MARCOS LIMA CARDOSO

Solvabilidade de uma Classe de Problemas Parabólicos nos Espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$

BELÉM
2012

MARCOS LIMA CARDOSO

Solvabilidade de uma Classe de Problemas Parabólicos nos Espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Pará.

Orientador:

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

BELÉM

2012

MARCOS LIMA CARDOSO

Solvabilidade de uma Classe de Problemas Parabólicos nos Espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$

Esta Dissertação foi apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME da Universidade Federal do Pará, julgada pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Correia

Universidade Federal, UFPA

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva

Universidade Federal, UFPA

Prof. Dr. Pablo Braz e Silva

Universidade Federal, UFPE

Aprovada em: 29 / 06 / 2012

Dedicatória

Aos meus pais Maria dos Anjos e Nestor Neves e à minha "avó", Teófila Lima(em memória), por tudo o que representam na minha vida.

"Quando vejo um homem inútil, penso que talvez fosse unicamente a ocasião o que lhe faltou para provar os tesouros que contém, e que necessitavam apenas de uma chave para abrir, quer dizer um justo encorajamento para expandir-se com brilho"

Pascal.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus por estar presente em minha vida em todos os momentos, por ter-me dado capacidade e coragem para enfrentar os desafios com esperança e fé e pela proteção que fortalece o meu espírito.

A minha "avó", Teófila Lima(em memória), pela boa criação e educação que me fez ser o que sou e por pedir por mim em suas orações.

A meus pais Nestor Neves e Maria dos Anjos que sempre estiveram a meu lado, incansáveis em apoiar-me em tudo o que precisei, além de me proporcionarem consciência e bom senso para fazer escolhas corretas sempre discernindo o certo do errado.

A meus irmãos que sempre se dispuseram a ajudar-me em tudo.

Aos amigos Rômulo, Dalmir e Elifaleth pelo apoio e incentivo. Aos "colegas"do doutorado Sebastião, Lindomar, Gesson, Amanda e Renato pelo companheirismo. Ao João cujo material e explicações nos momentos de dúvidas foram primordiais para a minha evolução no curso.

Ao Mateus cujo carisma e humildade fazem dele um ótimo ser humano e um grande amigo no convívio diário.

Aos colegas de curso Cristian, Brígida, Marly, Carol, Elany, Marcelo, Valter, Juliana, Michel e Francisco pela boa convivência dentro e fora da sala de aula que estabeleceu fortes amizades e companheirismo.

À Carmen por toda a imensa ajuda antes e durante o curso e pela grande amizade.

Ao professor Francisco Paulo Marques pela ótima orientação, pela compreensão, paciência, dedicação e pela boa convivência e amizade que tornaram possível este trabalho.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar a existência de soluções para um problema parabólico não-linear de valor inicial e de fronteira com condições de crescimento variável no espaço $W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \cap L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ e fornecer um teorema de existência de soluções fracas para a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f,$$

onde $A(u) = -div(a(x,t,u,\nabla u)) + a_0(x,t,u,\nabla u)$, $a(x,t,u,\nabla u)$ e $a_0(x,t,u,\nabla u)$ satisfazem as condições de $p(x)$-crescimento com respeito a u e ∇u, e $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$.

Para a questão de existência, utilizaremos o método de Galerkin nos espaços Generalizados de Sobolev de funções definidas em $Q_T = \Omega \times (0,T)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado.

Conteúdo

Introdução

Seja $n \geq 2$ um inteiro, Ω um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$ e $Q_T = \Omega \times (0,T)$ onde $T > 0$ é dado. Consideremos o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f, \quad em \;\; Q_T \\ u(x,t) = 0, \quad sobre \;\; \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \psi(x), \quad em \;\; \Omega \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ e $\psi(x) \in L^2(\Omega)$ são funções dadas e $A : W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \longrightarrow W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ é um operador elíptico na forma

$$A(u) = -div\Big(a(x,t,u,\nabla u)\Big) + a_0(x,t,u,\nabla u)$$

com os coeficientes a e a_0 satisfazendo as clássicas condições de Leray-Lions (ver pág. 27). Os espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ e $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ serão introduzidos no capítulo 2.

A equação acima foi estudada nos espaços $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, para $1 < p < \infty$, onde a e a_0 são assumidos satisfazendo as condições de crescimento polinomial com relação a u e ∇u. Sabe-se que o problema foi resolvido por J. L Lions [25] e H. Brezis e F.E. Browder [6] no caso $p \geq 2$, por R. Landes [23] e R. Landes e V. Mustonen [24] no caso $1 < p < 2$.

O problema também foi discutido nos espaços não-homogêneos Orlicz-Sobolev $W^{1,x}L_M(Q_T)$ com a e a_0 satisfazendo condições de crescimento mais geral com relação a u e ∇u. T. Donaldson considera o caso em que a função M está relacionada com o crescimento de a e a_0. A. Elmahi e D. Meskine [14] estudaram o mesmo problema no espaço Orlicz sem assumir qualquer restrição de crescimento com relação a função M.

O estudo de problemas variacionais com condições de crescimento não-padrão tem se mostrado um tema interessante nos últimos anos. Problemas com $p(x)$-crescimento podem ser considerados uma forma não-padrão de problema de crescimento e aparecem em problemas elásticos não-lineares, fluidos eletrorreológicos, recuperação de imagens entre outros. Muitos resultados foram obtidos para este tipo de problema, por exemplo em [1, 2, 3], [28] e [30].

Em [9], os autores estudaram o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - div\Big(\phi_r(x, Du)\Big) + \lambda(u - I) = 0, \;\; em \;\; \Omega \times [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\eta}}(x, t) = 0, \;\; para \;\; (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(0) = I, \;\; em \;\; \Omega, \end{cases}$$

onde $\lambda \geq 0$ é constante, $I = u + ruído$, $\overrightarrow{\eta}$ denota o vetor normal unitário exterior em $x \in \Omega$ e

$$div\Big(\phi_r(x, Du)\Big) = |\nabla u|^{p(x)-2}\left[(p(x)-1)\nabla u + (2-p(x))|\nabla u| div\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \nabla p(x) \nabla u \log|\nabla u|\right].$$

Nesta equação, $1 \leq p(x) \leq 2$ só depende de x. Em [4], os autores estudaram uma equação semelhante a que estudamos neste texto. A diferença é que em [4] o coeficiente da não-linearidade é dependente de x e de t e é assumido ser contínuo, e que a equação de evolução envolve o operador $p(x, t)$ -laplaciano.

Para que o nosso estudo se apresente de maneira mais consistente, reunimos alguns pressupostos sobre Análise Funcional, Teoria das Distribuições, os Espaços de Lebesgue e Sobolev, constituindo o 1º capítulo. No 2º capítulo, apresentamos o espaço $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, que é semelhante ao espaço $W^{1,x}L_M(Q_T)$. Pensamos nesses espaços como uma estrutura razoável para discutir o problema acima. O 3º capítulo é reservado à demosntração do principal resultado, objetivo do presente estudo. Assim, neste trabalho, que foi baseado em [18], estudamos a existência de soluções fracas nos espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ sob condições de $p(x)$-crescimento, onde $p(x)$ depende apenas da variável espacial x.

Aqui, $a : Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}^n$ e $a_0 : Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\to\; \mathbb{R}$ são operadores tais que, para qualquer $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a(x, t, s, \xi)$ e $a_0(x, t, s, \xi)$ são ambos contínuos em (t, s, ξ) para q.t.p. $x \in \Omega$ e mensuráveis em x para todo $(t, s, \xi) \in (0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Eles também satisfazem, para qualquer $s \in \mathbb{R}$ e $\xi, \xi^* \in \mathbb{R}^n$, com $\xi \neq \xi^*$

$$\begin{cases} |a(x, t, s, \xi)| \leq \alpha\big(C(x, t) + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}\big), \;\; q.t.p. \;\; (x, t) \in Q_T; \\ |a_0(x, t, s, \xi)| \leq \alpha\big(C(x, t) + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}\big), \;\; q.t.p. \;\; (x, t) \in Q_T; \\ \big[a(x, t, s, \xi) - a(x, t, s, \xi^*)\big](\xi - \xi^*) > 0, \qquad q.t.p. \;\; (x, t) \in Q_T; \\ a(x, t, s, \xi)\xi + a_0(x, t, s, \xi)s \geq \beta|\xi|^{p(x)} + \gamma|s|^{p(x)}, \;\; q.t.p. \;\; (x, t) \in Q_T, \end{cases} \tag{2}$$

onde $C(x, t) \in L^{q(x)}(Q_T)$, α, γ, $\beta > 0$ são constantes. Ao longo deste trabalho, a menos de declaração contrária, assumiremos que $p(x)$ é contínua em Ω no sentido que $y \in \overline{\Omega}$ tem-se

$$\lim_{y \to x} p(y) = p(x) \;, \;\; \forall x \in \overline{\Omega}$$

e satisfazendo

$$1 < p^- = \inf_{\Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ = \sup_{\Omega} p(x) < \infty \tag{3}$$

e sendo $q(x)$ o conjugado da função $p(x)$.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

No presente capítulo, serão apesentadas definições e resultados, além de fixadas algumas terminologias e notações que subsidiarão os estudos realizados nos capítulos posteriores. Os resultados abordados aqui não serão demonstrados. Outrossim, serão indicadas as referências bibliográficas onde esses resultados e suas demonstrações podem ser verificadas.

1 Definições e Resultados de Análise Funcional

1.1 Covergência Fraca e Covergência Fraca-Estrela.

Definição 1.1. *Seja E um espaço vetorial normado. Diz-se que E é um espaço de Banach se o mesmo é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy converge em E.*

Se uma sequência (x_n) é convergente, então para toda função contínua f teremos que $\big(f(x_n)\big)$ também converge. Porém, se em vez de exigirmos a convergência para toda função contínua exigirmos para apenas as funções **lineares e contínuas**, diremos então que (x_n) converge fracamente para x, se $f(x_n)$ converge para $f(x)$. O espaço das funções onde isso ocorre é denominado de **Espaço Dual**, cuja definição é dada a seguir.

Definição 1.2. *Seja E um espaço vetorial normado. Chamamos de Dual Topológico de E e denotamos por E', o espaço normado de todos os funcionais lineares contínuos definidos em E,*

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observação 1.1. *Daqui em diante quando nos referirmos ao Dual Topológico de E, chamaremos apenas de **dual** de E.*

Proposição 1.1. *Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, é limitada.*

Demonstração: Ver [26] ou [29].

Definição 1.3. ***(Topologia Fraca** $\sigma(E,E')$**).*** *Seja E um espaço de Banach e considere $f \in E'$. Definamos*

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

*Assim, temos que $\left(\varphi_f\right)_{f\in E'}$ é uma família de funcionais lineares contínuos em E onde $\sigma(E,E')$ é a topologia menos fina de todas as aplicações $\left(\varphi_f\right)_{f\in E'}$ lineares e contínuas definidas em E. A topologia $\sigma(E,E')$ é chamada de **Topologia Fraca** sobre E.*

Definição 1.4. *(**Covergência Fraca** $\rightharpoonup$). Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E. Diz-se que a sequência (x_n) converge fracamente para x em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.*

Notação: $x_n \rightharpoonup x$ (x_n converge fracamente para x).

Observação 1.2. *O símbolo $\to$ denota Convergência Forte.*

Proposição 1.2. *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Verifica-se:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in E'$;

ii) Se $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E')$;

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E')$, *então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$;

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E')$ *e se* $f_n \to f$ *em* $E'(\|f_n - f\|_{E'} \to 0)$, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [7].

Pode-se também construir o dual do dual, isto é, o espaço E'' dado por

$$E'' = \{g : E' \longrightarrow \mathbb{R};\ g \text{ é linear e contínua}\},$$

denominado **Espaço Bidual** de E. Este espaço também é normado e completo e a norma definida é dada por

$$\|g\|_{E''} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} |\langle g, f\rangle|.$$

Da topologia fraca, podemos ter outras duas topologias sobre E':

i) Topologia Forte (com a norma $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |\langle f, x\rangle|$);

ii) Topologia Fraca $\sigma(E', E'')$.

Vamos agora definir uma terceira topologia sobre E', a topologia $\sigma(E', E)$).

Definição 1.5. ***(Topologia Fraca Estrela*** $\sigma(E', E)$***).*** *Seja E um espaço de Banach e E' o dual de E. Definamos*

$$\begin{aligned} \varphi_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

*Assim, temos que $\left(\varphi_x\right)_{x \in E}$ é uma família de funcionais lineares contínuos em E' onde $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina sobre E'. A topologia $\sigma(E', E)$ é chamada de **Topologia Fraca Estrela** sobre E'.*

Definição 1.6. *(**Covergência Fraca Estrela** $\overset{*}{\rightharpoonup}$). Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sequência em E'. Diz-se que f_n converge fraco-estrela para f em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.*

Notação: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ (f_n converge fraco-estrela para f).

Proposição 1.3. *Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E'. Verifica-se:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$;

ii) Se $f_n \to f$, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$;

iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$;

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|_{E'}$ é limitada e $\|f\|_{E'} \leq \liminf \|f_n\|_{E'}$;

v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \to x$ em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [7].

Também pode-se relacionar o espaço E com o seu bidual E'' atraves da aplicação

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x \mapsto J(x) &: \quad E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad f \mapsto J(x)(f) = \langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\forall f \in E'$, denominada de **Projeção Canônica**. Nota-se que

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle J(x), f\rangle| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E,$$

de onde podemos afirmar que J é injetora.

Observação 1.3. *Nem sempre J é sobrejetora. Quando a sobrejetividade ocorre, o espaço em questão é dito **Reflexivo**.*

1.2 Espaços Reflexivos

Definição 1.7. *Sejam J a injeção canônica definida em (1.1) e E um espaço de Banach. Diz-se que E é Reflexivo se J é sobrejetora, isto é, se $J(E) = E''$.*

Teorema 1.1. *Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se,*

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$$

é um conjunto compacto na topologia fraca $\big(\sigma(E, E')\big)$.

Demonstração: [7].

Proposição 1.4. *Seja E um espaço de Banach e $M \subset E$ um subespaço fechado. então M dotado da norma induzida por E é reflexivo.*

Demonstração: [7].

Corolário 1.1. *E é reflexivo se, e somente se, E' é reflexivo.*

Demonstração: [7].

Definição 1.8. *Seja E um espaço de Banach. Diz-se que E é uniformemente convexo se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in E$*

$$\Big(\|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1 \ \text{ e } \ \|x - y\| > \varepsilon\Big) \implies \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta\right).$$

Teorema 1.2. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.*

Demonstração: [7].

1.3 Espaços Separáveis

Definição 1.9. *Diz-se que um espaço de Banach* E *é separável se existe um subconjunto* $D \subset E$ *enumerável e denso em* E.

Teorema 1.3. *Seja* E *um espaço de Banach tal que* E' *seja separável. Então,* E *é separável.*

Demonstração: [7].

Observação 1.4. *A recíproca do teorema não é verdadeira.*

Exemplo 1.1. *O espaço* $L^1(\Omega)$ *é separável, mas o seu dual* $L^\infty(\Omega)$ *não o é (Ver pg. 66 de [7]).*

Corolário 1.2. *Seja* E *um espaço de Banach. Então* E *é reflexivo e separável se, e somente se,* E' *e reflexivo e separável.*

Demonstração: [7].

Teorema 1.4. *Seja* E *um espaço de Banach separável e* (f_n) *uma sequência limitada em* E'. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *de* (f_n) *que converge na topologia* $\sigma(E', E)$.

Demonstração: [7].

1.4 Conjunto OrtonormaL

Definição 1.10. *Seja* E *um espaço de Banach com produto interno e* S *um subconjunto de* E.*Diz-se que* S *é* ***ortogonal*** *se seus elementos são, dois a dois ortogonais, isto é, se* $\langle w_i, w_j \rangle = 0,\ \ w_i, w_j \in S$ *com* $i \neq j$. *Se além disso* $\|w_i\| = 1 \ \ \forall w_i \in S$, *diz-se que* S *é* ***ortonormal***.

2 Teoria das Distribuições

2.1 Notações e Resultados Preliminares

Inicialmente usaremos a letra $\mathbb{K}$ para representar o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Sejam $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \;\; e \;\; x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Denotaremos por D^α o operador derivação de ordem α dado por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ e uma função u define-se $D^0 u = u$. E para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos $D_i = \partial / \partial x_i$ (derivada parcial).

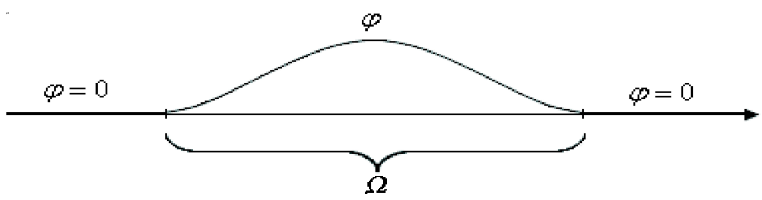
Definição 1.11. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Então $\beta \leq \alpha$ se $\beta_i \leq \alpha_i$. Se u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, vale a regra de Leibniz:*

$$D^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha - \beta} v).$$

Definição 1.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função. Chamamos suporte de φ ao conjunto denotado por*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega;\; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Se φ for contínua, $supp(\varphi)$ será compacto em Ω.



Proposição 1.5. ***(Desigualdade de Young)***. *Sejam $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, com $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

A igualdade ocorrerá quando $|a|^p = |b|^q$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ teremos

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon^p |a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{\varepsilon^q q}.$$

O teorema a seguir é um importante resultado na teoria da integração e sua demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.5. *(**Teorema da Convergência Donimada de Lebesgue**). Seja (u_n) uma sequência de funções reais integráveis, definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que converge quase-sempre para uma função mensurável u em Ω. Se existe uma função $v : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável tal que $|u_n(x)| \leq v(x)$ para todo n, então u é integrável e*

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx.$$

2.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Os espaços $L^p(\Omega)$ são os espaços vetoriais das classes de funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{K}$, definidos por

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ é mensurável; } \int_\Omega |\mathrm{u(x)}|^{\mathrm{p}}\mathrm{dx} < \infty\Big\}.$$

Equipando este espaço com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{1/p}, \tag{1.2}$$

o mesmo torna-se-á um espaço vetorial normado.

Observações 1.1.

i) *$L^p(\Omega)$ é Banach com a norma (1.2).*

ii) *Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com respeito ao produto interno*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx, \ \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

com $||u||_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}$ a norma em $L^2(\Omega)$.

iii) *Quando $p = \infty$, temos o espaço $L^\infty(\Omega)$ constituido das classes de funções essencialmente limitadas, dado por*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ é mensurável; } \exists \mathrm{M} > 0, \ |\mathrm{u(x)}| \leq \mathrm{M} \ q.t.p. \text{ em } \Omega\}.$$

*Seja $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Define-se **Supremo Essencial** de u por*

$$\sup ess\, u \ = \ \inf\{k; \ \mu(\{x \in \Omega; \ u(x) > k\}) = 0\},$$

e o ***Ínfimo Essencial*** *de u por*

$$\inf ess\, u \;=\; \sup\{k;\; \mu(\{x \in \Omega;\; u(x) < k\}) = 0\}$$

onde μ *é a medida de Lebesgue em* $\mathbb{R}^n$.

O espaço $L^\infty(\Omega)$ *será um espaço vetorial normado quando equipado com a norma*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|. \tag{1.3}$$

Com esta norma, $L^\infty(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

iv) O espaço $L^p_{Loc}(\Omega)$*, é o espaço localmente convexo das classes de funções mensuráveis u dado por*

$$L^p_{Loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{K};\ \int_K |u(x)|^p dx < \infty,\ \forall K \subset \Omega,\ K \text{ compacto}\}$$

equipado com a família de semi-normas

$$\rho_K(u) = \Big(\int_K |u(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $1 \le p, q \le \infty$. O espaço $L^q(\Omega)$ (definido analogamente a $L^p(\Omega)$) com $(*)\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ é o dual do espaço $L^p(\Omega)$, isto é $[L^p(\Omega)]' = L^q(\Omega)$. Neste caso, diz-se que os números p e q, na condição $(*)$, são *expoentes conjungados* e quando $p = 1$ consideramos $q = \infty$. O teorema a seguir, relaciona todo elemento do dual de $L^p(\Omega)$ com um elemento do espaço $L^q(\Omega)$ e sua demonstração pode ser consultada em [7], assim como o resultado posterior.

Teorema 1.6. ***(Teorema da Representação de Riesz)****. Sejam* $1 \le p \le \infty$ *e* q *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Se* $f \in [L^p(\Omega)]'$*, então existe* $v \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle f, u\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

para toda $u \in L^p(\Omega)$.

Proposição 1.6. ***(Desigualdade de Hölder)****. Sejam* $1 < p, q < \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Se* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$*, então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e além disso*

$$\|uv\|_1 = \int_\Omega |u(x)v(x)|dx \le \|u\|_p \|v\|_q.$$

A igualdade ocorrerá quando $|u(x)|^p$ e $|v(x)|^q$ forem proporcionais. Se tomarmos $p = 1$ e $q = \infty$ o resultado será imediato.

O teorema a seguir estabelece duas propriedades importantes do espaço $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p < \infty$, então:*

i) Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo e uniformemente convexo;

ii) Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável.

2.3 O Espaço das Funções Teste $\left(C_0^\infty(\Omega)\right)$

Denotamos por $C_0(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas definidas em Ω com suporte compacto. $C_0^\infty(\Omega)$ denota o espaço vetorial das funções contínuas definidas em Ω com suporte compacto e com derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados de Funções Teste em Ω.

Os seguintes resultados e suas demonstrações podem ser encontradas em [8] e [27].

Proposição 1.7. *Seja $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C_0(\Omega)$. Então $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Proposição 1.8. *(**Lema de Du Bois Raymond**). Seja $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $u = 0$ quase-sempre em Ω.*

Proposição 1.9. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.*

A definição a seguir, introduz a noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$. Essa convergência dota-o de uma topologia (ver detalhes em [30]) que constituirá um importante instrumento para o entendimento e estudo do conceito de distribuição.

Definição 1.13. *Diz-se que a sequência $(\varphi_\nu) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero (função nula) quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

a) *Os suportes de todas as funções φ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, estão contidos num compacto fixo $K \subset \Omega$ $(supp(\varphi_\nu) \subset K)$.*

b) *Para cada α (multiíndice), $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K.*

Diz-se que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando $(\varphi_\nu - \varphi) \to 0$ no sentido dado acima.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com essa noção de convergência será representado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e chamado de *Espaço das Funções Teste* em Ω.

2.4 Distribuições Escalares sobre Ω

Definição 1.14. *Uma distribuição sobre um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um funcional linear* T*, definido em* $\mathcal{D}(\Omega)$*, que é contínuo no sentido da convergência definida sobre* $\mathcal{D}(\Omega)$*, isto é*

$$\varphi_\nu \to \varphi \ \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \ \Rightarrow \langle T, \varphi_\nu\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ em } \mathbb{R}$$

Observação 1.5. *Notemos da definição acima que uma distribuição é um elemento do dual de* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Portanto, denotaremos por* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *o espaço vetorial de todas as distribuições sobre* Ω*. Algumas vezes, denotar-se-á que* $T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$*.*

Definição 1.15. *Seja* (T_ν)*, com* $\nu \in \mathbb{N}$*, uma sucessão em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*. Diz-se que* $T_\nu \to T$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *quando*

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \ , \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Exemplo 1.2. *Seja* $u \in L^p(\Omega)$ *e* T_u *definida por*

$$\begin{array}{rcl} T_u : \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T_u, \varphi\rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \end{array} .$$

Sem dificuldades mostra-se que T_u *é uma distribuição sobre* Ω*.*

Exemplo 1.3. *(Delta de Dirac* (δ_{x_o})*). Dado* $x_o \in \Omega$ *define-se* (δ_{x_o}) *como*

$$\begin{array}{rcl} \delta_{x_o} : \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle \delta_{x_o}, \varphi\rangle = \varphi(x_o). \end{array}$$

i) Temos que $\delta_{x_o} \not\equiv 0$*.*

ii) δ_{x_o} *está bem definido, pois* φ *é contínua.*

iii) δ_{x_o} *é linear e contínuo, portanto, uma distribuição (ver detalhes em [8]).*

Ainda em [8], verifica-se que δ_{x_o} não é definida por uma função localmente integrável, isto é, $\delta_{x_o} \notin L^1_{Loc}(\Omega)$.

Dado $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$, a distribuição T_u é univocamente determinada por u. De fato, se $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ são tais que $T_u = T_v$ então

$$T_u - T_v = T_{u-v} = 0$$

e por Du Bois Raymond vem que $u = v$ q.t.p. (esta afirmação pode ser vista em [8]).

Observação 1.6. *Quando não houver possibilidade de dúvidas, representar-se-á a distribuição* T_u *por* u.

Tem-se a seguinte cadeia para $1 \leq p < \infty$.

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{Loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

O símbolo "$\hookrightarrow$" indica que a imersão é contínua.

Proposição 1.10. *O espaço* $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $L^p_{Loc}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [27].

2.5 Derivada de Distribuição

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \ , \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A derivada $D^\alpha T$ é uma distribuição definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ e o operador D^α é linear e contínuo. Uma distribuição possui derivadas de todas as ordens.

Uma afirmação que vale apena mencionar é que a derivada $D^\alpha u$ de uma função $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{Loc}(\Omega)$. Este fato motivará o surgimento de uma classe muito importante de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de *Espaços de Sobolev*, que serão definidos mais a diante. Um exemplo que ilustra esta afirmação damos a seguir.

Exemplo 1.4. *A função de Heaviside dada por*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Temos que $u \in L^1(\Omega)$, *mas* $u' \notin L^1(\Omega)$. *De fato*

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u.\varphi' dx = -\int_{-\infty}^{0} u.\varphi' dx - \int_{0}^{+\infty} u.\varphi' dx = -\int_{0}^{+\infty} u.\varphi' dx \\ &= -\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \varphi' dx = -\lim_{a \to +\infty} (\varphi(x)|_0^a) = -\lim_{a \to +\infty} (\varphi(a) - \varphi(0)) = \varphi(0) \\ &= \langle \delta_0, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow u' = \delta_0 \notin L^1(\Omega)$.

2.6 Extensão e Restrição de Uma Distribuição

Sejam $\Omega, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abertos com $\Omega \subset \mathcal{U}$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então a extensão $\widetilde{\varphi}$ de φ dada por,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & se \quad x \in \Omega \\ 0, & se \quad x \in \mathcal{U} \backslash \Omega \end{cases}$$

pertence a $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ e possui as seguintes propriedades:

i) Se $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $\widetilde{\varphi}_\nu \to \widetilde{\varphi}$ em $\mathcal{D}(\mathcal{U})$;

ii) $D^\alpha \widetilde{\varphi} = \widetilde{D^\alpha \varphi}$.

Agora seja $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$. Denotamos por T_Ω (ou por $T|_\Omega$) a **Restrição** de T a Ω, definida por

$$\langle T_\Omega, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} \rangle \ , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observe de i), que $T_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e de ii) que $D^\alpha(T_\Omega) = (D^\alpha T)_\Omega$.

3 Espaços de Sobolev

3.1 O Espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Sabe-se que se $u \in L^p(\Omega)$ então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Mas, vimos que, em geral, $D^\alpha u$ não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Por esse motivo, define-se o espaço $W^{m,p}(\Omega)$, chamado de *Espaço de Sobolev*, por

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m, 1 \leq p < \infty \Big\}$$

equipado com a norma

$$\| \, u \, \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| \, D^\alpha u \, \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

onde Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo.

Se $p = 2$, tem-se que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, onde está definido o seguinte produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

Observações 1.2.

i) Quando $m = 0$ *que* $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

ii) $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Observe que $\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Mas, não é verdade que $\mathcal{D}(\Omega)$ seja sempre denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esse motivo, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ por

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

isto é, $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Se $p = 2$, então $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ que é Hilbert. Tem-se ainda que

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

3.2 O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' = W^{-m,q}(\Omega).$$

$H^{-m}(\Omega)$ denota o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Afirmações:

i) Se B_1 e B_2 são espaços topológicos com $B_1 \overset{denso}{\hookrightarrow} B_2$, então $B_2' \overset{denso}{\hookrightarrow} B_1'$.

ii) Como $\mathcal{D}(\Omega) \overset{denso}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ então $(L^p(\Omega))' \overset{denso}{\hookrightarrow} \mathcal{D}'(\Omega)$.

iii) $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega)$, então $H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Considere o operador $L : H^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega)$ dado por $L = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$ e seja $u \in H^m(\Omega)$. Então

$$L(u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (D^\alpha u) \ \in \ H^{-m}(\Omega) \ , \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega).$$

Observação 1.7. $T \in W^{-m,q}(\Omega) \iff T = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} g_{\alpha}$ *onde* $D^{\alpha} u = g_{\alpha}$.

Proposição 1.11. *O operador* L *transforma* $H_0^m(\Omega)$ *em* $H^{-m}(\Omega)$ *de forma isométrica.*

Proposição 1.12. $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.13. $\mathcal{D}(\Omega)$ *é denso em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3.3 Desigualdades de Poincaré e de Sobolev

Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto. Diz-se que Ω é limitado na direção x_i, se existe um intervalo aberto finito $]a, b[$ da reta tal que

$$proj_i(\Omega) \subset]a, b[$$

onde $proj_i$ denota a projeção de Ω sobre o eixo x_i.

Teorema 1.8. *(**Desigualdade de Poincaré**). Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *um aberto e limitado na direção* x_i. *Então*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \le (a-b)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx$$

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ *onde* $proj_i(\Omega) \subset]a, b[$.

Proposição 1.14. *(**Desigualdade de Sobolev**). Sejam* $1 \le p < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *e* $C_0 = \frac{(n-1)p}{n-p}$, $n \in \mathbb{N}$. *Então, para cada* $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, *tem-se*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \frac{C_0}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

A seguir definiremos dois espaços, cujas propriedades são de grande importância no estudo de imersões nos espaços de Sobolev.

4 Os Espaços $C_b^k(\Omega)$ e $C^{k,\lambda}(\Omega)$.

Definição 1.16. *Sejam* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Define-se o espaço* $C_b^k(\Omega)$ *por*

$$C_b^k(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{K} \text{ de classe } \mathrm{C^k} \text{ limitadas; } \max_{|\alpha| \le \mathrm{k}} \sup_{\mathrm{x} \in \Omega} |\mathrm{D}^{\alpha} \mathrm{u(x)}| < \infty \right\},$$

e $\|u\|_{C_b^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha} u(x)|$ *é a norma definida em* $C_b^k(\Omega)$.

Definição 1.17. *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \lambda \leq 1$. Define-se o espaço $C^{k,\lambda}(\Omega)$ por*

$$C^{k,\lambda}(\Omega) = \Big\{ u \in C_b^k(\Omega);\ \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda} < \infty \Big\},$$

e $\|u\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{C_b^k(\Omega)} + \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \dfrac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{\|x-y\|^\lambda}$ *é a norma definida em $C^{k,\lambda}(\Omega)$.*

Observações 1.3.

i) $C^{k,\lambda}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in C_b^k(\Omega)$ para as quais existe $L > 0$ (que depende de u) tal que

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq L\|x-y\|^\lambda\ ,\quad \forall x, y \in \Omega\ ,\quad x \neq y\ ,\quad |\alpha| \leq k;$$

ii) $C^{k,\lambda}(\Omega) \subset C_b^k(\Omega)$;

iii) $\|u\|_{C_b^k(\Omega)} \leq \|u\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}$, $\forall u \in C^{k,\lambda}(\Omega)$;

iv) $C^{k,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow C_b^k(\Omega)$.

O tema a seguir constitui significativa importâcia na teoria das Equações Diferenciais Parciais Parabólicas. Para adentrarmos no assunto, precisaremos inicialmente de algumas definições.

5 Distribuições Vetoriais

5.1 Espaço das Funções com Valores em Espaços de Banach

Definição 1.18. *Seja B um espaço de Banach e $0 \leq T < +\infty$. Definimos o espaço*

$$C^k(0,T;B) = \{u : (0,T) \longrightarrow B\ ;\ u\ \acute{e}\ k - diferenci\acute{a}vel\ em\ t\},$$

como sendo o espaço das funções definidas em $[0,T]$ que possuem derivadas contínuas até a ordem k.

Neste espaço está definida a seguinte norma

$$\|u\|_{C^k(0,T;B)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{t\in[0,T]} \|D^\alpha u\|_B. \tag{1.5}$$

Observação 1.8. *Se $u \in C^1(0,T;B)$* $\Rightarrow$ $\|u\|_{C^1(0,T;B)} = \sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_B + \sup_{0\leq t\leq T} \|u'\|_B$.

É possível também construir uma teoria de integração que permita definir mensurabilidade de funções do tipo $u : [0, T] \to B$.

Definição 1.19. *A função u é dita uma função simples se, e somente se, tem um número finito de valores, isto é, $u : X \to B$, $E_i \subset X$, existem constantes $a_i \geq 0$, tais que*

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x),$$

onde χ_{E_i} é a função característica de E_i, $a_i \neq a_j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$. A sua integral é dada por

$$\int_{E_i} u\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Definição 1.20. *Dizemos que $u : [0, T] \to B$, é fortemente mensurável quando existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para u, isto é, existe uma sequência (φ_n) de funções simples tais que*

$$\|\varphi_n - u\|_B \longrightarrow 0.$$

Definição 1.21. *Uma função $u : [0, T] \to B$ com valores definidos no espaço de Banach B é Bochner Integrável quando existe uma sequência de funções simples $\varphi_n : [0, T] \to B$ tal que a função $t \mapsto \|\varphi_n - u\|_B$ é integrável à Lebesgue. E além disso*

$$\lim_n \int \|\varphi_n - u\|_B dt = 0.$$

Teorema 1.9. *(**de Bochner**). Seja B um espaço de Banach. Uma função fortemente mensurável $u : [0, T] \to B$ é Bochner integrável se, e somente se, $t \mapsto \|u\|_B$ é integrável.*

Observações 1.4.

i) $u(t) \in B \implies \displaystyle\int_0^T u(t)dt \in B$;

ii) $\displaystyle\left\| \int_0^T u(t)dt \right\|_B \leq \int_0^T \|u(t)\|_B dt$;

iii) Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

a) $\varphi_n(t)$ *sequência de funções Bochner integráveis;*

b) $u(t)$ *fortemente mensurável;*

c) $\varphi_n(t) \to u(t)$ *quase sempre em* $[0,T]$*;*

d) $\exists g \in L^1([0,T])$ *integrável tal que* $\|\varphi_n\|_B \leq g(t)$*.*

Então $u(t)$ *é Bochner integrável e*

$$\lim_n \int \varphi_n(t)dt = \int u(t)dt.$$

Com essa teoria podemos definir os espaços $L^p(0,T;B)$:

Definição 1.22. *Seja* $T \geq 0$ *e* B *um espaço de Banach. Definimos o espaço* $L^p(0,T;B)$*, com* $1 \leq p < \infty$*, das classes de funções fortemente mensuráveis, por*

$$L^p(0,T;B) = \left\{u : (0,T) \to B \ fortemente \ mensurável \ ; \ \int_0^T \|u\|_B^p dt < \infty\right\},$$

dotado da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u\|_B^p dt\right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

O espaço $L^\infty(0,T;B)$ *como sendo*

$$L^\infty(0,T;B) = \Big\{u : (0,T) \to B \ fortemente \ mensurável \ ; \ \ u \text{ é essencialmente limitada em } (0,T)\Big\},$$

isto é, existe $M > 0$ *tal que* $\|u\|_B \leq M$ *quase todo ponto em* $(0,T)$ *(ou a menos de um conjunto de medida nula), dotado com a norma*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} = \sup_{[0,T]} ess \|u\|_B = \inf\Big\{M \in \mathbb{R};\ \|\mathrm{u}\|_{\mathrm{B}} \leq \mathrm{M \ q.t.p. \ em \ (0,T)}\Big\}. \tag{1.7}$$

Teorema 1.10. *Os espaços* $L^p(0,T;B)$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *equipados com as normas* (1.6) *e* (1.7)*:*

i) São espaços de Banach;

ii) Se B *é reflexivo* $\Rightarrow L^p(0,T;B)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$*;*

iii) se B *é Hilbert, então* $L^2(0,T;B)$ *é Hilbert com o produto interno*

$$(u,v) = \int_0^T (u(t)v(t))_B dt.$$

5.2 Distribuições com Valores Vetoriais

Seja $\mathcal{D}(a,b)$ o espaço das funções teste definidas em (a,b), $\mathcal{D}'(a,b)$ o seu dual topológico e X um espaço de Banach.

Notação: $\mathcal{D}'(a,b;X)$ = espaço das distribuições vetoriais sobre (a,b) com valores em X.

Definição 1.23. *Uma distribuição vetorial sobre um intervalo (a,b), com valores em X, é uma aplicação linear dada por*

$$\begin{array}{rcl} T:\mathcal{D}(a,b) & \longrightarrow & X \\ \varphi & \longmapsto & \langle T,\varphi\rangle \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b). \end{array}$$

A distribuição T é contínua no sentido em que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b)$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = \langle T,\varphi\rangle$.

Exemplo 1.5. *Se $u \in L^p(0,T;X)$ então u é uma distribuição com valores em X dada por*

$$\varphi \mapsto \int_0^T u(t)\varphi(t)dt.$$

Exemplo 1.6. *$\forall v \in X$, $\varphi \mapsto \varphi(0)v$ é uma distribuição com valores em X.*

Definição 1.24. *Seja $T \in \mathcal{D}'(a,b;X)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ a distribuição dada por*

$$\langle T^k,\varphi\rangle = (-1)^{|k|}\Big\langle T,\frac{d^k\varphi}{dt^k}\Big\rangle$$

é chamada de $k-$ésima derivada de T sobre (a,b) e algumas veses será denotada por

$$T^k = \frac{d^kT}{dt^k}$$

Observações 1.5.

i) $u \in L^1(a,b;X) \quad \Longrightarrow \quad u^{(1)} = \dfrac{du}{dt} = u' = u_t$;

ii) Se X e Y são espaços de Banach com $X \hookrightarrow Y$ (imersão contínua) então claramente

$$\mathcal{D}'(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;Y)$$

e $L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$, $1 \leq p < +\infty$.

Lema 1.1. ***(Compacidade de Aubin-Lions)****. Sejam* $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ *e* B_0, B, B_1 *espaços de Banach sendo que* B_0 *e* B_1 *são reflexivos tais que* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ *(*$\overset{c}{\hookrightarrow}$ *indica imersão compacta). Para* $0 < T < \infty$*, consideremos o espaço*

$$W = \{w;\ w \in L^{p_0}(0, T; B_0) \ e \ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

com a norma $\|w\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$*. Então:*

i) W *é um espaço de Banach;*

ii) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0, T; B)$*.*

Demonstração: Ver [30].

6 Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{m,p(x)}(\Omega)$

Nesta secção, faremos um breve estudo dos espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{m,p(x)}(\Omega)$, ditos Espaços Generalizados de Lebesgue e Sobolev, respectivamente. Estes espaços desempenham um papel fundamental no estudo de problemas parabólicos, como o que será visto neste trabalho. Não é nosso objetivo aprofundar-nos no estudo desses espaços. Portanto, para um leitor mais atento, demonstrações e maiores detalhes podem ser consultados em [16], [19] e [22].

6.1 Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$

Definição 1.25. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $p \in L^\infty(\Omega)$ contínua com $p \geq 1$. Define-se o Espaço Generalizado de Lebesgue como sendo*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \text{u é mensurável}; \ \int_\Omega |\mathrm{u(x)}|^{\mathrm{p(x)}} \mathrm{dx} < \infty \right\}.$$

Em $L^{p(x)}(\Omega)$ está definida a norma:

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \ \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \tag{1.8}$$

Também escreve-se $\|u\|_{p(x)}$ em vez de $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$.

Observação 1.9. *Quando a função $p(x) = p$, teremos $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, isto é, as normas coincidem.*

Considere o conjunto

$$L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); \ \inf ess(u) \geq 1\}.$$

Para $u \in L^p(\Omega)$ e $p \in L^\infty_+(\Omega)$, definimos a função *Modular* (ou simplesmente Modular) por

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx.$$

Denota-se por $p^- = \inf ess(p)$ e $p^+ = \sup ess(p)$.

Proposição 1.15. *Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1) \iff \rho(u) < 1 (= 1; > 1)$;

ii) $\|u\|_{p(x)} > 1$, *então* $\|u\|^{p^-}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p^+}_{p(x)}$;

iii) $\|u\|_{p(x)} < 1$, *então* $\|u\|^{p^+}_{p(x)} \leq \rho(u) \leq \|u\|^{p^-}_{p(x)}$.

Proposição 1.16. *Seja* $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$. *Se* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$;

ii) $\lim_{n\to+\infty} \rho(u_n - u) = 0$;

iii) $u_n \to u$ *em* Ω *e* $\lim_{n\to+\infty} \rho(u_n) = \rho(u)$.

Proposição 1.17. ***(Desigualdade de Hölder).*** *Sejam* $p^- > 1$ *e* $q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tal que* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, $\forall x \in \Omega$. *se* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, *então*

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}.$$

Teorema 1.11. *O espaço* $L^{p(x)}(\Omega)$, *com a norma* $\|u\|_{p(x)}$, *é um espaço de Banach separável. Se* $p^- > 1$, *então* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é reflexivo.*

Teorema 1.12. ***(Teorema da Representação de Riesz).*** *Sejam* $p^- > 1$ *e* $q \in L^\infty_+(\Omega)$ *tal que* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, $\forall x \in \Omega$. *Então dado* $f \in (L^{p(x)}(\Omega))'$, *existe um único* $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ *tal que*

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ , \ \ \forall u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Teorema 1.13. *O espaço* $C_0(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.14. *O espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposição 1.18. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$ *e sejam* $p_1, p_2 \in L^\infty(\Omega)$. *Então* $L^{p_2(x)}(\Omega) \subset L^{p_1(x)}(\Omega)$ *se, e somente se,* $p_1(x) \leq p_2(x)$ *q.t.p. em* Ω. *Neste caso, a imersão é contínua.*

Proposição 1.19. *Sejam* $1 \leq p(x) < \infty$ *e* $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ *limitada em* $L^{p(x)}(\Omega)$. *Se* $u_k \to u$ *q.t.p. em* Ω, *então* $u_k \rightharpoonup u$ *(fracamente) em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

6.2 Os Espaços $W^{m,p(x)}(\Omega)$

Definição 1.26. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $m \in \mathbb{N}$. Define-se o Espaço Generalizado de Sobolev como sendo*

$$W^{m,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega)\ ;\ \ D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega),\ \ |\alpha| \leq m\Big\},$$

onde D^α denota a α-ésima derivada de u no sentido das distribuições, isto é,

$$\int_\Omega D^\alpha u\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx\ ,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

O espaço $W^{m,p(x)}(\Omega)$ é um espaço normado equipado com a norma:

$$\|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m}\Big\|D^\alpha u\Big\|_{p(x)}. \tag{1.9}$$

Algumas vezes, por simplicidade e quando não houver dúvidas, escrevemos $\|u\|_{m,p(x)}$ para designar a norma (1.9).

No caso em que $m = 1$ temos o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ dado por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega)\ ;\ \ |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\Big\}$$

$\Big($ou, em alguns casos por $W^{1,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega)\ ;\ \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega),\ \ i = 1, 2, \ldots, n\Big\}\Big)$ onde $\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)$ e a norma é dada por

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \tag{1.10}$$

Observação 1.10. *Denotamos por $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p(x)}(\Omega)$, isto é,*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p(x)}(\Omega)} = W_0^{m,p(x)}(\Omega).$$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 1.15. *Os espaços $W^{m,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ são espaços de Banach. Se $p^- > 1$, então $W^{m,p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$ são separáveis e reflexivos.*

Observação 1.11. *Seja $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ tais que $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. Dizemos que $q(x)$ é o conjugado de $p(x)$ e denotamos por $W^{-m,q(x)}(\Omega)$ o dual do espaço $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$, isto é,*

$$\big(W_0^{m,p(x)}(\Omega)\big)' = W^{-m,q(x)}(\Omega).$$

dotado da norma

$$\|f\|_{W^{-m,q(x)}(\Omega)} = \inf \sum_{|\alpha|\le m} \|f_\alpha\|_{L^{q(x)}(\Omega)} = \sup_{\|u\|_{W_0^{m,p(x)}(\Omega)}\le 1} |\langle f, u\rangle|$$

$\forall u \in W_0^{m,p(x)}(\Omega)$, *onde o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições possíveis*

$$f = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha \ , \quad f_\alpha \in L^{q(x)}(\Omega)$$

Teorema 1.16. *Sejam* $p_1, p_2 \in L_+^\infty(\Omega)$ *tais que* $p_1(x) \le p_2(x)$ *quase-sempre em* Ω. *Então* $W^{m,p_2(x)}(\Omega) \subset W^{m,p_1(x)}(\Omega)$ *e a imersão é contínua, isto é, existe uma constante positiva* $C_{p_2(x),p_1(x)}$ *tal que*

$$\|u\|_{m,p_1(x)} \le C_{p_2(x),p_1(x)} \|u\|_{m,p_2(x)} \tag{1.11}$$

Teorema 1.17. *Se* $q \in C(\overline{\Omega})$, *com* $p^-, q^- \ge 1$, *são tais que* $q(x) < p^*(x)$ *para qualquer* $x \in \overline{\Omega}$, *então a imersão de* $W^{m,p(x)}(\Omega)$ *(ou* $W_0^{m,p(x)}(\Omega)$*) em* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é contínua e compacta, onde*

$$p^*(x) = \begin{cases} \infty \ , & se \ \ p(x) \ge n \\ \frac{np(x)}{n-p(x)}, & se \ \ p(x) < n. \end{cases}$$

Teorema 1.18. ***(Desigualdade de Poincaré)****. Seja* Ω *um domínio aberto e limitado e* $p \in C(\overline{\Omega})$ *tal que* $p^- > 1$. *Então existe* $C_P > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \le C_P \|\nabla u\|_{p(x)} \ , \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{1.12}$$

Equivalentemente

$$\|u\|_{p(x)} \le C_P \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{p(x)}.$$

Observação 1.12. *Como consequência desta desigualdade, temos*

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \ \le \ \|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \ \le \ C\|\nabla u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} = (C+1)\|\nabla u\|_{p(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\nabla u\|_{p(x)} \ \le \ \|u\|_{1,p(x)} \ \le \ K\|\nabla u\|_{p(x)}$$

ou seja, as normas $\|u\|_{1,p(x)}$ *e* $\|\nabla u\|_{p(x)}$ *são equivalentes em* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

7 O Operador de Leray-Lions.

7.1 Operadores Limitados, Contínuos, Monótonos e Hemicontínuos.

Definição 1.27. *Sejam E e F espaços normados. Toda aplicação $T : E \longrightarrow F$ é chamada de* ***operador*** *e o valor de T no ponto $x \in E$ é denotado por T_x ou $T(x)$.*

Definição 1.28. *Um operador $T : E \longrightarrow F$ é dito* ***limitado****, se existe um número real positivo k tal que*

$$\|T_x\|_{_F} \leq k\|x\|_{_E}\ , \ \ \forall x \in E.$$

Definição 1.29. *Um operador $T : E \longrightarrow F$ é dito* ***contínuo no ponto*** *$x_{_0} \in E$, se para $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$, tal que $\forall x \in E$,*

$$\|x - x_0\|_{_E} \ < \delta \implies \|T_x - T_{x_0}\|_{_F} < \varepsilon.$$

Se T é contínuo em todo $x \in E$, então dizemos que T é um ***operador contínuo****.*

Observação 1.13. *Quando um operador $T : E \longrightarrow F$ é limitado, define-se a norma de T por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \left(\frac{\|T_x\|_{_F}}{\|x\|_{_E}} \right).$$

Definição 1.30. *Seja E um espaço vetorial e E' o seu dual. Um operador $T : E \longrightarrow E'$ é dito* ***monótono****, se*

$$\langle T_x - T_y, x - y \rangle \geq 0\ , \ \ \forall x, y \in E.$$

E se

$$\langle T_x - T_y, x - y \rangle > 0\ , \ \ \forall x, y \in E,$$

com $x \neq y$, então T é dito ***estritamente monótono****.*

Exemplo 1.7. *O operador $-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dado por*

$$-\Delta_p(u) = -div\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big), \tag{1.13}$$

que dá origem ao funcional

$$\langle -\Delta_p(u), v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \ dx, \ \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

é um operador monótono. De fato, temos que

$$-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v \geq -|\nabla u|^{p-2}|\nabla u||\nabla v| = -|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|$$

daí

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p(u)+\Delta_p(v), u-v\rangle &= \langle -div\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big)+div\big(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\big), u-v\rangle\\
&= \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla u-\nabla v\rangle\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)\big(\nabla u-\nabla v\big)dx\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla u + |\nabla v|^{p}\big)dx\\
&\geq \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p-1}|\nabla u| - |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| - |\nabla v|^{p-1}|\nabla u| + |\nabla v|^{p-1}|\nabla v|\big)dx\\
&= \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p-1} - |\nabla v|^{p-1}\big)\big(|\nabla u|-|\nabla v|\big)dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.8. *O operador* $-\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to W^{-1,q(x)}(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$ *dado por*

$$-\Delta_{p(x)}(u) = -div\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big) \tag{1.14}$$

também é monótono. De fato, assim como anteriormente, $-\Delta_{p(x)}$ *dá origem ao funcional*

$$\langle -\Delta_{p(x)}(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\ dx, \quad \forall u,v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Precisamos das seguintes desigualdades: Sejam $x,y\in\mathbb{R}^n$. *Então*

$$\langle |x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y, x-y\rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p\ , & se \quad p\geq 2\\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p+|y|^p)^{2-p}}\ , & se \ \ 1<p<2, \end{cases} \tag{1.15}$$

cuja prova pode ser consultada em [19], ***Apêndice A*** *(Lema A.1). Tomando* $u,v\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, *com* $u\neq v$, *teremos* $\nabla u\neq\nabla v$. *Consideremos os conjuntos*

$$\Omega_+ = \big\{x\in\Omega\ ;\ \ p(x)\geq 2\big\} \quad e \quad \Omega_- = \big\{x\in\Omega\ ;\ \ 1<p(x)<2\big\}.$$

Fazendo $x=\nabla u$ *e* $y=\nabla v$ *nas desigualdades (1.15) acima e integrando sobre* Ω_+ *e* Ω_-, *nos casos em que* $p(x)\geq 2$ *ou* $1<p(x)<2$, *obtem-se a monotonicidade do operador. A demonstração deste resultado pode ser consultada em [19].*

Definição 1.31. *Um operador $T : E \longrightarrow E'$ é dito **hemicontínuo** se a função real*

$$\lambda \longmapsto \langle T(x+\lambda y), z\rangle$$

é contínua $\forall x, y, z \in E$.

Observação 1.14. *Se um operador $T : E \longrightarrow E'$ é contínuo, então é hemicontínuo. De fato, seja $x + \lambda y \longrightarrow x + \lambda_0 y$ em E. Assim*

$$T(x+\lambda y) \longrightarrow T(x+\lambda_0 y)$$

portanto, temos

$$\begin{aligned} |\langle T(x+\lambda y), z\rangle - \langle T(x+\lambda_0 y), z\rangle| &\leq \langle T(x+\lambda y) - T(x+\lambda_0 y), z\rangle \\ &\leq \|T(x+\lambda y) - T(x+\lambda_0 y)\|_{E'} \|Z\|_{E}. \end{aligned}$$

7.2 O Operador de Leray-Lions.

Seja X um espaço de Banach real e reflexivo. Dizemos que $L : X \longrightarrow X'$ é um operador de Leray-Lions se, e somente se, é limitado e satisfaz

$$L(u) = \mathcal{L}(u,u)\ , \quad \forall u \in X,$$

onde $\mathcal{L} : X \times X \longrightarrow X'$ possui as seguintes propriedades:

1. Para qualquer $u \in X$, a aplicação $v \mapsto \mathcal{L}(u,v)$ é limitada e hemicontínua de X para X', com
$$\langle L\mathcal{L}(u,u) - \mathcal{L}(u,v), u - v\rangle \geq 0, \quad para \;\; v \in X$$

2. Para qualquer $v \in X$, a aplicação $u \mapsto \mathcal{L}(u,v)$ é limitada e hemicontínua de X para X'.

3. Se a sequência (u_n) converge fracamente para u $(u_n \rightharpoonup u)$ em X e
$$\langle \mathcal{L}(u_n,u_n) - \mathcal{L}(u_n,u), u_n - u\rangle \longrightarrow 0$$
então, para qualquer $v \in X$, $\mathcal{L}(u_n,v) \rightharpoonup \mathcal{L}(u,v)$ em X'.

4. Se $u_n \rightharpoonup u$ em X e $\mathcal{L}(u_n,v) \rightharpoonup F$ em X', então para qualquer $v \in X$,
$$\langle \mathcal{L}(u_n,v), u_n\rangle \longrightarrow \langle F, u\rangle.$$

7.3 Existência de Soluções de EDO's pelo método de Carathéodory

Esta secção destina-se a apresentar um método para estudar a existência de soluções locais de equações diferenciais de 1^{a} ordem e outros resultados que nos permitirá extendê-las tornando-as globais. Esses resultados constituem um passo importante na demonstração do teorema principal, pois garante a existência de soluções de problemas aproximados do problema original. Os resultados que serão apresentados não serão demonstrados. Suas demonstrações podem ser consultadas em ([20]) e ([26]).

Consideremos a equação

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.16}$$

Tendo à mão certas condições, pode-se garantir a existência de solução (ou soluções) de (1.16).

Definição 1.32. *Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto. Dizemos que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory, se:*

1. *Para cada x fixo, f é mensurável em t;*
2. *Para cada t fixo, f é contínua em x;*
3. *Para todo $K \subset D$ compacto, existe uma função integrável $g_K(t)$ tal que*

$$|f(t, x(t))| \leq g_K(t), \quad \forall (t, x) \in K.$$

Teorema 1.19. *(**de Carathéodory**). Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Então para qualquer $(t_0, y_0) \in D$, existe uma solução de (1.16) tal que $x(t_0) = y_0$.*

Teorema 1.20. *(**Prolongamento de Soluções**). Seja $D = [0, T] \times E$, com $0 < T < \infty$,*

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \|\mathrm{y}\| \leq \mathrm{C}\}, \quad \mathrm{C} > 0,$$

e a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja ainda φ uma solução de

$$\begin{cases} \varphi' = f(t, \varphi) \\ \varphi(0) = y_0, \quad \|y_0\| \leq C. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I *onde* φ *está definida, tenha-se* $\|\varphi(t)\| \leq M$, $\forall t \in I$, M *indepemdente de* t *e* $M < C$. *Então* φ *tem um prolongamento até* $[0, T]$.

Lema 1.2. *(**de Grönwall**, versão diferencial). Seja* $h(t)$ *uma função não-negativa e direnciável em* $[0, T]$, *tal que*

$$h'(t) \leq f(t)h(t) + g(t) \tag{1.17}$$

com $f(t)$ *e* $g(t)$ *integráveis em* $[0, T]$. *Então*

$$h(t) \leq h(0)e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} + \int_0^t g(s)e^{\int_s^t f(\tau)d\tau}ds \tag{1.18}$$

$\forall t \in [0, T]$.

Se $f(t)$ *e* $g(t)$ *forem não-negativas, então a expressão (1.18) torna-se*

$$h(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\Big[h(0) + \int_0^t g(s)ds\Big], \tag{1.19}$$

$\forall t \in [0, T]$.

Capítulo 2

Os Espaços $W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$

Neste capítulo, apresentaremos os espaços generalizados de Sobolev de classes de funções definidas no cilindro $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Para tanto, considera-se Ω um domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Definição 2.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $p \in L^\infty(\Omega)$ *contínua com* $p > 1$. *Define-se o espaço* $L^{p(x)}(Q_T)$ *por*

$$L^{p(x)}(Q_T) = \{u : Q_T \to \mathbb{R},\ \mathrm{u}\ \textit{é mensurável};\ \int_{\mathrm{Q_T}} |\mathrm{u(x)}|^{\mathrm{p(x)}} \mathrm{dxdt} < \infty\},$$

sendo

$$\|u\|_{L^{p(x)}(Q_T)} = \inf \left\{ \lambda > 0;\ \int_{Q_T} \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dxdt \leq 1 \right\} \tag{2.1}$$

a norma definida neste espaço.

Definição 2.2. *Seja* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *um multiíndice e* $m \in \mathbb{N}$. *Define-se os espaços*

$$W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T) = \left\{ u \in L^{p(x)}(Q_T);\ D^\alpha u \in L^{p(x)}(Q_T), |\alpha| \leq m \right\}$$

onde está definida a norma

$$\|u\|_{W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}. \tag{2.2}$$

Note que $\displaystyle\int_{Q_T} |u(x,t)|^{p(x)} dxdt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^{p(x)} dxdt < \infty$, em que $p(x)$ não depende de t.

Não se pode afirmar que o espaço $C_0^\infty(Q_T)$ (espaço das funções testes definidas em Q_T) seja sempre denso em $W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$. Por este fato temos a seguinte definição:

Definição 2.3. *Define-se o espaço* $W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(Q_T)$ *em* $W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$*, isto é,*

$$W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T) = \overline{C_0^\infty(Q_T)}^{W^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)}.$$

Considerando $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, define-se o dual topológico do espaço $W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$ por $W^{-m,x}L^{q(x)}(Q_T)$, ou seja

$$\left(W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)\right)' = W^{-m,x}L^{q(x)}(Q_T).$$

Para todo $f \in W^{-m,x}L^{q(x)}(Q_T)$ temos a seguinte norma:

$$\|f\|_{W^{-m,x}L^{q(x)}(Q_T)} = \inf \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^{q(x)}(Q_T)} = \sup_{\|u\|_{W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)} \leq 1} |\langle f, u \rangle|$$

$\forall u \in W_0^{m,x}L^{p(x)}(Q_T)$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as decomposições possíveis

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha \ , \quad f_\alpha \in L^{q(x)}(Q_T)$$

Para $m = 1$ temos:

1. $W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) = \left\{u \in L^{p(x)}(Q_T);\ |\nabla u| \in L^{p(x)}(Q_T)\right\}$ com a norma
$$\|u\|_{W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} = \|u\|_{L^{p(x)}(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}; \tag{2.3}$$

2. $\overline{C_0^\infty(Q_T)}^{W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} = W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ e $\left(W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)\right)' = W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$;

3. Para todo $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ temos a norma:
$$\|f\|_{W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)} = \inf \sum_{|\alpha| \leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q(x)}(Q_T)} = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} \leq 1} |\langle f, u \rangle| \tag{2.4}$$

e $\forall u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, $f = \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha \ , \quad f_\alpha \in L^{q(x)}(Q_T)$.

Observação 2.1. *Os espaços* $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ *e* $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ *são espaços de Banach. Se* $p^- > 1$, *então* $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ *e* $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ *são separáveis e reflexivos.*

Lema 2.1. *Seja* $p^- > 1$. *Então para qualquer* $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, *existe uma sequência* $(f_n) \subset C_0^\infty(Q_T)$ *tal que* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, *no sentido de que*

$$\int_{Q_T} f_n.u \, dxdt \longrightarrow \langle f, u \rangle \,, \quad \forall u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T).$$

Lema 2.2. *Sejam* $1 \leq p, p' < \infty$ *e* q, q' *conjugados de* p *e* p', *respectivamente. As seguintes imersões são contínuas:*

1. $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \hookrightarrow L^1(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega))$,
2. $W^{-1,x}L^{q'(x)}(Q_T) \hookrightarrow L^1(0,T; W^{-1,q'(x)}(\Omega))$.

Demonstração:

1. Seja $u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ e $\rho(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^{p(x)} dx$. Para todo $\lambda > 1$ temos que $\lambda \rho(u) \leq \rho(\lambda u)$ e assim $\lambda \rho\Big(\frac{\nabla u}{\lambda}\Big) \leq \rho(\nabla u)$. Como

$$\left\| \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = 1,$$

pela proposição (1.15) resulta que

$$\rho\left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right) = \int_\Omega \left| \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right|^{p(x)} dx = 1.$$

Se $\dfrac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} \geq 1$, temos

$$\int_\Omega \left| \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} \right|^{p(x)} dx = \int_\Omega \left| \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)} \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right|^{p(x)} dx$$

$$\geq \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} \int_\Omega \left| \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}} \right|^{p(x)} dx = \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} \leq \int_\Omega \left| \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} \right|^{p(x)} dx + 1,$$

que integrando sobre $[0, T]$ obteremos

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}} dt \leq 1 + T = C$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} dt \leq C \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(Q_T)}$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt \leq C \|u\|_{W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)}$$

$$\Longrightarrow \|u\|_{L^1(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega))} \leq C \|u\|_{W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)},$$

de onde segue que $W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T) \subset L^1(0, T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e podemos concluir

$$W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T) \hookrightarrow L^1(0, T; W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

2. Seja $f \in W^{-1,x} L^{q'(x)}(Q_T)$, então

$$\begin{cases} f = \sum_{|\alpha| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha \ , \quad f_\alpha \in L^{q'(x)}(Q_T) \\ \quad \|f\|_{W^{-1,x} L^{q'(x)}(Q_T)} = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,x} L^{p'(x)}(Q_T)} \leq 1} |\langle f, u \rangle| = \inf \sum_{|\alpha| \leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(Q_T)}. \end{cases}$$

Temos que

$$\int_0^T \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} dt \leq C \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(Q_T)}$$

$$\Longrightarrow \int_0^T \sum_{|\alpha| \leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} dt \leq C \sum_{|\alpha| \leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} \tag{2.5}$$

e $\langle f, u \rangle = \Big\langle \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, u \Big\rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle f_\alpha, D^\alpha u \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega f_\alpha D^\alpha u dx,$

e para todo $u \in W_0^{1,p'(x)}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{W^{-1,q'(x)}(\Omega)} &= \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} |\langle f,u\rangle| = \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} \left|\sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega f_\alpha D^\alpha u dx\right| \\
&\leq \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} \sum_{|\alpha|\leq 1}\int_\Omega |f_\alpha||D^\alpha u| dx \\
&\leq \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} \|D^\alpha u\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \\
&\leq \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} \sum_{|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_{L^{p'(x)}(\Omega)} \\
&= \sup_{\|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)}\leq 1} \|u\|_{W_0^{1,p'(x)}(\Omega)} \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Integrando este resultado sobre $[0,T]$ e usando (2.5), teremos

$$
\int_0^T \|f\|_{W^{-1,q'(x)}(\Omega)} dt \leq \int_0^T \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(\Omega)} dt \leq C \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} < \infty, \tag{2.6}
$$

logo $f \in L^1(0,T;W_0^{-1,q'(x)}(\Omega))$ e portanto $W^{-1,x}L^{q'(x)}(Q_T) \subset L^1(0,T;W_0^{-1,q'(x)}(\Omega))$. Ainda por (2.6) e sendo $C > 0$,

$$
\int_0^T \|f\|_{W^{-1,q'(x)}(\Omega)} dt \leq \inf \sum_{|\alpha|\leq 1} \|f_\alpha\|_{L^{q'(x)}(Q_T)} = \|f\|_{W^{-1,x}L^{q'(x)}(Q_T)}
$$

de onde podemos concluir que

$$
W^{-1,x}L^{q'(x)}(Q_T) \hookrightarrow L^1(0,T;W^{-1,q'(x)}(\Omega))
$$

□

Observações 2.1. *Para* $1 \leq p(x) \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$, *temos:*

1. $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega) \;\Rightarrow\; W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p(x)}(\Omega) \;\Rightarrow\; W^{-1,q(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,1}(\Omega)$.

   Assim,

$$
W^{-1,x}L^{q'(x)}(Q_T) \overset{lema(2.2)}{\hookrightarrow} L^1(0,T;W^{-1,q'(x)}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega)).
$$

2. $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega) \;\Rightarrow\; L^1(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^1(\Omega)) = L^1(Q_T)$

3. $W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega) \;\Rightarrow\; L^1(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,1}(\Omega)$.

Temos então que existe $C > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{-1,1}(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^1(\Omega)} \quad &\Rightarrow \quad \int_0^T \|u\|_{W^{-1,1}(\Omega)} dt \leq C \int_0^T \|u\|_{L^1(\Omega)} dt \\
&\Rightarrow \quad \|u\|_{L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega))} \leq C \int_{Q_T} |u| dxdt = C\|u\|_{L^1(Q_T)} \\
&\Rightarrow \quad L^1(Q_T) \hookrightarrow L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega))
\end{aligned}$$

4. Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $N < \infty$*, tal que para toda* $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} + N\|u\|_Y$$

sendo a imersão $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ *compacta,* Y *é um espaço de Banach e* $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow Y$ *é contínua.*

5. Dos itens 2. e 3. temos $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,1}(\Omega)$ *e assim*

$$L^1(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)) \;\hookrightarrow\; L^1(0,T; W^{-1,1}(\Omega))$$

Lema 2.3. *Seja* Y *um espaço de Banach tal que* $L^1(\Omega) \hookrightarrow Y$ *é contínua. Se* F *é limitado em* $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ *e relativamente compacto em* $L^1(0,T;Y)$*, então* F *é relativamente compacto em* $L^1(Q_T)$.

Demonstração: Integrando sobre $[0,T]$ a desigualdade do item *(4)* das observações (2.1), tem-se

$$\int_0^T \|u\|_{L^1(\Omega)} dt \leq \varepsilon \int_0^T \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt + N \int_0^T \|u\|_Y dt$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^1(Q_T)} \leq \varepsilon \int_0^T \|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt + N\|u\|_{L^1(0,T;Y)}.$$

Como F é limitado, existem $u_1, u_2, \ldots, u_m \in F$ que satisfazem: $\forall u \in F$, existem u_n, com $1 \leq n \leq m$ e $\varepsilon > 0$, tal que

$$\|u_n - u\|_{L^1(0,T;Y)} \leq \varepsilon,$$

então

$$\|u_n - u\|_{L^1(Q_T)} \leq \varepsilon \int_0^T \|u_n - u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt + N\|u_n - u\|_{L^1(0,T;Y)}.$$

Ainda pela limitaçao de F em $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ e pelo item (1) do lema (2.2), podemos dizer que $\int_0^T \|u_n - u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt$ é um termo limitado, logo

$$\|u_n - u\|_{L^1(Q_T)} \leq C,$$

com $C > 0$. Portanto, F é relativamente compacto em $L^1(Q_T)$. $\square$

Observação 2.2. *Para cada $h > 0$, define-se a translação usual $\tau_h u$ da função u por $\tau_h u = u(t+h)$. Tem-se que*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(0,T-h;W^{-1,1}(\Omega))} \to 0$$

uniformemente com respeito a $u \in F$ quando $h \to 0$ (Ver [34]).

Teorema 2.1. *Se F é limitado em $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$ e $\left\{\frac{\partial u}{\partial t};\ u \in F\right\}$ é limitado em $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, então F é relativamente compacto em $L^1(Q_T)$.*

Demonstração: Temos que $\forall u \in F$ existe $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Para $0 < t_1 < t_2 < T$, temos que

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u_n dt \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} \leq \int_0^T \|u_n\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt$$

e

$$\int_0^T \|u_n\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} dt \leq C\|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} \ (lema\ (2.2)),$$

resulta que

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} u_n dt \right\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} \leq C\|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)}.$$

Sabe-se que $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ é compacta, donde podemos deduzir que $\left(\int_{t_1}^{t_2} u_n dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta em $L^1(\Omega)$ e, portanto, em $W^{-1,1}(\Omega)$ (Obs. (2.1), item *3.*).

Por outro lado, $\left\{\frac{\partial u_t}{\partial t},\ u \in F\right\}$ é limitado em $W^{-1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, consequentemente é limitado em $L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega))$ (Obs. (2.1), item *1*). Do item 1 do lema (2.2) e do item *5.* das observações (2.1), $F \subset L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega))$.

Da observação (2.2), temos $\|\tau_h u - u\|_{L^1(0,T-h;W^{-1,1}(\Omega))} \longrightarrow 0$ uniformemente com respeito a $u \in F$ quando $h \to 0$. Pelo teorema (2) em [34], o conjunto F é relativamente compacto em $L^1(0,T;W^{-1,1}(\Omega))$. Desde que $L^1(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,1}(\Omega)$ é contínua, pelo lema (2.3) concluimos que F é relativamente compacto em $L^1(Q_T)$. $\square$

Capítulo 3

A Existência de Solução

Neste capítulo, estudaremos o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f, \quad em \;\; Q_T \\ u(x,t) = 0, \quad sobre \;\; \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \psi(x), \quad em \;\; \Omega \end{cases}$$

nos espaços $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, das classes de funções definidas no cilindro $Q_T = \Omega \times (0,T)$, com Ω um domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, $\psi(x)$ é uma função em $L^2(\Omega)$, $A(u) = -div\big(a(x,t,u,\nabla u)\big) + a_0(x,t,u,\nabla u)$, $p(x)$ é uma função em $C(\overline{\Omega})$, tal que

$$1 < p^- = \inf_{\Omega} p(x) \leq p(x) \leq p^+ = \sup_{\Omega} p(x) < \infty$$

com $q(x)$ o conjugado de $p(x)$, isto é, $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$.

Definição 3.1. *Uma Solução Fraca do problema* (P) *é uma função* $u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $u' \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ *tal que*

$$\int_0^T \langle u', v\rangle dt + \int_0^T \langle A(u), v\rangle dt = \int_0^T \langle f, v\rangle dt$$

para toda $v \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, *com* $u(x,0) = \psi(x) \in L^2(\Omega)$ *e* $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t$.

1 Método de Galerkin

Escolhemos uma sequência de funções $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ tal que o fecho de $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, com relação a $C^1(\overline{\Omega})$, contém $C_0^{\infty}(\Omega)$ com $V_n = span\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ (ver [23]).

Definimos $W_n = C^1([0,T], V_n)$ equipado com a norma

$$\|\omega\|_{W_n} = \sup_{0\leq t\leq T} \|\omega(x,t)\|_{V_n} + \sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{\partial \omega(x,t)}{\partial t} \right\|_{V_n},$$

onde $\|\omega\|_{V_n} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\omega(x)| + \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla\omega(x)|$, para $\omega \in V_n$. Pelo lema (2.1) sabemos que, para $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ existe uma sequência $\{f_n\} \subset C_0^{\infty}(Q_T)$, tal que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, isto é,

$$\int_Q f_n \cdot u \, dxdt \;\to\; \langle f, u\rangle$$

$\forall u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$.

Para qualquer $\psi(x) \in L^2(\Omega)$ existe uma sequência $\{\psi_n(x)\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ tal que $\{\psi_n(x)\} \to \psi(x)$ em $L^2(\Omega)$.

Definição 3.2. *Uma função $u_n \in W_n$ é chamada de aproximação de Galerkin de (P) se*

$$\int_{Q_\tau} \varphi \frac{\partial u_n}{\partial t} \, dxd + \int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi \, dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\varphi \, dxdt = \int_{Q_\tau} f_n\varphi \, dxdt$$

para todo $\tau \in [0,T]$ e $\varphi \in C^1([0,T],V_n)$, onde $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$ e $u_n(0) = \psi_n(x)$.

O objetivo é achar soluções de Galerkin de (P), no espaço W_n, na forma

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) w_j,$$

com $\alpha_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, que seja solução do problema aproximado

$$(P_A) \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t} v \, dx + \int_\Omega a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla v \, dx + \int_\Omega a_0(x,t,u_n,\nabla u_n) v \, dx = \int_\Omega f_n v \, dx, \\ \\ u_n(0) = \psi_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$\forall v \in W_n$, com $\psi_n(x) \to \psi(x)$ em $L^2(\Omega)$.

Fazendo $v = w_i$ em (P_A), obtemos

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t} w_i \, dxd + \int_\Omega a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla w_i \, dxdt + \int_\Omega a_0(x,t,u_n,\nabla u_n) w_i \, dxdt = \int_\Omega f_n w_i \, dxdt, \\ \\ u_n(0) = \psi_n(x). \end{cases}$$

Sendo $u_n'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j'(t) w_j$, a equação em (P_A) torna-se

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n \alpha_j'(t) w_j w_i \, dx + \int_\Omega a\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) w_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\nabla w_j\Big)\nabla w_i \, dx$$
$$+ \int_\Omega a_0\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) w_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\nabla w_j\Big) w_i \, dx = \int_\Omega f_n w_i \, dx$$

Definimos uma função a valores vetoriais $p_n(t,\alpha) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$\big(p_n(t,\alpha)\big)_i = \int_\Omega \Bigg[a\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla w_j\Big)\nabla w_i + a_0\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \alpha_j w_j, \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla w_j\Big) w_i \Bigg] dx$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Como a e a_0 são contínuas em $(\,\cdot\,, t, s, \xi)$ para cada x fixado em Ω, segue que $p_n(t,\alpha)$ é contínua em t e em α. Tomando

$$\big(\eta(t)\big)_i = \int_\Omega u_n(t) w_i \, dx$$

teremos $\big(\eta'(t)\big)_i = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial t} w_i \, dx$. Como os w_i formam uma conjunto ortonormal, então

$$\eta_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\langle w_j, w_i\rangle = \alpha_j(t), \tag{3.1}$$

e assim, estudaremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \eta' + p_n(t,\eta) = F_n, \\ \eta(0) = U_n(0), \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $(F_n)_i = \displaystyle\int_\Omega f_n w_i dx$, $(U_n(0))_i = (\eta(0))_i = \displaystyle\int_\Omega u_n(0) w_i dx = \int_\Omega \psi_n(x) w_i dx$. Para provarmos que a EDO (3.2) tem solução, mostraremos que a função $G : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$G(t,\eta) = -p_n(t,\eta) + F_n(t)$$

é uma funçao de Carathéodory. De fato,

a) Fixando t, G é contínua em η.

De fato, a função $F_n(t)$ é constante com relação a η e as funções a e a_0 são contínuas em η, logo $p_n(t,\eta)$ é contínua em η e portanto $G(t,\eta)$ será é contínua em η.

b) Fixando η, G é mensurável em t.

Temos que a e a_0 são contínuas em t, portanto mensuráveis, logo $p_n(t,\eta)$ será mensurável em t. A sequência $(f_n) \subset C_0^\infty(Q_T)$ é mensurável, portanto a função $F_n(t)$ também será mensurável em t, consequentemente $G(t,\eta)$ é mensurável em t.

c) G é majorada por uma função integável num compacto.

Primeiramente, vejamos a forma matricial de η.

$$\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \langle w_2, w_1\rangle & \dots & \langle w_n, w_1\rangle \\ \langle w_1, w_2\rangle & \langle w_2, w_2\rangle & \dots & \langle w_n, w_2\rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \langle w_1, w_n\rangle & \langle w_2, w_n\rangle & \dots & \langle w_n, w_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\langle w_j, w_1\rangle \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\langle w_j, w_2\rangle \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\langle w_j, w_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{bmatrix}$$

$$= \Big[\eta_i(t)\Big]_{n\times 1} = \eta,$$

logo, por (3.1),

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) w_j = \sum_{j=1}^n \eta_i(t) w_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j(t)\nabla w_j = \sum_{j=1}^n \eta_j(t)\nabla w_j$$

e assim

$$\big(p_n(t,\eta)\big)_i = \int_\Omega \left[a\left(x, t, \sum_{j=1}^n \eta_i w_j, \sum_{j=1}^n \eta_i \nabla w_j\right)\nabla w_i + a_0\left(x, t, \sum_{j=1}^n \eta_i w_j, \sum_{j=1}^n \eta_i \nabla w_j\right) w_i \right] dx$$

que multiplicando por η, obteremos

$$\big(p_n(t,\eta)\eta\big)_i = \int_\Omega \left[a\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \eta_i w_j, \sum_{j=1}^n \eta_i \nabla w_j\Big) \sum_{j=1}^n \eta_i \nabla w_j + a_0\Big(x,t,\sum_{j=1}^n \eta_i w_j, \sum_{j=1}^n \eta_i \nabla w_j\Big) \sum_{j=1}^n \eta_i w_j \right] dx.$$

Por hipótese, temos $a(x,t,s,\xi)\xi + a_0(x,t,s,\xi)s \geq \beta|\xi|^{p(x)} + \gamma|s|^{p(x)}$ que nos confirma que $p_n(t,\eta)\eta \geq 0$, e ao multiplicarmos ambos os lados da equação (3.2) por η, veremos facilmente que $\eta'\eta \leq F_n\eta$ e usando a desigualdade de Young, com $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, teremos

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\eta(t)|^2 \leq |F_n||\eta| \leq \frac{1}{2}|F_n|^2 + \frac{1}{2}|\eta(t)|^2.$$

Tomando $h(t) = |\eta(t)|^2$, resulta

$$\frac{1}{2}h'(t) \leq \frac{1}{2}|F_n|^2 + \frac{1}{2}h(t),$$

$$\Longrightarrow h'(t) \leq |F_n|^2 + h(t).$$

Se tomarmos $f(t)=1$ e $g(t) = |F_n|^2$, teremos as hipóteses do lema (1.2) (de Grönwall) para $f(t), g(t) \geq 0$ e assim

$$h(t) \leq e^t\Big[h(0) + \int_0^t |F_n|^2 dt\Big].$$

Observe que para $t \in [0,T]$ e $|F_n|^2 \geq 0$, vem que $e^t \leq e^T$ e

$$\int_0^t |F_n|^2 dt \leq \int_0^t |F_n|^2 + dt \int_t^T |F_n|^2 dt = \int_0^T |F_n|^2 dt.$$

Daí

$$h(t) \leq e^T\Big[h(0) + \int_0^T |F_n|^2 dt\Big],$$

que resulta em

$$|\eta(t)| \leq e^{\frac{T}{2}}\Big[|\eta(0)|^2 + \int_0^T |F_n|^2 dt\Big]^{\frac{1}{2}}$$

onde $h(0) = |\eta(0)|^2$ e tomando $e^{\frac{T}{2}}\Big[|\eta(0)|^2 + \int_0^T |F_n|^2 dt\Big]^{\frac{1}{2}} = C_n(T)$ obtemos

$$|\eta(t)| \leq C_n(T), \quad \forall t \in [0,T].$$

Note também que $|\eta(0)| \leq C_n(T)$ $\forall t \in [0,T]$, assim

$$\left|\int_0^t \eta'(s)ds\right| = |\eta(t) - \eta(0)| \leq |\eta(t)| + |\eta(0)| \leq 2C_n(T).$$

Tomemos $E = \{\eta \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|\eta\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_n(T), \;\; C_n(T) > 0\}$. Redefinindo $G : [0,T] \times E \to \mathbb{R}^n$, podemos afirmar que existem $C_1, C_2 > 0$ tal que $|p_n(t,\eta)| \leq C_1$, $\forall (t,\eta) \in K \subset [0,T] \times E$, com K compacto, pois $p_n(t,\eta)$ é contínua e $|F_n(t)| \leq C_2$, $\forall (t,\eta) \in K$ e assim

$$|G(t,\eta)| \leq |p_n(t,\eta)| + |F_n(t)| \leq C_1 + C_2 = C,$$

portanto, (3.2) satisfaz as condições de Carathéodory. Logo, existe uma solução para o problema aproximado P_A.

Seja $L_n = \max\limits_{t \in [0,T]} |F_n - p_n(t,\eta)|$ e $q = \min\{T, \frac{2C_n(T)}{L_n}\}$. Podemos obter uma solução local em $[0,q]$. Seja $q = t_1$. Adiante, supondo t_1 um valor inicial, podemos obter para a equação diferencial ordinária, uma solução local em $[t_1, t_2]$ onde $t_2 = t_1 + q$. Assim, podemos dividir $[0,T]$ em $[0,t_1]$, $[t_1,t_2], \ldots, [t_{l-1}, t_l]$, com $t_i = t_{i-1} + q$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$, $t_l = T$ e existe uma solução local em $[t_{i-1}, t_i]$ e $[t_{l-1}, t_l]$. Desta forma, podemos dizer que existe uma solução η_n em $C^1([0,T])$.

Pela definição de $p_n(t,\alpha)$, sabemos que a função $u_n(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\eta_n(t))_j w_j(x)$ é uma solução de Galerkin de (P).

2 O Resultado de Existência de Solução de (P)

Demonstraremos agora o principal resultado deste capítulo, referente a existência de solução para o problema (P), onde serão consideradas as seguintes hipóteses sobre os coeficientes a e a_0:

$$|a(x,t,s,\xi)| \leq \alpha\big(C(x,t) + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}\big), \tag{3.3}$$

$$|a_0(x,t,s,\xi)| \leq \alpha\big(C(x,t) + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1}\big), \tag{3.4}$$

$$\big[a(x,t,s,\xi) - a(x,t,s,\xi^*)\big](\xi - \xi^*) > 0, \tag{3.5}$$

$$a(x,t,s,\xi)\xi + a_0(x,t,s,\xi)s \geq \beta|\xi|^{p(x)} + \gamma|s|^{p(x)} \tag{3.6}$$

Teorema 3.1. *Suponha que $f \in W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ e as condições (3.3) − (3.6) sejam satisfeitas. Então existe uma soluçao fraca $u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ de (1) no sentido de que*

$$-\int_{Q_T} u\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt + \int_\Omega u(t)\varphi(t)dx\Big|_0^T + \int_{Q_T} \big[a(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)\varphi\big]\, dxdt = \langle f, \varphi\rangle$$

para toda $\varphi \in C^1(0,T; C_0^\infty(\Omega))$.

Demonstração: Será feita em três passos:

Passo 1: *Convergência fraca das sequências* u_n, $a(x,t,u_n,\nabla u_n)$ *e* $a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)$.

Primeiro obteremos uma aproximação de Galerkin u_n para a solução do problema (P), isto é,

$$\begin{aligned} \int_{Q_\tau} \varphi \frac{\partial u_n}{\partial t}\, dxd + \int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi\, dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\varphi\, dxdt \\ = \int_{Q_\tau} f_n \varphi\, dxdt \end{aligned} \tag{3.7}$$

$\forall \varphi \in W_n$ e $\tau \in [0,T]$. Fazendo $\varphi = u_n$ em (3.7) obtemos,

$$\int_{Q_\tau} u_n \frac{\partial u_n}{\partial t}\, dxd + \int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n\, dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)u_n\, dxdt = \int_{Q_\tau} f_n u_n\, dxdt.$$

Tomando $s = u_n$ e $\xi = \nabla u_n$, em (3.6) teremos:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\tau} u_n \frac{\partial u_n}{\partial t}\, dxdt + \int_{Q_\tau} \left(\beta|\nabla u_n|^{p(x)} + \gamma|u_n|^{p(x)}\right) dxdt \\ \le & \int_{Q_\tau} u_n \frac{\partial u_n}{\partial t}\, dxd + \int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n\, dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)u_n\, dxdt \\ = & \int_{Q_\tau} f_n u_n\, dxdt \ \le \int_{Q_\tau} |f_n u_n|\, dxdt \le \|f_n\|_{W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_\tau)} \|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_\tau)} \\ \le & \ C\, \|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_\tau)} \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Temos que

$$\int_{Q_\tau} u_n \frac{\partial u_n}{\partial t}\, dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \psi_n^2(x)\, dx \tag{3.8}$$

obtemos

$$\int_{Q_\tau} \left(\beta|\nabla u_n|^{p(x)} + \gamma|u_n|^{p(x)}\right) dxdt \le C\|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_\tau)} + \int_\Omega \psi_n^2(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{Q_\tau} \left(\beta|\nabla u_n|^{p(x)} + \gamma|u_n|^{p(x)}\right) dxdt \le C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}\Big) + M. \tag{3.9}$$

Desde que $\psi_n(x) \to \psi(x)$ em $L^2(\Omega)$, sabemos que $\int_\Omega \psi_n^2(x)\, dx \le M$, para $M > 0$. Temos então as seguintes possibilidades para $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}$ e $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}$:

a) Se $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq 1.$

Daí

$$\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C, \quad \forall \tau \in [0, T].$$

Observação 3.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $k \geq 1 \Rightarrow (|a| + |b|)^k \leq 2^k(|a|^k + |b|^k)$.

b) Se $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} > 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq 1.$

Observe que podemos ter, sem perda de generalidade,

$$C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}\Big) + M \leq C\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + C + M = C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big), \quad (3.10)$$

com $C > 0$. Tomando $C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big)$ e sendo $1 < p^-, q^- < \infty$, com $\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} = 1$, usando a desigualdade de Young para algum $\varepsilon_1 > 0$, teremos

$$C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big) \leq \frac{\varepsilon_1^{p^-}}{p^-}(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1)^{p^-} + \frac{C^{q^-}}{\varepsilon_1^{q^-} q^-}.$$

Pela observação (3.1),

$$\frac{\varepsilon_1^{p^-}}{p^-}(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1)^{p^-} \leq \frac{\varepsilon_1^{p^-} 2^{p^-}}{p^-}\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \frac{\varepsilon_1^{p^-} 2^{p^-}}{p^-}$$

e fazendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^{p^-} 2^{p^-}}{p^-}$ obteremos

$$\frac{C^{q^-}}{\varepsilon_1^{q^-} q^-} \leq \frac{C^{q^-} 2^{q^-}}{\varepsilon^{(q^- - 1)} q^-}$$

e assim

$$C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big) \leq \varepsilon\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \varepsilon + \frac{C^{q^-} 2^{q^-}}{\varepsilon^{(q^- - 1)} q^-} = \varepsilon\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \frac{\varepsilon^{q^-} q^- + C^{q^-} 2^{q^-}}{\varepsilon^{(q^- - 1)} q^-},$$

o último termo depende de ε, portanto

$$C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big) \leq \varepsilon\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + C(\varepsilon). \quad (3.11)$$

Pela proposição (1.15), usando (3.9), (3.10) e (3.11), chegamos a

$$\begin{aligned} \|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} &\leq \int_{Q_\tau} |u_n|^{p(x)}\, dxdt \leq \int_{Q_\tau} \Big(\beta|\nabla u_n|^{p(x)} + \gamma|u_n|^{p(x)}\Big)\, dxdt \\ &\leq \varepsilon\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + C(\varepsilon), \end{aligned}$$

e tomando $\varepsilon = 1/2$,

$$\|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq 2C(1/2) \implies \|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq \big(2C(1/2)\big)^{1/p^-},$$

então existe uma constante C tal que $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C$ e assim teremos

$$\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C, \quad \forall \tau \in [0,T].$$

c) Se $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} > 1$.

Valendo-se do mesmo procedimento feito em **b)**, agora para $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}$, teremos,

$$\|\nabla u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq \int_{Q_\tau} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dxdt \leq \varepsilon \|\nabla u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + C(\varepsilon).$$

Logo, para $\varepsilon = 1/2$, resultará que $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C$ e assim

$$\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C, \quad \forall \tau \in [0,T].$$

d) Se $\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} > 1$ e $\|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} > 1$.

Da mesma forma, usando a proposição (1.15) e a observação (3.1)

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2^{p^-}}\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}\Big)^{p^-} &\leq \|u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|^{p^-}_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \\
&\leq \int_{Q_\tau} |u_n|^{p(x)}\, dxdt + \int_{Q_\tau} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dxdt \\
&\leq C\Big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + 1\Big) \\
&\leq \varepsilon\big(\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)}\big)^{p^-} + C(\varepsilon),
\end{aligned}$$

que tomando $\varepsilon = 1/(2^{p^-+1})$, existe uma constante C tal que

$$\|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} + \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_\tau)} \leq C, \quad \forall \tau \in [0,T].$$

Pela discussão nos itens a), b), c) e d), concluimos que

$$\|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} \leq C.$$

Assim, temos que $u_n \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$. Igualmente, usando (3.8) e sabendo que $\psi_n \in L^2(\Omega)$, teremos

$$\int_{\Omega} u_n^2(x,\tau) \leq C, \quad em \quad [0,T],$$

$$\Rightarrow \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad em \quad [0,T]$$

$$\Rightarrow \|u_n\|_{L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)} \leq C.$$

Portanto, $u_n \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \cap L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$.

Pode-se verificar ainda, que

$$\int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)u_n dxdt \leq C. \tag{3.12}$$

De fato, tomando a primeira parte de (3.12) e usando a desigualdade de Hölder, teremos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n dxdt + \int_{Q_\tau} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)u_n dxdt \\
&\leq \int_{Q_\tau} |a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n| dxdt + \int_{Q_\tau} |a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)u_n| dxdt \\
&\overset{D.H.}{\leq} \|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \|\nabla u_n\|_{L^{p(x)}(Q_T)} + \|a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \|u_n\|_{L^{p(x)}(Q_T)} \\
&\leq \left(\|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} + \|a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)}\right)\|u_n\|_{W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)} \\
&\leq \left(\|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} + \|a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)}\right)C,
\end{aligned}$$

agora

$$\begin{aligned}
\int_{Q_\tau} |a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)|^{q(x)} dxdt &\leq \int_{Q_\tau} |\alpha\big(C(x,t) + |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |u_n|^{p(x)-1}\big)|^{q(x)} dxdt \\
&\leq \int_{Q_\tau} |\alpha C(x,t) + \alpha|\nabla u_n|^{p(x)-1} + \alpha|u_n|^{p(x)-1}|^{q(x)} dxdt \\
&\leq \int_{Q_\tau} 3^{q(x)}\Big(|\alpha C(x,t)|^{q(x)} + \alpha^{q(x)}|\nabla u_n|^{(p(x)-1)q(x)} + \alpha^{q(x)}|u_n|^{(p(x)-1)q(x)}\Big)dxdt \\
&\leq \int_{Q_\tau} 3^{q^+}\Big(|\alpha C(x,t)|^{q(x)} + \alpha^{q^+}|\nabla u_n|^{p(x)} + \alpha^{q^+}|u_n|^{p(x)}\Big)dxdt \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

de onde podemos obter

$$\|a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \leq C.$$

Igualmente tem-se

$$\|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \leq C.$$

Logo, (3.12) se verifica. Portanto, existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ } em \text{ } W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T), \\ a(x,t,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup h \text{ } em \text{ } \left(L^{q(x)}(Q_T)\right)^n, \\ a_0(x,t,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup h_0 \text{ } em \text{ } L^{q(x)}(Q_T), \end{cases} \tag{3.13}$$

com $h \in \left(L^{q(x)}(Q_T)\right)^n$ e $h_0 \in L^{q(x)}(Q_T)$. Logo, $u \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$.

Sabemos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, assim, existe uma subsequência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, assim $u \in L^\infty\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$.

Passo 2: Convergência q.t.p. de ∇u_n.

Para cada $k > 0$ definimos
$$T_k(s) = \begin{cases} s, & se \ |s| \leq k, \\ \frac{ks}{|s|}, & se \ |s| > k. \end{cases}$$

Desde que $u_n \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$, segue que $u_n \in L^{p(x)}(Q_T)$ e $\nabla u_n \in \left(L^{p(x)}(Q_T)\right)^n$. Pelo fato de que $\nabla T_k(u_n) = \frac{\partial T_k}{\partial s}\nabla u_n$ e $\frac{\partial T_k}{\partial s}$ é limitado, temos

$$\int_{Q_T} |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)} dxd \leq \int_{Q_T} \left|\frac{\partial T_k}{\partial s}\nabla u_n\right|^{p(x)} dxdt \leq \int_{Q_T} |K\nabla u_n|^{p(x)} dxdt < \infty,$$

para algum $K > 0$, e

$$\int_{Q_T} |T_k(u_n)|^{p(x)} dxdt = \begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} |u_n|^{p(x)} dxdt < \infty, \ se \ |u_n| \leq k, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \left|\frac{ku_n}{|u_n|}\right|^{p(x)} dxdt < \int_{Q_T} |u_n|^{p(x)} dxdt < \infty, \quad se \ |u_n| > k, \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla T_k(u_n) \in \left(L^{p(x)}(Q_T)\right)^n$ e $T_k(u_n) \in L^{p(x)}(Q_T)\big)$ e assim $T_k(u_n) \in W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$. Da mesma maneira prova-se que $T_k(u) \in W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$.

Considere um conjunto compacto $M \subset Q_T$ e uma função $\varphi_M \in C_0^\infty(Q_T)$ tal que,

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi_M \leq 1 & em & Q_T, \\ \varphi_M = 1 & sobre & M. \end{cases}$$

Seja $v_n = \varphi_M(T_k(u_n) - T_k(u)) \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$. Usando esta função no lugar da função teste em (3.7) teremos

$$\int_{Q_T} f_n v_n \, dxdt = \int_{Q_T} v_n \frac{\partial u_n}{\partial t} \, dxd + \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla v_n \, dxdt + \int_{Q_T} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n) v_n \, dxdt.$$

Como $\nabla v_n = \nabla \varphi_M (T_k(u_n) - T_k(u)) + \varphi_M \nabla (T_k(u_n) - T_k(u))$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} f_n \varphi_M (T_k(u_n) - T_k(u)) \, dxdt &= \int_{Q_T} \varphi_M (T_k(u_n) - T_k(u)) \frac{\partial u_n}{\partial t} \, dxdt \\
&+ \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n) \varphi_M \nabla (T_k(u_n) - T_k(u)) \, dxdt \\
&+ \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n) \nabla \varphi_M (T_k(u_n) - T_k(u)) dxdt \\
&+ \int_{Q_T} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n) \varphi_M (T_k(u_n) - T_k(u)) \, dxdt \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

1) Provaremos que $J_1 \to 0$, isto é, que

$$\int_{Q_T} \varphi_M (T_k(u_n) \frac{\partial u_n}{\partial t} \, dxdt \ \to \ \int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)) \frac{\partial u}{\partial t} \, dxdt.$$

Primeiramente, $\forall \beta \in W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)$, temos

$$\begin{aligned}
|\langle -div \ a(x,t,u_n,\nabla u_n), \beta \rangle| &= \left| \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n) \nabla \beta \, dxdt \right| \\
&\leq \|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \|\nabla \beta\|_{L^{p(x)}(Q_T)} \\
&\leq C \|\beta\|_{W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \|div \ a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{W^{-1,x} L^{q(x)}(Q_T)} = \sup_{\beta \in W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)} \frac{|\langle div \ a(x,t,u_n,\nabla u_n), \beta \rangle|}{\|\beta\|_{W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)}} \leq C,$$

de onde concluimos que $div \ a(x,t,u_n,\nabla u_n)$ é limitado em $W^{-1,x} L^{q(x)}(Q_T)$.

$\frac{\partial u_n}{\partial t}$ é a soma de termos limitados em $W^{-1,x} L^{q(x)}(Q_T)$ e $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)$, então pelo Teorema (2.1) existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que $u_n \to u$ em $L^1(Q_T)$, além disso, $u_n \to u$ q.t.p. em Q_T. Como $T_k(s)$ é contínuo, $T_k(u_n) \to T_k(u)$ q.t.p. em Q_T. Por outro lado $|T_k(u_n) - T_k(u)|^{p(x)}$ é limitado, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \tag{3.14}$$

em $L^{p(x)} Q_T$.

Seja $S_k(s) = \displaystyle\int_0^s T_k(\tau) d\tau$. Sabe-se que T_k é limitado, isto é, existe $C > 0$ tal que $|T_k(s)| \leq C$ e para todo $w \in W_0^{1,x} L^{p(x)}(Q_T)$, temos

$$
\begin{aligned}
a)\ \int_{Q_T} |S_k(w)|^{p(x)}dxdt \ &= \int_{Q_T} \Big| \int_0^w T_k(\tau)d\tau \Big|^{p(x)} dxdt \leq \int_{Q_T} \Big(\int_0^w |T_k(\tau)|\, d\tau \Big)^{p(x)} dxdt \\
&\leq \int_{Q_T} \Big(\int_0^w C\, d\tau \Big)^{p(x)} dxdt \leq \int_{Q_T} |Cw|^{p(x)} dxdt < \infty,
\end{aligned}
$$

como $\nabla u_n \in \Big(L^{p(x)}(Q_T)\Big)^n$ e $\nabla S_k(w) = T_k(w)\nabla w$

$$
b)\ \int_{Q_T} |\nabla S_k(w)|^{p(x)}dxdt \ = \int_{Q_T} |T_k(w)\nabla w|^{p(x)} dxdt \leq \int_{Q_T} |C\nabla w|^{p(x)} dxdt < \infty,
$$

de $a)$ e $b)$, segue que $S_k(w) \in W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$. Como $u_n \to u$ em $L^1(Q_T)$ e

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_T} |S_k(u_n) - S_k(u)|dxdt \ &= \int_{Q_T} \Big| \int_0^{u_n} T_k(\tau)d\tau - \int_0^u T_k(\tau)d\tau \Big| dxdt \\
&= \int_{Q_T} \Big| \int_u^{u_n} T_k(\tau)d\tau \Big| dxdt \leq \int_{Q_T} |T_k(\xi)(u_n - u)|dxdt \\
&\leq \|T_k(\xi)\|_{L^\infty(Q_T)} \|u_n - u\|_{L^1(Q_T)} \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

onde ξ é um elemento que está entre u e u_n, assim, obtemos

$$
S_k(u_n) \to S_k(u) \tag{3.15}
$$

em $L^1(Q_T)$.

Consideremos o espaço

$$
W^{1,t}L^{p(x)}(Q_T) = \Big\{ u \in L^{p(x)}(Q_T);\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p(x)}(Q_T) \Big\}.
$$

Para $u_n \in C^1(0,T;V_n) \subset W^{1,t}L^{p(x)}(Q_T)$, tem-se $T_k(u_n) \in W^{1,t}L^{p(x)}(Q_T)$. Então

$$
\int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u_n)dxdt \ = \Big\langle \tfrac{\partial \varphi_M}{\partial t}, S_k(u_n) \Big\rangle = -\Big\langle \varphi_M, \tfrac{\partial S_k(u_n)}{\partial t} \Big\rangle = -\Big\langle \varphi_M, T_k(u_n)\tfrac{\partial u_n}{\partial t} \Big\rangle
$$

$$
\Longrightarrow \int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u_n)dxdt = -\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial t} dxdt. \tag{3.16}
$$

Sendo $\frac{\partial \varphi_M}{\partial t}$ limitada q.t.p. em Q_T e fazendo $n \to \infty$, segue

$$
\int_{Q_T} \Big| \frac{\partial \varphi_M}{\partial t}\Big(S_k(u_n) - S_k(u) \Big) \Big| dxdt \leq \Big\| \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} \Big\|_{L^\infty(Q_T)} \|S_k(u_n) - S_k(u)\|_{L^1(Q)} \longrightarrow 0,
$$

por (3.15), e como $\frac{\partial \varphi_M}{\partial t} \in C_0^\infty(Q_T)$, obtemos

$$
\int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u_n)dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u)dxdt
$$

e por (3.16) vem que

$$-\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt \longrightarrow \int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u)dxdt. \tag{3.17}$$

Como $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ é a soma de termos limitados em $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$, teremos então que

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \eta \ \ em \ \ W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T).$$

Por outro lado, $\forall \phi \in C_0^\infty(Q_T)$,

$$\int_{Q_T} \phi \frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt = -\int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} u_n dxdt \to -\int_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} u \, dxdt$$

e $\displaystyle\int_{Q_T} \phi \frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt \to \int_{Q_T} \phi\eta \ dxdt$, assim $\displaystyle\int_{Q_T} \phi\eta \ dxdt = \int_{Q_T} \phi \frac{\partial u}{\partial t}dxdt$, pela unicidade do limite $\frac{\partial u}{\partial t} = \eta$ e portanto

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.18}$$

em $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$. É fácil ver que

$$\varphi_M T_k(u) \in W^{1,x}L^{p(x)}(Q_T), \tag{3.19}$$

logo

$$\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt \to \int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt.$$

Como $\displaystyle\int_{Q_T} \frac{\partial \varphi_M}{\partial t} S_k(u)dxdt = -\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt$ (usando (3.16)), obtemos

$$\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt \to \int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt,$$

e assim

$$\int_{Q_T} \varphi_M T_k(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt \to \int_{Q_T} \varphi_M T_k(u)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt,$$

Portanto, está provado que $J_1 \to 0$.

2) J_3 e J_4 tendem a 0(zero).

De fato, como $\|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)}, \|a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)} \leq C$ e também $\nabla\varphi_M \in L^\infty(Q_T)$, teremos

$$
\begin{aligned}
J_3 \quad &= \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi_M(T_k(u_n)-T_k(u))dxdt \\
&\leq \|\nabla\varphi_M\|_{L^\infty(Q_T)}\int_{Q_T} |a(x,t,u_n,\nabla u_n)(T_k(u_n)-T_k(u))|dxdt \\
\overset{(D.H)}{\to} \quad &\leq \|\nabla\varphi_M\|_{L^\infty(Q_T)}\|a(x,t,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{q(x)}(Q_T)}\|(T_k(u_n)-T_k(u))\|_{L^{p(x)}(Q_T)} \\
&\leq \|\nabla\varphi_M\|_{L^\infty(Q_T)}C\|(T_k(u_n)-T_k(u))\|_{L^{p(x)}(Q_T)} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow J_3 = \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi_M(T_k(u_n)-T_k(u))dxdt \longrightarrow 0 \tag{3.20}
$$

Analogamente obteremos

$$
J_4 = \int_{Q_T} a_0(x,t,u_n,\nabla u_n)\varphi_M(T_k(u_n)-T_k(u))dxdt \longrightarrow 0, \tag{3.21}
$$

quando $n\to\infty$.

3) Pelo fato de que $f_n \rightharpoonup f$ em $W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$(lema (2.1)) e $T_k(u_n)\to T_k(u_n)$ em $L^{q(x)}(Q_T)$, vem que

$$
\int_{Q_T} f_n\varphi_M(T_k(u_n)-T_k(u))dxdt \longrightarrow 0.
$$

Assim, por 1), 2) e 3), fica provado também que

$$
J_2 = \int_{Q_T} a(x,t,u_n,\nabla u_n)\varphi_M\big(\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\big)dxdt \longrightarrow 0. \tag{3.22}
$$

Fixado um número real $s>0$, considere o conjunto $Q_{(s)} = \{(x,t)\in Q_T;\ |\nabla T_k(u)|\leq s\}$ e χ_s a função característica de G_s. Tendo $r\leq s$,

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \int_{Q_{(r)}} \varphi_M\big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\big]dxdt \\
\leq\ & \int_{Q_{(s)}} \varphi_M\big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\big]dxdt \\
=\ & \int_{Q_{(s)}} \varphi_M\big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
\leq\ & \int_{Q_T} \varphi_M\big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
=\ & \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\big]dxdt \\
& -\int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\big]dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
& + \int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
= & \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big]dxdt \\
& - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u_n)dxdt + \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u)\big]dxdt \\
& + \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
& + \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)\nabla T_k(u_n)dxdt - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
& - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
= & \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big]dxdt \\
& - \int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
& + \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
& - \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt.
\end{aligned}
$$

Tomemos

$$
\begin{cases}
I_1 = \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\big]dxdt \\
I_2 = -\int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
I_3 = \int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)\big[\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
I_4 = -\int_{Q_T} \varphi_M a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s\big)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt.
\end{cases}
$$

1). Temos que $I_1 \longrightarrow 0$.

De fato, por (3.22), procede a afirmação.

2). Mostraremos que,

$$I_2 = -\int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)\big]\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \longrightarrow 0$$

Denotando por χ_{G_n} a função característica do conjunto

$$G_n = \{(x,t) \in Q_T;\ |u_n(x,t)| > k\},$$

teremos:

a) Se $|u_n(x,t)| > k$, implica que $\nabla T_k(u_n) = 0$, e assim podemos escrever

$$I_2 = \int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,0\big)\big)\big]\big[\chi_{G_n}\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt$$

b) Se $|u(x,t)| \geq k$, implica que $\nabla T_k(u) = 0$, teremos $\chi_{G_n}\nabla T_k(u)\chi_s = 0$ e portanto $I_2 = 0$.

c) Se $|u(x,t)| < k$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, $|u_n(x,t)| < k$. Neste caso teremos que

$$\chi_{G_n}\nabla T_k(u)\chi_s \longrightarrow 0, \tag{3.23}$$

q.t.p. em Q_T. Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\Longrightarrow \chi_{G_n}\nabla T_k(u)\chi_s \overset{fortem.}{\longrightarrow} 0 \tag{3.24}$$

em $\Big(L^{p(x)}(Q_T)\Big)^n$, e como $\big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,0\big)\big)\big]$ é limitada em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$, segue que

$$I_2 = \int_{Q_T} \varphi_M \big[a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) - a\big(x,t,u_n,0\big)\big)\big]\big[\chi_{G_n}\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \longrightarrow 0.$$

3). Agora mostremos que

$$I_3 = \int_{Q_T} \varphi_M a(x,t,u_n,\nabla u_n)\big[\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]\ dxdt \longrightarrow \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M h \nabla T_k(u)\ dxdt$$

De fato, como $a(x,t,u_n,\nabla u_n) \to h$ em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$ e $T_k(u)\chi_s = 0$ em $Q_T\setminus Q_{(s)}$, teremos

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{Q_T} \varphi_M a(x,t,u_n,\nabla u_n)\big[\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]\ dxdt \\ &= \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M a(x,t,u_n,\nabla u_n)\nabla T_k(u)\ dxdt \\ &\longrightarrow \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M h \nabla T_k(u)\ dxdt. \end{aligned}$$

4). Por último, mostra-se que

$$
\begin{aligned}
I_4 = -\int_{Q_T} \varphi_M . a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big] dxdt \\
\longrightarrow -\int_{Q_T \setminus Q_{(s)}} \varphi_M a(x,t,T_k(u),0)\nabla T_k(u)\; dxdt.
\end{aligned}
$$

Pelo fato de que $u_n \to u$ q.t.p. em Q_T, teremos

$$
a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s) \to a(x,t,u,\nabla T_k(u)\chi_s)
$$

q.t.p. em Q_T. E sendo $a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)$ limitada em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$

$$
a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s) \rightharpoonup a(x,t,u,\nabla T_k(u)\chi_s)
$$

em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$, e como $T_k(u_n) = u_n$, para $|u_n| \leq k$, e tomando $\alpha = 1$, teremos então que

$$
\begin{aligned}
|a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)|^{q(x)} &\leq |C(x,t) + |T_k(u_n)|^{p(x)-1} + |\nabla T_k(u)\chi_s)|^{p(x)-1}|^{q(x)} \\
&\leq |C(x,t)|^{q(x)} + |T_k(u_n)|^{(p(x)-1)q(x)} + |\nabla T_k(u)\chi_s)|^{(p(x)-1)q(x)} \\
&\leq |C(x,t)|^{q(x)} + k^{p(x)} + |\nabla T_k(u)\chi_s)|^{p(x)}.
\end{aligned}
$$

A última parte da desigualdade acima é integrável, logo pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$
a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s) \overset{forte.}{\longrightarrow} a(x,t,T_k(u),\nabla T_k(u)\chi_s) \tag{3.25}
$$

em $\big(L^{q(x)}(Q_T)\big)^n$.

Por outro lado, temos que $\Big(\nabla T_k(u_n)\Big)$ é limitada em $\big(L^{p(x)}(Q_T)\big)^n$, portanto

$$
\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \eta'
$$

em $\big(L^{p(x)}(Q_T)\big)^n$, assim, $\forall \phi \in C_0^\infty(Q_T)$

$$
\int_{Q_T} \nabla T_k(u_n)\phi\; dxdt = -\int_{Q_T} T_k(u_n)\nabla\phi\; dxdt \to -\int_{Q_T} T_k(u)\nabla\phi\; dxdt
$$

e ainda

$$
\int_{Q_T} \nabla T_k(u_n)\phi\; dxdt \to \int_{Q_T} \eta'\phi\; dxdt,
$$

que pela unicidade do limite teremos

$$
\int_{Q_T} \eta'\phi\; dxdt = -\int_{Q_T} T_k(u)\nabla\phi\; dxdt = \int_{Q_T} \nabla T_k(u)\phi\; dxdt
$$

$\Rightarrow\ \eta' = \nabla T_k(u)$, portanto
$$\nabla T_k(u_n) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \tag{3.26}$$
em $\left(L^{p(x)}(Q_T)\right)^n$ e assim, podemos dizer que
$$\Big(\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\Big) \rightharpoonup \Big(\nabla T_k(u) - \nabla T_k(u)\chi_s\Big) \tag{3.27}$$
em $\left(L^{p(x)}(Q_T)\right)^n$.

Pelo fato de que $\nabla T_k(u_n) = 0$, para $|u_n| > k$, e
$$\begin{aligned}
I_4 \quad &= \quad -\int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
&= \quad \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
&= \quad \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
&\quad\quad + \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt \\
&\quad\quad - \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt \\
&= \quad \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt \\
&\quad\quad + \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s dxdt \\
&\quad\quad - \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt.
\end{aligned}$$
Se tomarmos $T_k(u_n) = u_n$, para $|u_n| \leq k$, e o substituirmos nos dois últimos termos da equação anterior, teremos
$$\begin{aligned}
I_4 \quad &= \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt \\
&\quad - \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
&\quad + \int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]\chi_{G_n} dxdt.
\end{aligned}$$
Similarmente a I_2 teremos
$$\int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\nabla T_k(u)\chi_s\chi_{G_n} dxdt \to 0$$
e
$$\int_{Q_T} \varphi_M.a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\chi_s\big]\chi_{G_n} dxdt \to 0.$$

Temos ainda por (3.25) e (3.27), que

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q_T} \varphi_M . a(x,t,T_k(u_n),\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
\to\quad &-\int_{Q_T} \varphi_M . a(x,t,T_k(u),\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u)-\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
&= -\int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M . a(x,t,T_k(u),0)\nabla T_k(u)dxdt.
\end{aligned}
$$

E assim teremos que

$$
\begin{aligned}
I_4 = &-\int_{Q_T} \varphi_M . a(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\chi_s)\big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\chi_s\big]dxdt \\
&\to -\int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M . a(x,t,T_k(u),0)\nabla T_k(u)dxdt.
\end{aligned}
$$

Passando ao limite quando $n\to\infty$,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lim_{n\to\infty}\int_{Q_{(r)}} \varphi_M\Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\Big]dxdt \\
&\le \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M h\nabla T_k(u)\ dxdt - \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M . a(x,t,T_k(u),0)\nabla T_k(u)dxdt \\
&= \int_{Q_T\setminus Q_{(s)}} \varphi_M\Big(h-a(x,t,T_k(u),0)\Big)\nabla T_k(u)dxdt.
\end{aligned}
$$

como $\Big(h-a(x,t,T_k(u),0)\Big)\nabla T_k(u)\in L^1(Q_T)$ e fazendo $s\to\infty$, implica que $|Q_T\setminus Q_{(s)}|\to 0$ e assim

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{Q_{(r)}} \varphi_M\Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\Big]dxdt = 0.
$$

Consequentemente

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{Q_{(r)}\cap M} \Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\Big]dxdt = 0
$$

e podemos obter uma subsequência de (u_n), ainda denotada por (u_n), tal que

$$
\Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\Big] \longrightarrow 0
$$

q.t.p. em $Q_{(r)}\cap M$.

Para $(x,t)\in Q_{(r)}\cap M$, temos

$$
\begin{aligned}
&\alpha|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)} - C\Big(1+|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-1}+|\nabla T_k(u_n)\Big) \\
&\le \Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big)-a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n)-\nabla T_k(u)\Big],
\end{aligned}
$$

isto mostra que $\big(\nabla T_k(u_n)\big)$ é limitada em $Q_{(r)} \cap M$. Então existe uma subsequência de $\big(\nabla T_k(u_n)\big)$, ainda denotada por $\big(\nabla T_k(u_n)\big)$, tal que

$$\nabla T_k(u_n) \longrightarrow \xi$$

em $Q_{(r)} \cap M$. Assim

$$\begin{aligned}&\Big[a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u_n)\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)\Big]\\ &\longrightarrow \Big[a\big(x,t,u_n,\xi)\big) - a\big(x,t,u_n,\nabla T_k(u)\big)\Big]\Big[\xi - \nabla T_k(u)\Big]\end{aligned}$$

em $Q_{(r)} \cap M$, se $n \to \infty$. Temos então, usando unicidade do limite, que $\nabla T_k(u) = \xi$ e portanto

$$\nabla T_k(u_n) \longrightarrow \nabla T_k(u)$$

q.t.p. em $Q_{(r)} \cap M$. E pelo fato de que r, k e M serem arbitrários, podemos construir uma subsequência tal que

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$$

q.t.p. em Q_T. Assim, teremos que

$$a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) \longrightarrow a\big(x,t,u,\nabla u\big)$$

q.t.p. em Q_T.

Sendo $a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big)$ uma sequência limitada em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$, pela proposição (1.19) temos

$$a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) \rightharpoonup a\big(x,t,u,\nabla u\big)$$

em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$. Como $a\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) \rightharpoonup h$ em $\Big(L^{q(x)}(Q_T)\Big)^n$, segue que $a\big(x,t,u,\nabla u\big) = h$. Igualmente, obtem-se que

$$a_0\big(x,t,u_n,\nabla u_n\big) \rightharpoonup a_0\big(x,t,u,\nabla u\big)$$

em $L^{q(x)}(Q_T)$ com $a_0\big(x,t,u,\nabla u\big) = h_0$.

Passo 3: Passagem ao limite.

Para $\varphi \in C^1\big([0,T];C_0^\infty(\Omega)\big)$, desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p(x)}(Q_T)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(\Omega)$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q_T}\frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi\, dxdt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega u_n\varphi\, dx\Big|_0^T - \int_{Q_T} u_n\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dxdt\right) = \int_\Omega u\varphi\, dx\Big|_0^T - \int_{Q_T} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dxdt.$$

Assim, para toda $\varphi \in C^1\big([0,T]; C_0^\infty(\Omega)\big)$,

$$-\int_{Q_T} u\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dxdt + \int_\Omega u(t)\varphi(t)dx\Big|_0^T + \int_{Q_T} \big[a(x,t,u,\nabla u)\nabla\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)\varphi\big]\, dxdt = \langle f, \varphi\rangle.$$

A demonstração está completa. $\square$

Considerações Finais

Observemos que nos casos em que o operador A é o p-Laplaciano definido em (1.13) ou é o $p(x)$-Laplaciano definido em (1.14), teremos a unicidade de solução para o problema (P), pois, em ambos, o operador A é monótono e a prova da unicidade é feita da seguinte forma:

Consideremos $A : W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T) \to W^{-1,x}L^{q(x)}(Q_T)$ monótono. Sabe-se que a equação $u_t + A(u) = f$ no problema (1) torna-se

$$\langle u_t, v\rangle + \langle A(u), v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

para toda $v \in W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q_T)$. Suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções de (1), isto é

$$\langle u_1'(t), v\rangle + \langle A(u_1(t)), v\rangle = \langle f, v\rangle, \tag{3.28}$$

$$\langle u_2'(t), v\rangle + \langle A(u_2(t)), v\rangle = \langle f, v\rangle. \tag{3.29}$$

Então, $u_1(x,0) = \psi(x)$ e $u_2(x,0) = \psi(x)$ em Ω. Subtraindo (3.29) de (3.28) obteremos

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), v\rangle + \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), v\rangle = 0.$$

Fazendo $v = u_1 - u_2$, teremos

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0.$$

Integrando sobre $[0,T]$ resulta

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_1(0) - u_2(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle dt = 0.$$

Sendo A um operador monótono, isto é

$$\langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \geq 0,$$

nos dará que

$$\int_0^t \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle dt \geq 0$$

e como $u_1(0) - u_2(0) = 0$, segue que $\|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, e assim

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle dt = 0$$

$$\Longrightarrow\ 0 \leq \|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

$\Longrightarrow\ \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ q.t.p. em $[0,T]$, portanto

$$u_1 = u_2.$$

□

Observamos também que talvez seja possível estudar o sistema acoplado do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(u) = f(x,t,v,\nabla v), \ \ em \ \ Q_T, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + A(v) = f(x,t,u,\nabla u), \ \ em \ \ Q_T, \\ u(x,t) = v(x,t) = 0, \ \ sobre \ \ \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0 \ \ e \ \ v(x,0) = v_0, \ \ em \ \ \Omega, \end{cases} \tag{3.30}$$

com $A(u) = -div\big(a(x,t,u,\nabla u)\big) + a_0(x,t,u,\nabla u)$. Como não se tem a unicidade da solução para o problema (P) talvez não seja possível obter uma solução para o sistema (3.30) utilizando o método do ponto fixo de Leray-Schauder. No entanto, acreditamos que o método de Faedo-Galerkin possa superar essa dificuldade, uma vez que provando a existência de soluções dos problemas aproximados, restará obter as convergências fracas dessas soluções e, por um resultado tipo Aubin-Lions, o Teorema (2.1), obter a convergência forte para passagem ao limite no operador.

Vale ressaltar que sistemas do tipo (3.30) modelam a difusão e a interação entre duas espécies biológicas diferentes que compartilham o mesmo território Ω, como em [17], em que o autor apresenta, além do resultado principal, outros quatro resultados onde os casos de coercividade e não-coercividade dos termos não-locais são considerados.

Bibliografia

[1] ACERBI, E.; MINGIONE, G. **Regularity results for stationary electro-rheological fluids**. Arch. Ration. Mech. Anal. 164 (2002) 213-259.

[2] ACERBI, E.; MINGIONE, G. **Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system**. J. Reine Angew. Math. 584 (2005) 117-148.

[3] ACERBI, E.; MINGIONE, G. **Gradient estimates for a class of parabolic systems**. Duke Math. J. 136 (2007) 285-320.

[4] ALKHUTOV, Y.; ANTONTSEV, S.; ZHIKOV, V. **Parabolic equations with variable order of nonlinearity, in: Collection: "Theory of Operators, Differential Equations and Theory of Functions"**. Collection of Works of the Mathematics Institute of the Ukranian Academy of Sciences, vol. 6, 2009, pp. 23-50.

[5] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[6] BRÉZIS, H.; BROWDER, F.E. **Strongly nonlinear parabolic initial boundary value problems**. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76 (1979) 38-40.

[7] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones**. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[8] CAVALCANTI, Marcelo M.; CAVALCANTI, Valéria N. D. **Iniciação á Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: UEM, 2000, Vol: I e II.

[9] CHEN, Y.M.; LEVINE, S.; RAO, M. **Variable exponent, linear growth functionals in image restoration**. SIAM J. Appl. Math. 66 (2006) 1383-1406.

[10] CHILL, R. **Quelques méthodes de résolution pour les équations non-linéaires**. Lab. de Mathém. et Applications de Metz, Université de Metz, 2007/08.

[11] CHIPOT. M. **Elements of Nonlinear Analysis. Berlin**. Birkhäuser Basel, 2000.

[12] DIBENEDETTO, E. **Degenerate Parabolic Equation**. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[13] ELMAHI, A.; MESKINE, D. **Strongly nonlinear parabolic equations with natural growth terms in Orlicz spaces**. Nonlinear Anal. 60 (2005) 1-35.

[14] ELMAHI, A.; MESKINE, D. **Parabolic equations in Orlicz spaces**. J. London Math. Soc. (2) 72 (2005) 410-428.

[15] FAN, X. L.; SHEN, J. S.; ZHAO, D. **Sobolev embedding theorems for spaces** $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. 262, 749-760, 2001.

[16] FAN, X. L.; ZHAO, D. **On the Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$**. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 263, 424- 446, 2001.

[17] FRAGNELLI, G. **Positive periodic solutions for a system of anisotropic parabolic equations**. J. Math. Anal. Appl. 367 (2010) 204-228

[18] FU, Y.; PAN, N. **Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth**. J. Math. Anal. Appl. 362 (2010) 313-326.

[19] GUIMARÃES, Cícero J. **Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações envolvendo o $p(x)$-Laplaciano**. Dissertação de Mestrado, PPGM, UFCG, 2006.

[20] HALE, J. K. **Ordinary Differential Equations**. New York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[21] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley e Sons, 1989.

[22] KOVACIK, O.; RAKOSNIK, J. **On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$**. Czechoslovak Math. J. 41 (1991) 592-618.

[23] LANDES, R. **On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic initial boundary value problem**. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 89 (1981) 217-237.

[24] LANDES, R.; MUSTONEN, V. **A strongly nonlinear parabolic initial boundary value problem**. Ark. Mat. 25 (1987) 29-40.

[25] LIONS, J.L. **Quelques methodes de resolution des problems aux limits non lineaties**. Gauthier.Villars, Paris, 1969.

[26] LOBATO, Renato F. C. **Solvabilidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de EDP não-linear com Acoplamento na Fonte**. Dissertação de Mestrado, PPGME, UFPA, 2006.

[27] MEDEIROS, L. A.; MILLA, M. A. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos Nao Homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2004.

[28] MIHAILESCU, M.; RADULESCU, V. **On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces**. Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 2929-2937.

[29] MUJICA, Jorge. **Análise Funcional**. Notas de aulas.

[30] RIVERA, J. E. M. **Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: LNCC, 2004.

[31] RUZICA, M. **Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory**. Lecture Notes in Math., vol. 1748, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[32] SANTOS, Manoel J. Dos. **Existência e Unicidade de Solução de uma Equação Parabólica com Expoente Variável da Não-Linearidade**. Dissertação de Mestrado, PPGME, UFPA, 2008.

[33] SHI, S. J.; CHEN, S.T.; WANG, Y.W. **Some theorems of convergence in $W_0^{1,x}L^{p(x)}(Q)$ spaces and their conjugate spaces**. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 50 (2007) 241-249.

[34] SIMON, J. **Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$**. Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987) 65-96.