UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ELÁSTICO POROSO

Francisco Oliveira de Lima

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM - PA
Fevereiro de 2012

Francisco Oliveira de Lima

DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ELÁSTICO POROSO

Dissertação apresentada ao colegiado do programa de pós-graduação em matemática e estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de mestre em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM - PA
Fevereiro de 2012

Francisco Oliveira de Lima

DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ELÁSTICO POROSO

Dissertação apresentada ao colegiado do programa de pós-graduação em matemática e estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de mestre em matemática.

Data da defesa: 15 de Fevereiro de 2012
Conceito: ....

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará (UFPA)

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Universidade Federal do Amapá (UNIFAP)

BELÉM - PA
Fevereiro de 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar ao Senhor Deus que através do seu amor, paz e sua infinita misericórdia me permitiu concluir esse curso de mestrado em matemática.

Agradeço a força e incentivo de meus pais e meu irmão *Janu* 100%, em cada momento dessa jornada.

Ao meu orientador Prof. Mauro de Lima Santos por sua orientação e dedicação ao longo desse trabalho.

Aos professores Dilberto da Silva Almeida, Valcir João da Cunha e Guzmán Eulálio Isla, por aceitarem compor a banca examinadora.

Aos meus colegas da Universidade Federal do Pará, mas em especial aos colegas da turma do mestrado em matemática por cada momento de estudo, conversa e brincadeira. Obrigado, vocês também fazem parte dessa conquista.

Agradeço a todos os meus professores, começando pelo ensino fundamental, ensino médio em magistério, graduação em matemática, especialização e finalmente aos professores do mestrado em matemática, muito obrigado pela contribuição.

Agradeço o apoio recebido na Escola Luiz Gualberto Pimentel e Escola Manoelito Sande de Andrade.

Agradeço a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram ao longo desse curso.

DEDICATÓRIA

Ao Senhor Deus criador
do céu e da terra.

RESUMO

Nesse trabalho estudamos a existência, unicidade e o decaimento exponencial de soluções do seguinte sistema elástico poroso

$$\left\{\begin{array}{rcccccccc} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} & + & \beta\varphi_x & - & \gamma u_t & & \\ \rho\kappa\varphi_{tt} & = & \alpha\varphi_{xx} & - & \beta u_x & - & \tau\varphi_t & - & \xi\varphi \end{array}\right. \tag{1}$$

Usamos técnicas de semigrupos e método de energia.

Palavras Chaves: Semigrupos, energia e decaimento exponencial.

ABSTRACT

In this work we study the existence, uniqueness and the exponential decay of the solutions of the following porous elastic system

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + \beta \varphi_x - \gamma u_t \\ \rho \kappa \varphi_{tt} = \alpha \varphi_{xx} - \beta u_x - \tau \varphi_t - \xi \varphi \end{cases}$$

We use semigroups techniques and energy method.

Keywords : Semigroups, energy and exponential decay.

Sumário

Introdução

Nesta dissertação estudamos o comportamento assintótico de um sistema elástico poroso em uma dimensão com dissipação. Nessa abordagem as equações de evolução são dadas por

$$\rho u_{tt} = s_x - \gamma u_t \quad e \quad \rho\kappa\varphi_{tt} = h_x + g \ , \tag{2}$$

onde s é a tensão, h é a tensão de equilibrio e g é a força de equilibrio. As variáveis u e φ representam o deslocamento do material elástico sólido e o volume fracional, respectivamente.

As constantes ρ e κ são positivas em relação ao mecanismo físico, e as equações constitutivas são

$$s = \mu u_x + \beta\varphi, \tag{3}$$

$$h = \alpha\varphi_x, \tag{4}$$

$$g = -\beta u_x - \tau\varphi_t - \xi\varphi. \tag{5}$$

Nesse problema, a densidade da energia interna é uma forma definida positiva e os coeficientes constitutivos satisfazem as condições

$$\mu > 0 \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \xi > 0 \quad e \quad \xi\mu > \beta^2. \tag{6}$$

Assumimos que m e f são as funções responsáveis pela dissipação, onde m é a dissipação viscoelástica e f é a dissipação porosa, sendo definidas por

$$m = -\gamma u_t \quad e \quad f = -\tau\varphi_t, \tag{7}$$

onde γ e τ são positivos. Inicialmente substituindo as equações (3),(4) e (5) nas equações de evolução (2) encontramos um sistema formado por duas equações, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} + \beta\varphi_x - \gamma u_t \\ \rho\kappa\varphi_{tt} & = & \alpha\varphi_{xx} - \beta u_x - \tau\varphi_t - \xi\varphi. \end{array} \right. \tag{8}$$

Ressaltamos que em (8), quando $\gamma = 0$ resulta num sistema elástico poroso com dissipação porosa, onde os coeficientes do sistema satisfazem as relações em (6). Esse sistema elástico foi estudado por Quintanilla [1], com respeito ao decaimento lento de soluções. Em artigos dessa natureza, os pesquisadores Rivera e Quintanilla [9] estudaram vários sistemas, entre eles um sistema onde somente a dissipação porosa estava presente. Eles mostraram que esse sistema tinha decaimento polinomial. Outros matemáticos fizeram várias contribuições para essa teoria de materiais elásticos porosos, como por exemplo: Pamplona [6] em sua tese de doutorado estudou vários tipos de sistemas, entre eles um sistema termo-elástico-poroso quando apenas a viscoelasticidade e efeitos térmicos estavam atuando como mecanismos dissipativos. Nesse caso ele mostrou a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial. Os autores Magaña e Quintanilla [5] estudaram sistemas elásticos porosos, onde dissipação porosa e viscoelástica estavam presentes. Nesse caso, eles mostraram o decaimento exponencial. No artigo [4] os autores Casas e Quintanilla mostraram o decaimento exponencial de um sistema termo-elástico-poroso.

Este trabalho foi dividido em três capítulos. No primeiro deles fizemos uma breve introdução a teoria de semigrupos e espaços de Sobolev. No capítulo 2 mostramos a existência e unicidade de solução do problema, usando o lema de Lax-Milgran e finalmente no último capítulo estudamos o decaimento exponencial de soluções usando duas técnicas diferentes. Primeiramente mostramos o decaimento usando método de energia, via técnicas multiplicativas. Em seguida provamos o mesmo decaimento com técnicas de semigrupos, usando o teorema de Gearhart e colaboradores.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo faremos uma introdução a Teoria de Semigrupos e Espaços de Sobolev, de maneira suficiente para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.1 Teoria de Semigrupos

Definição 1.1.1. Dizemos que a família de subconjuntos $\{T(t) : t \geq 0\}$ de $L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares em X, quando:
(1) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade.
(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s > 0$.

Definição 1.1.2. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito uniformemente contínuo, quando tivermos

$$\lim_{t \to 0^+} ||T(t) - I|| = 0.$$

Definição 1.1.3. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito fortemente contínuo ou C_o-semigrupo, se

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in X.$$

De modo equivalente, temos

$$\lim_{t \to 0^+} ||T(t)x - x|| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.1.4. Sendo o conjunto $\{T(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo em X. Seu gerador infinitesimal é o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe \right\}.$$

Observemos que

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}$$

para $x \in D(A)$.

Teorema 1.1.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Me^{\omega t} \ , \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Corolário 1.1.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Então para cada $x \in X$, a função $t \longmapsto T(t)x$ é contínua de $\mathbb{R}^+$ em X.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Definição 1.1.5. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 - semigrupo. Quando $||T(t)|| \leq M$ dizemos que o semigrupo é uniformemente limitado. Quando $||T(t)|| \leq 1$, diremos que o semigrupo é de contrações.

Definição 1.1.6. Seja A um operador linear em X, limitado ou não. Denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente formado por $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $\lambda I - A$ seja invertível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado. A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A.

Teorema 1.1.2. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 - semigrupo e A o seu gerador infinitesimal. Então são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\forall x \in X, \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$

(b) $\forall x \in X, \quad \int_0^t T(s)xds \in D(A) \;\; e \;\; A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$

(c) $\forall x \in D(A), \quad t \geq 0, \quad T(t)xds \in D(A) \;\; e \;\; \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \;\; para \;\; t > 0.$

(d) $\forall x \in D(A), \;\; t, s \geq 0 \;\; e \;\; T(t)x - T(s) = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Corolário 1.1.2. *Seja A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Proposição 1.1.1. *Seja A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $D(A^n)$ o domínio de A^n. Então, $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Proposição 1.1.2. *Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, fechado de modo que $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para todo $\lambda > 0$. Então são válidas as seguintes propriedades.*

(1) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$ *para todo* $x \in X$.

(2) *Se* $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ *então* $\lim\limits_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax$ *para todo* $x \in D(A)$.

(3) *Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. E para $\lambda, \mu, t > 0$ e $x \in X$, temos*

$$\left\| e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.$$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Teorema 1.1.3. (Hille-Yosida) *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações se e somente se*

(1) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(2) *$\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Corolário 1.1.3. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então para $x \in X$, temos*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x.$$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Corolário 1.1.4. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de contrações. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : Re\lambda > 0\}$ e para $\lambda > 0$ temos*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Definição 1.1.7. Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* o seu dual. Assim, indicamos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \left\{ x^* \in X^* : Re \langle x^*, x \rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2 \right\}.$$

Definição 1.1.8. Diremos que um operador A é dissipativo, se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re \langle x^*, x \rangle \leq 0$.

Teorema 1.1.4. *Um operador A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad , \quad \forall x \in D(A) \quad e \quad \lambda > 0.$$

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Teorema 1.1.5. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear em X, com domínio $D(A)$ denso em X.*

(1) *Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações em X.*

(2) *Se A é o gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações em X, então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Lema 1.1.1. *Seja $S : X \to X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in L(X)$ tal que*

$$||B|| < \frac{1}{||S^{-1}||}$$

então $S + B$ é linear, contínuo e invertível.

Demonstração. Veja Rivera [8]. □

Corolário 1.1.5. *Seja A um operador com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre H.*

Demonstração. Suponhamos que $0 \in \rho(A)$, então A é invertível e A^{-1} é limitado. Notamos que

$$(\lambda I - A) = A.(\lambda A^{-1} - I)$$

Por outro lado, tomando $B = \lambda A^{-1}$ e $S = -I$, para $|\lambda| < ||A^{-1}||^{-1}$. Logo, usando o lema 1.1.1, concluímos que $(\lambda A^{-1} - I)$ é invertível. Além disso, o operador $\lambda I - A$ é invertível, por ser composição de operadores invertíveis. Assim, segue do teorema de Lumer-Phillips que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. □

Proposição 1.1.3. *Seja A um operador linear dissipativo em H. Se $\overline{D(A)} = H$ então A é fechado.*

Demonstração. Veja Pazy [2]. □

Teorema 1.1.6. (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ um C_0-semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert H. Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \qquad e \qquad \overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\|_H < \infty.$$

Demonstração. Veja Rivera [8]. □

1.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e considere $p \geq 1$, denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe funções mensuráveis u, de modo que $|u|^p$ seja integrável no sentido de Lebesgue. No espaço $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$||u||^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p \, dx, \quad onde \quad p \in [1, \infty[.$$

Proposição 1.2.1. *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja Brezis [7]. □

Quando tivermos $p = 2$, obtemos o espaço $L^2(\Omega)$, que munido do produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

se transforma num espaço de Hilbert. Consideremos os elementos $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Denotamos por D^α o operador derivada de ordem α, onde escrevemos da forma

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} . \, . \, . \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

Denotamos $D^\alpha u = u$, quando $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$. Agora, construimos um espaço de todas as funções u de $L^p(\Omega)$, onde $D^\alpha \in L^p(\Omega)$, sendo que $D^\alpha u$ é a derivada no sentido das distribuições. Assim, obtemos o espaço de sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ com \ |\alpha| \leq m\},$$

com a norma

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx, \quad onde \quad p \in [1, \infty[.$$

Proposição 1.2.2. *$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja Brezis [7]. □

Quando $p = 2$, obtemos $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$. Assim, nesse novo espaço temos o produto interno

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

com a norma

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx.$$

Proposição 1.2.3. *$H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Veja Brezis [7]. □

Em particular temos a norma para o espaço $H^1(\Omega)$, denotada por

$$||u||^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 \, dx.$$

Considerando $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções φ infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto. Portanto, definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Desse modo, obtemos

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$, onde $m \geq 1$.

Definição 1.2.1. Sejam V e H espaços de Hilbert. Dizemos que V está imerso em H com imersão contínua, quando existe uma constante positiva c tal que

$$|u|_H \leq c||u||_V, \quad \forall u \in V.$$

Proposição 1.2.4. $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Demonstração. Veja Brezis [7]. □

Definição 1.2.2. Seja um espaço de Hilbert real H, dizemos que $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear limitada, (contínua) quando existe uma constante c tal que

$$|b(x,y)| \leq c||x||.||y||, \quad onde \quad x, y \in H.$$

Definição 1.2.3. Seja um espaço de Hilbert real H, dizemos que $b : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear coerciva, quando uma constante $k > 0$ tal que

$$b(x,x) \geq k.||x||^2 \ , \quad onde \quad x \in H.$$

Lema 1.2.1. (Lax-Milgran) *Seja uma forma bilinear b, limitada e coerciva num espaço de Hilbert H. Então, dado qualquer funcional linear contínuo f em H, existe um único $v \in H$ de modo que*

$$b(u,v) = f(u) \ , \quad onde \quad u \in H.$$

Demonstração. Veja Brezis [7]. □

Proposição 1.2.5. (Desigualdade de Young) *Sejam a e b números reais não negativos e considere $p \in (1,\infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Com efeito, sabendo que log é uma função concava. Logo, temos

$$log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)\geq\frac{1}{p}log\left(a^p\right)+\frac{1}{q}log\left(b^q\right)=log(ab)$$

e sendo log crescente. Assim segue imediatamente o resultado. $\square$

Observação 1.2.1. Dado $\epsilon>0$ e através da desigualdade de Young, obtemos

$$ab\leq\epsilon a^p+M(\epsilon)b^q.$$

De fato, seja $k>0$ então encontramos

$$ab=(ka)\left(\frac{b}{k}\right)\leq\frac{1}{p}(ka)^p+\frac{1}{q}\left(\frac{b}{k}\right)^q=\frac{k^p}{p}a^p+\frac{1}{qk^q}b^q$$

Logo, fazendo $\epsilon=\frac{k^p}{p}$ e $M(\epsilon)=\frac{1}{q(\epsilon p)^{\frac{q}{p}}}$ temos o resultado desejado.

Observação 1.2.2. Dado $\epsilon>0$ e usando a desigualdade de Young obtemos a desigualdade

$$ab\leq\frac{1}{2\epsilon}a^2+\frac{\epsilon}{2}b^2.$$

Teorema 1.2.1. (Desigualdade de Holder) *Sejam $f\in L^p(\Omega)$ e $g\in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e $p\in(1,+\infty)$. Então $fg\in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega|f(x)g(x)|\ dx\leq||f||_p.||g||_q.$$

Demonstração. De fato, sejam $p\in(1,+\infty)$ e $||f||_p.||g||_q\neq0$. Assim, usando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{||f||_p||g||_q}\leq\frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q||g||_q^q} \tag{1.1}$$

Logo, $fg\in L^1(\Omega)$ e integrando (1.1) encontramos o resultado desejado. $\square$

Teorema 1.2.2. (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então, existe uma constante positiva C_p tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)}\leq C_p||\nabla u||_{L^p(\Omega)}\quad onde\quad u\in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde C_p é chamada de constante de Poincaré.

Demonstração. Veja Brezis [7]. $\square$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo mostramos a existência e unicidade de solução do sistema (2.1). Primeiramente, provamos que o operador $\mathcal{A}$ desse sistema é dissipativo. Por fim, montamos um problema variacional, e obtemos o principal resultado deste capítulo usando o lema de Lax-Milgran.

2.1 Introdução

Nesta seção estudamos um sistema elástico poroso em uma dimensão com dissipação, formado por duas equações diferenciais parciais, dadas por

$$\left\{ \begin{array}{rcccccccc} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} & + & \beta\varphi_x & - & \gamma u_t & & \\ \rho\kappa\varphi_{tt} & = & \alpha\varphi_{xx} & - & \beta u_x & - & \tau\varphi_t & - & \xi\varphi \end{array} \right. \tag{2.1}$$

com condições iniciais

$$u(x,0) = u_0, \quad u_t(x,0) = u_1, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1 \quad e \quad x \in (0,L) \tag{2.2}$$

onde as condições de fronteiras homogêneas são dadas por

$$u(x,t) = \varphi_x(x,t) = 0, \quad x = 0, L. \tag{2.3}$$

Assumimos também as seguintes condições

$$\int_0^L \varphi_0(x)\ dx = \int_0^L \varphi_1(x)\ dx = 0. \tag{2.4}$$

Dessa forma, definimos os seguintes espaços

$$L^2_*(0,L) = \left\{ \omega \in L^2(0,L)\ ;\ \int_0^L \omega(x)\ dx = 0 \right\}$$

e

$$H^m_*(0,L) = \left\{ \omega \in H^m(0,L)\ ;\ \int_0^L \omega(x)\ dx = 0\ ,\quad m = 1,2 \right\}.$$

Considere o espaço de Hilbert

$$H = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_*^1(0,L) \times L_*^2(0,L),$$

com o produto interno dado por

$$\langle U, U^* \rangle_H = \int_0^L \left(\rho v \overline{v^*} + \mu u_x \overline{u_x^*} + \rho\kappa w \overline{w^*} + \alpha \varphi_x \overline{\varphi_x^*} + \xi \varphi \overline{\varphi^*} + \beta(u_x \overline{\varphi^*} + \overline{u_x^*}\varphi)\right) dx,$$

onde $U = (u, v, \varphi, w)^T$ e $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, w^*)^T$. A norma correspondente é dada por

$$\|U\|_H^2 = \int_0^L \big(\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|w|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta Re(u_x\overline{\varphi})\big)\, dx.$$

Considere o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\mu D^2 & -\rho^{-1}\gamma I & \rho^{-1}\beta D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -(\rho\kappa)^{-1}\beta D & 0 & (\rho\kappa)^{-1}(\alpha D^2 - \xi I) & -(\rho\kappa)^{-1}\tau I \end{pmatrix}, \qquad D = \frac{d}{dx} \tag{2.5}$$

com domínio dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big(H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)\big) \times H_0^1(0,L) \times \big(H_*^2(0,L) \cap H_*^1(0,L)\big) \times H_*^1(0,L).$$

Daí o sistema (2.1) é equivalente ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) &= \mathcal{A}U(t) \\ \\ U(0) &= U_0\ , \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

2.2 Existência e Unicidade de Solução

Lema 2.2.1. *O operador $\mathcal{A}$ definido em* (2.5) *é dissipativo.*

Demonstração. Com efeito, considerando $U = (u, v, \varphi, w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \rho^{-1}\mu u_{xx} + \rho^{-1}\beta\varphi_x - \rho^{-1}\gamma v \\ w \\ -(\rho\kappa)^{-1}\beta u_x + (\rho\kappa)^{-1}\alpha\varphi_{xx} - (\rho\kappa)^{-1}\xi\varphi - (\rho\kappa)^{-1}\tau w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ w \end{pmatrix} \right\rangle_H \\ &= \int_0^L (\mu u_{xx} + \beta\varphi_x - \gamma v)\overline{v}\, dx \ + \ \mu \int_0^L v_x \overline{u_x}\, dx \\ &+ \int_0^L (-\beta u_x + \alpha\varphi_{xx} - \xi\varphi - \tau w)\overline{w}\, dx + \ \alpha \int_0^L w_x \overline{\varphi_x}\, dx \\ &+ \ \xi \int_0^L w\overline{\varphi}\, dx \ + \ \beta \int_0^L (v_x\overline{\varphi} + \overline{u_x} w)\, dx. \end{aligned}$$

Ou seja

$$Re\,\langle \mathcal{A}U, U\rangle_H = -\gamma \int_0^L |v|^2\, dx - \tau \int_0^L |w|^2\, dx \;\leq\; 0.$$

Visto que γ e τ são positivos, então o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

□

Teorema 2.2.1. *O operador* $\mathcal{A}$ *definido no problema de valor inicial* (2.6) *é o gerador infinitesimal de um semigrupo* C_0 *de contrações sobre o espaço de Hilbert* H*.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em H e $\mathcal{A}$ um operador dissipativo, então para provar é suficiente mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$, de acordo com o corolário 1.1.6. Desse modo, consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in H$ e devemos achar $U = (u, v, \varphi, w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$-\mathcal{A}U = F. \tag{2.7}$$

Da equação acima, encontramos

$$\begin{aligned}
v &= -f_1 \;\in\; H_0^1(0,L), && (2.8)\\
\mu u_{xx} + \beta\varphi_x - \gamma v &= -\rho f_2 \;\in\; L^2(0,L), && (2.9)\\
w &= -f_3 \;\in\; H_*^1(0,L), && (2.10)\\
-\beta u_x + \alpha\varphi_{xx} - \xi\varphi - \tau w &= -\rho\kappa f_4 \;\in\; L_*^2(0,L). && (2.11)
\end{aligned}$$

De (2.8) e (2.10) concluímos que

$$v \in H_0^1(0,L) \quad e \quad w \in H_*^1(0,L).$$

Assim, obtemos o seguinte problema elíptico

$$\begin{aligned}
\mu u_{xx} + \beta\varphi_x &= -\gamma f_1 - \rho f_2 \;\in\; L^2(0,L), && (2.12)\\
-\beta u_x + \alpha\varphi_{xx} - \xi\varphi &= -\tau f_3 - \rho\kappa f_4 \;\in\; L_*^2(0,L), && (2.13)
\end{aligned}$$

com condições de contorno $u(0) = u(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0$. Procedemos agora com a formulação variacional. Portanto, multiplicando (2.12) por ψ e integrando de 0 a L, segue que

$$\mu \int_0^L u_{xx}\psi\, dx + \beta \int_0^L \varphi_x\psi\, dx = -\int_0^L (\gamma f_1 + \rho f_2)\psi\, dx. \tag{2.14}$$

Usando integração por partes na primeira integral do primeiro membro de (2.14), obtemos

$$\mu \int_0^L u_x\psi_x\, dx - \beta \int_0^L \varphi_x\psi\, dx = \int_0^L (\gamma f_1 + \rho f_2)\psi\, dx. \tag{2.15}$$

Por outro lado, multiplicando (2.13) por θ e depois integrando de 0 a L, encontramos

$$-\beta \int_0^L u_x\theta\, dx + \alpha \int_0^L \varphi_{xx}\theta\, dx - \xi \int_0^L \varphi\theta\, dx \;=\; -\int_0^L (\tau f_3 + \rho f_4)\theta\, dx. \tag{2.16}$$

Usando integração por partes na segunda integral do primeiro membro de (2.16), obtemos

$$\beta \int_0^L u_x\theta \; dx + \alpha \int_0^L \varphi_x\theta_x \; dx + \xi \int_0^L \varphi\theta \; dx = \int_0^L (\tau f_3 + \rho f_4)\theta \; dx. \tag{2.17}$$

Somando (2.15) com (2.17), obtemos o seguinte problema variacional: Determinar $(u, \varphi) \in W$ onde $W = H_0^1(0, L) \times H_*^1(0, L)$ tal que

$$b((u, \varphi), (\psi, \theta)) = \int_0^L (F_1\psi + F_2\theta) \; dx$$

$\forall \psi \in H_0^1(0, L)$, $\forall \theta \in H_*^1(0, L)$, $F_1 \in L^2(0, L)$ e $F_2 \in L_*^2(0, L)$. Logo, segue que

$$b((u, \varphi), (\psi, \theta)) = \alpha \int_0^L \varphi_x\theta_x \; dx + \beta \int_0^L (u_x\theta - \varphi_x\psi) \; dx + \xi \int_0^L \varphi\theta \; dx + \mu \int_0^L u_x\psi_x \; dx.$$

Assim, b é uma forma bilinear. De fato, sejam $V_1 = (u, \varphi)$, $V_2 = (g, h)$ e $S = (\psi, \theta)$ em W. Então, temos

$$\begin{aligned}
b(V_1 + V_2, S) &= b((u + g, \varphi + h), (\psi, \theta)) \\
&= \alpha \int_0^L (\varphi + h)_x\theta_x \; dx + \beta \int_0^L ((u + g)_x\theta - (\varphi + h)_x\psi) \; dx \\
&+ \xi \int_0^L (\varphi + h)\theta \; dx + \mu \int_0^L (u + g)_x\psi_x \; dx \\
&= \alpha \int_0^L (\varphi_x\theta_x + h_x\theta_x) \; dx + \beta \int_0^L (u_x\theta + g_x\theta - \varphi_x\psi - h_x\psi) \; dx \\
&+ \xi \int_0^L (\varphi\theta + h\theta) \; dx + \mu \int_0^L (u_x\psi_x + g_x\psi_x) \; dx \\
&= \alpha \int_0^L \varphi_x\theta_x \; dx + \beta \int_0^L (u_x\theta - \varphi_x\psi) \; dx + \xi \int_0^L \varphi\theta \; dx + \mu \int_0^L u_x\psi_x \; dx \\
&+ \alpha \int_0^L h_x\theta_x \; dx + \beta \int_0^L (g_x\theta - h_x\psi) \; dx + \xi \int_0^L h\theta \; dx + \mu \int_0^L g_x\psi_x \; dx \\
&= b(V_1, S) + b(V_2, S).
\end{aligned}$$

Por outro lado, seja k uma constante real. Então, temos

$$\begin{aligned}
b(kV_1, S) &= b((ku, k\varphi), (\psi, \theta)) \\
&= \alpha \int_0^L (k\varphi)_x\theta_x dx + \beta \int_0^L ((ku)_x\theta - (k\varphi)_x\psi) dx + \xi \int_0^L (k\varphi)\theta dx + \mu \int_0^L (ku)_x\psi_x dx \\
&= k \left[\alpha \int_0^L \varphi_x\theta_x \; dx + \beta \int_0^L (u_x\theta - \varphi_x\psi) \; dx + \xi \int_0^L \varphi\theta \; dx + \mu \int_0^L u_x\psi_x \; dx \right] \\
&= kb(V_1, S).
\end{aligned}$$

De modo semelhante obtemos $b(V,S_1+S_2)=b(V,S_1)+b(V,S_2)$ e $b(V,kS_1)=kb(V,S_1)$. Além disso, nesse espaço $W=H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L)$ definimos a norma, onde $V=(u,\varphi)\in W$, por

$$||V||_W^2=\int_0^L u_x^2\;dx+\int_0^L \varphi_x^2\;dx.$$

Assim, a forma bilinear b é contínua. Com efeito, sejam $V=(u,\varphi)$ e $S=(\psi,\theta)$ em W, e usando as desigualdades de Holder e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|b(V,S)| &= \left|\alpha\int_0^L \varphi_x\theta_x\;dx+\beta\int_0^L(u_x\theta-\varphi_x\psi)\;dx++\xi\int_0^L\varphi\theta\;dx+\mu\int_0^L u_x\psi_x\;dx\right|\\
&\leq \left|\alpha\int_0^L \varphi_x\theta_x\;dx\right|+\left|\beta\int_0^L(u_x\theta-\varphi_x\psi)\;dx\right|+\left|\xi\int_0^L\varphi\theta\;dx\right|+\left|\mu\int_0^L u_x\psi_x\;dx\right|\\
&\leq \alpha\int_0^L|\varphi_x\theta_x|\;dx+|\beta|\int_0^L(|u_x\theta|+|\varphi_x\psi|)\;dx+\xi\int_0^L|\varphi\theta|\;dx+\mu\int_0^L|u_x\psi_x|\;dx\\
&\leq \alpha||\varphi_x||.||\theta_x||+|\beta|.||u_x||.||\theta||+|\beta|.||\varphi_x||.||\psi||+\xi||\varphi||.||\theta||+\mu.||u_x||.||\psi_x||\\
&\leq C_1.\left(||\varphi_x||.||\theta_x||+||u_x||.||\theta_x||+||\varphi_x||.||\psi_x||+||u_x||.||\psi_x||\right)\\
&= C_1.\left(||u_x||+||\varphi_x||\right).\left(||\psi_x||+||\theta_x||\right)\\
&= C_1.\left\{\left[\int_0^L|u_x|^2dx\right]^{\frac12}+\left[\int_0^L|\varphi_x|^2dx\right]^{\frac12}\right\}.\left\{\left[\int_0^L|\psi_x|^2dx\right]^{\frac12}+\left[\int_0^L|\theta_x|^2dx\right]^{\frac12}\right\}\\
&\leq C_1.\left\{2.\left[\int_0^L|u_x|^2dx+\int_0^L|\varphi_x|^2dx\right]^{\frac12}\right\}.\left\{2.\left[\int_0^L|\psi_x|^2dx+\int_0^L|\theta_x|^2dx\right]^{\frac12}\right\}\\
&\leq C.||V||.||S||,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante. Finalmente, b é coerciva. De fato, dado $V=(u,\varphi)$ em W, obtemos

$$\begin{aligned}
b(V,V) &= \alpha\int_0^L\varphi_x\varphi_x\;dx+\beta\int_0^L(u_x\varphi-\varphi_x u)\;dx+\xi\int_0^L\varphi\varphi\;dx+\mu\int_0^L u_xu_x\;dx\\
&= \alpha\int_0^L\varphi_x^2\;dx+2\beta\int_0^L\varphi u_x\;dx+\xi\int_0^L\varphi^2\;dx+\mu\int_0^L u_x^2\;dx\\
&\geq \alpha\int_0^L\varphi_x^2\;dx-\xi\int_0^L\varphi^2\;dx-\frac{\beta^2}{\xi}\int_0^L u_x^2\;dx+\xi\int_0^L\varphi^2\;dx+\mu\int_0^L u_x^2\;dx\\
&= \alpha\int_0^L\varphi_x^2\;dx+\left(\mu-\frac{\beta^2}{\xi}\right)\int_0^L u_x^2\;dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $C_1=min\left\{\alpha,\mu-\frac{\beta^2}{\xi}\right\}$. Encontramos

$$b(V,V)\geq C_1||V||^2.$$

Nessa demonstração de coercividade, usamos o resultado

$$2\beta\varphi u_x=2(\sqrt{\xi}\varphi)\left(\frac{\beta}{\sqrt{\xi}}u_x\right)\geq-\left(\xi\varphi^2+\frac{\beta^2}{\xi}u_x^2\right).$$

Agora, consideremos o seguinte funcional, definido por

$$m(\psi,\theta)=\int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)\psi\ dx+\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)\theta\ dx,$$

onde m é linear. De fato, considerando $S=(\psi,\theta)$ e $T=(p,q)$ em W, e $\lambda\in\mathbb{R}$, segue que

$$\begin{aligned}
m(S+\lambda T) &= m(\psi+\lambda p,\theta+\lambda q)\\
&= \int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)(\psi+\lambda p)\ dx+\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)(\theta+\lambda q)\ dx\\
&= \int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)\psi\ dx+\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)\theta\ dx\\
&+ \lambda\left[\int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)p\ dx+\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)q\ dx\right]\\
&= m(S)+\lambda m(T).
\end{aligned}$$

O funcional m é contínuo. Com efeito, seja o elemento $S=(\psi,\theta)$ em W e usando as desigualdades de Holder e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
|m(S)| &= \left|\int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)\psi\ dx+\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)\theta\ dx\right|\\
&\leq \left|\int_0^L(\gamma f_1+\rho f_2)\psi\ dx\right|+\left|\int_0^L(\tau f_3+\rho f_4)\theta\ dx\right|\\
&\leq \int_0^L|(\gamma f_1+\rho f_2)||\psi|\ dx+\int_0^L|(\tau f_3+\rho f_4)|\,|\theta|\ dx\\
&\leq \gamma||f_1||.||\psi||+\rho||f_2||.||\psi||+\tau||f_3||.||\theta||+\rho||f_4||.||\theta||\\
&\leq C_1(\gamma||f_1||+\rho||f_2||)||\psi_x||+C_2(\tau||f_3||+\rho||f_4||)||\theta_x||\\
&\leq C_3(||\psi_x||+||\theta_x||)\\
&= C_3\left\{\left[\int_0^L|\psi_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_0^L|\theta_x|^2\ dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\leq 2.C_3\left\{\int_0^L|\psi_x|^2\ dx+\int_0^L|\theta_x|^2\ dx\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C||S||.
\end{aligned}$$

Assim, considerando o espaço $W=H_0^1(0,L)\times H_*^1(0,L)$, encontramos a aplicação

$$b(.,.):W\times W\to\mathbb{R}.$$

Além disso, concluímos que $b(.,.)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Logo, usando o lema de Lax-Milgran, concluímos que existe uma solução única V para o problema variacional

$$b(V,S)=m(S)\ ,\quad\forall\ S\in W.$$

Onde $V = (u, \varphi)$ e $S = (\psi, \theta)$. Ou seja, a solução única V satisfaz ao sistema formado pelas equações (2.12) e (2.13). Por outro lado, usando a regularidade elíptica, concluímos que existe solução única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para (2.7). Logo, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre H.

$\square$

Logo, como consequência do teorema acima, temos o seguinte resultado

Teorema 2.2.2. *Sejam $U_0 \in H$ então existe uma única solução (u, φ) para o sistema* (2.1) *satisfazendo*

$$u \in C^0(0, \infty; H_0^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; L^2(0, L))$$

e

$$\varphi \in C^0(0, \infty; H_*^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; L_*^2(0, L)).$$

Por outro lado, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então existe uma única solução (u, φ) para o sistema (2.1) *na classe*

$$u \in C^0(0, \infty; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; H_0^1(0, L)) \cap C^2(0, \infty; L^2(0, L))$$

e

$$\varphi \in C^0(0, \infty; H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \cap C^1(0, \infty; H_*^1(0, L)) \cap C^2(0, \infty; L_*^2(0, L)).$$

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Neste capítulo mostramos que existe decaimento exponencial para a solução do sistema (2.1) e para esse objetivo usamos o método de energia e técnicas de semigrupos.

3.1 Método da Energia

Nessa seção usamos o método da energia para mostrar que a solução do sistema decai exponencialmente. Para atingir esse objetivo definimos o funcional de energia associado ao sistema (2.1) por

$$E(t,u,\varphi)=\frac{1}{2}\int_0^L \left(\ \rho|u_t|^2+\mu|u_x|^2+\rho\kappa|\varphi_t|^2+\alpha|\varphi_x|^2+\xi|\varphi|^2+2\beta\varphi u_x\ \right)dx. \tag{3.1}$$

Lema 3.1.1. *De acordo com o sistema* (2.1) *e do funcional de energia acima, obtemos*

$$\frac{dE}{dt} \quad = \quad -\gamma\int_0^L |u_t|\ dx-\tau\int_0^L |\varphi_t|^2\ dx.$$

Demonstração. Primeiramente, multiplicamos a primeira equação do sistema (2.1) por u_t, em seguida integramos de 0 a L em relação a x. Dessa forma, obtemos

$$\rho\int_0^L u_{tt}u_t dx-\mu\int_0^L u_{xx}u_t dx=\beta\int_0^L \varphi_x u_t dx-\gamma\int_0^L |u_t|^2dx.$$

Logo, encontramos

$$\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_t|^2dx+\frac{\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u_x|^2dx=\beta\int_0^L \varphi_x u_t dx-\gamma\int_0^L |u_t|^2dx. \tag{3.2}$$

Agora, multiplicamos a segunda equação de (2.1) por φ_t, em seguida integramos de 0 a L em relação a x. Dessa forma, obtemos

$$\rho\kappa\int_0^L \varphi_{tt}\varphi_t dx-\alpha\int_0^L \varphi_{xx}\varphi_t dx+\tau\int_0^L \varphi_t\varphi_t dx=-\beta\int_0^L u_x\varphi_t dx-\xi\int_0^L \varphi\varphi_t dx.$$

Logo, encontramos

$$\frac{\rho\kappa}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|\varphi_t|^2dx+\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|\varphi_x|^2dx+\frac{\xi}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|\varphi|^2dx=-\beta\int_0^L u_x\varphi_t dx-\tau\int_0^L|\varphi_t|^2dx. \quad (3.3)$$

Por outro lado, somando (3.2) com (3.3), obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\gamma\int_0^L|u_t|^2dx-\tau\int_0^L|\varphi_t|^2dx.$$

□

Agora, definimos o seguinte funcional

$$R(t):=\int_0^L\left(\rho u_t u+\frac{\gamma}{2}|u|^2\right)\,dx.$$

Lema 3.1.2. *Suponha que $U_0=(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1)^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então vale a igualdade*

$$\frac{dR}{dt}=\rho\int_0^L|u_t|^2dx-\mu\int_0^L|u_x|^2dx-\int_0^L\beta\varphi u_x dx.$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação do sistema (2.1) por u e depois integrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L\rho u_t u dx &= \rho\int_0^L|u_t|^2dx+\rho\int_0^L u_{tt}u dx\\ &= \rho\int_0^L|u_t|^2dx+\mu\int_0^L u_{xx}u dx+\beta\int_0^L\varphi_x u dx-\gamma\int_0^L u_t u dx\\ &= \rho\int_0^L|u_t|^2dx-\mu\int_0^L|u_x|^2dx-\beta\int_0^L\varphi u_x dx-\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|u|^2dx.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L\rho u_t u dx+\frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L|u|^2dx=\rho\int_0^L|u_t|^2dx-\mu\int_0^L|u_x|^2dx-\int_0^L\beta\varphi u_x dx.$$

Logo, concluímos imediatamente o resultado do lema.

□

Um segundo funcional é definido por

$$S(t):=\int_0^L\left(\rho\kappa\varphi_t\varphi+\frac{\tau}{2}|\varphi|^2\right)\,dx.$$

Lema 3.1.3. *Suponha que $U_0=(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1)^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então, teremos a igualdade*

$$\frac{dS}{dt}=\rho\kappa\int_0^L|\varphi_t|^2dx-\alpha\int_0^L|\varphi_x|^2dx-\xi\int_0^L|\varphi|^2dx-\int_0^L\beta\varphi u_x dx.$$

Demonstração. Multiplicando a segunda equação do sistema (2.1) por φ e em seguinda integrando de 0 a L em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho\kappa\varphi_t\varphi\ dx &= \rho\kappa\int_0^L |\varphi_t|^2\ dx + \rho\kappa\int_0^L \varphi_{tt}\varphi\ dx\\ &= \rho\kappa\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \alpha\int_0^L \varphi_{xx}\varphi dx - \beta\int_0^L u_x\varphi dx\\ &- \tau\int_0^L \varphi_t\varphi dx\ -\ \xi\int_0^L |\varphi|^2 dx\\ &= \rho\kappa\int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \alpha\int_0^L |\varphi_x|^2 dx - \beta\int_0^L u_x\varphi dx\\ &- \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\varphi|^2 dx\ -\ \xi\int_0^L |\varphi|^2 dx.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho\kappa\varphi_t\varphi dx + \frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\varphi|^2 dx = \rho\kappa\int_0^L |\varphi_t|^2 dx - \alpha\int_0^L |\varphi_x|^2 dx - \xi\int_0^L |\varphi|^2 dx - \int_0^L \beta\varphi u_x dx.$$

Portanto, segue imediatamente o resultado do lema.

□

Teorema 3.1.1. *Suponha que* $U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. *Então a solução do sistema* (2.1) *decai exponencialmente para zero.*

Demonstração. Com efeito, inicialmente definimos o seguinte funcional

$$\mathcal{L}(t) = R(t) + NS(t) + N_1E(t). \tag{3.4}$$

Onde as constantes N e N_1 serão determinadas posteriormente. Portanto, devemos mostrar que existe uma constante γ_0 positiva tal que

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -\gamma_0 E(t). \tag{3.5}$$

Assim, derivando (3.4) em relação a t, encontramos

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{dR}{dt} + N\frac{dS}{dt} + N_1\frac{dE}{dt}.$$

Logo, usando os lemas (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \rho\int_0^L |u_t|^2\ dx - \mu\int_0^L |u_x|^2\ dx - \int_0^L \beta\varphi u_x\ dx\\ &+ N\left(\rho\kappa\int_0^L |\varphi_t|^2\ dx - \alpha\int_0^L |\varphi_x|^2\ dx - \xi\int_0^L |\varphi|^2\ dx - \int_0^L \beta\varphi u_x\ dx\right)\\ &+ N_1\left(-\gamma\int_0^L |u_t|^2\ dx - \tau\int_0^L |\varphi_t|^2\ dx\right).\end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= (\rho - N_1\gamma)\int_0^L |u_t|^2dx - \mu\int_0^L |u_x|^2dx + (N\rho\kappa - N_1\tau)\int_0^L |\varphi_t|^2dx \\ &- N\alpha\int_0^L |\varphi_x|^2dx - N\xi\int_0^L |\varphi|^2dx + (-1-N)\int_0^L \beta\varphi u_x dx.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= -\left(\frac{N_1\gamma}{\rho} - 1\right)\int_0^L \rho|u_t|^2dx - \int_0^L \mu|u_x|^2dx - \left(\frac{N_1\tau}{\rho\kappa} - N\right)\int_0^L \rho\kappa|\varphi_t|^2dx \\ &- N\int_0^L \alpha|\varphi_x|^2dx - N\int_0^L \xi|\varphi|^2dx - \left(\frac{N+1}{2}\right)\int_0^L 2\beta\varphi u_x dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $N_1 > N$ de modo que

$$\gamma_0 = min\left\{ \frac{N_1\gamma - \rho}{\rho} \ , \ 1 \ , \ \frac{N_1\tau - \rho\kappa N}{\rho\kappa} \ , \ N \ , \ \frac{N+1}{2} \right\} \ > \ 0$$

obtemos

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} \leq -\gamma_0 E(t).$$

De (3.4) concluímos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$C_1E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_2E(t). \tag{3.6}$$

Assim, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\gamma_0}{C_2}\mathcal{L}(t).$$

De onde vem que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\frac{\gamma_0}{C_2}t}.$$

Novamente usando (3.6) temos

$$C_1E(t) \leq C_2E(0)e^{-\frac{\gamma_0}{C_2}t}.$$

Portanto

$$E(t) \leq \frac{C_2}{C_1}E(0)e^{-\frac{\gamma_0}{C_2}t}.$$

Dessa forma, o teorema 3.1.1 fica estabelecido.

□

3.2 Técnicas de Semigrupos

Nessa seção mostramos que a solução do problema decai exponencialmente, para isso usamos argumentos de semigrupos devido a Liu e Zheng [3]. Para estabelecer esse resultado necessitamos de alguns resultados preliminares. Dessa forma, temos

Lema 3.2.1. *Seja o operador $\mathcal{A}$ definido em* (2.5). *Então, vale a condição*

$$\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(\mathcal{A}). \tag{3.7}$$

Demonstração. Mostramos esse lema em 3 etapas.

(1) Desde que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$ o seguinte operador

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{A}(i\lambda \mathcal{A}^{-1} - I)$$

é invertível. Além disso, $||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||$ é uma função contínua para $\lambda \in (-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1})$.

(2) Se $sup\{||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||; |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}\} = M < \infty$ então o operador

$$(i\lambda I - \mathcal{A}) = (i\lambda_0 I - \mathcal{A}).(I + i(\lambda - \lambda_0)(i\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}),$$

com $|\lambda_0| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1}$ é invertível para $|\lambda - \lambda_0| < M^{-1}$. Por outro lado, o seguinte conjunto $\{\lambda; |\lambda| < ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1}\}$ está contido em $\rho(\mathcal{A})$. Além disso, $||(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}||$ é uma função contínua para $\lambda \in (-||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} - M^{-1}, ||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} + M^{-1})$.

(3) Suponha que (3.7) seja falso. Então existe $m \in \mathbb{R}$, com $||\mathcal{A}^{-1}||^{-1} \leq |m| < \infty$ tal que

$$\{i\lambda; |\lambda| < |m|\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad e \quad sup\{||(i\lambda - \mathcal{A})^{-1}||; |\lambda| < |m|\} = \infty.$$

Resulta que existe uma sequência $\lambda_n \in \mathbb{R}$ com $\lambda_n \to m$, $|\lambda_n| < |m|$ e uma sequência de vetores $Y_n = (u_n, v_n, \varphi_n, w_n)^T$ com norma unitária em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$||(i\lambda_n I - \mathcal{A})Y_n|| \longrightarrow 0. \tag{3.8}$$

Logo, escrevendo a condição acima termo a termo. Encontramos

$$\begin{aligned} i\lambda_n u_n - v_n &\longrightarrow 0 \ \ em \ \ H_0^1(0,L), && (3.9)\\ i\lambda_n v_n + \rho^{-1}\gamma v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}\beta D\varphi_n &\longrightarrow 0 \ \ em \ \ L^2(0,L), && (3.10)\\ i\lambda_n \varphi_n - w_n &\longrightarrow 0 \ \ em \ \ H_*^1(0,L), && (3.11)\\ i\lambda_n w_n + (\rho\kappa)^{-1}\tau w_n + (\rho\kappa)^{-1}\beta D u_n - (\rho\kappa)^{-1}(\alpha D^2 - \xi I)\varphi_n &\longrightarrow 0 \ \ em \ \ L_*^2(0,L). && (3.12)\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo o produto interno de $X_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n$ com Y_n em H. Obtemos

$$\begin{aligned}
\langle X_n, Y_n\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} i\lambda_n u_n - v_n \\ i\lambda_n v_n + \rho^{-1}\gamma v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}\beta D\varphi_n \\ i\lambda_n\varphi_n - w_n \\ i\lambda_n w_n + (\rho\kappa)^{-1}\tau w_n + (\rho\kappa)^{-1}\beta D u_n - (\rho\kappa)^{-1}(\alpha D^2 - \xi I)\varphi_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \varphi_n \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^L \rho(i\lambda_n v_n + \rho^{-1}\gamma v_n - \rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}\beta D\varphi_n)\overline{v_n}\, dx \\
&+ \int_0^L \mu(i\lambda_n u_{nx} - v_{nx})\overline{u_{nx}}\, dx + \int_0^L \alpha(i\lambda_n\varphi_{nx} - w_{nx})\overline{\varphi_{nx}}\, dx \\
&+ \int_0^L \rho\kappa(i\lambda_n w_n + (\rho\kappa)^{-1}\tau w_n + (\rho\kappa)^{-1}\beta D u_n - (\rho\kappa)^{-1}(\alpha D^2 - \xi I)\varphi_n)\overline{w_n}\, dx \\
&+ \int_0^L \xi(i\lambda_n\varphi_n - w_n)\overline{\varphi_n}\, dx + \int_0^L \beta[(i\lambda_n u_{nx} - v_{nx})\overline{\varphi_n} + \overline{u_{nx}}(i\lambda_n\varphi_n - w_n)]\, dx.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real, temos

$$Re(\langle X_n, Y_n\rangle) = \gamma\int_0^L v_n\overline{v_n}\, dx + \tau\int_0^L w_n\overline{w_n}\, dx.$$

Portanto

$$\gamma||v_n||^2 + \tau||w_n||^2 \longrightarrow 0 \quad em \quad L^2(0,L).$$

Logo, concluímos que $v_n \longrightarrow 0$ e $w_n \longrightarrow 0$. Usando (3.9) e (3.11) encontramos $u_n \longrightarrow 0$ e $\varphi_n \longrightarrow 0$. Por outro lado, simplificando (3.10) e (3.12) obtemos

$$-\rho^{-1}\mu D^2 u_n - \rho^{-1}\beta D\varphi_n \quad \longrightarrow \quad 0 \quad em \quad L^2(0,L), \tag{3.13}$$

e

$$(\rho\kappa)^{-1}\beta D u_n - (\rho\kappa)^{-1}\alpha D^2\varphi_n \quad \longrightarrow \quad 0 \quad em \quad L^2(0,L). \tag{3.14}$$

Integrando (3.13) em relação à x. Encontramos

$$\mu D u_n + \beta\varphi_n \quad \longrightarrow \quad 0 \quad em \quad L^2(0,L).$$

Logo, $||Du_n|| \longrightarrow 0$. Prosseguindo, podemos integrar (3.14) em relação à x. Assim, temos

$$\beta u_n - \alpha D\varphi_n \quad \longrightarrow \quad 0 \quad em \quad L^2(0,L).$$

Portanto, obtemos $||D\varphi_n|| \longrightarrow 0$. Assim, concluímos que Y_n não pode ter norma unitária, o que é uma contradição. Com isso terminamos a prova do lema.

□

Lema 3.2.2. *Seja o operador $\mathcal{A}$ definido em* (2.5)*. Então, vale a condição*

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \left\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\right\| < \infty. \tag{3.15}$$

Demonstração. Suponha que (3.15) seja falso. Então, existe uma sequência de números reais λ_n tal que $|\lambda_n| \longrightarrow \infty$ e uma sequência de vetores $Y_n = (u_n, v_n, \varphi_n, w_n)^T$ no domínio de $\mathcal{A}$ com norma unitária em H, de modo que

$$||(i\lambda_n I - \mathcal{A})Y_n|| \longrightarrow 0. \tag{3.16}$$

Escrevendo (3.16) termo a termo e depois tomando a parte real de $< X_n, Y_n >$, onde $X_n = (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n$. Concluímos que $v_n \longrightarrow 0$ e $w_n \longrightarrow 0$. Por outro lado, tomando o produto interno de (3.10) com u_n. Temos

$$i\lambda_n < v_n, u_n > +\rho^{-1}\gamma < v_n, u_n > -\rho^{-1}\mu < D^2 u_n, u_n > -\rho^{-1}\beta < D\varphi_n, u_n > \longrightarrow 0. \tag{3.17}$$

Integrando por partes (3.17) e usando (3.9) obtemos

$$-||v_n||^2 + \rho^{-1}\mu||Du_n||^2 \longrightarrow 0 \quad em \quad L^2(0, L).$$

Logo, concluímos que $||Du_n|| \longrightarrow 0$. Por outro lado, tomando o produto interno de (3.12) com φ_n. Encontramos

$$\begin{aligned} i\lambda_n < w_n, \varphi_n > \; &+ (\rho\kappa)^{-1}\tau < w_n, \varphi_n > \; + (\rho\kappa)^{-1}\beta < Du_n, \varphi_n > \\ &- (\rho\kappa)^{-1}\alpha < D^2\varphi_n, \varphi_n > \; + (\rho\kappa)^{-1}\xi < \varphi_n, \varphi_n > \; \longrightarrow \; 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Integrando por partes (3.18) e usando (3.11) obtemos

$$-||w_n||^2 + (\rho\kappa)^{-1}\alpha||D\varphi_n||^2 + (\rho\kappa)^{-1}\xi||\varphi_n||^2 \longrightarrow 0 \quad em \quad L^2(0, L).$$

Dessa forma, concluímos que $||D\varphi_n|| \longrightarrow 0$. Portanto, o vetor Y_n não tem norma unitária, mas isso é uma contradição. Assim, concluímos a demonstração do lema.

□

Teorema 3.2.1. *Seja (u, φ) a solução do sistema* (2.1) *com condições iniciais* (2.2) *e condições de fronteira* (2.3)*. Então a solução (u, φ) decai exponencialmente.*

Demonstração. Esse resultado segue do teorema 1.1.6 e dos lemas 3.2.1 e 3.2.2.

□

Apêndice

Equivalência Entre $\mathcal{L}(t)$ e E(t)

3.3 Introdução

Nesse apêndice mostramos a equivalência entre $\mathcal{L}(t)$ e $E(t)$. Inicialmente sabemos que

$$\mathcal{L}(t) = R(t) + N.S(t) + N_1.E(t)$$

onde

$$R(t) := \int_0^L \left(\rho u_t u + \frac{\gamma}{2}|u|^2\right)\, dx \quad e \quad S(t) := \int_0^L \left(\rho\kappa\varphi_t\varphi + \frac{\tau}{2}|\varphi|^2\right)\, dx,$$

com a energia dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\ \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x\ )\, dx.$$

Assim, usando as informações acima e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= R(t) + N.S(t) + N_1.E(t) \\
&= \int_0^L \left(\rho u_t u + \frac{\gamma}{2}|u|^2\right)\, dx \ + \ N.\left[\int_0^L \left(\rho\kappa\varphi_t\varphi + \frac{\tau}{2}|\varphi|^2\right)\, dx\right] \\
&+ \ N_1.\left[\frac{1}{2}\int_0^L (\ \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x\ )\ dx\right] \\
&\leq \frac{\rho}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx + \frac{\rho}{2}\int_0^L |u|^2\, dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^L |u|^2\, dx \\
&+ \frac{N\rho\kappa}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2\, dx + \frac{N\rho\kappa}{2}\int_0^L |\varphi|^2\, dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L |\varphi|^2\, dx \\
&+ \ N_1.\left[\frac{1}{2}\int_0^L (\ \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x\ )\ dx\right]
\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &\leq \frac{\rho}{2}\int_0^L |u_t|^2\, dx \;+\; \left(\frac{C_{p1}.\rho + C_{p1}.\gamma}{2}\right)\int_0^L |u_x|^2\, dx \\
&+ \frac{N\rho\kappa}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2\, dx \;+\; \left(\frac{N\rho\kappa+\tau}{2}\right)\int_0^L |\varphi|^2\, dx \\
&+ N_1.\left[\frac{1}{2}\int_0^L \left(\, \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x \,\right)\, dx\right] \\
&= (N_1+1)\int_0^L \frac{\rho}{2}|u_t|^2\, dx \;+\; \left(\frac{C_{p1}.\rho + C_{p1}.\gamma}{\mu} + N_1\right)\int_0^L \frac{\mu}{2}|u_x|^2\, dx \\
&+ (N+N_1)\int_0^L \frac{\rho\kappa}{2}|\varphi_t|^2\, dx \;+\; N_1\int_0^L \frac{\alpha}{2}|\varphi_x|^2\, dx \\
&+ \left(\frac{N\rho\kappa+\tau}{\xi} + N_1\right)\int_0^L \frac{\xi}{2}|\varphi|^2\, dx \;+\; N_1\int_0^L \beta\varphi u_x\, dx
\end{aligned}$$

Além disso, fazendo

$$C_2 = max\left\{\; N_1+1\;,\; \frac{C_{p1}.\rho + C_{p1}.\gamma}{\mu} + N_1\;,\; N+N_1\;,\; N_1\;,\; \frac{N\rho\kappa+\tau}{\xi} + N_1\;\right\} > 0,$$

obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq C_2 E(t). \tag{3.19}$$

Agora, sejam

$$\rho u_t u = 2.(\rho u_t).\left(\frac{u}{2}\right) \geq -\left(\rho^2 u_t^2 + \frac{u^2}{4}\right) \quad e \quad \rho\kappa\varphi_t\varphi = 2.(\rho\kappa\varphi_t).\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq -\left((\rho\kappa)^2\varphi_t^2 + \frac{\varphi^2}{4}\right).$$

Por outro lado, usando as desigualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= R(t) + N.S(t) + N_1.E(t) \\
&= \int_0^L \rho u_t u\, dx + \int_0^L \frac{\gamma}{2}|u|^2\, dx \;+\; N.\left[\int_0^L \rho\kappa\varphi_t\varphi\, dx + \int_0^L \frac{\tau}{2}|\varphi|^2\, dx\right] \\
&+ N_1.\left[\frac{1}{2}\int_0^L \left(\, \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x \,\right)\, dx\right] \\
&\geq -\rho^2\int_0^L |u_t|^2\, dx - \frac{1}{4}\int_0^L |u|^2\, dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^L |u|^2\, dx \\
&+ N.\left[-(\rho\kappa)^2\int_0^L |\varphi_t|^2\, dx - \frac{1}{4}\int_0^L |\varphi|^2\, dx + \frac{\tau}{2}\int_0^L |\varphi|^2\, dx\right] \\
&+ N_1.\left[\frac{1}{2}\int_0^L \left(\, \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x \,\right)\, dx\right]
\end{aligned}$$

Portanto, através da desigualdade de Poincaré, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \ &\geq \ -\rho^2 \int_0^L |u_t|^2 \ dx - \frac{C_{p2}}{4} \int_0^L |u_x|^2 \ dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L |u|^2 \ dx \\
&+ \ N. \left[-(\rho\kappa)^2 \int_0^L |\varphi_t|^2 \ dx - \frac{C_{p3}}{4} \int_0^L |\varphi_x|^2 \ dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L |\varphi|^2 \ dx \right] \\
&+ \ N_1. \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left(\ \rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + \rho\kappa|\varphi_t|^2 + \alpha|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2\beta\varphi u_x \ \right) \ dx \right] \\
&= \ (N_1 - 2\rho). \int_0^L \frac{\rho}{2}|u_t|^2 \ dx + \left(N_1 - \frac{C_{p2}}{2\mu} \right) . \int_0^L \frac{\mu}{2}|u_x|^2 \ dx \\
&+ \ (N_1 - 2N\rho\kappa). \int_0^L \frac{\rho\kappa}{2}|\varphi_t|^2 \ dx + \left(N_1 - \frac{NC_{p3}}{2\alpha} \right) . \int_0^L \frac{\alpha}{2}|\varphi_x|^2 \ dx \\
&+ \ \left(N_1 + \frac{n\tau}{\xi} \right) . \int_0^L \frac{\xi}{2}|\varphi|^2 \ dx + N_1 \int_0^L \beta\varphi u_x \ dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^L |u|^2 \ dx
\end{aligned}
$$

Logo, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) \ &\geq \ (N_1 - 2\rho). \int_0^L \frac{\rho}{2}|u_t|^2 \ dx + \left(N_1 - \frac{C_{p2}}{2\mu} \right) . \int_0^L \frac{\mu}{2}|u_x|^2 \ dx \\
&+ \ (N_1 - 2N\rho\kappa). \int_0^L \frac{\rho\kappa}{2}|\varphi_t|^2 \ dx + \left(N_1 - \frac{NC_{p3}}{2\alpha} \right) . \int_0^L \frac{\alpha}{2}|\varphi_x|^2 \ dx \\
&+ \ \left(N_1 + \frac{N\tau}{\xi} \right) . \int_0^L \frac{\xi}{2}|\varphi|^2 \ dx + N_1 \int_0^L \beta\varphi u_x \ dx
\end{aligned}
$$

Além disso, sabemos que N_1 e N são suficientemente grandes, obedecendo a condição $N_1 > N$. Assim, escolhendo

$$
C_1 = min \left\{ \ N_1 - 2\rho \ , \ N_1 - \frac{C_{p2}}{2\mu} \ , \ N_1 - 2N\rho\kappa \ , \ N_1 - \frac{NC_{p3}}{2\alpha} \ , \ N_1 + \frac{N\tau}{\xi} \ , \ N_1 \ \right\} > 0,
$$

obtemos

$$
\mathcal{L}(t) \geq C_1 E(t). \tag{3.20}
$$

Observando que C_{p1}, C_{p2} *e* C_{p3} são constantes de Poincaré. Logo, de (3.19) e (3.20) concluímos o resultado desejado.

Referências Bibliográficas

[1] Quintanilla, Ramón. **Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity.** Applied Mathematics Letters. 16 (2003) 487-491.

[2] Pazy, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations** . Applied Mathematical Sciences 44. Springer-Velag. 1983.

[3] Liu, Z e Zheng, S. **Semigroups associated with dissipative systems** . CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman e Hall. 1999.

[4] Casas, Pablo S e Quintanilla, Ramón. **Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity** . Mechanics Research Communications. 2005.

[5] Magaña, Antonio e Quintanilla, Ramón. **On the time of solutions in one-dimensional theories of porous materials** . International Journal of Solids and Structures 43 (2006).

[6] Pamplona, Paulo Xavier. **Estabilização assintótica de sistemas elástico com porosidade** . Tese de doutorado. 2009. UFRJ.

[7] Brezis, Haim. **Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations** . Springer.

[8] Rivera, Jaime E. Muñoz. **Estabilização de semigrupos e aplicações**. Rio de Janeiro. 2008.

[9] Rivera, Jaime E. Muñoz e Quintanilla, Ramon. **On the time polynomial decay in elastic solids with voids**. J. Math. Anal. Appl. 338 (2008).