UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MICHEL MELO ARNAUD

EQUAÇÃOES DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE VARIÁVEL NA FORMA ESTACIONÁRIA

BELÉM - PARÁ

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MICHEL MELO ARNAUD

EQUAÇÃOES DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE VARIÁVEL NA FORMA ESTACIONÁRIA

Dissertação apresentada ao Programa de pós-graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes Araújo

Área de Concentração: Análise

BELÉM - PARÁ

2012

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

MICHEL MELO ARNAUD

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM VISCOSIDADE VARIÁVEL NA FORMA ESTACIONÁRIA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

____

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo (Presidente)

Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística, UFPA

____

Memrbro Interno : Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística, UFPA

____

Membro Interno : Prof. Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa

Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística, UFPA

____

Membro Externo : Prof. Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros

IM-UFRJ

DATA DA AVALIAÇÃO: 29/03/2012

CONCEITO: ___________________________

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus pelo seu infinito amor, por ter me concedido a graça de ter chegado até aqui, pois sem Ele nada do que foi feito se faria.

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa Irlis Cristina Magalhães Arnaud, pela força e companheirismo durante toda a trajetória deste curso;

A minha mãe Maria da Conceição, pessoa que sempre orou a Deus por mim, apoiando-me de forma incansável para que eu chegasse até aqui;

Ao meu pai José Nélio, que segundo ele não me deu a melhor criação de um ser humano, mas sim a melhor que ele poderia dar;

A minha avó Ana Dias (in memorian), que desde o vestibular uniu forças comigo para que eu conseguisse vencer os obstáculos que a vida nos proporciona a cada dia;

Ao meu irmão Dheymeson Melo Arnaud, que sempre me incentivou a estudar e ter um futuro melhor;

A minhas irmãs Merielly e Merikelly, que sempre estiveram presentes nos bons e maus momentos de minha vida;

Aos meus sobrinhos Inara e João Victor, que sempre com alegria me recebem em casa quando chego da UFPA;

Às minhas tias, Socorro, Marcia, Ana Maria e as demais;

Ao meu orientador Dr. Geraldo Mendes Araújo, que há quatro anos tem compartilhado seus conhecimentos comigo e me incentivado a prosseguir na vida acadêmica;

Aos Professores Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros, Dr. João Pablo Pinheiro da Silva e Dr. Francisco Julio Sobreira de Araújo Corrêa, os quais aceitaram compor a banca examinadora deste trabalho;

Aos professores José Miguel, Carlos Bocker, Valcir, Paulo Marques, José Augusto e Giovany, dos quais eu tive a honra de ser aluno em disciplinas do mestrado;

Aos colegas de mestrado, Marcos Lima, Francisco, Walter Jesus, Liliane, Brígida, Cristyan, Marly, Carol e Elany;

Aos colegas do doutorado, Lucélia, Adan, Roselene, João Rodrigues, Augusto César e Lindomar;

Ao colega Elizardo, que foi peça fundamental para a conclusão deste trabalho;

Aos colegas de graduação Sidney, Cristiane, Jorge e Viviane;

Ao meu pastor Edson Marialva, que sempre procurou se manter informado quanto a minha vida acadêmica;

A todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Resumo

Seja Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suposta regular.

Consideremos o sistema de Navier-Stokes com viscosidade variável:

$$
(P1) \quad \left| \begin{array}{l} -\,(\nu_o + \nu_1 ||u||^2)\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f - grad\ p \ \text{ em } \ \Omega \\[2ex] div\ u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\[2ex] u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma \end{array} \right.
$$

Neste trabalho investiga-se a existência de soluções fracas para o sistema (P1) quando $n \leq 4$. A unicidade quando $n \leq 4$ também é analisada.

Palavras-chaves: Navier-Stokes, Viscosidade Variável, Forma Estacionária, Solução Fraca, Monotonicidade.

Abstract

Let Ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ supposed regular.

Consider the Navier-Stokes system with variable viscousity:

$$(P1)\qquad \left|\begin{array}{l} -(\nu_o+\nu_1||u||^2)\Delta u+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=f-grad\ p\ \text{ em }\ \Omega \\ \\ div\ u=0\ \text{ em }\ \Omega \\ \\ u=0\ \text{ em }\ \Gamma \end{array}\right.$$

In this work we investigate the existence of weak solutions to the system (P1) when $n \leq 4$

. Uniqueness of solutions when $n \leq 4$ is also analyzed.

Sumário

Introdução

O modelo matemático para descrição do movimento de um fluido viscoso incompressível é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais em coordenadas de Euler.

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f - grad\; p \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ div\; u = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \end{array} \right.$$

Sendo $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ um vetor, tal que $u_i = u_i(x, t)$, onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ e $t > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Note que u é a velocidade do fluido, f é a densidade das força externas e $p = p(x, t)$ é a pressão no ponto (x, t).

Representaremos por ν a viscosidade do fluido. Quando $\nu = 0$, (1) reduz-se ao sistema de Euler. Suponhamos $\nu > 0$.

A análise matemática de(1) foi feita primeiramente por J. Leray em 1934 cf. [5]. Depois foi investigado por O. A. Ladyzhenskaya [4], 1963; J. L. Lions [6], 1969; Roger Temam [15], 1979; Luc Tartar [14], 1999 e muitos outros matemáticos.

O problema, quando ν é da forma $\nu = \nu_o + \nu_1||u(t)||^2$, $\nu_o > 0$ e $\nu_1 > 0$, são constantes positivas, foi investigado por J. L. Lions [6] em um domínio limitado $Q = \Omega \times]0, T[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, mais precisamente, ele investigou o problema misto:

$$
(EP) \quad \left|
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \ (\nu_o + \nu_1||u(t)||^2)\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f - grad\ p \ \text{ em } \ Q \\[2ex]
div\ u = 0 \ \text{ em } \ Q \\[2ex]
u = 0 \ \text{ em } \ \sum \\[2ex]
u(x,0) = u_0 \ \text{ em } \ \Omega
\end{array}
\right.
$$

onde provou a existência de solução para $n \leq 4$ e unicidade para $n \leq 3$. Para o caso $\nu_1 = 0$, temos a unicidade para $n < 3$, cf Lions e G. Prodi [8]. O caso não cilindríco de (EP) foi investigado por Araújo, Miranda e Medeiros [1], de forma semelhante.

Seja Ω um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suposta regular. O problema estacionário correspondente ao problema de evolução (EP) consiste em determinar , $u = \{u_1, u_2, ...u_n\}$ e p satisfazendo:

$$
(SP) \quad \left|
\begin{array}{l}
- \ (\nu_o + \nu_1||u||^2)\Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = f - grad\ p \ \text{ em } \ \Omega \\[2ex]
div\ u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \\[2ex]
u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma
\end{array}
\right.
$$

Quando $\nu_1 = 0$, a análise matemática de (SP) foi feita por Lions[6] e Temam[14].

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções do problema (SP) quando $n \leq 4$.

Unicidade de soluções para o caso de $n \leq 4$ é também analisado.

Capítulo 1

Resultados preliminares e definições

Lema 1.1. *: (Combinação linear)*

Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *um conjunto L.I. de vetores de um espaço normado* X *(de qualquer dimensão). Então existe* $C > 0\,, C \in \mathbb{R}$*, tal que para toda coleção de escalares* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *tem-se*

$$||\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n|| \geq C(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|) \qquad (1.1)$$

Demonstração: Seja $S = |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|$. Se $S = 0$, todos α_i são nulos, logo temos que (1.1) vale para qualquer C.

$$||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|| \geq C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)$$

Seja $S > 0$, então (1.1) é equivalente a desigualdade que obtemos de (1.1) pela divisão por S. Sendo $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{S}$,

$$\begin{aligned}
\frac{||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n||}{S} &\geq \frac{C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)}{S} \\
||\frac{\alpha_1}{S} x_1 + ... + \frac{\alpha_n}{S} x_n|| &\geq \frac{C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)}{|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|} \\
||\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n|| &\geq C, \qquad \text{sendo} \quad (\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1) \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Portanto, basta provar a existência de um $C > 0$ tal que, (1.2) valha para todas as n-uplas de escalares $\beta_1, ..., \beta_n$ com $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$.

Suponhamos que isso é falso. Então, existe uma sequência (y_m) de vetores.

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + ... + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^{m} |\beta_i^{(m)}| = 1$$

tal que $||y_m|| \to 0$, quando $m \to \infty$.

Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\beta_j^{(m)}| = 1$, temos que $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$, para cada $j = 1, ..., n$

Portanto, para cada j fixo a sequência

$$(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \beta_j^{(3)})$$

é limitada. Consequentemente, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, $(\beta_1^{(m)})$ possui uma subsequência convergente. Seja β_1 o limite dessa subsequência e (y_{1m}) a subsequência convergente de (y_m), onde as entradas de x_1 são os termos da subsequência convergente de $(\beta_1^{(m)})$. Pelo mesmo argumento, (y_{1m}) tem uma subsequência (y_{2m}), para o qual a subsequência correspondente de escalares $(\beta_2^{(m)})$ converge, sendo β_2 o limite. Continuando desta forma, após n passos obtemos uma subsequência $(y_{nm}) = (y_{n_0 1}, y_{n_0 2}, ...)$ de (y_m), cujos termos são da forma,

$$y_{nm} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(m)} x_j \, ; \quad (\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(m)}| = 1)$$

Com escalares $\gamma_j^{(m)}$ satisfazendo $\gamma_j^{(m)} \to \beta_j$ quando $m \to \infty$.

Portanto, como $m \to \infty$

$$y_{nm} \to y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$$

Onde $\sum |\beta_j| = 1$ de modo que nem todos β_j podem ser zero, uma vez que $\{x_1, ..., x_n\}$ é um conjunto L.I.. Assim temos $y \neq 0$.

Por outro lado, $y_{nm} \to y$, ou seja, $||y_{nm}|| \to ||y||$, pela continuidade da norma. Como $||y_n|| \to 0$, por suposição, temos que $||y_{nm}|| \to 0$. Pela unicidade do limite, $||y|| = 0$, logo $y = 0$. Isto contradiz o fato $y \neq 0$. Portanto o lema está provado.

Teorema 1.1. ***(Teorema do ponto fixo de Brouwer)*** Seja B a bola fechada de centro O e raio 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Toda aplicação contínua $f : B \to B$ possui (pelo menos) um ponto fixo.

Demonstração. Ver S.Kesavan [3]

Lema do Ângulo agudo:

Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que para um $\rho > 0$ conveniente se tenha $\langle (P(\xi), \xi) \rangle \geq 0 \;\; \forall \;\; ||\xi|| \leq \rho$. Então existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $||\xi|| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$.

Demonstração. O lema diz que se o ângulo entre ξ e $P(\xi)$ é agudo $\forall \ \ \xi \in \mathbb{R}^n$ com $||\xi|| = \rho$, então a equação $P(\xi) = 0$ tem uma solução na bola $||\xi|| \leq \rho$.

Suponhamos por contradição que $P(\xi) \neq 0, \ \ \forall \ ||\xi|| \leq \rho$.

Seja,

$$\begin{aligned} f : \overline{B(0,\rho)} &\rightarrow \overline{B(0,\rho)} \\ \xi &\mapsto -\rho.\frac{P(\xi)}{||P(\xi)||}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

notemos que f é contínua.

Considere também,

$$\begin{aligned} g : \overline{B(0,1)} &\rightarrow \overline{B(0,1)} \\ \xi &\mapsto -\frac{P(\rho\xi)}{||P(\rho\xi)||}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

notemos que g tabém é contínua.

Logo pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $\xi_0 \in \overline{B(0,1)}$ tal que,

$$\xi_0 = g(\xi_0). \quad \text{Logo} \ \ \xi_0 = -\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||}$$

Desse modo, $\xi_1 = \rho\xi_0$ é ponto fixo de f.

De fato,

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= -\rho\frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||} = -\rho.\frac{P(\rho\xi_0)}{||P(\rho\xi_0)||} \\ &= \rho.\xi_0 = \xi_1 \end{aligned}$$

Temos $||\xi_1|| = \rho$

$$\langle P(\xi_1), \xi_1 \rangle = \left\langle P(\xi_1), \;\; -\rho \frac{P(\xi_1)}{||P(\xi_1)||} \right\rangle = \frac{-\rho}{||P(\xi_1)||} \langle P(\xi_1), P(\xi_1) \rangle$$

$$= \frac{-\rho}{||P\xi_1||} ||P(\xi_1)||^2 = -\rho ||P(\xi_1)||.$$

Como nós supomos que $P(\xi) \neq 0, \forall \;\; ||\xi|| \leq \rho$ e por hipotese $\rho > 0$, temos que

$$\langle P(\xi_1), \xi_1 \rangle < 0$$

Absurdo, pois por hipótese

$$< P(\xi), \xi > \geq 0 \quad \forall \quad \xi \;\; com \;\; ||\xi|| = \rho$$

.

Definição 1.1. *:* Definamos os seguintes espaços

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\varphi \in (D(\Omega))^n ; div \; \varphi = 0\} \\ V &= \overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^n} \quad \text{e} \quad H = \overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^n} \end{aligned}$$

Definição 1.2. *:* Definamos o produto interno e a norma em V

$$\begin{aligned} ((u, v)) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \\ ||u||^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 du. \end{aligned}$$

Definição 1.3. *:* Definamos o produto interno e a norma em H.

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_i(x) v_i(x) du, \\ |u|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_i(x)|^2 du. \end{aligned}$$

Definição 1.4. *:* Consideremos $a(u,v)$ a forma bilinear em V

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx$$

Definição 1.5. *:* Definamos para $u \in \ V$

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx = ||u||^2$$

Definição 1.6. *:* Consideremos $b(u,v,w)$ a forma trilinear em V

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx.$$

Definição 1.7. *:* Considere $f \in V'$. Então a função $u \in V$ é chamada solução fraca do problema (SP) quando satisfaz.

$$(\nu_0 + \nu_1 ||u||^2) a(u,v) + b(u,u,v) =< f, v > \quad \forall \ \ v \in V$$

em que $<,>$ denota a dualidade entre V e V', sendo V' o dual topológico de V.

Observação 1.1. *: Notemos que*

$$\nu_1 ||u||^2 a(u,v) = \nu_1 ||u||^2 < -\Delta u, v >=< -\nu_1 ||u||^2 \Delta u, v >=< Au, v > \quad \forall \ \ v \in \ V$$

Onde, $Au = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$.

Observação 1.2. *: A aplicação A leva objetos de V em V', e conjuntos limitados de V em conjuntos limitados de V'.*

Na verdade é suficiente definir, $f_u = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$. Temos que

$$\|f_u\|_{V'} = \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in V}} |\langle f_u, v \rangle| = \sup_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in V}} \nu_1 \|u\|^2 |a(u,v)| \leq \nu_1 \|u\|^3.$$

Definição 1.8. *:* Uma sequência $(e_n) \subset H$ é dita base Hilbertiana de H se satisfaz as seguintes condições:

(i) $|e_n| = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$; $(e_m, e_n) = 0 \ \forall \ m \neq n$.

(ii) O espaço vetorial gerado por $\{e_1, e_2, ...\}$ é denso em H.

Observação 1.3. *: Temos que $\theta(S) = S^2$ é convexo, pois $\theta''(S) = 2 > 0$.*

Lema 1.2. *: Para cada $t \in [0,T]$ fixado, consideremos o funcional*

$$J : V \to \mathbb{R}$$

definido por

$$Ju = \frac{\nu}{4}\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx\right)^2, \forall\ u \in V.$$

Então,

1. J é Gateaux-diferenciável em V e a derivada $J'(v)$ é dada por

$$< J'u, v > = < A_u, v > \quad \forall \ \ u,\, v \in \ V$$

onde,

$$A_u = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$$

2. J é convexo, ou seja, $J(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda Ju + (1-\lambda)Jv \quad \forall \ \ u, v \in \ V$, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$.

Prova: De fato

$$< J'u, v >= \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u+\lambda v) - Ju}{\lambda}$$

onde,

$$\frac{J(u+\lambda v) - Jv}{\lambda} = \frac{\nu}{4\lambda} \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right)^2 - \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right)^2 \right\}$$

definimos,

$$\theta(\lambda) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)^2 dx \right)^2, \qquad \text{onde} \quad a = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \ \text{ e } \ b = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \tag{1.3}$$

De (1.3), temos,

$$\begin{aligned}
\theta'(\lambda) &= 2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)^2 du \right) . \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)^2 du \right) \\
&= 2 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)^2 du . \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega 2(a+\lambda b)\ b\ dx\ .\ \textit{Logo} \\
\theta'(\lambda) &= 4 \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)^2 du \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a+\lambda b)\ b\ dx \right) \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Sendo, $\theta(0) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a)^2 du \right)^2$.

De (1.4) temos que,

$$\begin{aligned}
\theta'(0) &= 4 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a)^2 dx \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a.b\ dx \\
&= 4 \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) dx \\
\theta'(0) &= 4||u|| < -\Delta u, v >= 4 < -||u||^2 \Delta u, v >
\end{aligned}$$

Como $\quad \frac{\nu}{4}\ \theta'(0) = \frac{\nu}{4} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u+\lambda v) - Ju}{\lambda}$,

concluimos que

$$< J'u, v >= \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u+\lambda v) - Ju}{\lambda} = \frac{\nu}{4}\ \theta'(0).$$

Como o limite existe, J é Gateaux-diferenciável, e

$$\begin{aligned} < J'u, v > &= \frac{\nu}{4}\ \theta'(0) = \frac{\nu}{4} 4 < -||u||^2 \Delta u, v > = < -\nu ||u||^2 \Delta u, v > \\ < J'u, v > &= < Au, v > . \end{aligned}$$

Mostremos que J é um funcional convexo.

Levando em consideração a observação 1.3, temos que $\widetilde{J}u = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx$ é convexo e que

$$\begin{aligned} \widetilde{J}[(1-\lambda)u + \lambda v] &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left[(1-\lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right]^2 dx \\ &\leq (1-\lambda) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx + \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \end{aligned} \tag{1.5}$$

Decorre de (1.5) que

$$J[(1-\lambda)u + \lambda v] = \frac{\nu}{4} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left[(1-\lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right]^2 dx \right\}^2$$

$$\leq \frac{\nu}{4} \left\{ (1-\lambda) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx + \lambda \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right\}^2$$

$$\leq \frac{\nu}{4} \left\{ (1-\lambda) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right)^2 + \lambda \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 dx \right) \right\}^2$$

$= (1-\lambda)Ju + \lambda Ju.$ Portanto, J é convexo.

Teorema 1.2. *(Rellich):* Seja Ω um aberto, limitado, bem regular de $\mathbb{R}^n$. Então, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta.

Dem: Ver L.A. Medeiros [9]

Lema 1.3. *:* Seja $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e (f_ν) uma sucessão de funções de $L^p(\mathcal{O})$, $1 < p < \infty$, tais que $f_\nu(x) \to f(x)$ quase sempre em $\mathcal{O}$ e

$\int_{\mathcal{O}} |f_\nu(x)|^p \; dx \leq M < \infty, \;\; \forall \; \nu \in \mathbb{N}$. Então $f_\nu \to f$ fraco em $L^p(\mathcal{O})$.

Dem: Ver J.L. Lions [6]

Observação 1.4. *: Como $J' = A$, temos que A é um operador monótono, de acordo com Lions [6].*

Lema 1.4. *:* Seja $t \in [0, T]$, t fixado, e $A: \; V \to \; V'$ definido por

$$Au = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$$

Então, A é hemicontínuo, isto é, a aplicação

$$\lambda \longmapsto < (u + \lambda v), w >$$

é contínua para $u, v, w \in V$ fixados.

Prova: Seja $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e (λ_n) uma sequência de números reais tais que,

$$\lambda_n \to \lambda_0, \quad n \to \infty$$

Temos que

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle = \left\langle -\nu_1 ||u + \lambda_n v||^2 \Delta(u + \lambda_n v), w \right\rangle \tag{1.3}$$

onde

$$-\nu_1 ||u + \lambda_n v||^2 \Delta(u + \lambda_n v) = \nu_1 \left\{ \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right\}$$

Notemos que

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \in L^1(\Omega)$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega).$$

Pois

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\frac{\partial v_i}{\partial x_j},\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \quad \forall\ u,v,w \in V.$$

Portanto, existe uma subsequência de (λ_n), denotada ainda por (λ_n), tal que,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2$$

quase sempre em Ω. Logo

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right).\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \longrightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right).\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$$

quase sempre em Ω.

Além disso,

$$\left|\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right| \leq \left|\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+C_1\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right| \qquad \text{quase sempre em } \Omega \quad e$$
$$\left|\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \leq \left|\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+C_2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \qquad \text{quase sempre em } \Omega$$

Aplicando o teorema da convergência denominado de Lebesgue temos:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx \ \rightarrow\ \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)^2 dx$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx \ \rightarrow\ \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)+\lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}dx$$

Usando as convergências anteriores, concluimos que,

$$\left\langle -\nu_1 ||u+\lambda_n v||^2 \Delta(u+\lambda_n v), w\right\rangle \rightarrow \left\langle -\nu_1 ||u+\lambda_0 v||^2 \Delta(u+\lambda_0 v), w\right\rangle$$

Portanto, $Au = -\nu_1 ||u||^2 \Delta u$ é hemicontínuo.

Lema 1.5. *:* Dados $u, v, w \in V$, temos que $b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0$

Demonstração

$$\begin{aligned}
b(u,v,w) + b(u,w,v) &= \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx + \int_\Omega u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i dx \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega u_j \frac{\partial (v_i w_i)}{\partial x_j} dx \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega \frac{\partial (v_i w_i)}{\partial x_j} u_j dx \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \int_\Omega (v_i w_i) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} (v_i w_i) u_j dx \right) \\
&= \left(- \int_\Omega (v_i w_i) div\, u\, dx \right) = 0, \quad \text{pois,} \quad u \in \ V
\end{aligned}$$

Logo, $b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0$

Lema 1.6. *:* A forma trilinear $b(u,v,w)$, para $n \leq 4$, é contínua.

Demonstração: Mostrar-se-a a continuidade de $b(u,v,w)$ em

$$V \times \ V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$$

O espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ é dotado da norma

$$v \longmapsto (||v||^2 + ||v||^2_{(L^n(\Omega))^n})^{\frac{1}{2}}$$

com,

$$||v||^2_{(L^n(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{L(\Omega)}$$

Considera-se $u \in\ V,\ v \in\ V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Tem-se que $u_i \in H^1_0(\Omega), \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$.

Devido ao teorema de imersão de Sobolev resulta que $H^1_0(\Omega \hookrightarrow L^q(\Omega))$ com $q = \dfrac{2n}{n-2}$.

Se $n > 2$, segue-se que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

e $u_i \in L^q(\Omega),\ \dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $w_i \in L^n(\Omega)$, assim tem-se que

$$|b(u,v,w)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| dx$$

devido desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_j|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |w_i|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} ||u_j||_{L^q(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}
\end{aligned}$$

Como $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ ||u_j||_{L^q(\Omega)} \leq C||u_j||_{H^1_0(\Omega)}$,

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i,j=1}^{n} ||u_j||_{H^1_0(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy relativamente ao indice j resulta,

$$|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ||u_j||^2_{H^1_0(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} ||w_i||_{L^n(\Omega)}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)} = ||v_i||_{H^1_0(\Omega)}
\end{aligned}$$

Logo

$$|b(u,v,w)| \leq C||u|| \sum_{i=1}^{n} ||v_i||_{H_0^1(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}$$

Pela desigualdade de Cauchy para somas, segue-se que

$$|b(u,v,w)| \leq C||u|| \left(\sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_i||^2_{L^n(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo,

$$|b(u,v,w)| \leq c||u||||v||||w||_{(L^n(\Omega))^n}$$

Mostrando que $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Agora, para $n \leq 4$ temos que $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$. De fato, é imediato que $(V \cap (L^n(\Omega))^n \subset V)$. Resta mostrar que $V \subset (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. Notemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ quando $n \leq \dfrac{2n}{n-2}$, devido ao teorema de Imersão de Sobolev, ou seja, quando $n \leq 4$. Seja $u \in V$, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ implica que $V \subset (H_0^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^n(\Omega))^n$ resulta que $u \in (L^n(\Omega))^n$, e assim $u \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Portanto, $(V \cap (L^n(\Omega))^n) = V$ para $n \leq 4$.

Assim, $|b(u,v,w)| \leq c\,||u||||v||||w||, \;\; \forall \;\; u,v,w \in V$.

Capítulo 2

Existência de Solução

Teorema 2.1. *: (Solução fraca)* Suponhamos $n \leq 4$. Se $f \in V'$, então existe uma solução no sentido da definição (1.7), ou seja, uma solução fraca do problema (SP)

Demonstração: Seja (w_ν) uma base Hilbertiana de V. Considere $V_m = [w_1, w_2, ...w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, ...w_m$ da base Hilbertiana (w_ν) de V.

Considere o problema aproximado: determinar $u_m \in V_m$, verificando

$$\nu_0 a(u_m, v) + < Au_m, v > + b(u_m, u_m, v) = < f, v > \quad \forall \ v \in \ V_m \tag{2.1}$$

Precisamos provar que (2.1) tem uma solução $u_m \in \ V_m$.

Para isso, vamos aplicar o lema do ângulo agudo, Cf. Lions[6] ou Temam[13]. Consideremos o vetor $\eta = (\eta_i), \ 1 \leq i \leq n$ de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\eta_i = \nu_0 a(u_m, w_i) + < Au_m, w_i > + b(u_m, u_m, w_i) - < f, w_i > \tag{2.2}$$

Seja $\xi = \xi_i,\ \ 1 \leq i \leq m$ tal que os ξ_i são as componentes do vetor u_m de V_m.

A aplicação $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $P(\xi) = \eta$ é contínua.

Se provarmos que $(P(\xi), \xi) \geq 0$ para $||\xi||_{\mathbb{R}^m} = \rho$, com $\rho > 0$ apropriado, seguirá pelo lema do ângulo agudo que existe um $\xi \in B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $P(\xi) = 0$.

Isso implica a existência de uma solução para (2.2).

Temos

$$(P(\xi), \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i = \nu_0 a(u_m, u_m) + < Au_m, u_m > + b(u_m, u_m, u_m) - < f, u_m > \qquad (2.3)$$

Como $\langle Au_m, u_m \rangle = \nu_1 ||u_m||^4$ e $b(u_m, u_m, u_m) = 0$

Obtemos, a partir de (2.3), que

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 - \|f\|_{V'} \|u_m\|_V, \quad \text{pois}$$

$$\langle f, u_m \rangle \ \leq \|f\|_{V'} \| |u_m| \|_V$$

$$- \langle f, u_m \rangle \geq -\|f\|_{V'} \| |u_m| \|_V. \qquad (2.1)$$

Logo

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 - C||u_m||$$

$$(P(\xi), \xi) \geq \nu_0 ||u_m||^2 - C||u_m||$$

Pelo lema da combinação linear temos que

$$C_1 ||\xi|| \leq ||u_m||$$

Escolhendo $||\xi|| = \rho$ conveniente, $||\xi|| \geq \dfrac{C}{C_1 \nu_0}$

$$\frac{C}{\nu_0} \leq C_1 ||\xi|| \leq ||u_m||$$

$$\Rightarrow \frac{C}{\nu_0} ||u_m|| \leq ||u_m||^2 \Rightarrow ||u_m||^2 - \frac{C}{\nu_0} ||u_m|| \geq 0$$

$\nu_0 ||u_m||^2 - C||u_m|| \geq 0$. Logo, pelo lema do ângulo agudo, existe $\xi \in \mathbb{R}^m$, $||\xi|| \leq \rho$ tal que $P(\xi) = 0$. Isso implica que o sistema (2.1) tem uma solução $u_m \in V_m$ correspondente a este ξ.

Temos de (2.1) com $v = u_m$ que

$$\nu_0 ||u_m||^2 + \nu_1 ||u_m||^4 \leq \|f\|_{V'} ||u_m||_V \qquad (2.4)$$

Pois,

$$\langle A u_m, u_m \rangle = \nu_1 ||u_m||^2 a(u_m, u_m) = \nu_1 ||u_m||^4 \quad \text{e} \quad b(u_m, u_m, u_m) = 0$$

Segue de (2.4) que

$$\nu_0 ||u_m|| \leq ||f||_{V'}, \qquad \text{logo}$$

$$||u_m|| \leq \frac{1}{\nu_0} ||f||_{V'} \qquad (2.5)$$

Segue de (2.5) que podemos extrair uma sequência limitada (u_m) em V, tal que

$$u_m \to u \quad \text{fraco em} \quad V$$

Usando a observação (1.2) temos que $||Au_m||_{V'} \leq \nu_1 ||u_m||_V^3$, esse fato, juntamente com

(2.5), permitem concluir que

$$Au_m \to \mathcal{X} \quad \text{fraco em} \quad V'$$

Como $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tem imersão compacta em $L^2(\Omega)$, segue-se que podemos extrair uma subsequência de (u_{mi}) denotada por u_{mi}, tal que

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{forte} \quad L^2(\Omega),$$

ou seja,

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega$$

Isso implica que

$$u_{mi}u_{mj} \to u_i u_j \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega \quad (2.6)$$

Como $n \leq 4$, temos que

$$u_{mi} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$$

Portanto,

$$|u_{mi}u_{mj}|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u_{mi}(x)u_{mj}(x)|^2 dx = \int_\Omega |u_{mi}(x)|^2 |u_{mj}(x)|^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mi}(x)|^4 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{mj}(x)|^4 dx = \frac{1}{2}||u_{mi}||^4_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{2}||u_{mj}||^4_{L^4(\Omega)} \leq C \quad (2.7)$$

Decorre de (2.6) , (2.7) e do lema (1.3) que

$$u_{mi}u_{mj} \to u_i u_j \quad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega) \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial w_{jk}}{\partial_{Xk}} \in L^2(\Omega), \quad \text{pois} \quad w_{jk} \in H_0^1(\Omega) \qquad (2.9)$$

Segue de (2.8) e (2.9) que

$$b(u_m, u_m, w_j) + b(u_m, w_j, u_m) = 0$$

$$b(u_m, u_m, w_j) = -b(u_m, w_j, u_m)$$

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_{mi}(x) \frac{\partial w_{jk}}{\partial_{Xk}}(x) u_{mk}(x) dx \longrightarrow -\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega u_i(x) \frac{\partial w_{jk}}{\partial_{Xk}} u_k(x) dx = b(u, u, w_j)$$

$$b(u_m, u_m, w_j) \to b(u, u, w_j)$$

Usando a convergência anterior e a densidade de V_m em V, temos

$$\nu_0 a(u, v) + \langle \mathcal{X}, v \rangle + b(u, u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall \quad v \in V \qquad (2.10)$$

O próximo passo é provar que $\mathcal{X} = Au$. Para isto utilizamos a monotonicidade do operador A. Temos que

$$\langle Au_m - Av, u_m - v \rangle \geq 0 \quad \forall \ v \in V$$

$$\langle Au_m, u_m \rangle - \langle Au_m - v \rangle - \langle Av, u_m - v \rangle \geq 0 \quad \forall \ v \in V \qquad (2.11)$$

A equação aproximada (2.1) nos dá,

$$\langle Au_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle - \nu_0 ||u_m||^2 \qquad (2.12)$$

De (2.11) e (2.12), obtemos,

$$\langle f, u_m \rangle - \nu_0 ||u_m||^2 - \langle Au_m, v \rangle - \langle Av, u_m - v \rangle \geq 0 \qquad (2.13)$$

Como

$$u_m \to u \text{ fraco em } \ V.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\nu_0||u_m||^2 &\leq \liminf \nu_0||u_m||^2 \\
-\nu_0||u_m||^2 &\geq -\liminf \nu_0||u_m||^2 \\
-\nu_0||u_m||^2 &\geq \limsup(-\nu_0||u_m||^2) \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Tomando do $\limsup$ em ambos os lados da desigualdade (2.13) e usando (2.14), juntamente com as convergências anteriores obtidas, temos

$$\langle f, u\rangle - \nu_0||u_m||^2 - \langle \mathcal{X}, v\rangle - \langle\ Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad (2.15)$$

Por outro lado, da equação (2.10), obtemos,

$$\nu_0||u||^2 + \langle \mathcal{X}, u\rangle = \langle f, u\rangle\,.$$

Levando em consideração (2.15) temos

$$\langle \mathcal{X}, u\rangle - \langle \mathcal{X}, v\rangle - \langle\ Av, u - v\rangle \geq 0,$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{X} -\ Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall\ v \in\ V.$$

Considerando $v = u - \lambda w$, com $\lambda > 0$ e $w \in V$ arbitrários, na última desigualdade, vem que:

$$\langle \mathcal{X} - A(u - \lambda w), w \rangle \geq 0 \qquad (2.16)$$

Mas o operador A é hemicontínuo, logo

$$\langle \mathcal{X} - A(u - \lambda w), w \rangle \rightarrow \langle \mathcal{X} - Au, w \rangle \quad \forall\ w \in V,\ \ \lambda \rightarrow 0$$

Dessa convergência e (2.16), obtemos

$$\langle \mathcal{X} - Au, w \rangle \geq 0,\ \ \forall\ w \in V$$

.

O que implica

$$\langle \mathcal{X} - Au, w \rangle = 0 \text{ para um certo } w \neq 0$$

Assim,

$$Au = \mathcal{X} \text{ em } V \qquad (2.17)$$

. De (2.17) e (2.10) concluimos a prova da existência da solução.

Capítulo 3

Unicidade de Solução

Teorema 3.1. *:* Se $n \leq 4$ e ν_0 é suficientemente grande ou f suficientemente pequeno, então existe uma única solução u no sentido da definição (1.7), ou seja, do problema (SP).

Demonstração: Quando $n \leq 4$, a forma trilinear $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times V$, isto é,

$$|b(u,v,w)| \leq c||u||||v||||w|| \qquad (2.18)$$

Onde c é uma constante positiva.

Sejam u e $\widetilde{u}$ duas diferentes soluções de (2.1). Então

$$\nu_0 a(u,v) + \langle \mathcal{A}u, v\rangle + b(u,u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in V \qquad (2.19)$$

$$\nu_0 a(\widetilde{u},v) + \langle \mathcal{A}\widetilde{u}, v\rangle + b(\widetilde{u},\widetilde{u},v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in V \qquad (2.20)$$

Seja $w = u - \widetilde{u}$. Segue que

$$\nu_0 a(w,v) + \langle\ Au, v\rangle - \langle\ A\widetilde{u}, v\rangle + b(u,u,v) - b(\widetilde{u},\widetilde{u},v) = 0$$

Observação 3.1. *:*

$$\begin{aligned}
b(u,u,v) - b(\widetilde{u},\widetilde{u},v) &= b(u,u,v) - b(\widetilde{u},u,v) + b(u,u,v) - b(u,\widetilde{u},v) - b(u,u,v) \\
&+ b(u,\widetilde{u},v) + b(\widetilde{u},u,v) - b(\widetilde{u},\widetilde{u},v) \\
&= b(u-\widetilde{u},u,v) + b(u,u-\widetilde{u},v) - [b(u,u,v) - b(u,\widetilde{u},v) \\
&- b(\widetilde{u},u,v) + b(\widetilde{u},\widetilde{u},v)] \\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - [b(u,u-\widetilde{u},v) + b(\widetilde{u},\widetilde{u}-u,v)] \\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - [b(u,w,v) + b(\widetilde{u},-w,v)] \\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - [b(u,w,v) - b(\widetilde{u},w,v)] \\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - [b(u-\widetilde{u},w,v)] \\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - b(w,w,v)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\nu_0 a(w,v) + \langle\ Au, v\rangle - \langle\ A\widetilde{u}, v\rangle + b(w,u,v) + b(u,w,v) - b(w,w,v) = 0$$

Fazendo $v = w$

$$\nu_0 a(w,w) + \langle\ Au -\ A\widetilde{u}, w\rangle + b(w,u,w) = 0$$

pois

$$b(u,w,w) = 0 = b(w,w,w)$$

Da última equação

$$\nu_0 a(w,w) + \langle\ Au - \ A\widetilde{u}, u - \widetilde{u}\rangle + b(w,u,w) = 0$$

ou seja,

$$\nu_0 a(w,w) + \langle\ Au - \ A\widetilde{u}, u - \widetilde{u}\rangle = -b(w,u,w)$$

Além disso,

$$\langle\ Au - \ A\widetilde{u}, u - \widetilde{u}\rangle \geq 0$$

pois A é monótono. Temos usando (2.18),

$$\nu_0 ||w||^2 \leq -b(w,u,w) \leq |b(w,u,w)| \leq c||w||^2||u||,$$

ou seja,

$$\nu_0 ||w||^2 \leq c.||w||^2||u|| \qquad (2.21)$$

Fazendo $u = v$ em (2.19) temos que

$$\nu_0 a(u,u) + \langle\ Au, u\rangle + b(u,u,u) = \langle f, u\rangle\,,$$

o que implica

$$\nu_0 ||u||^2 + \nu_1 ||u||^4 \leq ||f||_{\ V'}.||u||$$

pois $b(u,u,u) = 0$ e $\langle\ Au, u\rangle = \nu_1 a(u,u)||u||^2 = \nu_1 ||u||^2||u||^2 = \nu_1||u||^4$.

Logo,

$$\nu_0||u||^2 \leq ||f||_{\ V'}.||u||$$

$$||u|| \leq \frac{1}{\nu_0}||f||_{\ V'}\ , \qquad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.21),

$$\nu_0||w||^2 \leq \frac{c}{\nu_0}||f||_{\ V'}.||w||^2$$

Ou ainda

$$(\nu_0^2 - c||f||_{\ V'}).||w||^2 \leq 0$$

Se $\nu_0^2 > c||f||_{\ V'}$, isto é, se ν_0 é suficientemente grande ou $||f||_{\ V'}$ suficientemente pequeno, obtemos,

$$||w||^2 \leq 0.$$

Desse modo

$$||w||^2 \leq 0 \Rightarrow ||w|| = 0 \Rightarrow w = 0,$$

logo

$$u - \widetilde{u} = 0$$

Portanto $u = \widetilde{u}$, ou seja, a solução é única

Capítulo 4

Referências Bibliográficas

[1] G. M. DE ARAÚJO, M. Milla Miranda and L.A. Medeiros, On the Navier-Stokes Equation with Variable Viscosity in a Noncylindrical Domain. Applicable Analysis, Vol. 86, N.3, March 2007, 287-313.

[2] H. BRÉZIS, Analyse Functionelle, Théorie et applications, ed. Masson, Paris 1983.

[3] S.KESAVAN, Topics in Functional Analysis and Applications,1989.

[4] O. A. LADYZHENSKAYA, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach-London(Second Edition), New York, 1989.

[5] J. LERAY, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. Math Pures Appl. t. XIII(1934), 331-418.

[6] J. L. LIONS, Quelques Méthodes de Résolution Des Problèmes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[7] R. Mangabeira, Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domnío Cilíndrico

[8] J. L. Lions et G. Prodi, Un théorème d'existence et unicité dans les equations de Navier-Stokes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959, pp. 319-321), Ouvres Choisies de Jacques-Louis Lions, Vol.1-EDP-sciences, Paris, 2003, pp. 117.

[9] L.A. Medeiros, Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Rio de Janeiro,1889.

[10] L. A. Medeiros, Lições de Equações Diferenciais Parciais, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio, 2002.

[11] L. A. Medeiros, Applications of Monotony Method, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio, 2005.

[12] G. Prodi, Un Teorèma d'unicitá per la equarzioni di Navier-Stokes,
Annali di Mat. Pura et Appl., t. 18(1959), 173-182.

[13] L. Tartar, Topics in Nonlinear Analysis, Publications Mathèmatiques d'Orsay,Université Paris-Sud.,Orsay,1978.

[14] L. Tartar, Partial Differential Equations Models in Oceanography, Carnegie Mellon University-1999.

[15] R. Temam, Navier- Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland Publishing Company, 1979.