logo

$$|f(x,s)s| = |f(x,s)||s| < \varepsilon|s|^{2^*-1}|s| = \varepsilon|s|^{2^*}, \quad \text{se} \quad |s|>A_\varepsilon.$$

Por outro lado, como $\sup\limits_{\Omega\times[-M,M]}|f(x,s)| = f_{_M} < \infty$, para todo $M > 0$, então existe $K > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq K, \quad \text{se} \quad |s| \leq M \quad \text{e} \quad x \in \Omega.$$

Tomemos $M = A_\varepsilon$ então

$$|f(x,s)s| = |f(x,s)||s| \leq K.M = K.A_\varepsilon = C_\varepsilon, \quad \text{se} \quad |s| \leq A_\varepsilon \quad \text{e} \quad x \in \Omega.$$

Logo

$$|f(x,s)s| \leq C_\varepsilon + \varepsilon|s|^{2^*}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

E ainda,

$$|F(x,s)| = |\int_0^s f(x,t)dt| \leq \int_0^s |f(x,t)|dt.$$

Se $|s| > A_\varepsilon$,

$$|F(x,s)| \leq \int_0^s \varepsilon|t|^{2^*-1} = \frac{\varepsilon|s|^{2^*}}{2^*} \leq C_\varepsilon + \frac{\varepsilon|s|^{2^*}}{2^*}.$$

Se $|s| \leq A_\varepsilon$,

$$|F(x,s)| \leq \int_0^s K = K|s| \leq KA_\varepsilon = C_\varepsilon \leq C_\varepsilon + \frac{\varepsilon|s|^{2^*}}{2^*}.$$

Então

$$|F(x,s)| \leq C_\varepsilon + \frac{\varepsilon|s|^{2^*}}{2^*}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \ \text{ e q.t.p. em } \ \Omega.$$

Desde que $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada, sendo $H_0^1(\Omega)$ Banach-Reflexivo, a menos de subsequência tem-se

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Como $H_0^1(\Omega)$ está imersamente compacta em $L^s(\Omega)$ com $2 \leq s < 2^*$ então (Ver [10]) existe

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

E ainda, existe $k > 0$ tal que

$$|u_n|_{2^*} \leq k\|u_n\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$|u|_{2^*} \leq k\|u\|.$$

Como (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $\widetilde{k} > 0$,

$$\|u_n\| \leq \widetilde{k}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\|u\| \leq \widetilde{k}.$$

Daí,

$$|u_n|_{2^*}^{2^*} \leq (k\widetilde{k})^{2^*} = C, \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$|u|_{2^*} \leq (k\widetilde{k})^{2^*} = C.$$

Sendo f Carathéodory segue que

$$f(x, u_n)u_n \to f(x, u)u, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema de Egorov existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega - \Omega_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{C_\varepsilon}$

$$f(x, u_n)u_n \to f(x, u)u, \text{ uniformemente em } \Omega_\varepsilon.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x, u_n)u_n - f(x, u)u| dx = 0.$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx < \varepsilon, \text{ sempre que } \ n \geq n_0$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx &\leq \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} C_\varepsilon + \varepsilon|u_n|^{2^*} + \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} C_\varepsilon + \varepsilon|u|^{2^*} \\
&= 2\varepsilon C + 2C_\varepsilon|\Omega - \Omega_\varepsilon| \\
&< 2\varepsilon + 2\varepsilon C.
\end{aligned}$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx &= \int_{\Omega\backslash\Omega_\varepsilon} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx \\
&< 2\varepsilon C + 2\varepsilon + \varepsilon \\
&= (2C+3)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx = 0.$$

∎

Lema 3.3 Suponha que f satisfaça (f_1), seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência,

$$f(x,u_n)v \to f(x,u)v, \text{em } L^1(\Omega), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$|u_n|^{2^*-2}u_n v \to |u|^{2^*-2}uv, \text{em } L^1(\Omega), \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração:

Argumentando como acima podemos provar este resultado.

Vamos agora enunciar dois outros Lemas.

Lema 3.4 Suponha que f satisfaça (f_1), seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada satisfazendo $I_\lambda'(u_n) \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))'$ quando se tem $n \to \infty$. Então, considerando ν_j, $j \in J$, pelo **Teorema 2.1**, temos que $\nu_j \geq \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}$. Além disso o conjunto dos índices J é finito.

Agora enunciaremos e demonstraremos o resultado até então mais importante deste capítulo.

Proposição 3.1 Suponha que f satisfaça (f_1) e (f_2). Então dado $M > 0$, existe $\lambda_* > 0$ tal que I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c < M$, sempre que $0 < \lambda < \lambda_*$.

Demonstração:

Dado $M > 0$, considere

$$\lambda_* = \min \left\{ S, \left[\frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\theta}}} \right]^{\frac{1}{\frac{N}{2}-\frac{1}{\theta}}} \right\},$$

onde S é a melhor constante de Sobolev para imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$, $A = a_1|\Omega| + a_2|\Omega|^\theta$, com $\theta = \frac{2^*-\sigma}{2^*}$ onde a_1, a_2 e σ são as constantes dada em (f_2).

Desde que $0 < \lambda < \lambda_* \leq S$ vem que $1 < \frac{S}{\lambda}$ e logo

$$1 < \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}, \quad \text{pois} \quad \frac{N}{2} > 0.$$

Por outro lado, $0 < \lambda < \lambda_* \leq \left[\frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\theta}}} \right]^{\frac{1}{\frac{N}{2}-\frac{1}{\theta}}}$, sendo $\sigma < 2$ implica que $\frac{1}{\frac{N}{2}-\frac{1}{\theta}} > 0$ então

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{N}{2}-\frac{1}{\theta}} &< \frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\theta}}} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{\lambda^{\frac{1}{\theta}}} &< \frac{S^{\frac{N}{2}}}{(N(M+A))^{\frac{1}{\theta}}} \\ &\Leftrightarrow \\ \left(\frac{N(M+A)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}} &< \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Dado $c < M$, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$I_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I_\lambda'(u_n) \to 0, \quad \text{em} \quad (H_0^1(\Omega))'.$$

Mostremos que (u_n) é limitada, note que da convergência $I_\lambda'(u_n) \to 0$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I_\lambda'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Fazendo $\varepsilon = 2$ segue que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n &\leq \frac{1}{2}|I_\lambda{}'(u_n)u_n| \\ &\leq \frac{1}{2}\|I_\lambda{}'(u_n)\|_{(H_0^{1,2}(\Omega))'}\|u_n\| \\ &< \|u_n\|, \quad n \geq n_0 \end{aligned}$$

usando o fato de $I_\lambda(u_n) \to c$, segue que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c - \varepsilon < I_\lambda(u_n) < c + \varepsilon, \quad n \geq n_1$$

fazendo $\varepsilon = 1$ vem que

$$I_\lambda(u_n) < c + 1, \quad n \geq n_1$$

tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, vem que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n \leq c + 1 + \|u_n\|, \quad n \geq n_2. \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &- \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \mu\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx - \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\lambda\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx + \int_\Omega \{\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n - F(x,u_n)\}dx \\ &\overbrace{\geq}^{\text{por } (f_2)} \frac{\lambda}{N}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx + \int_\Omega \{-a_1 - a_2|u_n|^\sigma\}dx \\ &= \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1\int_\Omega dx - a_2\int_\Omega |u_n|^\sigma dx \\ &= \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2\int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\theta)}dx, \end{aligned}$$

ou seja

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n \geq \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2\int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\theta)}dx. \tag{3.2}$$

Pela desigualdade de Holder aplicada com os seguintes expoentes $\frac{1}{1-\theta}$ e $\frac{1}{\theta}$ segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n|^{2^*(1-\theta)}dx &\leq \left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{2^*.(1-\theta)}{1-\theta}}dx\right)^{1-\theta} \cdot \left(\int_\Omega 1^{\frac{1}{\theta}}dx\right)^{\theta} \\ &= \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx\right)^{1-\theta} \cdot |\Omega|^{\theta} \\ &= |u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot |\Omega|^{\theta}.\end{aligned}$$

Voltando em (3.2) temos que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n \geq \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2|\Omega|^\theta \cdot |u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)}. \tag{3.3}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} &= |u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot \frac{\delta^{(1-\theta)}}{\delta^{(1-\theta)}} \cdot \frac{(1-\theta)^{(1-\theta)}}{(1-\theta)^{(1-\theta)}} \\ &= \left(|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot \delta^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^{(1-\theta)}}\right) \cdot \left((1-\theta)^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{\delta^{(1-\theta)}}\right),\end{aligned}$$

onde $\delta = (\frac{\lambda}{2Na_2|\Omega|^\theta})$ desde que

$$|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot \delta^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^{(1-\theta)}} \quad , (1-\theta)^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{\delta^{(1-\theta)}} \geq 0.$$

Segue da Desigualdade de Young aplicada com os expoentes $\frac{1}{1-\theta}$ e $\frac{1}{\theta}$, que

$$\begin{aligned}|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} &= \left(|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot \delta^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^{(1-\theta)}}\right) \cdot \left((1-\theta)^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{\delta^{(1-\theta)}}\right) \\ &\leq (1-\theta)\left(|u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \cdot \delta^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{(1-\theta)^{(1-\theta)}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} + \theta\left((1-\theta)^{(1-\theta)} \cdot \frac{1}{\delta^{(1-\theta)}}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= (1-\theta)\left(|u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \delta \cdot \frac{1}{1-\theta}\right) + \theta\left(\frac{1-\theta}{\delta}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \\ &= |u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \delta + \theta\left(\frac{1-\theta}{\delta}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}} \\ &= |u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \delta + K_\delta,\end{aligned}$$

onde $K_\delta = \theta\left(\dfrac{1-\theta}{\delta}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$.

Voltando em (3.3) segue que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n &\geq \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2|\Omega|^\theta \cdot |u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)} \\
&\geq \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2|\Omega|^\theta \cdot \left(+|u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \delta + K_\delta\right) \\
&= |u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right) - \left(a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right).
\end{aligned}
$$

Por esta última desigualdade e por (3.1) vem que

$$
\begin{aligned}
c + 1 + \|u_n\| &\geq I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n \\
&\geq |u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right) - \left(a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right) \\
&\Leftrightarrow \\
c + 1 + \|u_n\| + \left(a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right) &\geq |u_n|_{2^*}^{2^*} \cdot \left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)
\end{aligned}
$$

como $\delta = \frac{\lambda}{2Na_2|\Omega|^\theta}$ vem que $\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta > \frac{\lambda}{N} - 2a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta = 0$.

Então,

$$
\begin{aligned}
|u_n|_{2^*}^{2^*} &\leq \frac{\left(c + 1 + \|u_n\| + a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right)}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)} \\
&= \frac{\|u_n\|}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)} + \frac{\left(c + 1 + a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right)}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)} \\
&< \frac{\left(c + 1 + a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right)}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)} \cdot \|u_n\| + \frac{\left(c + 1 + a_2|\Omega|^\theta K_\delta + a_1|\Omega|\right)}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)}
\end{aligned}
$$

fazendo $C = \dfrac{\left(c + 1 + a_2|\Omega|^\lambda K_\delta + a_1|\Omega|\right)}{\left(\frac{\lambda}{N} - a_2|\Omega|^\theta \cdot \delta\right)} > 0$ vem que

$$
|u_n|_{2^*}^{2^*} < C \cdot \|u_n\| + C. \tag{3.4}
$$

Desde que $I_\lambda(u_n) \to c$, vem que $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
c - \varepsilon < I_\lambda(u_n) < c + \varepsilon
$$

e sabendo que $|F(x,s)| \leq C_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^*} \cdot |s|^{2^*}$.

Daí,

$$
\begin{array}{rcl}
c+\varepsilon & > & I_\lambda(u_n)\\
& = & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \dfrac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx\\
& = & \dfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - \dfrac{\lambda}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*} - \displaystyle\int_\Omega F(x,u_n)dx\\
& \overbrace{\geq}^{\text{por } (f_1)} & \dfrac{1}{2}\|u_n\| - \dfrac{\lambda}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*} - \displaystyle\int_\Omega (C_\varepsilon + \dfrac{\varepsilon}{2^*}\cdot |u_n|^{2^*})dx\\
& = & \dfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - \dfrac{\lambda}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*} - C_\varepsilon|\Omega| - \dfrac{\varepsilon}{2^*}|u_n|_{2^*}^{2^*}\\
& = & \dfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| + \left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)\left(-|u_n|_{2^*}^{2^*}\right)\\
& \overbrace{>}^{\text{por } (3.4)} & \dfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| + \left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)\left(-C - C\|u_n\|\right).
\end{array}
$$

Note que

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{2}\|u_n\|^2 - C_\varepsilon|\Omega| + \left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)\left(-C - C\|u_n\|\right) & < & c+\varepsilon\\
& \Leftrightarrow & \\
2c+2\varepsilon+2C_\varepsilon|\Omega| + 2\left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)\left(C + C\|u_n\|\right) & > & \|u_n\|^2\\
& \Leftrightarrow & \\
\left\{2c+2\varepsilon+2C_\varepsilon|\Omega| + 2\left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)C\right\} + 2\left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)C\|u_n\| & > & \|u_n\|^2\\
& \Rightarrow & \\
C' + C'\cdot\|u_n\| & > & \|u_n\|^2
\end{array}
$$

onde $C' = 2c+2\varepsilon+2C_\varepsilon|\Omega| + 2\left(\dfrac{\lambda}{2^*}+\dfrac{\varepsilon}{2^*}\right)\cdot C > 0.$

Então de

$$C' + C'\cdot\|u_n\| > \|u_n\|^2$$

temos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. De fato, supomos por contradição que (u_n) não é limitada em $H_0^1(\Omega)$, então a menos de subsequência temos que

$$\|u_{n_j}\| \to \infty,$$

desde que $C' + C'\cdot\|u_{n_j}\| > \|u_{n_j}\|^2$ segue que

$$\frac{C'}{\|u_{n_j}\|} + C' > \|u_{n_j}\|$$

fazendo $n \to \infty$ temos

$$C' > \infty$$

o que é um absurdo, portanto temos que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Note que agora estamos nas condições dos lemas anteriores, isto é, existem $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx \to 0 \\ f(x,u_n)v \to f(x,u)v \quad \text{em} \quad L^1(\Omega) \\ |u_n|^{2^*-2}u_nv \to |u|^{2^*-2}uv \quad \text{em} \quad L^1(\Omega) \\ |u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*}dx + \displaystyle\sum_{j\in J}\nu_j\delta_{x_j}. \end{cases}$$

Mostremos que

$$\int_\Omega d\nu < \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{3.5}$$

Afirmamos que ocorre (3.5). Vamos supor, por contradição que não ocorre (3.5), ou seja

$$\int_\Omega d\nu \geq \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Como $\left(\dfrac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} > 1$ segue que

$$\int_\Omega d\nu > 1. \tag{3.6}$$

Usando os cálculos feitos anteriormente temos que

$$I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}I_\lambda{}'(u_n)u_n \quad \geq \quad \frac{\lambda}{N}|u_n|_{2^*}^{2^*} - a_1|\Omega| - a_2|\Omega|^\theta \cdot |u_n|_{2^*}^{2^*(1-\theta)}. \tag{3.7}$$

Usando o fato de

$$\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = c \quad, \lim_{n\to\infty} I_\lambda{}'(u_n) = 0$$

e o **Lema 3.1** temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}|u_n|^{2^*}dx = \int_{\overline{\Omega}}d\nu.$$

Sendo assim, fazendo $n \to \infty$ em (3.7) temos

$$\begin{array}{rcl}
c - 0 & \geq & \dfrac{\lambda}{N}\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu - a_1|\Omega| - a_2|\Omega|^{\theta}\cdot\left(\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & \Leftrightarrow & \\
\dfrac{\lambda}{N}\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu & \leq & c + a_1|\Omega| + a_2|\Omega|^{\theta}\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & \underbrace{<}_{\text{por } (3.6)} & c\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} + a_1|\Omega|\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} + a_2|\Omega|^{\theta}\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & = & (c + a_1|\Omega| + a_2|\Omega|^{\theta})\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & < & (M + a_1|\Omega| + a_2|\Omega|^{\theta})\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & = & (M + A)\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta}
\end{array}$$

então

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu & < & \dfrac{N(M+A)}{\lambda}\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & = & \left[\left(\dfrac{N(M+A)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right]^{\theta}\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta} \\
 & < & \left[\left(\dfrac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}\right]^{\theta}\cdot\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta}
\end{array}$$

logo

$$\begin{array}{rcl}
\left[\left(\dfrac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}\right]^{\theta} & > & \dfrac{\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu}{\left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{1-\theta}} \\
 & = & \left(\displaystyle\int_{\overline{\Omega}}d\nu\right)^{\theta}
\end{array}$$

portanto

$$\left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} > \int_{\overline{\Omega}}d\nu$$

o que é um absurdo, pois supomos

$$\left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \leq \int_{\overline{\Omega}} d\nu.$$

Então, de fato ocorre (3.5), pelo **Lema 3.4** temos que $\nu_j \geq \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}}$ onde $j \in J(J$ finito) e

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu = |u|^{2^*}dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

logo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} &> \int_{\overline{\Omega}} d\nu \\
&= \nu(\overline{\Omega}) \\
&= \int_{\overline{\Omega}} |u|^{2^*}dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}(\overline{\Omega}) \\
&\geq \int_{\overline{\Omega}} |u|^{2^*}dx + \sum_{j\in J} \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \delta_{x_j}(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Mostremos que J é vazio. Se J é não vazio, existe pelo menos um $\widetilde{j} \in J$, tal que $\delta_{x_{\widetilde{j}}} = 1$. Sendo $\left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} > 1$ vem que

$$\left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} > \int_{\overline{\Omega}} |u|^{2^*}dx + \left(\frac{S}{\lambda}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot 1,$$

o que é um absurdo, portanto $J = \emptyset$. Sendo assim

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*}dx = \int_{\Omega} |u|^{2^*}dx.$$

Desde que $I_\lambda{}'(u_n) \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))'$ segue que $I_\lambda{}'(u_n)u_n \to 0$ em $\mathbb{R}$, sendo assim $I_\lambda{}'(u_n)u_n = o_1$ logo

$$\begin{aligned}
o_1 &= I_\lambda^{'}(u_n)u_n \\
&= \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n,
\end{aligned}$$

o que nos da

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \lambda \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} + \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n + o_1,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \lambda\int_\Omega |u|^{2^*} + \int_\Omega f(x,u)u, \tag{3.8}$$

usando o fato de $u_n \rightharpoonup u$ e $I_\lambda \in C(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ segue da definição de convegência fraca,

$$I'_\lambda(u_n) \to I'_\lambda(u), \quad \text{em} \quad \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

da unicidade de limite tem-se $I'_\lambda(u) = 0$ e por consequência $I'_\lambda(u)u = 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= I'_\lambda(u)u \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda\int_\Omega |u|^{2^*} - \int_\Omega f(x,u)u, \end{aligned}$$

então,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda\int_\Omega |u|^{2^*} + \int_\Omega f(x,u)u,$$

sendo assim, usando (3.8) tem-se que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2. \tag{3.9}$$

Por outro lado, note que sendo $(H_0^1(\Omega))$ um espaço de Hilbert, segue que a norma em questão é induzida de um produto interno, ou seja,

$$(u,u) = \|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Daí, sabendo que a função $(,)$ é bilinear e contínua, segue da definição de convergência fraca que

$$(u_n,u) \to (u,u) \ \text{ em } \ \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla u_n \nabla u = \int_\Omega \nabla u \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2, \tag{3.10}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\
&= (u_n, u_n) - 2(u_n, u) + (u, u) \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

fazendo $n \to \infty$ e usando (3.9) e (3.10) segue que

$$\|u_n - u\| \to 0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega),$$

■

Antes de demonstrar os próximos lemas, notemos.

Seja (μ_i) a sequência dos autovalores de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ com a condição de Dirichlet. Decorre da teoria espectral para operadores compactos que $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq ... \leq \mu_i \leq ...$. Chamemos de φ_i as autofunções correspondentes a μ_i onde $\|\varphi_i\| = 1$, fazendo $\mu_j \leq \mu_k$ dados em (f_3) e (f_4), definimos V um subconjunto fechado de $H_0^1(\Omega)$, $V = \{0\}$ caso $j = 1$ e $V = span\{\varphi_1, ..., \varphi_{j-1}\}$ caso $j > 1$, e $W = span\{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ de modo que

$$H_0^1(\Omega) = V^\perp \oplus V.$$

Lema 3.5 Suponha que f satisfaça (f_3). Então existe $M_k > 0$, que não depende de λ, tal que $\max\limits_{u \in W} I_\lambda(u) < M_k$.

Demonstração: Note que

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x, u) dx$$

se $u \in W$ então

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x, u) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x, u) dx \\
&\overbrace{\leq}^{\text{por } (f_3)} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega \left(\frac{\mu_k u^2}{2} - B\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\mu_k}{2}\int_\Omega u^2 dx + B\int_\Omega dx \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu_k}{2}|u|_2^2 + B|\Omega| \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + B|\Omega|,
\end{aligned}$$

ou seja

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + B|\Omega|. \tag{3.11}$$

Desde que $u \in W\backslash\{0\}$, segue que existem $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., k$ tal que

$$u = \sum_{i=1}^{k} a_i \varphi_i,$$

sendo assim

$$\begin{array}{rcl} \|u\| & = & \|\sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i\| \\ & \overbrace{\leq}^{\text{Des .triang.}} & \sum_{i=1}^{k} |a_i|\|\varphi_i\| \\ & \overbrace{=}^{\text{Def. de } W} & \sum_{i=1}^{k} |a_i| = A_{(k)} \end{array}$$

então existe $A_{(k)} > 0$ tal que $\|u\| \leq A_{(k)}$ voltando em (3.11)

$$\begin{array}{rcl} I_\lambda(u) & \leq & \frac{1}{2}\|u\|^2 + B|\Omega| \\ & \leq & \frac{1}{2}(A_{(k)})^2 + B|\Omega| \\ & = & M_k, \end{array}$$

onde $M_k = (A_{(k)})^2 + B|\Omega| > 0$, o que conclui a demonstração. ■

Lema 3.6 Seja $a : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $a \leq\not\equiv \mu_j$. Então existe $\beta > 0$ tal que,

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx \geq \beta \int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap V^\perp$$

onde $a^+(x) = \max\{a(x), 0\}$.

Demonstração:

Vamos supor, por contradição que não vale a desigualdade acima. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - a^+u_n^2)dx < \frac{1}{n}\int_\Omega u_n^2 dx.$$

Sendo u_n não-nula, tomemos $v_n = \frac{u_n}{|u_n|_2}$. Logo

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - a^+ v_n^2) dx < \frac{1}{n} \int_\Omega v_n^2 dx. \tag{3.12}$$

Lembremos a caracterização do autovalor μ_j dado por

$$\mu_j = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla w|^2 dx; w \in H_0^1(\Omega) \cap V^\perp; \int_\Omega w^2 dx = 1 \right\}. \tag{3.13}$$

Combinando (3.12), (3.13) e $a \leq \mu_j$ tem-se

$$\begin{aligned} \mu_j &\leq \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx \\ &< \int_\Omega a^+ v_n^2 dx + \frac{1}{n} \int_\Omega v_n^2 dx \\ &\leq \mu_j \int_\Omega v_n^2 dx + \frac{1}{n} \\ &= \mu_j + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu_j < \|v_n\|^2 \leq \mu_j + \frac{1}{n}$$

donde concluímos que $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada. Logo, a menos de subsequência, (v_n) converge fraco em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$v_n \rightharpoonup v, \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Das imersões compactas de Sobolev,vem que

$$v_n \to v, \quad \text{em} \quad L^2(\Omega),$$

note que estamos sobre as condições do Teorema de Vainberg, isto é, a menos de subsequência tem-se

$$v_n(x) \to v(x), \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq h(x), \quad \text{q.t.p. em} \;\; \Omega \;\; \text{e} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como tomamos (v_n), segue que $|v_n|_2 = 1$. Pela continuidade da função norma segue $|v|_2 = 1$. Por outro lado, temos que

$$a^+(x)v_n(x) \to a^+(x)v(x), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

consequentemente

$$a^+(x)v_n^2(x) \to a^+(x)v^2(x), \text{ q.t.p. em } \Omega$$

sabendo que $a^+(x) \in L^\infty$ segue que

$$|a^+(x)v_n(x)| \leq a^+(x)h(x) \;\; \in \;\; L^1(\Omega), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

estamos sob as condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a^+(x)v_n^2(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega a^+(x)v^2(x)dx$$

Como vimos anteriormente, temos

$$\mu_j < \int_\Omega a^+(x)v_n^2(x)dx \leq \mu_j + \frac{1}{n}$$

fazendo $n \to \infty$ vem que

$$\mu_j \leq \int_\Omega a^+(x)v^2(x)dx \leq \mu_j$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a^+(x)v^2(x)dx &= \mu_j \\
&= \mu_j.1 \\
&= \mu_j|v|_2^2 \\
&= \mu_j \int_\Omega v^2dx
\end{aligned}$$

daí

$$\int_\Omega (\mu_j - a^+(x))v^2(x)dx = 0. \tag{3.14}$$

Desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, segue da definição de convergência fraca que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = (v_n, v_n) \to (v, v) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx,$$

pois $(,)$ é bilinear e contínuo, e ainda

$$\mu_j < \int_\Omega |\nabla v_n| dx \leq \mu_j + \frac{1}{n}$$

fazendo $n \to \infty$ temos que

$$\mu_j \leq \int_\Omega |\nabla v| dx \leq \mu_j$$

ou seja

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v| dx &= \mu_j \\ &= \mu_j.1 \\ &= \mu_j |v|_2^2 \end{aligned}$$

desta desigualdade, temos que v é um autovalor associado a μ_j, ou seja, não nula. Logo v^2 é positiva, por (3.14),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\mu_j - a^+(x))v^2(x)dx \\ &= \int_{a \geq 0} (\mu_j - a^+(x))v^2(x)dx + \int_{a<0} (\mu_j - a^+(x))v^2(x)dx \\ &= \int_{a \geq 0} (\mu_j - a(x))v^2(x)dx + \int_{a<0} (\mu_j - 0)v^2(x)dx \\ &= \int_\Omega (2\mu_j - a(x))v^2 dx. \end{aligned}$$

Como v^2 é não-nula, para a igualdade ser válida temos que ter $2\mu_j - a(x) = 0$ q.t.p. em Ω, ou seja, $\mu_j = \frac{a(x)}{2} < a(x)$ q.t.p. em Ω o que é um absurdo, pois $a \leq\not\equiv \mu_j$. ■

Lema 3.7 Suponha que f satisfaça (f_1) e (f_4). Então, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) \geq \alpha, \forall u \in \partial B_\rho \cap V^\perp.$$

Demonstração:

Por (f_1) temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \varepsilon |s|^{2^*-1}$$

e

$$|F(x,s)| \leq C_\varepsilon + \frac{2^*}{\varepsilon |s|^{2^*}}$$

quando $|s| \geq M_\varepsilon$

Por (f_4) tem-se que $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x,s) < \frac{(a(x)+\varepsilon)|s|^2}{2}$$

quando $0 < |s| < \delta_\varepsilon$, e usando o fato de $\sup\limits_{\Omega \times [-M,M]} |f(x,s)| = f_M < \infty$, para todo $M > 0$ concluímos que

Então

$$F(x,s) \leq \frac{C_\varepsilon |s|^{2^*}}{2^*} + \frac{(\varepsilon + a(x))|s|^2}{2}, \quad \forall s \in \mathbb{R} \text{ e q.t.p. em } \Omega. \tag{3.15}$$

Considere $\beta > 0$ obtido no lema anterior, e agora escolhemos $\varepsilon' > 0$ de modo que $\beta - \varepsilon' \mu_j > 0$.

Desde que $a \leq\not\equiv \mu_j$, ou seja, $a \leq \mu_j$ *q.t.p.* em Ω, segue que $a^+ \leq \mu_j$ *q.t.p.* em Ω, note que $a^+ \geq a$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|\nabla u|^2 - au^2)dx &\geq \int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx \\
&= \frac{1+\varepsilon'}{1+\varepsilon'}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon'}\left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx + \varepsilon'\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx\right] \\
&\overbrace{\geq}^{\textbf{Lema 3.6}} \frac{1}{1+\varepsilon'}\left[\beta\int_\Omega u^2dx + \varepsilon'\int_\Omega (|\nabla u|^2 - a^+u^2)dx\right] \\
&\overbrace{\geq}^{\text{pois } \mu_j\geq a^+} \frac{1}{1+\varepsilon'}\left[\beta\int_\Omega u^2dx + \varepsilon'\int_\Omega (|\nabla u|^2 - \mu_j u^2)dx\right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon'}\left[\beta\int_\Omega u^2dx + \varepsilon'\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \varepsilon'\mu_j\int_\Omega u^2dx\right] \\
&= \frac{1}{1+\varepsilon'}\left[(\beta-\varepsilon'\mu_j)\int_\Omega u^2dx + \varepsilon'\int_\Omega (|\nabla u|^2dx\right] \\
&\geq \frac{1}{1+\varepsilon'}\varepsilon'\int_\Omega |\nabla u|^2dx.
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 - au^2)dx \;\; \geq \;\; \frac{1}{1+\varepsilon'}\varepsilon'\int_\Omega |\nabla u|^2dx. \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega u^2dx - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\overbrace{\geq}^{\text{por } (3.15)} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega u^2dx - \int_\Omega\left(\frac{C_\varepsilon u^{2^*}}{2^*} + \frac{(\varepsilon+a)u^2}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega u^2dx - \int_\Omega \frac{C_\varepsilon u^{2^*}}{2^*}dx - \int_\Omega \frac{(\varepsilon+a)u^2}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega u^2dx - \frac{C_\varepsilon}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega au^2dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 - au^2)dx\right) - (\frac{\lambda}{2^*} + \frac{\varepsilon}{2})\int_\Omega u^2dx - \frac{C_\varepsilon}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}dx \\
&\overbrace{\geq}^{\text{por } (3.16)} \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - (\frac{\lambda}{2^*} + \frac{\varepsilon}{2})\int_\Omega u^2dx - \frac{C_\varepsilon}{2^*}\int_\Omega u^{2^*}dx
\end{aligned}$$

logo

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\|u\|^2 - (\frac{\lambda}{2^*} + \frac{\varepsilon}{2})|u|_2^2 - \frac{C_\varepsilon}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \tag{3.17}$$

Desde que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$ e $L^{2^*}(\Omega)$, obtem-se $C, K > 0$ de modo que

$$|u|_2^2 \leq C\|u\|^2 \quad \text{e} \quad |u|_{2^*}^{2^*} \leq K\|u\|^{2^*}.$$

Voltando em (3.17) vem que

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\|u\|^2 - C(\frac{\lambda}{2^*} + \frac{\varepsilon}{2})\|u\|^2 - \frac{KC_\varepsilon}{2^*}\|u\|^{2^*}.$$

Fazendo $\|u\| = \rho$ segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\rho^2 - C(\frac{\lambda}{2^*} + \frac{\varepsilon}{2})\rho^2 - \frac{KC_\varepsilon}{2^*}\rho^{2^*} \\ &= \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{C\lambda\rho^2}{2^*} - \frac{\varepsilon C\rho^2}{2} - \frac{KC_\varepsilon\rho^{2^*}}{2^*}. \end{aligned}$$

Vamos escolher $\lambda > 0$ de modo que $\frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{C\lambda\rho^2}{2^*} > \frac{\varepsilon'}{4(1+\varepsilon')}\rho^2$. Para que isto ocorra, tomemos $\lambda < \frac{2^*\varepsilon'}{4C(1+\varepsilon')}$. Logo

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{\varepsilon'}{2(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{C\lambda\rho^2}{2^*} - \frac{\varepsilon C\rho^2}{2} - \frac{KC_\varepsilon\rho^{2^*}}{2^*} \\ &> \frac{\varepsilon'}{4(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{\varepsilon C\rho^2}{2} - \frac{KC_\varepsilon\rho^{2^*}}{2^*}. \end{aligned}$$

Agora escolhemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\frac{\varepsilon'}{4(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{\varepsilon C\rho^2}{2} > \frac{\varepsilon'}{8(1+\varepsilon')}\rho^2$. Para que isto ocorra, tomemos

$$0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon'}{4C(1+\varepsilon')}.$$

Logo

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &> \frac{\varepsilon'}{4(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{\varepsilon C\rho^2}{2} - \frac{KC_\varepsilon\rho^{2^*}}{2^*} \\ &> \frac{\varepsilon'}{8(1+\varepsilon')}\rho^2 - \frac{KC_\varepsilon\rho^{2^*}}{2^*}. \end{aligned}$$

Por fim, tomemos $\rho > 0$ de modo que $\frac{\varepsilon^{'}}{8(1+\varepsilon^{'})}\rho^2 - \frac{KC_\varepsilon \rho^{2^*}}{2^*} > \frac{\varepsilon^{'}}{16(1+\varepsilon^{'})}\rho^2$. Para que isto de fato ocorra, basta tomar $0 < \rho < \left(\dfrac{2^*\varepsilon^{'}}{16KC_\varepsilon(1+\varepsilon^{'})}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$. Logo

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &> \frac{\varepsilon^{'}}{8(1+\varepsilon^{'})}\rho^2 - \frac{KC_\varepsilon \rho^{2^*}}{2^*} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Logo existe $\alpha > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) \geq \alpha > 0$$

onde $u \in \partial B_\rho \cap V^\perp$. ∎

Demonstração do Teorema 3.1 :

Vamos aplicar o **Teorema 1.1** com $X = V^\perp$. Pelo **Lema 3.7**, onde $X = V^\perp$ temos que verifica (I_1). Note que fazendo $I_d = \phi$, onde $I_d : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, identificando $W = \mathbb{R}^k$ de imediato tem-se que I_d é um homeomorfismo ímpar e $\lim\limits_{\|y\|\to\infty} \|I_d(y)\| = \infty$ tem-se que $k \geq j$ e pela construção de V segue que $\dim V = j - 1$, do **Lema 3.5** tem-se

$$\max_{u\in W} I_\lambda(u) < M_k,$$

ou seja, verifica (I_2), por fim pela **Proposição 3.1** temos que I_λ satisfaz a condição de $(PS)_c$ $\forall \lambda \in (0, \lambda_k)$, note que como vimos nesta mesma proposição se trata de sequências limitadas verifica também $(PSB)_0$ sendo assim verifica a condição (I_3) sabendo que $I_\lambda(0) = 0$ e I_λ é uma função par estamos nas condições do Teorema do Passo da Montanha, ou seja, o funcional I_λ possui pelo menos $k-(j-1)$ pares de pontos críticos não triviais para todo $\lambda \in (0, \lambda_k)$, isto é, (P) possui pelo menos $k - j + 1$ pares de soluções não triviais em $\lambda \in (0, \lambda_k)$. ∎

Capítulo 4

Apêndice A

Vamos enunciar alguns resultados de medidas que foram utilizadas no decorrer deste trabalho.

Lema 4.1 (De Fatou) Seja Ω um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis não-negativas tais que

$$f_n(x) \to f(x)$$

quase sempre em Ω onde f é mensurável, então

$$\int_\Omega f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x).$$

Demonstração:ver [10]

Teorema 4.1 (Da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja Ω um conjunto mensurável do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis tais que

$$f_n(x) \to f(x)$$

quase sempre em Ω, onde f é mensurável. Se existir uma função $h \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq h(x)$$

quase sempre em Ω, então

$$\int_\Omega f_n(x) \to \int_\Omega f(x).$$

Demonstração:ver [10]

Teorema 4.2 (De Vainberg) Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e f em $L^p(\Omega)$ tais que

$$f_n(x) \to f(x)$$

em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ e uma função $g \in L^1(\Omega)$ tais que

$$f_{n_k}(x) \to f(x)$$

quase sempre em Ω, e

$$|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

quase sempre em Ω.

Demonstração:ver [10]

Lema 4.2 (Lema de Brezis-Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $(u_n) \subseteq L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se,

a) (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$;

b) $u_n(x) \to u(x)$, q.t.p. em Ω;

então

$$\lim_{n\to\infty} \left(|u_n|^p_{L^p(\Omega)} - |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \right) = |u|^p_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração:

Como $u_n \in L^p(\Omega)$, segue que $u_n \in L^1(\Omega)$, ou seja

$$\sup \int_\Omega |u_n|^p < \infty$$

e $|u_n|^p \geq 0$ e usando (b) estamos nas condições do Lemma de Fatou, vem que

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq \underline{\lim} |u_n|_{L^p(\Omega)},$$

e portanto $u \in L^p(\Omega)$.

Note que,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}\left(|u_n|^p_{L^p(\Omega)} - |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)}\right) &= \underline{\lim}|u_n|^p_{L^p(\Omega)} - \underline{\lim}|u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \\ &= \underline{\lim}|u_n|^p_{L^p(\Omega)} + \overline{\lim}|u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\geq \underline{\lim}|u_n|^p_{L^p(\Omega)} \\ &\geq |u|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fixemos $\varepsilon > 0$, segue que existe c_ε tal que

$$\big||a+b|^p - |a|^p\big| \leq \varepsilon|a|^p + c_\varepsilon|b|^p \tag{4.1}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, este resultado se deve a Holder.

Define-se,

$$f_n^\varepsilon =: \left(\big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| - \varepsilon|u_n - u|^p\right)^+.$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl}
f_n^\varepsilon & = & \left(\big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| - \varepsilon|u_n - u|^p\right)^+ \\
& \leq & \left|\ \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| - \varepsilon|u_n - u|^p\ \right| \\
& \overbrace{\leq}^{\text{Des.triangular}} & \left|\ \big||u_n|^p - |u_n - u|^p\big| + |u|^p - \varepsilon|u_n - u|^p\ \right| \\
& \overbrace{\leq}^{\text{por } (4.1)} & \left|\ \varepsilon|u_n - u|^p + c_\varepsilon|u|^p + |u|^p\right| - \varepsilon|u_n - u|^p\ \big| \\
& = & (1 + c_\varepsilon)|u|^p
\end{array}$$

então

$$f_n^\varepsilon \leq (1 + c_\varepsilon)|u|^p \in L^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Note que, se $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω, logo

$$\begin{gathered}
|u_n(x)| \to |u(x)| \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
|u_n(x)|^p \to |u(x)|^p \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
|u_n(x) - u(x)| \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \\
|u_n(x) - u(x)|^p \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega,
\end{gathered}$$

então

$$f_n^\varepsilon(x) =: \left(\big||u_n(x)|^p - |u_n(x) - u(x)|^p - |u(x)|^p\big| - \varepsilon|u_n(x) - u(x)|^p\right)^+ \to 0 = f^\varepsilon(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n^\varepsilon(x) &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n^\varepsilon(x) \\
&= \int_\Omega f^\varepsilon(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note ainda,

$$\begin{aligned} f_n^\varepsilon(x) + \varepsilon|u_n - u|^p &= \left(\big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| - \varepsilon|u_n - u|^p\right)^+ + \varepsilon|u_n - u|^p \\ &\geq \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| - \varepsilon|u_n - u|^p + \varepsilon|u_n - u|^p \\ &= \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| &\leq \int_\Omega f_n^\varepsilon + \varepsilon \int_\Omega |u_n - u|^p \\ &= \int_\Omega f_n^\varepsilon + \varepsilon |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sendo $\int_\Omega f_n^\varepsilon < \infty$ por (4.2) e sendo (u_n) limitada em $L^p(\Omega)$,ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$|u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} < K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| < \infty.$$

A sequência acima é limitada superiormente, logo podemos falar de limite superior, ou seja

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| &\leq \overline{\lim} \int_\Omega f_n^\varepsilon + \varepsilon.K \\ &= \varepsilon.K, \end{aligned}$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\overline{\lim} \int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| \leq 0.$$

logo

$$\overline{\lim} \int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| = 0.$$

Desde que $\left| \int_\Omega g \right| \leq \int_\Omega |g|$ segue que

$$\overline{\lim} \int_\Omega |u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p \leq \overline{\lim} \int_\Omega \big||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p\big| = 0$$

e ainda,

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim}\int_{\Omega}|u_n|^p-|u_n-u|^p-|u|^p &\leq 0\\
\Rightarrow \overline{\lim}\int_{\Omega}|u_n|^p-|u_n-u|^p &\leq \overline{\lim}\int_{\Omega}|u|^p\\
&= \int_{\Omega}|u|^p\\
&= |u|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \overline{\lim}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)})\leq |u|^p_{L^p(\Omega)}.
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
|u|^p_{L^p(\Omega)}\leq \underline{\lim}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)}) &\leq \overline{\lim}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)})\leq |u|^p_{L^p(\Omega)}\\
\Rightarrow \underline{\lim}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)}) &= \overline{\lim}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\lim_{n\to\infty}(|u_n|^p_{L^p(\Omega)}-|u_n-u|^p_{L^p(\Omega)})=|u|^p_{L^p(\Omega)}.
$$

■

4.0.1 Medida de Radon

Definição 4.1 Diz-se que uma medida μ em $\mathbb{R}^N$ é de Radon se está definida em uma σ-álgebra de Borel e ainda para todo $A\subset\mathbb{R}^N$ compacto tem-se

$$
\mu(A)<\infty.
$$

Definição 4.2 O espaço das medidas finitas de Radon com sinal em $\mathbb{R}^N$ denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$. Para ν em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ definimos

$$
\|\nu\|_{\mathcal{M}}=|\nu|(\mathbb{R}^N)
$$

com $|\nu|$ é a soma das variações positivas e negativas de ν, o subespaço das medidas finitas de Radon denotemos por $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$.

Definição 4.3 Dado $x \in \mathbb{R}^N$ e $\delta_x \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$, dizemos que δ_x é a massa de Dirac concentrada em x se

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in E, \\ 0 \text{ se } x \notin E \end{cases}$$

Definição 4.4 Seja $(\nu_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, dizemos que

$$\nu_n \rightharpoonup \nu \text{ em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Se

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi d\nu_n \to \int \varphi d\nu, \quad \forall\ \varphi \ \in \ C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Definição 4.5 Sejam μ, λ medidas de Radon. Dizemos que a medida λ é absolutamente contínua em relação a medida μ se $\mu(E) = 0$ implicar que $\lambda(E) = 0$ para $E \subset \mathbb{R}^N$ e denotaremos por $\lambda \ll \mu$.

Teorema 4.3 Seja ψ um funcional linear contínuo em $(C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \|.\|_\infty)$. Então existe uma única medida finita de Radon com sinal em ν em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\psi(g) = \int g d\nu, \ \forall\ g \in \ C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e ainda

$$\|\psi\| = \|\nu\|_{\mathcal{M}}$$

Capítulo 5

Apêndice B

5.1 Funcionais Diferenciáveis

Definição 5.1 . Seja $\Omega \subset E$, um aberto do espaço de Banach E, seja

$$I : \Omega \subseteq E \to \mathbb{R},$$

um funcional. Dizemos que $T \in E'$ é a derivada de Gateaux de I $u \in \Omega$ se, para todo $v \in E$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u + tv) - I(u) - T(t.v)}{t} = 0.$$

Notação: Denotamos a derivada de Gateaux em u por $I'(u)$.

Definição 5.2 . Seja $\Omega \subset E$ um aberto do espaço de Banach E, e

$$I : \Omega \subseteq E \to \mathbb{R},$$

um funcional linear. Dizemos que I tem derivada de Fréchet $T_0 \in E'$ em $u \in \Omega$ se,

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u + v) - I(u) - T_0(v)}{\|v\|} = 0.$$

Notação: Denotamos a derivada de Fréchet em u por $DI(u)$.

Dizemos que I é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de I existe para todo $u \in E$ e a aplicação $u \mapsto DI(u)$ é contínua em E.

Se $E = H$ é um espaço de Hilbert e I tem derivada de Gateaux em $u \in \Omega$, segue que

$$\langle I'(u), v \rangle := (\nabla I(u), v)_H.$$

Este elemento é único devido ao Teorema da Representação de Riesz.

Proposição 5.1 Se $I : \Omega \subseteq E \to \mathbb{R}$ é Fréchet diferenciável em $u \in \Omega$ então I é Gateaux diferenciável.

Demonstração:

Como I é Fréchet diferenciável em u, segue que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\forall \delta > 0$ tal que,

$$\frac{|I(u+h) - I(u) - DI(u)(h)|}{\|h\|} < \varepsilon,$$

sempre que $\|h\| < \delta$.

Dado $v \in \Omega$ não-nulo (caso v nulo é imediato), fazendo $h = tv$, com $t \in \mathbb{R}$ logo,

$$\frac{|I(u+tv) - I(u) - DI(u)(tv)|}{\|tv\|} < \varepsilon,$$

sempre que $|t|.\|v\| = \|t.v\| < \delta$.

Segue que $|t| < \frac{\delta}{\|v\|}$,

$$\Rightarrow \left| \frac{I(u+tv) - I(u) - DI(u)(tv)}{t} \right| < \varepsilon.\|v\|,$$

tomando $\delta_1 = \frac{\delta}{\|v\|}$, tem-se $\forall\ \overline{\varepsilon} = \varepsilon.\|v\| > 0$ tal que,

$$\Rightarrow \left| \frac{I(u+tv) - I(u) - DI(u)(tv)}{t} \right| < \overline{\varepsilon},$$

sempre que $|t| < \delta_1$. Mostrando que,

$$\lim_{t \to 0} \frac{I(u+tv) - I(u) - DI(u)(tv)}{t} = 0.$$

Portanto existe a derivada de Gateaux de I em u, e ainda pela unicidade do limite obtemos,

$$DI(u) = I'(u).$$

Proposição 5.2 Se I tem derivada de Gateaux contínua sobre Ω, então I é de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Seja $u \in \Omega$ e $I'(u)$ a derivada de Gateaux de I em u. Segue do Terorema do Valor Médio que existe $0 < \lambda < 1$ tal que,

$$I(u+h) - I(u) = I'(u + \lambda.h)(h).$$

Daí,

$$I(u+h) - I(u) - I'(u)(h) = I'(u + \lambda.h)(h) - I'(u)(h).$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|I(u+h) - I(u) - I'(u)(h)| &= |I'(u+\lambda.h)(h) - I'(u)(h)| \\
&= |(I'(u+\lambda.h) - I'(u))(h)| \\
&\leq \|I'(u+\lambda.h) - I'(u)\|_{E'} \|h\|,
\end{aligned}
$$

logo

$$
|I(u+h) - I(u) - I'(u)(h)| \leq \|I'(u+\lambda.h) - I'(u)\|_{E'} \|h\|. \tag{5.1}
$$

Desde que I possui derivada de Gateaux contínua em Ω, segue que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\forall \delta > 0$ tal que

$$
\|I'(u+\lambda.h) - I'(u)\|_{E'} < \varepsilon, \tag{5.2}
$$

quando $\|h\| < \delta$.

Combinando (5.1) e (5.2) segue que,

$$
\frac{|I(u+h) - I(u) - I'(u)(h)|}{\|h\|} < \varepsilon.
$$

Mostrando que,

$$
\lim_{\|h\| \to 0} \frac{I(u+h) - I(u) - I'(u)(h)}{\|h\|} = 0.
$$

Da unicidade do limite segue que $DI(u) = I'(u)$ e por conseguinte I possui derivada de Fréchet contínua em Ω, ou seja, $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Mostremos que o funcional associado ao problema (P) esta bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. O funcional associado ao problema (P) é dado por

$$
I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \int_\Omega F(x,u) dx, \forall u \in H_0^1(\Omega).
$$

Note que $I_\lambda(u) = I_1(u) - I_2(u) - I_3(u)$ onde, $I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, $I_2(u) = \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx$ e $I_3(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$

Mostremos que o funcional I_λ esta bem definido,

(a) Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, segue que $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, e portanto

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

(b) Seja $u \in H_0^1(\Omega)$, das imersões segue que $|u| \in L^{2^*}(\Omega)$

Então,

$$I_2(u) = \frac{\lambda}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx < \infty.$$

(c) Note que por (f_1) e por $\sup\limits_{\Omega\times[-M,M]} |f(x,s)| = f_{_M} < \infty$, $\forall M > 0$ temos que

$$|F(x,s)| < C_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2^*}|s|^{2^*},$$

$\forall s \in \mathbb{R}$. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, segue que

$$I_3(u) = C_\varepsilon \int_\Omega dx + \frac{\varepsilon}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*} dx < \infty.$$

Portanto de (a), (b) e (c) segue que I_λ esta bem definida.

Mostremos que o funcional $I_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Provemos que $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Calculemos a derivada de Gateaux de I_1, seja u, v em $H_0^1(\Omega)$ note que

$$\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} = \frac{1}{2t}\left\{\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2\right\}.$$

Usando o fato de $H_0^1(\Omega)$ ser um espaço de Hilbert, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{I_1(u+tv)-I_1(u)}{t} &= \frac{1}{2t}\left\{\int_\Omega |\nabla(u+tv)|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2\right\}\\
&= \frac{1}{2t}\left\{\int_\Omega \nabla(u+tv).\nabla(u+tv) - \int_\Omega \nabla u.\nabla u\right\}\\
&= \frac{1}{2t}\left\{\int_\Omega \nabla u.\nabla u + 2t\int_\Omega \nabla u.\nabla v + t^2\int_\Omega \nabla v.\nabla v - \int_\Omega \nabla u.\nabla u\right\}\\
&= \frac{1}{2t}\left\{2t\int_\Omega \nabla u.\nabla v + t^2\int_\Omega \nabla v.\nabla v\right\}\\
&= \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \frac{t}{2}\int_\Omega \nabla v.\nabla v.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+tv)-I_1(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\left\{\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \frac{t}{2}\int_\Omega \nabla v.\nabla v\right\}\\
&= \int_\Omega \nabla u.\nabla v.
\end{aligned}$$

Então existe a derivada de Gateaux de I_1 em u e

$$\begin{aligned}
{I_1}'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+tv)-I_1(u)}{t}\\
&= \int_\Omega \nabla u.\nabla v.
\end{aligned}$$

Mostremos que

$${I_1}' : H_0^1(\Omega) \to \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

é contínuo.

Seja $(u_n) \subset H_0^{1,2}(\Omega)$ uma sequência tal que

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$ segue que

$$\begin{aligned}
|{I_1}'(u_n)v - {I_1}'(u)v| &= \left|\int_\Omega \nabla u_n.\nabla v - \int_\Omega \nabla u.\nabla v\right|\\
&= \left|\int_\Omega (\nabla(u_n-u).\nabla v\right|\\
&\leq \int_\Omega |\nabla(u_n-u).\nabla v|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vem que,

$$\begin{aligned}
|{I_1}'(u_n)v - {I_1}'(u)v| &\leq \int_\Omega |\nabla(u_n - u).\nabla v| \\
&\leq \left\{ \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u_n - u\|_{(H_0^1(\Omega))} . \|v\|_{(H_0^1(\Omega))} \\
&\leq \|u_n - u\|_{(H_0^1(\Omega))}
\end{aligned}$$

isso nos dá,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{(H_0^1(\Omega))} &\geq \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |{I_1}'(u_n)v - {I_1}'(u)v| \\
&= \|{I_1}'(u_n) - {I_1}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|{I_1}'(u_n) - {I_1}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &\leq \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{(H_0^1(\Omega))} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \|{I_1}'(u_n) - {I_1}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = 0,$$

mostrando que a derivada de Gateaux é contínua, pela **proposição 4.2** segue que $I_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Provemos que $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$, definimos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f(s) = \frac{\lambda |u + stv|^{2^*}}{2^*}.$$

Pela definição de f, vem que f é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\theta).$$

Então,

$$\frac{\lambda|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\frac{\lambda|u|^{2^*}}{2^*}=\lambda|u+\theta tv|^{2^*-2}(u+\theta tv)tv,$$

logo

$$\frac{\frac{\lambda|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\frac{\lambda|u|^{2^*}}{2^*}}{t}=\lambda|u+\theta tv|^{2^*-2}(u+\theta tv)v.$$

Daí

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\lambda|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\frac{\lambda|u|^{2^*}}{2^*}}{t} &= \lim_{t\to 0}\lambda|u+\theta tv|^{2^*-2}(u+\theta tv)v \\ &= \lambda|u|^{2^*-2}uv\end{aligned}$$

q.s. em Ω. E ainda,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\frac{\lambda|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\frac{\lambda|u|^{2^*}}{2^*}}{t}\right| &= \lambda|u+\theta tv|^{2^*-2}|u+\theta tv|v| \\ &= \lambda|u+\theta tv|^{2^*-1}||v| \\ &\leq \lambda(|u|+|v|)^{2^*-1}|v|.\end{aligned}$$

Desde que $u,v\in H_0^1(\Omega)$, logo $u,v\in L^{2^*}(\Omega)$. Aplicando a desigualdade de Holder com os expoentes 2^* e $\frac{2^*}{2^*-1}$ vem que

$$\int_\Omega |(|u|+|v|)^{2^*-1}||v| \leq \left(\int_\Omega |(|u|+|v|)|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}.\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}<\infty.$$

Portanto $\lambda(|u|+|v|)^{2^*-1}|v|\in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\lambda\frac{|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\lambda\frac{|u|^{2^*}}{2^*}}{t} &= \lambda\int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{\frac{|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\frac{|u|^{2^*}}{2^*}}{t} \\ &= \lambda\int_\Omega |u|^{2^*-2}uv.\end{aligned}$$

Então existe a derivada de Gateaux de I_2 em u e

$$\begin{aligned}{I_2}'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv)-I_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\lambda\frac{|u+tv|^{2^*}}{2^*}-\lambda\frac{|u|^{2^*}}{2^*}}{t} \\ &= \lambda\int_\Omega |u|^{2^*-2}uv.\end{aligned}$$

Mostremos que

$$I_2{}' : H_0^1(\Omega) \to \left(H_0^1(\Omega)\right)'$$

é contínuo.

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que

$$u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Logo, $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\Omega)$. Pelo Teorema de Vainberg, a menos de uma subsequência (denotaremos ainda por (u_n)) existe $h \in L^{2^*}(\Omega)$ tais que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.s. em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ q.s. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$ segue que

$$\begin{aligned}
|I_2{}'(u_n)v - I_2{}'(u)v| &= \left|\lambda \int_\Omega |u_n|^{2^*-2} u_n v - \lambda \int_\Omega |u|^{2^*-2} uv\right| \\
&= \lambda \left|\int_\Omega (|u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u)v\right| \\
&\leq \lambda \int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u\right| |v|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Holder com os expoentes 2^* e $\frac{2^*}{2^*-1}$ segue que

$$\begin{aligned}
|I_2{}'(u_n)v - I_2{}'(u)v| &\leq \lambda \int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u\right| |v| \\
&\leq \lambda \left(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} . \left(\int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&= \lambda \left(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} .|v|_{L^{2^*}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ segue que existe $k>0$ tal que

$$\begin{aligned}
|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| &\leq k.\lambda\left(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}.\|v\|. \\
&\leq k.\lambda(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}})^{\frac{2^*-1}{2^*}}
\end{aligned}$$

isso nos da,

$$\begin{aligned}
k\lambda\left(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} &\geq \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} |I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \\
&= \|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'}.
\end{aligned}$$

Desde que $u_n(x)\to u(x)$ q.s. em Ω segue que

$$\left||u_n(x)|^{2^*-2}u_n(x) - |u(x)|^{2^*-2}u(x)\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \to 0$$

q.s. em Ω e

$$\begin{aligned}
\left||u_n(x)|^{2^*-2}u_n(x) - |u(x)|^{2^*-2}u(x)\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq 2^{\frac{2^*}{2^*-1}}.\left\{(|u_n(x)|^{2^*-2}u_n(x))^{\frac{2^*}{2^*-1}} + (|u(x)|^{2^*-2}u(x))^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right\} \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{2^*-1}}.(h^{2^*}(x) + |u(x)|^{2^*})
\end{aligned}$$

q.s. em Ω e $\forall n\in\mathbb{N}$.

Como h^{2^*}, $|u|^{2^*}\in L^1(\Omega)$ então $2^{\frac{2^*}{2^*-1}}.(h^{2^*}+|u|^{2^*})\in L^1(\Omega)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(k.\lambda)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} &= (k.\lambda)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\int_\Omega \lim_{n\to\infty}\left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&= (k.\lambda)^{\frac{2^*}{2^*-1}}\int_\Omega 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Desde que,

$$k\lambda\left(\int_\Omega \left||u_n|^{2^*-2}u_n - |u|^{2^*-2}u\right|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \geq \|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'}$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|{I_2}'(u_n) - {I_2}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'}^{\frac{2^*}{2^*-1}} &\leq \lim_{n\to\infty} (k.\lambda)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \int_\Omega \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\lim_{n\to\infty} \|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'}^{\frac{2^*}{2^*-1}} = 0,
$$

consequentemente

$$
\lim_{n\to\infty} \|{I_2}'(u_n) - {I_2}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = 0
$$

mostrando que a derivada de Gateaux é contínua, pela **proposição 4.2** segue que $I_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Provemos que $I_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$, definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$
g(s) = F(x, u + stv).
$$

Pela definição de g, vem que g é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, do Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$
g(1) - g(0) = g'(\theta).
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
F(x, u + tv) - F(x, u) &= F'(x, u + stv) \\
&= f(x, u + \theta tv) tv,
\end{aligned}
$$

logo

$$
\frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} = f(x, u + \theta tv) v.
$$

Usando o fato da função f ser de Carathéodory segue que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} &= \lim_{t\to 0} f(x, u + \theta tv) v \\
&= f(x, u) v
\end{aligned}
$$

q.s. em Ω.

Note que da condição de crescimento de f segue que

$$
\begin{aligned}
|f(x,u+\theta tv)v| &= |f(x,u+\theta tv)|.|v| \\
&= (C_\varepsilon + \varepsilon|u+\theta tv|^{2^*-1}).|v| \\
&\leq C_\varepsilon|v| + \varepsilon|v|2^{2^*-1}(|u|^{2^*-1} + |\theta tv|^{2^*-1}) \\
&\leq C_\varepsilon|v| + \varepsilon 2^{2^*-1}|v||u|^{2^*-1} + \varepsilon 2^{2^*-1}|v|^{2^*},
\end{aligned}
$$

onde $C_\varepsilon|v| + \varepsilon 2^{2^*-1}|v||u|^{2^*-1} + \varepsilon 2^{2^*-1}|v|^{2^*} \in L^1(\Omega)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t} &= \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t} \\
&= \int_\Omega f(x,u)v.
\end{aligned}
$$

Então existe a derivada de Gateaux de I_3 em u e

$$
\begin{aligned}
{I_3}'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+tv)-I_3(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t} \\
&= \int_\Omega f(x,u)v.
\end{aligned}
$$

Mostremos que

$$
{I_3}' : H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))'
$$

é contínuo.

Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência tal que

$$
u_n \to u \text{ em } H_0^1(\Omega).
$$

Logo, $u_n \to u$ em $L^2(\Omega)$. Pelo Teorema de Vainberg, a menos de uma subsequência (denotaremos ainda por (u_n)) existe $h \in L^2(\Omega)$ tais que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.s. em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ q.s. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$ segue que

$$\begin{aligned}
|{I_3}'(u_n)v - {I_3}'(u)v| &= \left| \int_\Omega f(x,u_n)v - \int_\Omega f(x,u)v \right| \\
&= \left| \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v \right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||v|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned}
|{I_3}'(u_n)v - {I_3}'(u)v| &\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||v| \\
&\leq \left\{ \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \left\{ \int_\Omega |v|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= |f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} . |v|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Da imersão contínua de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ segue que existe $k > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|{I_3}'(u_n)v - {I_3}'(u)v| &= |f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} . |v|_{L^2(\Omega)} \\
&= k|f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} . \|v\| \\
&\leq k|f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

isso nos da,

$$\begin{aligned}
k|f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} &\geq \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} |{I_3}'(u_n)v - {I_3}'(u)v| \\
&= \|{I_3}'(u_n) - {I_3}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'}.
\end{aligned}$$

Desde que $u_n(x) \to u(x)$ q.s. em Ω e f ser Carathéodory segue que

$$|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \to 0$$

q.s. em Ω e pela condição de crescimento de f vem que

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 &\leq \big\{|f(x,u_n(x))| + |f(x,u(x))|\big\}^2 \\
&\leq \big\{C_\varepsilon + |u_n(x)|^{2^*-1} + C_\varepsilon + |u(x)|^{2^*-1}\big\}^2 \\
&\leq \big\{2C_\varepsilon + 2h(x)^{2^*-1}\big\}^2 \\
&\leq 4\big(4{C_\varepsilon}^2 + 4h(x)^{2(2^*-1)}\big) \\
&\leq 16\big({C_\varepsilon}^2 + h(x)^{2(2^*-1)}\big)
\end{aligned}$$

onde $16\big({C_\varepsilon}^2 + h(x)^{2(2^*-1)}\big) \in L^1(\Omega)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |f(x,u_n) - f(x,u)|^2_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^2 \\
&= \int_\Omega 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|{I_3}'(u_n) - {I_3}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} &\leq k \lim_{n\to\infty} |f(x,u_n) - f(x,u)|_{L^2(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|{I_3}'(u_n) - {I_3}'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = 0,$$

mostrando que a derivada de Gateaux é contínua, pela **proposição 4.2** segue que $I_3 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Podemos concluir que $I_\mu = I_1 - I_2 - I_3 \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ ∎

Capítulo 6

Apêndice C

Apresentaremos alguns resultados da teoria de gênero de Krasnoselskii, para mais detalhes veja [14, 8]

Sejam E um espaço de Banach real, defina

$$\mathcal{E} = \{A \subset E\backslash\{0\}; A \text{ é fechado em } E \text{ e simétrico na origem}\}. \tag{6.1}$$

Definição: Dado $A \in \varepsilon$, definimos o gênero de A por

i) $\gamma(A) = \inf\{n \in \mathbb{N}, \exists\ \varphi \in C(A, \mathbb{R}^n\backslash\{0\}) \text{ ímpar}\}$;

ii) $\gamma(A) = \infty$ se não existe $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ ímpar;

iii) $\gamma(\emptyset) = 0$.

Observação: Note que dizer que $\gamma(A) = j$ equivale a dizer que j é o menor número natural tal que existe uma aplicação ímpar $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^j\backslash\{0\})$

Proposição 6.1 sejam $A \in \varepsilon$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, simétrico, onde $0 \in \Omega$. Se existir $h \in C(A, \partial\Omega)$ tal que h é um homeomorfismo ímpar, então $\gamma(A) = n$.

Corolário 6.1 Seja $E = \mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado, simétrico com $0 \in \Omega$, então $\gamma(\partial\Omega) = n$.

Corolário 6.2 Seja $E = \mathbb{R}^n$ e considerando $S^{k-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^k;\ \ \|x\| = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$, então $\gamma(S^{k-1}) = k$.

Teorema 6.1 (Propriedades de Gênero)

Sejam $A, B \in \mathcal{E}$, então

i) (Normalização)

$$\gamma(\{x, -x\}) = 1, \forall x \in E\backslash\{0\}.$$

ii) (Propriedade para aplicações ímpares). Se existe $f \in C(A, B)$ ímpar, então

$$\gamma(A) \leq \gamma(B).$$

iii) (Monotonicidade). Se $A \subset B$, então

$$\gamma(A) \leq \gamma(B).$$

iv) (Subaditividade).

$$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B).$$

v) (Continuidade). Se $K \in \mathcal{E}$ é compacto, então $\gamma(K) < \infty$, e ainda, existe $\delta > 0$ tal que

$$N_\delta(K) = \{x \in E;\ \|x - K\| \leq \delta\} \in \varepsilon \ \text{ e } \ \gamma(N_\delta(K)) = \gamma(K)$$

vi) Seja $A \in \mathcal{E}$ e $\gamma(A) \geq 2$, então A possui uma infinidade de pontos.

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **149** (1973), 349-381.

[2] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong"resonance at infinity*, Nonlinear Anal. TMA **7** (1983) 981-1012

[3] H. Brézis, *Analise Functionelle*, Masson, Paris, 1983.

[4] H. Brézis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486-490.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[6] D. Clark *A Variant of the Ljurternik-Schnirelman theory* Indiana J. Math **22** (1973) 65-74

[7] E.A. Coddington, N. Levinson *Theory of Ordinary Differential Equations* International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill (1995).

[8] D. G. Costa *Tópicos em análise não-linear e aplicações as equações diferenciais*,Escola Latino-Americana de Matemática, (1986).

[9] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics v. **19** (1998).

[10] G.B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[11] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA Rio de Janeiro (2002).

[12] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case*, Ann. Ins. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **1** (1984), 109-145 e 223-283.

[13] P.L. Lions, *The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 145-201 e **2** (1985), 45-121.

[14] P.H. Rabinowitz *Minimax methods in critical point theory with applications to diferential equations*, Conference board the mathematical sciences, (1984).

[15] E. A. B. Silva *Critical point theorems and applications to differential equations*, Ph. D. Thesis, University of Wisconsin-Madison, (1998)

[16] M. S. Xavier, E. A. B. Silva *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents*, Ann. Ins Henri Poincaré, Analyse non Linéaire **2**, v.20 (2003), 341-358, v. 20.

[17] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[18] M. Willem, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.