UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elany da Silva Maciel

Semigrupos Analíticos para Modelos Termoviscoelásticos

BELÉM

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elany da Silva Maciel

Semigrupos Analíticos para Modelos Termoviscoelásticos

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof°. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elany da Silva Maciel

Semigrupos Analíticos para Modelos Termoviscoelásticos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 23 de novembro de 2012.

Conceito:______________

Banca Examinadora

____

Prof°. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

____

Prof°. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)

____

Prof°. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade Estadual do Pará (UEPA)

BELÉM

2012

Agradecimentos

À Deus, por ter me concedido a vida e a capacidade de realizar este trabalho.

Agradecimento especial aos meus pais, Raimundo e Emília por serem os meus maiores incentivadores, sempre presentes em todas as etapas da conclusão dessa jornada.

Ao meu irmão por sempre estar disposto a me ajudar.

À todos os professores integrantes do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, pela grande contribuição ao meu aprendizado ao longo de todo este curso.

Ao meu orientador Mauro de Lima Santos, que compreendeu as minhas dificuldades e aceitou prosseguir com meu trabalho, mesmo depois de tantos problemas; colocando-se sempre a minha disposição para esclarecer as dúvidas que me ajudaram na conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de mestrado e doutorado pelas horas de estudos, pelas noites sem dormir e também pelas horas de distração. Tenham a certeza que sem a ajuda de vocês tudo seria mais difícil.

A minha amiga Caroline Lima, que sempre foi muito mais que uma colega de mestrado, é aquela amiga que me deu a força que precisava nos momentos mais difíceis.

Ao meu namorado Adam Silva, que sempre tentava me ajudar quando podia, pela compreensão e carinho nas horas difíceis. Por sempre ter aquela piada ”sem graça”pra me animar quando estava triste.

Finalmente, a todos que de alguma forma contribuiram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho investigamos o comportamento assintótico das soluções para o problema de valor inicial e de contorno para uma mistura de dois sólidos rígidos modelando temperatura e porosidade. Nosso principal resultado é a estabilização analítica do semigrupo correspondente ao seguinte sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}\omega_{xx} + \alpha(u-\omega) - \beta_1\theta_x - b_{11}u_{xxt} - b_{12}\omega_{xxt} & = & 0 \\ \\ \rho_2 \omega_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}\omega_{xx} - \alpha(u-\omega) - \beta_2\theta_x - b_{12}u_{xxt} - b_{22}\omega_{xxt} & = & 0 \\ \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2\omega_{xt} & = & 0 \end{array}\right.$$

Palavras-chaves: Misturas termoviscoelásticos, C_0-semigrupo, analiticidade, sistema acoplado.

Abstract

In this paper we investigate the asymptotic behavior of solutions to the initial boundary value problem for a one-dimensional mixture of thermoviscoelastic solids. Our main result is to establish the analyticity of the corresponding semigroup of the following system

$$\left\{\begin{array}{rcl}\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}\omega_{xx} + \alpha(u-\omega) - \beta_1\theta_x - b_{11}u_{xxt} - b_{12}\omega_{xxt} & = & 0\\ \\ \rho_2 \omega_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}\omega_{xx} - \alpha(u-\omega) - \beta_2\theta_x - b_{12}u_{xxt} - b_{22}\omega_{xxt} & = & 0\\ \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2\omega_{xt} & = & 0\end{array}\right.$$

keywords: Thermoviscoelastic mixtures, C_0-semigroup, analyticity, coupled system.

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação estudamos o comportamento assintótico das soluções de uma mistura de sólidos termoviscoelásticos unidimensional. Nessa abordagem as equações de movimento são dadas por

$$\rho_1 u_{tt} = T_x - P \quad , \quad \rho_2 \omega_{tt} = S_x + P \tag{1}$$

A equação de balanço de energia é dado por

$$(\rho_1 + \rho_2) T_0 \Theta_t = Q_x; \tag{2}$$

Denotamos ρ_i a densidade da massa de cada elemento no tempo t = 0. T,S a tensão parcial associada com os elementos, P a força difusiva interna, Θ a densidade de entropia, Q o vetor fluxo de calor e T_0 é a temperatura absoluta na configuração de referência. O deslocamento de partículas típicas no tempo t são u e ω onde $u = u(x,t)$, $\omega(y,t)$, x , y pertencem a (0, L):

As equações constitutivas são

$$T = a_{11} u_x + a_{12} \omega_x + b_{11} u_{xt} + b_{12} \omega_{xt} + \beta_1 \theta; \tag{3}$$

$$S = a_{12} u_x + a_{22} \omega_x + b_{12} u_{xt} + b_{22} \omega_{xt} + \beta_2 \theta. \tag{4}$$

$$P = \alpha(u - \omega),\ \Theta = -\beta_1 u_x - \beta_2 \omega_x + c\theta,\ Q = K\theta_x; \tag{5}$$

Substituimos as equações constitutivas (3), (4), (5) nas equações de movimento (1) e na equação energia (2) encontramos um sistema formado por três equações , dada por

$$
\begin{cases}
\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}\omega_{xx} + \alpha(u-\omega) - \beta_1\theta_x - b_{11}u_{xxt} - b_{12}\omega_{xxt} & = & 0 \\
\rho_2 \omega_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}\omega_{xx} - \alpha(u-\omega) - \beta_2\theta_x - b_{12}u_{xxt} - b_{22}\omega_{xxt} & = & 0 \\
c\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2\omega_{xt} & = & 0
\end{cases} \tag{6}
$$

com $0 < x < L$, $t > 0$ e $\kappa = KT_0^{-1}(\rho_1+\rho_2)^{-1}$.

Assumimos que

$$\rho_1 > 0\ ,\ \rho_2 > 0\ ,\ \kappa > 0\ ,\ \alpha > 0\ e\ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

A matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica e definida positiva e $B = (b_{ij}) \neq 0$ é simétrica e definida não negativa, isto é,

$$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

$$b_{11} \geq 0, b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \geq 0.$$

Misturas de sólidos termoelásticas é um assunto que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Os primeiros trabalhos sobre este tema foram as contribuições de Truesdell e Toupin [1], Green e Naghdi [2, 3] e Bowen e Wierse [4]. Apresentações dessas teorias podem ser encontradas nos artigos de Atkin e Craine[5], Bredford e Drumheller[6] e nos livros de Bowen[7], e Rajagopal e Tao[8].

A teoria de misturas de sólidos apresentados em Bowen [7], Green e Steel [9] e Steel [10] usadas como variáveis independentes constitutivas os gradientes deslocamento e a velocidade relativa, e a descrição espacial é usada. A primeira teoria baseada na descrição Lagrangiana tem sido apresentada por Bedford e Stern [11].

Neste trabalho, as variáveis contitutivas independentes são os gradientes deslocamento e o deslocamento relativo. Nos últimos anos um crescente interesse tem sido direcionado para o estudo das propriedades qualitativas desta teoria. Em particular, podemos encontrar muitos resultados sobre existência, unicidade, dependência contínua e estabilidade assintótica (ver [12, 13, 14]). Neste trabalho, queremos enfatizar o estudo da analiticidade para o caso de uma viga unidimensional composta por uma mistura de dois sólidos termoviscoelástico.

Nossa finalidade neste trabalho é investigar a analiticidade do semigrupo associado com o sistema dado por:

$$\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}\omega_{xx} + \alpha(u-\omega) - \beta_1\theta_x - b_{11}u_{xxt} - b_{12}\omega_{xxt} = 0$$

$$\rho_2 \omega_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}\omega_{xx} - \alpha(u-\omega) - \beta_2\theta_x - b_{12}u_{xxt} - b_{22}\omega_{xxt} = 0$$

$$c\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2\omega_{xt} = 0$$

$$u(x,0) = u_0, u_t(x,0) = u_1, \omega(x,0) = \omega_0, \omega_t(x,0) = \omega_1, \theta(x,0) = \theta_0 \ em \ (0,L)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0 \ em \ (0,\infty)$$

A estabilidade assintótica e a analiticidade do semigrupo associado com sistemas dissipativos tem sido estudados por muitos autores. Nos referimos ao livro de Liu e Zheng [16] para um levantamento geral destes assuntos. Contudo, a estabilidade exponencial para este caso de misturas termoviscoelasticas ($B = 0$) tem sido estudada apenas em [13] e [15]. Em [13], os autores mostram (genericamente) a estabilidade assintótica. Em [15], os autores mostram que o semigrupo associado é exponencialmente estável se, e somente se

$$\beta_2(\beta_1\rho_2 a_{11} + \beta_2\rho_1 a_{12}) \neq \beta_1(\beta_2\rho_1 a_{22} + \beta_1\rho_2 a_{12})$$

e

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} \neq \frac{\alpha((\rho_1\beta_2^2 - \rho_2\beta_1^2) + \beta_1\beta_2(\rho_1 - \rho_2))}{\beta_1\beta_2(\rho_2 a_{11} - a_{22}\rho_1) - a_{12}(\beta_1^2\rho_2 - \beta_2^2\rho_1)}$$

Relembramos que pouquíssimas contribuições tem sido destinadas para estudar o comportamento de soluções de teorias elásticas não-clássicas. Nosso principal resultado é estabelecer condições para a matriz B, que garanta a analiticidade de um semigrupo correspondente. Mostraremos que o semigrupo é analitico se, e somente se, B é não-singular.

No Capítulo 1, apresentamos algumas teoremas , definições, corolários e alguns resultados que serão usados para entender e desenvolver o trabalho.

No Capítulo 2, mostramos a existência e unicidade de solução do nosso sistema, utilizando o lema de Lax-Milgran.

No Capítulo 3, mostramos a analiticidade do semigrupo correspondente quando B é definido positivo.

Finalmente, ao longo deste artigo, C é uma constante genérica, necessariamente nao será o mesmo em cada ocasião (mudará de linha em linha), que depende de modo crescente conforme as quantidades indicadas.

Capítulo

1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo faremos uma introdução à Teoria de Semigrupos e Espaços de Sobolev, de maneira suficiente para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Teoria de Semigrupos

Definição 1.1 *Dizemos que a família de subconjuntos $\{T(t) : t \geq 0\}$ de $L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares em X, quando:*
(1) T(0) = I, onde I é o operador identidade.
(2) T(t+s) = T(t)T(s), para todo $t, s > 0$.

Definição 1.2 *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito uniformemente contínuo, quando tivermos*

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t) - I \| = 0.$$

Definição 1.3 *Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito fortemente contínuo ou C_0-semigrupo, se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \ , \ \forall x \in X$$

De modo equivalente, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \| T(t)x - x \| = 0 \ , \ \forall x \in X$$

Definição 1.4 *Sendo o conjunto $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X. Seu gerador infinitesimal é o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ existe \right\}$$

Observemos que

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}$$

para $x \in D(A)$.

Teorema 1.1 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\| T(t) \| \leq Me^{\omega t} \ , \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração: Veja Pazy [19].

Corolário 1.1 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Então para cada $x \in X$, a função $t \to T(t)x$ é contínua de $\mathbb{R}^+$ em X.*

Demonstração: Veja Pazy [19].

Definição 1.5 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Quando $\| T(t) \| \leq M$ dizemos que o semigrupo é uniformemente limitado. Quando $\| T(t) \| \leq 1$, dizemos que o semigrupo é de contrações.*

Definição 1.6 *Seja A um operador linear em X, limitado ou não. Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente formado por $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ seja inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A.*

Teorema 1.2 *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\forall x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \ ds = T(t)x.$$

(b) $\forall x \in X, \int_0^t T(s)x\ ds \in D(A) e$

$$A\left(\int_0^t T(s)x\ ds\right) = T(t)x - x.$$

(c) $\forall x \in D(A),\ T(t)x \in D(A)$ *e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,\ para\ t > 0.$$

(d) $\forall x \in D(A)\ ,\ t, s \geq 0$ *e*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Demonstração: Veja Pazy [19].

Corolário 1.2 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então $D(A)$ é senso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração: Veja Pazy [19].

Proposição 1.1 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $D(A^n)$ o domínio de A^n. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração: Veja Pazy [19].

Proposição 1.2 *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, fechado de modo que $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para todo $\lambda > 0$. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(1) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda : A)x = x,\ \forall x \in X.$

(2)Se $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A)x - \lambda I$ *então* $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax,\ \forall x \in D(A).$

(3) Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. E para cada $\lambda, \mu, t > 0$ e $x \in X$, temos

$$\| e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| .$$

Demonstração: Veja Pazy [19].

Teorema 1.3 ***(Hille-Yosida)*** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações se, e somente se:*
(1)A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.
(2) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\| R(\lambda : A) \| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$

Demonstração: Veja Pazy [19]

Corolário 1.3 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então para $x \in X$, temos*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x.$$

Demonstração: Veja Pazy [19]

Corolário 1.4 *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. O conjunto resolvente de A contem o semi-plano $\{\lambda : Re\lambda > 0\}$ e para $\lambda > 0$ temos*

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{1}{Re\lambda}$$

Demonstração: Veja Pazy [19]

Definição 1.7 *Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* o seu dual. Assim, indicamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por*

$$F(x) = \{x^* \in X^* : Re\langle x^*, x \rangle = \| x \|^2 = \| x^* \|^2\}.$$

Definição 1.8 *Diremos que um operador A é dissipativo, se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle x^*, x \rangle \leq 0$.*

Teorema 1.4 *Um operador A é dissipativo se, e somente se ,*

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \| \ , \ \forall x \in D(A) \ e \ \lambda > 0$$

Demonstração: Veja Pazy [19].

Teorema 1.5 ***(Lummer-Phillips)*** *Seja A um operador linear em X, com domínio $D(A)$ denso em X.*

(1) Se A é dissipativo existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações em X.

(2) Se A é o gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações em X, então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: Veja Pazy [19].

Lema 1.1 *Seja $S : X \to X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in L(X)$ tal que*

$$\| B \| < \frac{1}{\| S^{-1} \|}$$

então $S + B$ é linear, contínuo e invertível.

Demonstração: Veja Rivera [18].

Corolário 1.5 *Seja A um operador com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre H.*

Demonstração: Suponhamos que $0 \in \rho(A)$, então A é invertível e A^{-1} é limitado. Notamos que

$$(\lambda I - A) = A(\lambda A^{-1} - I)$$

Por outro lado, tomando $B = \lambda A^{-1}$ e $S = -I$ para $|\lambda| <\| A^{-1} \|^{-1}$. Logo, usando o lema anterior , concluimos que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível. Além disso, o operador $\lambda I - A$ é invertível, por se composição de operadores invertíveis. Assim, segue do teorema de Lummer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Proposição 1.3 *Seja A um operador linear dissipativo em H. Se $\overline{D(A)} = H$ então A é fechado.*

Demonstração: Veja Pazy [19].

Teorema 1.6 ***(Gearhart)*** *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert H. Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \; e \; \limsup_{|\beta| \to \infty} \| (i\beta I - A)^{-1} \|_H < \infty.$$

Demonstração: Veja Rivera [18].

1.2 Espaços de Sobolev e Resultados Básicos

Definição 1.9 ***(Sequência de Cauchy)*** *Uma sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *no espaço normado* X *é chamada de Cauchy quando para cada* $\epsilon > 0$ *corresponde um número real* N *tal que* $\| x_n - x_m \|_X < \epsilon$, $\forall\, n, m > N$.

Definição 1.10 ***(Espaços de Banach e Hilbert)*** *O espaço* X *é dito de Banach se é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em* X *converge em* X. *Além disso,* X *é dito espaço de Hilbert se é um espaço vetorial com produto interno* $(\cdot,\cdot)$ *e completo com respeito a norma* $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e considere $p \geq 1$, denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de funções mensuráveis u, de modo que $|u|^p$ seja integrável no sentido de Lebesgue. No espaço $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\| u \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p \; dx, \quad onde \quad p \in [1, \infty[.$$

Proposição 1.4 $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja Brezis [17].

Quando tivermos $p = 2$, obtemos o espaço $L^2(\Omega)$, que munido do produto interno

$$(u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\upsilon(x) \; dx$$

e norma

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 \; dx,$$

se transforma num espaço de Hilbert. Consideremos os elementos $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Denotamos por D^α o operador derivada de ordem α, onde escrevemos da forma

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Denotamos $D^\alpha u = u$, quando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$. Agora, construimos um espaço de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, onde $D^\alpha \in L^p(\Omega)$, sendo que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. Assim, obtemos o espaço de sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \; com \; |\alpha| \leq m\},$$

com a norma

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)}^{p}= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^{p}\ dx, \quad onde \ \ p\in [1,\infty[.$$

Proposição 1.5 *$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja Brezis [17].

Quando $p=2$, obtemos $W^{m,p}(\Omega)=H^{m}(\Omega)$. Assim, nesse novo espaço temos o produto interno

$$((u,\upsilon))_{H^{m}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}\upsilon)_{L^{2}(\Omega)},$$

com a norma

$$\| u \|_{H^{m}(\Omega)}= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{2}\ dx$$

Proposição 1.6 *$H^{m}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert*

Demonstração: Veja Brezis [17].

Em particular temos a norma para o espaço $H^{1}(\Omega)$, denotada por

$$\| u \|_{H^{1}(\Omega)}^{2}= \int_{\Omega} |u(x)|^{2}\ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^{2}\ dx.$$

Considerando $C_0^{\infty}(\Omega)$ como sendo o espaço das funções φ infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Portanto, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ *em* $W^{m,p}$. Desse modo, obtemos

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p=2$, escrevemos $H_0^{m}(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega),$ *onde* $m\geq 1$.

Definição 1.11 *Sejam V e H espaços de Hilbert. Dizemos que V está imerso em H com imersão contínua, quando existe uma constante positiva c tal que*

$$|u|_{H} \leq c \parallel u \parallel_{V}, \quad \forall u\in V.$$

Proposição 1.7 $H^{m}(\Omega) \hookrightarrow L^{2}(\Omega)$.

Demonstração: Veja Brezis [17].

Definição 1.12 *Seja um espaço de Hilbert real H, dizemos que $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear limitada, (continua) quando existe uma constante c tal que*

$$|b(x,y)| \leq c \parallel x \parallel . \parallel y \parallel, \ onde \ x, y \in H.$$

Definição 1.13 *Seja um espaço de Hilbert real H, dizemos que $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear coerciva, quando uma constante $k > 0$ tal que*

$$b(x,x) \geq k. \parallel x \parallel^2, \ onde \ x \in H$$

Proposição 1.8 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam a e b números reais não negativos e considere $p \in (1, \infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.7 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com p e q satisfazendo $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f, g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \ dx \leq \parallel f \parallel_{L^p} \parallel g \parallel_{L^q}$$

Demonstração: Veja Brezis [17].

Seja H um espaço normado com norma $\| \cdot \|$. A aplicação denotada por

$$a(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$$

é chamada

(i) **Sesquilinear** se, para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ e para todo $u, \upsilon, \omega \in H$, se verifica

$$a(\alpha_1 u + \alpha_2 \upsilon, \omega) = \alpha_1 a(u, \omega) + \alpha_2 a(\upsilon, \omega)$$

e

$$a(u, \beta_1 \upsilon + \beta_2 \omega) = \overline{\beta_1} a(u, \upsilon) + \overline{\beta_2} a(u, \omega)$$

(ii) **Contínua** se existe uma constante C tal que

$$|a(u,v)| \leq C \parallel u \parallel \parallel v \parallel \forall u,v \in H$$

(iii) **Coerciva** se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \parallel v \parallel^2, \ \forall v \in H.$$

Observação 1.1 *Se*

$$a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$$

então o conceito de sesquilinearidade é equivalente a bilinearidade.

Lema 1.2 ***(Lax-Milgran)*** *Seja uma forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$, limitada e coerciva num espaço de Hilbert H. Então, dado qualquer funcional linear contínuo f em H, existe um único $v \in H$ de modo que*

$$a(u,v) = f(u), \ onde \ u \in H.$$

Demonstração: Veja Brezis [17].

Lema 1.3 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva c_p que depente univocamente de Ω e n tal que*

$$\parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \leq c_p \parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)} \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Demonstração: Veja Brezis [17].

Capítulo

2

Existência e unicidade de solução

Neste capítulo mostraremos a existência e unicidade da solução do sistema (2.1). Primeiramente provaremos que o operador $\mathcal{A}$ desse sistema é dissipativo.

O sistema é dado por

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}\omega_{xx} + \alpha(u-\omega) - \beta_1\theta_x - b_{11}u_{xxt} - b_{12}\omega_{xxt} = 0 \\ \\ \rho_2 \omega_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}\omega_{xx} - \alpha(u-\omega) - \beta_2\theta_x - b_{12}u_{xxt} - b_{22}\omega_{xxt} = 0 \\ \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} - \beta_1 u_{xt} - \beta_2\omega_{xt} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_0, u_t(x,0) = u_1, \omega(x,0) = \omega_0, \omega_t(x,0) = \omega_1, \theta(x,0) = \theta_0 \ em \ (0,L) \tag{2.2}$$

onde as condições fronteiras homogêneas são dadas por

$$u(0,t) = u(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = \theta_x(0,t) = \theta_x(L,t) = 0 \ em \ (0,\infty) \tag{2.3}$$

Definimos o seguinte espaço funcional

$$L^2_*(0,L) = \left\{\theta \in L^2(0,L); \int_0^L \theta \ dx = 0\right\}$$

2.1 Funcional de Energia

Nesta seção encontraremos a Energia do sistema (2.1) $-$ (2.3), que sugere o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Além disso, encontramos o operador $\mathcal{A}$ com seu respectivo domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e construiremos o problema de Cauchy associado.

Lema 2.1 *A Energia E(t) associada ao sistema (2.1) - (2.3) é dada por*

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1 |\, u_t\,|^2 + a_{11} |\, u_x\,|^2 + \alpha |\, u\,|^2 + \rho_2 |\, \omega_t\,|^2 + a_{22} |\, \omega_x\,|^2 + c |\, \theta\,|^2$$

$$+ \alpha |\, \omega\,|^2 + 2a_{12} u_x \omega_x - 2\alpha u \omega)\ dx,$$

satisfaz a lei de dissipação dada por

$$\frac{d}{dt}E(t) = -b_{11}\int_0^L |\, u_{xt}\,|^2\ \ dx - b_{22}\int_0^L |\, \omega_{xt}\,|^2\ \ dx - 2b_{12}\int_0^L \omega_{xt} u_{xt}\ dx$$

$$-\ \kappa \int_0^L |\, \theta_x\,|^2\ \ dx$$

Demonstração: De fato, multiplicamos a primeira equação do sistema (2.1) por u_t, em seguida integramos de 0 a L em relação a x. Dessa forma, obtemos:

$$\rho_1 \int_0^L u_{tt} u_t\ dx - a_{11}\int_0^L u_{xx} u_t\ dx - a_{12}\int_0^L \omega_{xx}\ u_t\ dx + \alpha \int_0^L (u-\omega) u_t\ dx$$

$$-\beta_1 \int_0^L \theta_x u_t\ dx - b_{11}\int_0^L u_{xxt}\ u_t\ dx - b_{12}\int_0^L \omega_{xxt}\ u_t\ dx = 0$$

Logo, encontramos

$$\begin{aligned} &\frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\, u_t\,|^2\ dx + \frac{a_{11}}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\, u_x\,|^2\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x u_{xt}\ dx + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\, u\,|^2\ dx \\ &-\alpha \int_0^L \omega u_t\ dx - \beta_1 \int_0^L \theta_x u_t\ dx + b_{11}\int_0^L |\, u_{xt}\,|^2 dx + b_{12}\int_0^L \omega_{xt}\ u_{xt}\ dx = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Agora, multiplicamos a segunda equação do sistema (2.1) - (2.3) por ω_t, em seguida integramos de 0 a L em relação a x. Dessa forma, obtemos:

$$\rho_2\int_0^L \omega_{tt}\omega_t\ dx - a_{12}\int_0^L u_{xx}\omega_t\ dx - a_{22}\int_0^L \omega_{xx}\omega_t\ dx - \alpha\int_0^L (u-\omega)\omega_t\ dx$$

$$-\beta_2\int_0^L \theta_x\omega_t\ dx - b_{12}\int_0^L u_{xxt}\ \omega_t dx - b_{22}\int_0^L \omega_{xxt}\ \omega_t\ dx = 0$$

Logo, encontramos

$$\frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mid \omega_t\mid^2\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\omega_{xt}\ dx + \frac{a_{22}}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mid \omega_x \mid^2\ dx - \alpha\int_0^L u\omega_t\ dx$$

$$+\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \mid \omega\mid^2\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\omega_t\ dx + b_{12}\int_0^L u_{xt}\ \omega_{xt}dx + b_{22}\int_0^L \mid \omega_{xt}\mid^2\ dx = 0 \tag{2.5}$$

Agora, multiplicamos a terceira equação do sistema (2.1) por θ, em seguida integramos de 0 a L em relação a x. Dessa forma, obtemos:

$$c\int_0^L \theta_t\theta\ dx - \kappa\int_0^L \theta_{xx}\theta\ dx - \beta_1\int_0^L u_{xt}\theta\ dx - \beta_2\int_0^L \omega_{xt}\theta\ dx = 0$$

Logo, encontramos

$$\frac{c}{2}\frac{d}{dx}\int_0^L \mid \theta\mid^2\ dx + \kappa\int_0^L \mid \theta_x\mid^2\ dx - \beta_1\int_0^L u_{xt}\theta\ dx - \beta_2\int_0^L \omega_{xt}\theta\ dx = 0 \tag{2.6}$$

Somando as equações (2.4), (2.5) e (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^L(\rho_1\mid u_t\mid^2 + a_{11}\mid u_x\mid^2 + \alpha\mid u\mid^2 + \rho_2\mid \omega_t\mid^2 + a_{22}\mid \omega_x\mid^2 + c\mid \theta\mid^2 \\ +\alpha\mid \omega\mid^2 + 2a_{12}u_x\omega_x - 2\alpha u\omega)\ dx\Bigg] \\ = -b_{11}\int_0^L \mid u_{xt}\mid^2\ dx - b_{22}\int_0^L \mid \omega_{xt}\mid^2 dx - 2b_{12}\int_0^L \omega_{xt}u_{xt}\ dx \\ -\kappa\int_0^L \mid \theta_x\mid^2\ dx\end{aligned} \tag{2.7}$$

Definindo a energia associada ao sistema (2.1) - (2.3) por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L (\rho_1| \ u_t \ |^2 + a_{11}| \ u_x \ |^2 + \alpha| \ u \ |^2 + \rho_2| \ \omega_t \ |^2 + a_{22}| \ \omega_x \ |^2 + c| \ \theta \ |^2$$

$$+ \ \alpha| \ \omega \ |^2 + 2a_{12}u_x\omega_x - 2\alpha u\omega) \ dx$$

a equação (2.7) pode ser escrita da forma

$$\frac{d}{dt}E(t) := -b_{11}\int_0^L | \ u_{xt} \ |^2 \ \ dx - b_{22}\int_0^L | \ \omega_{xt} \ |^2 \ \ dx - 2b_{12}\int_0^L \omega_{xt}u_{xt} \ dx$$

$$-\kappa\int_0^L | \ \theta_x \ |^2 \ \ dx$$

A energia sugere que o espaço Hilbert $\mathcal{H}$ seja dado por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L)$$

com produto interno dado por

$$< U, U^* >_{\mathcal{H}} = \int_0^L (a_{11}u_x\overline{u_x^*} + a_{12}(u_x\overline{\omega_x^*} + \omega_x\overline{u_x^*}) + a_{22}\omega_x\overline{\omega_x^*}) \ dx$$

$$+ \ \alpha\int_0^L (u-\omega)(\overline{u^* - \omega^*}) \ dx + \rho_1\int \upsilon\overline{\upsilon^*} \ dx$$

$$+ \ \rho_2\int_0^L \eta\overline{\eta^*} \ dx + c\int_0^L \theta\overline{\theta^*} \ dx.$$

onde $U = (u, \omega, \upsilon, \eta, \theta)^T$ e $U^* = (u^*, \omega^*, \upsilon^*, \eta^*, \theta^*)^T$. A norma correspondente em $\mathcal{H}$ é dada por:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L (a_{11}u_x\overline{u}_x + a_{12}(u_x\overline{\omega}_x + \omega_x\overline{u}_x) + a_{22}\omega_x\overline{\omega}_x) + \int_0^L \alpha(u-\omega)\overline{(u-\omega)}$$

$$+ \ \rho_1\int_0^L \upsilon\overline{\upsilon} \ dx + \rho_2\int_0^L \eta\overline{\eta} \ dx + c\int_0^L \theta\overline{\theta} \ dx$$

Também, consideremos o espaço de Hilbert dado por

$$V = \{\varphi \in H^2(0,L) \cap L_*^2(0,L) : \varphi_x \in H_0^1(0,L)\}$$

com a norma

$$\|\varphi\|_V = \|\varphi_{xx}\|_{L^2(O,L)}$$

Considere o operador $A : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}(\cdot)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}I & \frac{a_{12}}{\rho_1}(\cdot)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_1}I & b_{11}(\cdot)_{xx} & b_{12}(\cdot)_{xx} & \frac{\beta_1}{\rho_1}(\cdot)_x \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}(\cdot)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}I & \frac{a_{22}}{\rho_2}(\cdot)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_2}I & b_{12}(\cdot)_{xx} & b_{22}(\cdot)_{xx} & \frac{\beta_2}{\rho_2}(\cdot)_x \\ 0 & 0 & \frac{\beta_1}{c}(\cdot)_x & \frac{\beta_2}{c}(\cdot)_x & \frac{\kappa}{c}(\cdot)_{xx} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

com domínio dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U = (u, \omega, \upsilon, \eta, \theta) \in \mathcal{H} : u, \eta \in H_0^1(0, L), \theta \in V,$$

$$a_{11}u + a_{12}\omega + b_{11}\upsilon + b_{12}\eta, a_{12}u + a_{22}\omega + b_{12}\upsilon + b_{22}\eta \in H^2(0, L)\}$$

Logo o problema de valor inicial e fronteira (2.1) - (2.3) pode ser reescrito como o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t) \\ \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $U(0) = (u_0, \omega_0, u_1, \omega_1, \theta_0)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

2.2 Existência e unicidade de solução

Lema 2.2 *O operador $\mathcal{A}$ definido em (2.8) é dissipativo.*

Demonstração Com efeito, considerando $U = (u, \omega, \upsilon, \eta, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, obtemos

$$< \mathcal{A}U, U >= \left\langle \begin{pmatrix} \upsilon \\ \eta \\ \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}\omega + b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-\omega) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta_x \\ \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}\omega + b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-\omega) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta_x \\ \dfrac{\beta_1}{c}\upsilon_x + \dfrac{\beta_2}{c}\eta_x + \dfrac{\kappa}{c}\theta_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \omega \\ \upsilon \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= a_{11}\int_0^L \upsilon_x\overline{u}_x \, dx + a_{12}\int_0^L \upsilon_x\overline{\omega}_x \, dx + \alpha\int_0^L \upsilon\overline{u} \, dx - \alpha\int_0^L \upsilon\overline{\omega} \, dx$$

$$+a_{12}\int_0^L \eta_x\overline{u}_x \, dx + a_{22}\int_0^L \eta_x\overline{\omega}_x \, dx - \alpha\int_0^L \eta\overline{u} \, dx + \alpha\int_0^L \eta\overline{\omega} \, dx$$

$$-\int_0^L (a_{11}u_x + a_{12}\omega_x + b_{11}\upsilon_x + b_{12}\eta_x)\overline{\upsilon}_x \, dx + \beta_1\int_0^L \theta_x\overline{\upsilon} \, dx$$

$$-\int_0^L (a_{12}u_x + a_{22}\omega_x + b_{12}\upsilon_x + b_{22}\eta_x)\overline{\eta}_x \, dx + \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\eta} \, dx$$

$$-\alpha\int_0^L u\overline{\upsilon} \, dx + \alpha\int_0^L \omega\overline{\upsilon} \, dx + \alpha\int_0^L u\overline{\eta} \, dx - \alpha\int_0^L \omega\overline{\eta} \, dx$$

$$+\int_0^L (\beta_1\upsilon_x + \beta_2\eta_x + \kappa\theta_{xx})\overline{\theta} \, dx$$

Tomando a parte real

$$Re < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}} = -b_{11}\int_0^L |\upsilon_x|^2 \, dx - b_{22}\int_0^L |\eta_x|^2 \, dx - \kappa\int_0^L |\theta_x|^2 \, dx$$

$$-2b_{12} \; Re \int_0^L \upsilon_x\overline{\eta_x} \, dx \tag{2.10}$$

$$= -\kappa\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - b_{11}\|\upsilon_x\|^2_{L^2(0,L)} - b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L)} - 2 \; b_{12} \; Re\int_0^L \upsilon_x\overline{\eta_x} \, dx$$

Caso I A matriz $B = (b_{ij})$ é definida positiva:

desde que $b_{22}, b_{11} > 0$ e

$$-b_{12}Re\int_0^L \upsilon_x\overline{\eta}_x \, dx < b_{11}\|\upsilon_x\|^2 + b_{22}\|\eta_x\|^2$$

Assim

$$Re < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}} \leq -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} \leq 0$$

Portanto o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Caso II A matriz $B = (b_{ij})$ é singular:

a) $b_{11} > 0$, então

$$Re < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}} = -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{11}} \left\{ \int_0^L b_{11}^2 |\upsilon_x|^2 + b_{11} b_{22} |\eta_x|^2 + 2\ b_{11} b_{12} \upsilon_x \eta_x \ dx \right\}$$

$$\leq -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{11}} \left\{ \int_0^L b_{11}^2 |\upsilon_x|^2 + b_{12}^2 |\eta_x|^2 + 2\ b_{11} b_{12} \upsilon_x \eta_x \ dx \right\}$$

$$= -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{11}} \left(\int_0^L |b_{11} \upsilon_x + b_{12} \eta_x|^2 \ dx \right) \leq 0.$$

b) $b_{22} > 0$, então

$$Re < \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}} = -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{22}} \left\{ \int_0^L b_{11} b_{22} |\upsilon_x|^2 + b_{22}^2 |\eta_x|^2 + 2\ b_{22} b_{12} \upsilon_x \eta_x \ dx \right\}$$

$$\leq -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{22}} \left\{ \int_0^L b_{12}^2 |\upsilon_x|^2 + b_{22}^2 |\eta_x|^2 + 2\ b_{22} b_{12} \upsilon_x \eta_x \ dx \right\}$$

$$= -\kappa \|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{22}} \left(\int_0^L |b_{12} \upsilon_x + b_{22} \eta_x|^2 \ dx \right) \leq 0.$$

Portanto $\mathcal{A}$ é dissipativo

Teorema 2.1 *O operador $\mathcal{A}$ definido no problema de valor inicial (2.9) é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Sendo $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em $\mathcal{H}$ e $\mathcal{A}$ um operador dissipativo, então para provar é suficiente mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, de acordo com o Corolário 1.5.

Dado $F = (f, g, h, p, q)^T \in \mathcal{H}$, devemos mostrar que existe um único $U = (u, \omega, \upsilon, \eta, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F \tag{2.11}$$

Da equação acima, encontramos

$$\upsilon = f \in H_0^1(0, L) \tag{2.12}$$

$$\eta = g \in H_0^1(0, L) \tag{2.13}$$

$$(a_{11}u + a_{12}\omega + b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_{xx} - \alpha(u - \omega) + \beta_1\theta_x = \rho_1 h \in L^2(0, L) \tag{2.14}$$

$$(a_{12}u + a_{22}\omega + b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_{xx} + \alpha(u - \omega) + \beta_2\theta_x = \rho_2 p \in L^2(0, L) \tag{2.15}$$

$$\beta_1\upsilon_x + \beta_2\eta_x + \kappa\theta_{xx} = cq \in L^2_*(0, L) \tag{2.16}$$

De (2.12) e (2.13) concluimos que

$$\upsilon \in H_0^1(0, L) \quad e \quad \eta \in H_0^1(0, L)$$

Aplicando em (2.16), obtemos:

$$\kappa\theta_{xx} = cq - \beta_1 f_x - \beta_2 g_x \in L^2_*(0, L) \tag{2.17}$$

Sabe-se que há um único $\theta \in V$ satisfazendo (2.17)

De (2.14) e (2.15), obtemos o seguinte problema elíptico

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}\omega_{xx} - \alpha(u - \omega) = -(b_{11}f + b_{12}g)_{xx} + \rho_1 h - \beta_1\theta_x \in L^2(0, L) \tag{2.18}$$

$$a_{12}u_{xx} + a_{22}\omega_{xx} + \alpha(u - \omega) = -(b_{12}f + b_{22}g)_{xx} + \rho_2 p - \beta_2\theta_x \in L^2(0, L) \tag{2.19}$$

com condições de contorno $u(0) = u(L) = \omega(0) = \omega(L)$. Procedemos agora com a formulação variacional. Portanto, multiplicando (2.18) por φ e integrando de 0 a L, segue-se que

$$a_{11}\int_0^L u_{xx}\varphi\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_{xx}\varphi\ dx - \int_0^L \alpha(u-\omega)\varphi\ dx$$
$$= -\int_0^L (b_{11}f + b_{12}g)_{xx}\varphi\ dx + \rho_1\int_0^L h\varphi\ dx + \beta_1\int_0^L \theta_x\varphi dx \tag{2.20}$$

Usando integração por partes na primeira e na segunda integral do primeiro membro e na primeira integral do segundo membro em (2.20), obtemos:

$$a_{11}\int_0^L u_x\varphi_x\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x\varphi_x\ dx + \int_0^L \alpha(u-\omega)\varphi\ dx$$
$$= -\int_0^L (b_{11}f + b_{12}g)_x\varphi_x\ dx - \rho_1\int_0^L h\varphi +\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_x\varphi\ dx \tag{2.21}$$

Por outro lado, multiplicando (2.19) por ψ e depois integrando de 0 a L, encontramos

$$a_{12}\int_0^L u_{xx}\psi\ dx + a_{22}\int_0^L \omega_{xx}\psi\ dx + \int_0^L \alpha(u-\omega)\psi\ dx =$$
$$= -\int_0^L (b_{12}f + b_{22}g)_{xx}\psi\ dx + \rho_2\int_0^L h\psi\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\psi\ dx \tag{2.22}$$

Usando integração por partes na primeira e na segunda integral do primeiro membro e na primeira integral do segundo membro em (2.22), obtemos:

$$a_{12}\int_0^L u_x\psi_x\ dx + a_{22}\int_0^L \omega_x\psi_x\ dx - \int_0^L \alpha(u-\omega)\psi\ dx =$$
$$= -\int_0^L (b_{12}f + b_{22}g)_x\psi_x dx - \rho_2\int_0^L p\psi dx + \beta_2\int_0^L \theta_x\psi dx \tag{2.23}$$

Somando (2.21) com (2.23), obtemos o seguinte problema variacional: Determinar (u,ω) em W onde $W = H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ tal que

$$M((u,\omega),(\varphi,\psi)) = -\int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x\overline{\varphi}_x dx - \rho_1\int_0^L h\overline{\varphi} + dx - \beta_1\int_0^L \theta_x\overline{\varphi}dx$$
$$-\int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x\overline{\psi}_x dx + \rho_2\int_0^L h\overline{\psi}dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\psi}dx$$

$\forall\varphi\in H_0^1(0,L), \forall\psi\in H_0^1(0,L)$

Logo, segue que

$$M((u,\omega),(\varphi,\psi)) = a_{11}\int_0^L u_x\overline{\varphi}_x dx + a_{12}\int_0^L u_x\overline{\psi}_x dx + a_{12}\int_0^L \omega_x\overline{\varphi}_x dx$$

$$+ a_{22}\int_0^L \omega_x\overline{\psi}_x dx + \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{(\varphi-\psi)}dx$$

Temos que M é uma forma sesquilinear. De fato, sejam $V_1 = (u,\omega)$, $V_2 = (b,c)$ e $S = (d,e)$ em W. Então, temos

$$M(V_1+V_2,S) = M((u+b,\omega+c),(d,e))$$

$$= a_{11}\int_0^L (u+b)_x\overline{d}_x\ dx + a_{12}\int_0^L (u+b)_x\overline{e}_x\ dx + a_{12}\int_0^L (\omega+c)_x\overline{d}_x\ dx$$

$$+ a_{22}\int_0^L (\omega+c)_x\overline{e}_x\ dx + \alpha\int_0^L (u+b-\omega-c)\overline{(d-e)}\ dx$$

$$= a_{11}\int_0^L (u_x\overline{d}_x + b_x\overline{d}_x)\ dx + a_{12}\int_0^L (u_x\overline{e}_x + b_x\overline{e}_x)\ dx$$

$$+ a_{12}\int_0^L (\omega_x\overline{d}_x + c_x\overline{d}_x)\ dx + a_{22}\int_0^L (\omega_x\overline{e}_x + c_x\overline{e}_x)\ dx$$

$$+ \alpha\int_0^L (u+b-\omega-c)\overline{(d-e)}\ dx$$

$$= a_{11}\int_0^L u_x\overline{d}_x\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\overline{e}_x\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x\overline{d}_x\ dx + a_{22}\int_0^L \omega_x\overline{e}_x\ dx$$

$$+ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{(d-e)}\ dx + a_{11}\int_0^L b_x\overline{d}_x\ dx + a_{12}\int_0^L b_x\overline{e}_x\ dx$$

$$+ a_{12}\int_0^L c_x\overline{d_x}\ dx + a_{22}\int_0^L c_x\overline{e}_x\ dx + \int_0^L (b-c)\overline{(d-e)}\ dx$$

$$= M(V_1,S) + M(V_2,S)$$

Por outro lado, seja K uma constante real. Então temos:
$M(KV_1,S) = M(K(u,\omega),(d,e))$

$$= M((Ku,K\omega),(d,e))$$

$$= a_{11}\int_0^L Ku_x\overline{d}_x\ dx + a_{12}\int_0^L Ku_x\overline{e}_x\ dx + a_{12}\int_0^L K\omega_x\overline{d}_x\ dx$$

$$+\ a_{22}\int_0^L K\omega_x\overline{e}_x\ dx + \alpha\int_0^L K(u-\omega)\overline{(d-e)}\ dx$$

$$= K\Bigg[a_{11}\int_0^L u_x\overline{d}_x\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\overline{e}_x\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x\overline{d}_x\ dx$$

$$+a_{22}\int_0^L \omega_x\overline{e}_x\ dx + \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{(d-e)}\ dx\Bigg]$$

$$= KM(V_1,S)$$

De modo semelhante obtemos $M(V,S_1+S_2) = M(V,S_1) + M(V,S_2)$ e $M(V,KS_1) = KM(V,S_1)$. Além disso, nesse espaço $W = H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ definimos a norma onde $V = (u,\omega)\in W$, por

$$\|V\|_W^2 = \int_0^L u_x^2\ dx + \int_0^L \omega_x^2\ dx$$

A forma bilinear M é contínua. Com efeito, sejam $V = (u,\omega)$ e $S = (\varphi,\psi)$ em W, e usando a desigualdade de Holder e Poincaré, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|M(V,S)| = &\left| a_{11}\int_0^L u_x\varphi_x\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\psi_x\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x\varphi_x\ dx \right.\\
&\left. + \, a_{22}\int_0^L \omega_x\psi_x\ dx + \int_0^L \alpha(u-\omega)(\varphi-\psi)\ dx \right|\\
&\leq \left| a_{11}\int_0^L u_x\varphi_x\ dx\right| + \left| a_{12}\int_0^L u_x\psi_x\ dx\right| + \left| a_{12}\int_0^L \omega_x\varphi_x\ dx\right|\\
&+ \left| a_{22}\int_0^L \omega_x\psi_x\ dx\right| + \left| \int_0^L \alpha(u-\omega)(\varphi-\psi)\ dx\right|\\
&\leq\ |a_{11}|\int_0^L |u_x\varphi_x|\ dx + |a_{12}|\int_0^L |u_x\psi_x|\ dx + |a_{12}|\int_0^L |\omega_x\varphi_x|\ dx\\
&+ \, |a_{22}|\int_0^L |\omega_x\psi_x|\ dx + |\alpha|\int_0^L |(u-\omega)(\varphi-\psi)|\ dx\\
&\leq\ |a_{11}|\|u_x\|\|\varphi_x\| + |a_{12}|\|u_x\|\|\psi_x\| + |a_{12}|\|\omega_x\|\|\varphi_x\| + |a_{22}|\|\omega_x\|\|\psi_x\|\\
&+ \, \alpha(\|u_x\|\|\varphi_x\| + \|u_x\|\|\psi_x\| + \|\omega_x\|\|\varphi_x\| + |\omega_x\|\|\psi_x\|)\\
&\leq C_1(\|u_x\| + \|\omega_x\|)(\|\varphi_x\| + \|\psi_x\|)\\
&=\ C_1\left\{\left[\int_0^L |u_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\left[\int_0^L |\varphi_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^L |\psi_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\leq\ C_1\left\{2\left[\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{2\left[\int_0^L |\varphi_x|^2\ dx + \int_0^L |\psi_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\leq C\|V\|\|S\|
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante. Finalmente, M é coerciva. De fato, dado $V = (u,\omega)$ em W, obtemos:

$$M(V,V) = a_{11}\int_0^L u_x^2\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\omega_x\ dx + a_{12}\int_0^L \omega_x u_x\ dx$$

$$+\ a_{22}\int_0^L \omega_x^2\ dx + \alpha\int_0^L (u-\omega)^2\ dx$$

$$= a_{11}\int_0^L u_x^2\ dx + a_{22}\int_0^L \omega_x^2\ dx + 2\ a_{12}\int_0^L u_x\omega_x\ dx$$

$$+\ \alpha\int_0^L u^2\ dx - 2\alpha\int_0^L u\omega\ dx + \alpha\int_0^L \omega^2\ dx$$

$$\geq a_{11}\int_0^L u_x^2\ dx - \alpha\int_0^L u_x^2\ dx + a_{22}\int_0^L \omega_x^2\ dx - \frac{a_{12}}{\alpha}\int_0^L \omega_x^2\ dx$$

$$+\alpha\int_0^L u^2\ dx - \alpha\int_0^L u^2\ dx + \alpha\int_0^L \omega^2\ dx - \alpha\int_0^L \omega^2\ dx$$

$$= (a_{11}-\alpha)\int_0^L u_x^2\ dx + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{\alpha}\right)\int_0^L \omega_x^2\ dx.$$

Portanto pela condição $a_{11} > \alpha$ e $\alpha a_{22} > a_{12}^2$ e tomando

$$C_1 = min\left\{a_{11}-\alpha, a_{22} - \frac{a_{12}^2}{\alpha}\right\}$$

$$M(V,V) \geq C_1\|V\|_W^2, \forall\ V \in W$$

Nesta demonstração usamos o seguinte resultado:

$$(a \pm b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \pm\ 2ab$$

daí

fazendo $a = \sqrt{\alpha}u_x$ e $b = \frac{\sqrt{a_{12}^2}}{\sqrt{\alpha}}\ \omega_x$ então

$$2a_{12}u_x\omega_x = 2(\sqrt{\alpha}u_x)\left(\frac{\sqrt{a_{12}^2}}{\sqrt{\alpha}}\ \omega_x\right) \geq -\left(\alpha u_x^2 + \frac{a_{12}^2}{\alpha}\omega_x^2\right)$$

e fazendo $a = \frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha}}$ e $b = \sqrt{\alpha}\omega$ então:

$$-2\alpha u\omega = -2\left(\frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha}}\right)(\sqrt{\alpha}\omega) \geq -(\alpha u^2 + \alpha\omega^2)$$

Agora, consideremos o seguine funcional, definido por:

$$G(\varphi,\psi) = -\int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x\varphi_x\ dx - \rho_1\int_0^L h\varphi\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_x\varphi\ dx$$

$$-\int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x\psi_x\ dx + \rho_2\int_0^L h\psi\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\psi\ dx$$

onde G é linear. De fato, considerando $S = (\varphi,\psi)$ e $V = (u,\omega)$ em W e $\lambda \in \mathbb{R}$, segue que

$$G(S+\lambda V) = G(\varphi+\lambda u, \psi+\lambda\omega)$$

$$= -\int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x(\varphi+\lambda u)_x\ dx - \rho_1\int_0^L h(\varphi+\lambda u)\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_x(\varphi-\lambda u)\ dx$$

$$-\int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x(\psi+\lambda\omega)_x\ dx + \rho_2\int_0^L h(\psi+\lambda\omega)\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x(\psi+\lambda\omega)\ dx$$

$$= \ -\int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x\varphi_x dx - \rho_1\int_0^L h\varphi + dx - \beta_1\int_0^L \theta_x\varphi dx$$

$$-\int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x\psi_x dx + \rho_2\int_0^L h\psi dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\psi dx$$

$$+\ \lambda\Bigg[-\int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x u_x\ dx - \rho_1\int_0^L hu\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_x u\ dx$$

$$-\int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x\omega_x\ dx + \rho_2\int_0^L h\omega\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\omega\ dx\Bigg]$$

$$= \ G(S) + \lambda G(V)$$

O funcional G é contínuo. De fato, seja $S = (\varphi,\psi)$ em W e usando as desigualdades de Holder e de Poincaré, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|G(S)| = & \bigg| - \int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x \varphi_x \ dx - \rho_1 \int_0^L h\varphi + dx - \beta_1 \int_0^L \theta_x \varphi \ dx \\
& - \int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x \psi_x \ dx + \rho_2 \int_0^L h\psi \ dx - \beta_2 \int_0^L \theta_x \psi \ dx \bigg| \\
& \leq \left| \int_0^L (b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x \varphi_x \ dx \right| + \left| \rho_1 \int_0^L h\varphi \ dx \right| + \left| \beta_1 \int_0^L \theta_x \varphi \ dx \right| \\
& + \left| \int_0^L (b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x \psi_x \ dx \right| + \left| \rho_2 \int_0^L h\psi \ dx \right| + \left| \beta_2 \int_0^L \theta_x \psi \ dx \right| \\
& \leq \int_0^L |(b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_x||\varphi_x| \ dx + \rho_1 \int_0^L |h||\varphi| \ dx + \beta_1 \int_0^L |\theta_x||\varphi| \ dx \\
& + \int_0^L |(b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_x||\psi_x| \ dx + \rho_2 \int_0^L |h||\psi| \ dx + \beta_2 \int_0^L |\theta_x||\psi| \ dx \\
& \leq |b_{11}| \ \| \upsilon_x \| \| \varphi_x \| + |b_{12}| \ \| \eta_x \| \| \varphi_x \| + \rho_1 \| h \| \| \varphi \| + \beta_1 \| \theta_x \| \| \varphi \| \\
& + |b_{12}| \ \| \upsilon_x \| \| \psi_x \| + |b_{22}| \ \| \eta_x \| \| \psi_x \| + \rho_2 \ \| p \| \| \psi \| + \beta_2 \| \theta_x \| \psi \| \\
& \leq C_1(\| \upsilon_x \| + \| \eta_x \|) \| \varphi_x \| + C_2 \ (\| h \| + \| \theta_x \|) \| \varphi_x \| \\
& + C_3(\| \upsilon_x \| + \| \eta_x \|) \| \psi_x \| + C_4 \ (\| p \| + \| \theta_x \|) \| \psi_x \| \\
& \leq C_5(\| \upsilon_x \| + \| \eta_x \| + \| h \| + \| \theta_x \|) \| \varphi_x \| \\
& + C_6(\| \upsilon_x \| + \| \eta_x \| + \| p \| + \| \theta_x \|) \| \psi_x \| \\
& \leq C_7(\| \varphi_x \| + \| \psi_x \|) \\
& = C_7 \left\{ \left[\int_0^L |\varphi_x|^2 \ dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^L |\psi_x|^2 \ dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
& \leq 2 \ C_7 \left\{ \int_0^L |\varphi_x|^2 \ dx + \int_0^L |\psi_x|^2 \ dx \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Assim considerando o espaço $W = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L)$, encontramos a aplicação

$$M(.,.) : W \times W \to \mathbb{R}$$

Além disso, concluimos que $M(.,.)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Logo, usando o lema de Lax-Milgran, concluimos que existe uma única solução para o problema variacional

$$M(V,S) = G(S)\ ,\ \forall S \in W$$

onde $V = (u,\omega)$ e $S = (\varphi,\psi)$. Ou seja, a solução única V satisfaz ao sistema formado pelas equações (2.18) e (2.19). Por outro lado, usando a regularidade elíptica, concluimos que existe solução única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para (2.11). Logo $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

$\square$

Teorema 2.2 *Sejam $U_0 \in \mathcal{H}$ então existe uma única solução (u,ω) para o sistema (2.1) satisfazendo*

$$u,\omega \in C([0,\infty[: H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,\infty[: L^2(0,L)),$$

$$u_t,\omega_t \in L^2(]0,\infty[: H_0^1(0,L))$$

e $\theta \in C([0,\infty[: L_*^2(0,L)) \cap L^2(0,\infty[: H^1(0,L))$.

Por outro lado, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então

$$u,\omega \in C^1([0,\infty[: L_*^2(0,L)) \cap C^2([0,\infty[: L^2(0,L)),$$

$$a_{11}u + a_{12}\omega + b_{11}u_t + b_{12}\omega_t \in C([0,\infty[: H^2(0,L)),$$

$$a_{12}u + a_{22}\omega + b_{12}u_t + b_{22}\omega_t \in C([0,\infty[: H^2(0,L)),$$

e $\theta \in C^1([0,\infty[: L^2(0,L)) \cap C([0,\infty[: V)$.

Capítulo 3

Analiticidade

Nesta seção iremos provar a analiticidade do semigrupo $S_{\mathcal{A}}(t)$ quando a matriz B é definida positiva. Nossa principal ferramenta será o teorema cuja demonstração pode ser vista em Liu and Zheng [16].

Teorema 3.1 *Seja S_t um semigrupo C_0 de contrações de operadores lineares em um espaço de Hilbert $\mathcal{M}$ com gerador infinitesimal $\mathcal{B}$. Suponha que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{B})$. Então, $S(t)$ é analítico se, e somente se*

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathcal{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{M})} < \infty \tag{3.1}$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ denota o espaço das funções contínuas lineares em $\mathcal{M}$.

Lema 3.1 *Seja A como definido em (2.8) e assuma que (b_{ij}) é definida positiva. Então o conjunto $i\mathbb{R} = \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ está contido em $\rho(\mathcal{A})$, o resolvente de $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Neste lema, usaremos $\|\cdot\|$ para denotar a norma no espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Usaremos a caracterização dos semigrupos analíticos dada por Liu and Zheng [16], cuja demonstração consiste em três partes. Primeiramente vejamos que a função $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ é contínua em algum intervalo contendo o zero.

Passo i: Como $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é inversível e $\mathcal{A}^{-1}$ é limitada. Pelo lema (1.1), concluimos que $(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$ é inversível, basta tomar $B = i\lambda\mathcal{A}^{-1}$ e $S = -I$ para $|\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$.
Alem disso o operador

$$i\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(i\lambda\mathcal{A}^{-1} - I)$$

é inversível por ser a composição de operadores inversíveis e seu inverso pertence a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Isto é, $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. Também $\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|$ é uma função contínua para λ no intervalo $(-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1})$.

Passo (ii): Seja $M > 0$ tal que

$$\sup\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| : |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}\} = M < \infty$$

então para $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < M^{-1}$, temos

$$\|(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}\| < 1.$$

Então o operador

$$i\lambda I - \mathcal{A} = (i\lambda_0 I - \mathcal{A})(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}),$$

é inversivel e sua inversa pertence a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, isto é $i\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Como λ_0 foi escolhido de forma arbitrária tal que $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1}$, deduzimos que

$$\{i\lambda; |\lambda| < \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1}\} \subset \rho(\mathcal{A}),$$

além disso a função $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|$ é contínua para λ no intervalo $(-\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - M^{-1}, \|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} + M^{-1})$.

Passo (iii): Agora por contradição suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A})$. Pelo argumento em **(ii)**, existe $\omega \in \mathbb{R}$ com $\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} \leq |\omega| < \infty$, tal que

$$\{i\lambda; |\lambda| < |\omega|\} \subset \rho(\mathcal{A})$$

e

$$\sup\{\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| : |\lambda| < |\omega|\} = \infty.$$

Além disso, deve existir uma sequência $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} |\lambda_n| < |\omega| \\ \\ \lambda_n \to \omega \quad \textit{quando} \quad n \to \infty \end{cases} \tag{3.2}$$

e duas sequências de vetores $U_n = (u_n, \omega_n, \upsilon_n, \eta_n, \theta_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $F_n = (f_n, g_n, h_n, p_n, q_n) \in \mathcal{H}$ tais que

$$
\begin{cases}
(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n \\
\\
\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \\
\\
F_n \to 0 \ \ em \ \ \mathcal{H} \ \ quando \ \ n \to \infty.
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

isto é

$$i\lambda_n u_n - \upsilon_n \to 0 \ em \ H_0^1(0,L) \tag{3.4}$$

$$i\lambda_n \omega_n - \eta_n \to 0 \ em \ H_0^1(0,L) \tag{3.5}$$

$$i\lambda_n \upsilon_n - \rho_1^{-1}(a_{11}u_n + a_{12}\omega_n + b_{11}\upsilon_n + b_{12}\eta_n)_{xx} + \rho_1^{-1}\alpha(u_n - \omega_n) - \rho_1^{-1}\beta_1\theta_{nx} \to 0 \ em \ L^2(0,L) \tag{3.6}$$

$$i\lambda_n \eta_n - \rho_2^{-1}(a_{12}u_n + a_{22}\omega_n + b_{12}\upsilon_n + b_{22}\eta_n)_{xx} - \rho_2^{-1}\alpha(u_n - \omega_n) - \rho_2^{-1}\beta_2\theta_{nx} \to 0 \ em \ L^2(0,L) \tag{3.7}$$

$$i\lambda_n \theta_n - c^{-1}\beta_1\upsilon_{nx} - c^{-1}\beta_2\eta_{nx} - c^{-1}\kappa\theta_{nxx} \to 0 \ em \ L_*^2(0,L) \tag{3.8}$$

Passando o produto interno e fazendo $A_n =< F_n, U_n >_{\mathcal{H}}$

$$
A_n = \left\langle \begin{pmatrix}
i\lambda_n u_n - \upsilon_n \\
i\lambda_n \omega_n - \eta_n \\
i\lambda_n \upsilon_n - \rho_1^{-1}(a_{11}u_n + a_{12}\omega_n + b_{11}\upsilon_n + b_{12}\eta_n)_{xx} + \rho_1^{-1}\alpha(u_n - \omega_n) - \rho_1^{-1}\beta_1\theta_{nx} \\
i\lambda_n \eta_n - \rho_2^{-1}(a_{12}u_n + a_{22}\omega_n + b_{12}\upsilon_n + b_{22}\eta_n)_{xx} - \rho_2^{-1}\alpha(u_n - \omega_n) - \rho_2^{-1}\beta_2\theta_{nx} \to 0 \\
i\lambda_n \theta_n - c^{-1}\beta_1\upsilon_{nx} - c^{-1}\beta_2\eta_{nx} - c^{-1}\kappa\theta_{nxx}
\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ \omega_n \\ \upsilon_n \\ \eta_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \right\rangle_H
$$

$$= a_{11}\int_0^L (i\lambda_n u_n - \upsilon_n)_x \overline{u}_{nx}\ dx + a_{12}\int_0^L (i\lambda_n u_n - \upsilon_n)_x \overline{\omega}_{nx} (i\lambda_n \omega_n - \eta_n)_x \overline{u}_{nx}\ dx$$

$$+\ a_{22}\int_0^L \eta_{nx}\overline{\omega}_{nx}\ dx + \alpha\int_0^L ((i\lambda_n u_n - \upsilon_n) - (i\lambda_n\omega_n - \eta_n))(\overline{u_n - \omega_n})\ dx$$

$$+\ \rho_1\int_0^L i\lambda_n \upsilon_n \overline{\upsilon}_n\ dx - \int_0^L (a_{11}u_n + a_{12}\omega_n + b_{11}\upsilon_n + b_{12}\eta_n)_{xx}\overline{\upsilon}_n\ dx$$

$$+\alpha\int_0^L (u_n - \omega_n)\overline{\upsilon}_n\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_{nx}\overline{\upsilon}_n\ dx + \rho_2\int_0^L i\lambda_n\eta_n\overline{\eta}_n\ dx$$

$$-\int_0^L (a_{12}u_n + a_{22}\omega_n + b_{12}\upsilon_n + b_{22}\eta_n)_{xx}\overline{\eta}_n\ dx - \alpha\int_0^L (u_n - \omega_n)\eta_n\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_{nx}\overline{\eta}_n\ dx$$

$$+c\int_0^L i\lambda_n\theta_n\overline{\theta}_n\ dx - \beta_1\int_0^L \upsilon_{nx}\overline{\theta}_n\ dx - \beta_2\int_0^L \eta_{nx}\overline{\theta}_n - \kappa\int_0^L \theta_{nxx}\overline{\theta}_n\ dx$$

Em seguida tomando a parte real, obtemos

$$Re(A_n) = \kappa\int_0^L |\theta_{nx}|^2\ dx + b_{11}\int_0^L |\upsilon_{nx}|^2\ dx + +b_{22}\int_0^L |\eta_{nx}|^2\ dx$$

$$+\ 2b_{12}\ Re\int \upsilon_{nx}\overline{\eta}_{nx} \to 0\ quando\ n \to \infty$$

Como B é definida positiva

$$Re(A_n) \geq \frac{detB}{2b_{22}}\int_0^L |\upsilon_{nx}|^2\ dx + \frac{detB}{2b_{11}}\int_0^L |\eta_{nx}|^2\ dx + \kappa\int_0^L |\theta_{nx}|^2\ dx$$

daí

$$\frac{detB}{2b_{22}}\int_0^L |\upsilon_{nx}|^2\ dx + \frac{detB}{2b_{11}}\int_0^L |\eta_{nx}|^2\ dx + \kappa\int_0^L |\theta_{nx}|^2\ dx \to 0\ com\ n \to \infty$$

Portanto

$$\begin{cases} \upsilon_n \to 0 \\ \eta_n \to 0 \\ \theta_n \to 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Por outro lado de (3.3) temos que

$$\begin{cases} i\lambda_n u_n - \upsilon_n = f_n \to 0, \\ i\lambda_n \omega_n - \eta_n = g_n \to 0. \end{cases}$$

Como $\lambda_n \to \omega$ e $\omega \neq 0$, das equações anteriores obtem-se

$$\begin{cases} u_n \to 0 \\ \omega_n \to 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

De (3.9) e (3.10), concluimos que

$U_n = (u_n, \omega_n, \upsilon_n, \eta_n, \theta_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to 0$ o qual contradiz o fato de que $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}).$$

Teorema 3.2 *Seja A como foi definido em (2.8) e assuma que (b_{ij}) é definida positiva. Então o semigrupo $S_{\mathcal{A}}(t)$ é analítico.*

Demonstração: Pelo Teorema (3.1) e Lema (3.1) é suficiente provar que (3.1) é verdade. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F = (f, g, h, p, q) \in \mathcal{H}$, existe um único $U = (u, \omega, \upsilon, \eta, \theta)$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que $(i\lambda I - A)U = F$.

A equação acima em termos das componentes se escreve

$$i\lambda u - \upsilon = f \quad em \quad H_0^1(0, L), \tag{3.11}$$

$$i\lambda \omega - \eta = g \quad em \quad H_0^1(0, L), \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} &i\lambda\rho_1\upsilon - (a_{11}u + a_{12}\omega + b_{11}\upsilon + b_{12}\eta)_{xx} \\ &+\alpha(u - \omega) - \beta_1\theta_x = \rho_1 h \quad em \quad L^2(0, L), \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} &i\lambda\rho_2\eta - (a_{12}u + a_{22}\omega + b_{12}\upsilon + b_{22}\eta)_{xx} \\ &-\alpha(u - \omega) - \beta_2\theta_x = \rho_2 p \quad em \quad L^2(0, L), \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$i\lambda c\theta - \beta_1\upsilon_x - \beta_2\eta_x - \kappa\theta_{xx} = cq \quad em \quad L_*^2(0, L), \tag{3.15}$$

Note que

$$Re\langle(i\lambda I - A)U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -Re\langle AU, U\rangle_{\mathcal{H}} = Re\langle F, U\rangle_{\mathcal{H}}$$

daí

$$Re\langle F,U\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^L(b_{11}\upsilon_x\overline{\upsilon}_x+b_{12}(\eta_x\overline{\upsilon}_x+\overline{\eta}_x\upsilon_x)+b_{22}\eta_x\overline{\eta}_x)\ dx+\kappa\int_0^L\theta_x\overline{\theta}_x\ dx$$

Como a matriz B é definida não negativa, deduzimos que

$$Re\langle F,U\rangle_{\mathcal{H}}\geq\frac{detB}{2b_{22}}\int_0^L|\upsilon_x|^2\ dx+\frac{detB}{2b_{11}}\int_0^L|\eta_x|^2\ dx+\kappa\int_0^L|\theta_x|^2\ dx$$

$$\geq C_0\{\int_0^L|\upsilon_x|^2\ dx+\int_0^L|\eta_x|^2\ dx+\int_0^L|\theta_x|^2\ dx\}$$

daí

$$C_0\left\{\int_0^L|\upsilon_x|^2\ dx+\int_0^L|\eta_x|^2\ dx+\int_0^L|\theta_x|^2\ dx\right\}\leq\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\tag{3.16}$$

onde $C_0=min\left\{\frac{detB}{2b_{11}},\frac{detB}{2b_{22}},\kappa\right\}$

Calculando o produto interno em $L^2(0,L)$ de (3.13) e (3.14) com u e υ respectivamente, temos:

$$i\lambda\rho_1\int_0^L\upsilon\overline{u}\ dx-a_{11}\int_0^L u_{xx}\overline{u}\ dx-a_{12}\int_0^L\omega_{xx}\overline{u}-b_{11}\int_0^L\upsilon_{xx}\overline{u}\ dx-b_{12}\int_0^L\eta_{xx}\overline{u}\ dx$$

$$+\ \alpha\int_0^L(u-\omega)\overline{u}\ dx-\beta_1\int_0^L\theta_x\overline{u}\ dx=\rho_1\int_0^L h\overline{u}\ dx$$

daí

$$\begin{aligned}&i\lambda\rho_1\int_0^L\upsilon\overline{u}\ dx+a_{11}\int_0^L|u_x|^2\ dx+a_{12}\int_0^L\omega_x\overline{u}_x+b_{11}\int_0^L\upsilon_x\overline{u}_x\ dx+b_{12}\int_0^L\eta_x\overline{u}_x\ dx\\&+\ \alpha\int_0^L(u-\omega)\overline{u}\ dx-\beta_1\int_0^L\theta_x\overline{u}\ dx=\rho_1\int_0^L h\overline{u}\ dx\end{aligned}\tag{3.17}$$

Também

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L \eta\overline{\omega}\ dx - a_{12}\int_0^L u_{xx}\overline{\omega}\ dx - a_{22}\int_0^L \omega_{xx}\overline{\omega} - b_{12}\int_0^L \upsilon_{xx}\overline{\omega}\ dx - b_{22}\int_0^L \eta_{xx}\overline{\omega}\ dx$$

$$-\ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{\omega}\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\omega}\ dx = \rho_2\int_0^L p\overline{\omega}\ dx$$

daí

$$\begin{aligned} & i\lambda\rho_2 \int_0^L \eta\overline{\omega}\ dx + a_{12}\int_0^L u_x\overline{\omega}_x\ dx + a_{22}\int_0^L |\omega_x|^2\ dx + b_{12}\int_0^L \upsilon_x\overline{\omega}_x\ dx + b_{22}\int_0^L \eta_x\overline{\omega}_x\ dx \\ & -\ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{u}\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\omega}\ dx = \rho_2\int_0^L p\overline{\omega}\ dx \end{aligned} \tag{3.18}$$

Somando as equações (3.17) e (3.18) , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^L (a_{11}u_x\overline{u}_x + a_{12}(u_x\overline{\omega}_x + \omega_x\overline{u}_x) + a_{22}\omega_x\overline{\omega}_x)\ dx = -b_{11}\int_0^L \upsilon_x\overline{u}_x\ dx \\ & -\ b_{12}\int_0^L \eta_x\overline{u}_x\ dx - b_{22}\int_0^L \eta_x\overline{\omega}_x\ dx - b_{12}\int_0^L \upsilon_x\overline{\omega}_x\ dx - i\lambda\rho_2\int_0^L \eta\overline{\omega}\ dx \\ & -\ i\lambda\rho_1\int_0^L \upsilon\overline{u}\ dx + \rho_1\int_0^L h\overline{u}\ dx + \rho_2\int_0^L p\overline{\omega}\ dx + \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{\omega}\ dx \\ & -\ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{u}\ dx + \beta_1\int_0^L \theta_x\overline{u}\ dx + \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\omega}\ dx \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como A é uma matriz definida positiva, temos que

$$a_{11}\int_0^L |u_x|^2 dx + a_{22}\int_0^L |\omega_x|^2\ dx + 2a_{12}\ Re\int_0^L u_x\overline{\omega}_x\ dx$$

$$\geq C_1\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right\}$$

onde $C_1 = min\left\{\dfrac{detA}{2a_{11}}, \dfrac{detA}{2a_{22}}\right\} \geq 0$

Agora aplicamos esta ultima desigualdade e substituimos as equações (3.11), (3.12) em (3.19), usando a desigualdade de Young e Cauchy-Schwartz e realizando cálculos simples, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&C_1\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right\} + \alpha\int_0^L |u-\omega|^2\ dx \\
&\quad\leq\ |b_{11}|\int_0^L |\upsilon_x||u_x|\ dx + |b_{12}|\int_0^L |\eta_x||u_x|\ dx + |b_{12}|\int_0^L |\upsilon_x||\omega_x|\ dx + |b_{22}|\int_0^L |\eta_x||\omega_x|\ dx \\
&\quad+ |\beta_1|\int_0^L |\theta_x||u|\ dx + |\beta_2|\int_0^L |\theta_x||\omega|\ dx + \rho_2\int_0^L |\eta|^2\ dx + \rho_2\int_0^L |\eta||g|\ dx + \rho_1\int_0^L |v|^2\ dx \\
&\quad+ \rho_1\int_0^L |v||f|\ dx + \rho_2\int_0^L |p||\omega|\ dx + \rho_1\int_0^L |h||u|\ dx
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Observe que

$$\alpha\int_0^L |u-\omega|^2\ dx \geq 0$$

Pela definição de $||\cdot||_{\mathcal{H}}$, é simples ver que

$$\rho_1\int_0^L |h||u|\ dx + \rho_2\int_0^L |p||\omega|\ dx + \rho_1\int_0^L |v||f|\ dx + \rho_2\int_0^L |\eta||g|\ dx \leq K||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}, \tag{3.21}$$

para algum $K \geq 0$. Além disso, consideremos

$$ab \leq Na^2 + \frac{b^2}{4N}\ ;\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}^+$$

e (3.16), assim,

$$
\begin{aligned}
&|\beta_1|\int_0^L |\theta_x||u|\ dx + |\beta_2|\int_0^L |\theta_x||\omega|\ dx + |b_{11}|\int_0^L |\upsilon_x||u_x|\ dx + |b_{12}|\int_0^L |\eta_x||u_x|\ dx \\
&\quad+ |b_{12}|\int_0^L |\upsilon_x||\omega_x|\ dx + |b_{22}|\int_0^L |\eta_x||\omega_x|\ dx \leq 4\ K_1NC||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \\
&\quad+ \frac{K_1}{2N}\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right\}
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

onde $K_1 = max\{|\beta_1|, |\beta_2|, |b_{11}|, |b_{12}|, |b_{22}|\} \geq 0$ e $N \in \mathbb{N}$.

Também
$$\rho_1 \int_0^L |v|^2 \, dx \leq k_2 ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.23}$$

$$\rho_2 \int_0^L |\eta|^2 \, dx \leq k_3 ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.24}$$

Agora, substituímos (3.21) , (3.22), (3.23), (3.24) em (3.20), para obter

$$C_1 \left\{ \int_0^L |u_x|^2 \, dx + \int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \right\} \leq (k + k_2 + k_3 + 4 \; k_1 N) ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}}$$

$$+ \; \frac{k_1}{2N} \left\{ \int_0^L |u_x|^2 \, dx + \int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \right\}$$

Também consideremos $N > \dfrac{K_1}{C_1}$, assim

$$\int_0^L |u_x|^2 \, dx + \int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \leq C ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.25}$$

De (3.11) e (3.12), temos:

$$i\lambda u_x - v_x = f_x$$

e

$$i\lambda \omega_x - \eta_x = g_x \; ,$$

multiplicando as equações anteriores por iu_x e $i\omega_x$ respectivamente, obtemos:

$$|\lambda| \int_0^L |u_x|^2 \, dx \leq \left(\int_0^L |f_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L |v_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\lambda| \int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \leq \left(\int_0^L |g_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L |\eta_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\omega_x|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Somando as desigualdades anteriores e aplicando a definição de $|| \cdot ||_{\mathcal{H}}$, temos que existe uma constante $k_5 > 0$ tal que

$$|\lambda|\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right\} \leq K_5||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2 + \int_0^L |\upsilon_x|^2\ dx + \int_0^L |\eta_x|^2\ dx\ dx\right\} \tag{3.26}$$

aplicando (3.16) e (3.25) em (3.26), temos:

$$|\lambda|\left\{\int_0^L |u_x|^2\ dx + \int_0^L |\omega_x|^2\ dx\right\} \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.27}$$

De (3.15), temos

$$i\lambda c\theta - \beta_1\upsilon_x - \beta_2\eta_x - \kappa\theta_{xx} = cq$$

multiplicando a equação por $-i\theta$, obtemos

$$|\lambda|\int_0^L |\theta_x|^2\ dx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.28}$$

Finalmente multiplicamos (3.13) e (3.14) por υ e η respectivamente, para obter:

$$i\lambda\rho_1\int_0^L |\upsilon|^2\ dx + \int_0^L (a_{11}u_x\overline{\upsilon}_x + a_{12}\omega_x\overline{\upsilon}_x + b_{11}|\upsilon_x|^2 + b_{12}\eta_x\overline{\upsilon}_x)\ dx$$

$$+\ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{\upsilon}\ dx - \beta_1\int_0^L \theta_x\overline{\upsilon}\ dx = \rho_1\int_0^L h\overline{\upsilon}\ dx \tag{3.29}$$

$$i\lambda\rho_2\int_0^L |\eta|^2\ dx + \int_0^L (a_{12}u_x\overline{\eta}_x + a_{22}\omega_x\overline{\eta}_x + b_{12}\upsilon_x\overline{\eta}_x + b_{22}|\eta_x|^2)\ dx$$

$$-\ \alpha\int_0^L (u-\omega)\overline{\eta}\ dx - \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\eta}\ dx = \rho_2\int_0^L p\overline{\eta}\ dx \tag{3.30}$$

Somando as igualdades anteriores e tomando a parte imaginária temos:

$$\lambda\rho_1\int_0^L |\upsilon|^2\ dx + \lambda\rho_2\int_0^L |\eta|^2\ dx = Im\left\{\rho_1\int_0^L h\overline{\upsilon}\ dx + \rho_2\int_0^L p\overline{\eta}\ dx\right\}$$

$$+Im\left\{\int_0^L (a_{11}u_x\overline{\upsilon}_x + a_{12}(u_x\overline{\eta}_x + \omega_x\overline{\upsilon}_x) + a_{22}\omega_x\overline{\eta}_x)\ dx\right\}$$

$$+Im\left\{\int_0^L (b_{11}|\upsilon_x|^2 + b_{12}(\upsilon_x\overline{\eta}_x + \eta_x\overline{\upsilon}_x) + b_{22}|\eta_x|^2)\ dx\right\}$$

$$+Im\left\{\alpha\int_0^L (u-\omega)(\overline{\upsilon-\eta})\ dx\right\} - Im\left\{\beta_1\int_0^L \theta_x\overline{\upsilon}\ dx + \beta_2\int_0^L \theta_x\overline{\eta}\ dx\right\}$$

Usando (3.16) e (3.25) na equação anterior, existe $C>0$ tal que

$$|\lambda|\left\{\int_0^L |\upsilon|^2\ dx + \int_0^L |\eta|^2\ dx\right\} \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \tag{3.31}$$

Combinando (3.27),(3.28)e(3.31), temos

$$|\lambda|||(u,\omega,\upsilon,\eta,\theta)||^2_{\mathcal{H}} \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}$$

onde $C>0$. Daí,

$$|\lambda|||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}$$

ou equivalententemente

$$||\lambda(i\lambda I - A)^{-1}||_{L(\mathcal{H})} \leq C$$

onde $U\in D(\mathcal{A})$,$F\in\mathcal{H}$ e C é uma constante que não depende de λ, o que conclui a demonstração.

Bibliografia

[1] C.Truesdell and R. A. Toupin. The Classical Field Theories. Vol. III/1.Springer-Verlang. Berlin. 1960.

[2] A. E. Green and P. M. Naghdi. A dynamical theory of interacting continua. Internat. J. Engrg. Sci.

[3] A. E. Green and P. M. Naghdi. A note on mixtures. Internat. J. Engrg. Sci. 6(1968) 631-635.

[4] R. M. Bowen and J.C. Wiese. Diffusion in mixtures of elastic materials. Internat. J. Engrg. Sci.

[5] R. J. Atkin and R. E. Craine. Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development. Quat. J. Mech. Appl. Math. 29(1976) 209-243.

[6] A.Bedford and D. S. Drumheller. Theory of immiscible and structured mixtures. Internat. J. Engrg. Sci.21(1983)863-960.

[7] R. M. Bowen. Theory of Mistures. Continuum Physics III. Ed. A. C. Eringen. Acaddemic Press. New York (1976)689-722.

[8] K. R. Rajagopal and L.Tao. Mechanics of Mixtures. World Scientific. Singapore. 1995.

[9] A. E. Green and T. R. Steel. Constitutive equation for interacting continua. Internat. J. Engrg. Sci.4(1966)483-500.

[10] T. R. Steel. Applications of theory of interacting continua. Quarterly Journal of Mechanic and Applied Mathematics. 20(1967) 57-72.

[11] A. Bedford and M. Stern. A multi-continuum theory for composite elastic materials. Acta Mechanica. 14(1972)85-102.

[12] D. Iesan and R. Quintanilla. Existence and continuous dependence results in the theory of interacting continua. J. Elasticity 35(1994)85-98.

[13] F. Martínez and R. Quintanilla. Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. Collect. Math. 46(1995)263-277.

[14] R. Quintanilla. Exponential decay in mixtures with localized dissipative term. Applied Mathematics Letters, 18 (2005), 1381-1388.

[15] M. S. Alves, J. E. Muñoz Rivera and R. Quintanilla. Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. International Journal of Solids and Structures, submitted for publication.

[16] Z.Liu and S. Zheng. Semigroups associated with dissipative systems. CRC Research Notes in Math-ematics 398. Chapman & Hall. 1999.

[17] Brezis, H., Analisis Funcional, Teoria y Applicaciones, Version española de Juan Ramon Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[18] Rivera, J.E.M. Estabilização de Semigrupos e Aplicações. Rio de Janeiro, 2008.

[19] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1983.