UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CRISTYAN CHAYENNE VALINO PINHEIRO

Análise matemática de uma equação parabólica fortemente não-linear do tipo Navier-Stokes

BELÉM- PA

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CRISTYAN CHAYENNE VALINO PINHEIRO

Análise matemática de uma equação parabólica fortemente não-linear do tipo Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA
2012

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

CRISTYAN CHAYENNE VALINO PINHEIRO

Análise matemática de uma equação parabólica fortemente não-linear do tipo Navier-Stokes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da Universidade Federal do Pará- UFPA para obtenção de título de Mestre em Matemática:

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Cristina Lúcia Dias Vaz/UFPA/Orientadora

____

Prof. Dr. Anderson L. A. Araújo/UFV

____

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo/UFPA

____

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva/UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: 02 / 07 /2012

Agradecimentos

À minha mãe Graciete Maria do Vale Valino, por sempre estar ao meu lado e fornecer todo o apoio necessário para que mais esta etapa da minha vida fosse concluída.

À professora Cristina Lúcia Dias Vaz, minha orientadora e amiga que sempre esteve presente nos momentos de dúvida e compreendeu todos os problemas que apareceram em minha vida.

A todos que estiveram comigo durante esta jornada, em especial à Brigida Cristina Fernandes Batista.

Aos colegas do curso de Mestrado, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

Resumo

Neste trabalho, investigamos a existência, unicidade (quando possivel) e regularidade das soluções das equações de Navier-Stokes estacionária e de evolução e um modelo de fluido quase-newtoniano investigado por J. L. Lions em [9].

Essencialmente, usamos o método de Faedo-Galerkin para obtenção da solução acoplado com argumentos de compacidade, para o caso das equações de Navier-Stokes e acoplado com a teoria de operadores monótonos, para o caso do modelo de fluido quase-newtoniano.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes, fluido quase-newtoniano, método de Faedo-galerkin.

Conteúdo

Introdução

As equações diferenciais parabólicas lineares e não lineares descrevem diversos fenômenos físicos, entre os quais fenômenos de mudança de fase, movimento de fluidos, fenômenos de transferência de calor, etc. Em particular, as equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido newtoniano incompressível. Estas equações foram propostas por Claude Navier (1785-1836) e George Stokes (1819-1903) para descrever os efeitos da viscosidade, analisando as forças intermoleculares de um escoamento de fluido.

Muitos processos físicos importantes envolvem escoamentos de fluidos que podem ser considerados viscosos e incompressíveis. Tais escoamentos são governados por equações relacionadas às equações de Navier-Stokes, as quais têm sido motivação para muitos problemas interessantes que envolvem equações diferenciais parciais, tanto pelos seus aspectos teóricos quanto numéricos.

J.L. Lions [9], R. Temam [14], O. Ladyzhenskaya [8], entre muitos outros, contribuíram para o desenvolvimento dos aspectos matemáticos e numéricos das equações de Navier-Stokes, analisando questões de existência, unicidade (nos casos possíveis) e regularidade das soluções de problemas estacionários e de evolução. Metodologicamente, estas contribuições matemáticas formam a conhecida *teoria clássica das equações de Navier-Stokes.*

Nas últimas décadas, equações de Navier-Stokes e suas variantes foram bastante estudadas tanto do ponto de vista matemático quanto numérico e computacional. A análise matemática destes problemas de evolução tem como base a teoria linear das equações diferenciais parabólicas e a teoria clássica das equações de Navier-Stokes. O método de Galerkin, as imersões de Sobolev, estimativas a priori, argumentos de compacidade, teoremas de ponto fixo, teoria de regularidade, teoria de semigrupos, entre outros, são tópicos essenciais para a resolução de tais problemas.

O objetivo principal desta dissertação é investigar os resultados de existência, unicidade (nos casos possíveis) e regularidade das equações de Navier-Stokes clássicas e tratar um modelo de fluido quase-newtoniano investigado por J. L. Lions em [9, p. 207].

Devido a importância das teorias elíptica e parabólica lineares no tratamento das equações de Navier-Stokes, foi realizado um estudo introdutório da equação de Poisson e da equação parabólica linear clássica. Além disso, tratamos um especial problema elíptico não linear, com não linearidade cúbica, para ilustrarmos algumas particularidades dos problemas não lineares, especialmente a aplicação de argumentos de ponto fixo e argumentos de compacidade.

Essencialmente, neste trabalho, usamos o *Método de Faedo-Galerkin* acoplado, para os problemas não lineares, com argumentos de compacidade e/ou ponto fixo e/ou teoria de operadores monótonos.

A dissertação foi organizada do seguinte modo:

No Capítulo 1 descreveremos as notações, os espaços funcionais e alguns resultados clássicos da teoria das equações diferenciais que serão usados no trabalho.

No Capítulo 2 investigaremos a solução da equação de Poisson, de um problema elíptico com não linearidade cúbica e do problema parabólico linear para auxiliar no entendimento das técnicas e dos procedimentos que serão usados nos capítulos posteriores.

O Capítulo 3 investigaremos a teoria clássica das equações de Navier-Stokes. Trataremos os casos lineares e não lineares, estacionários e de evolução. Para o caso estacionário não linear usaremos o método de Galerkin com argumento de ponto fixo e para o caso de evolução não linear usaremos o método de Faedo-Galerkin com argumento de compacidade.

No Capítulo 4 investigaremos dois problemas de evolução parabólicos fortemente não lineares. Para o caso parabólico fortemente não linear clássico, o operador Laplaciano é substituído pelo operador p-Laplaciano e neste caso obteremos existência e unicidade da solução aplicando o método de Faedo-Galerkin acoplado com as propriedades de monotonicidade do operador p-Laplaciano.

Para o caso fortemente não linear do tipo Navier-Stokes ou fluido quase-newtoniano, o operador Laplaciano é substituído por um operador do tipo p-Laplaciano e neste caso obteremos existência de solução aplicando o método de Faedo-Galerkin acoplado com argumentos de compacidade e as propriedades de monotonicidade do operador.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão ferramentas importantes no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Notações e espaços funcionais

As seguintes notações serão usadas no trabalho:

$\mathbb{R}^n$ representará espaço euclidiano n-dimensional.

Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$.

$Q = \Omega \times (0, T)$ é um cilindro

$S = \partial\Omega \times (0, T)$ representará a superfície lateral do cilindro Q.

$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}$ representará o operador gradiente.

$\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ representará o operador Laplaciano.

As derivadas parciais serão representadas por $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

$\displaystyle\sum_{(j)}$ é o somatório sobre todos os possíveis j.

$|x| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ e $|\nabla u| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$ é norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e do vetor gradiente.

No que segue vamos considerar $0 < T < \infty$, B um espaço de Banach qualquer com norma $\| \, . \, \|_B$ e apresentar a definição de alguns espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem $\leq m$ contínuas em Ω (m inteiro positivo ou $m = \infty$).

$\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em Ω e $\mathcal{D}'(\Omega)$ o seu dual. Também usaremos os espaços $\mathcal{D}(0,T)$ e $\mathcal{D}'(0,T)$.

$L^q(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(x)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e q-integráveis ($q \geq 1$) cuja norma é dada por

$$\begin{aligned} ||u||_{L^q(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{1/q} & (1 \leq q < \infty), \\ ||u||_{L^\infty(\Omega)} &= ess \sup_\Omega |u(x)| & (q = \infty). \end{aligned}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço de Banach (com m inteiro) das funções $u(x)$ em $L^p(\Omega)$ com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem $\leq m$ que pertencem a $L^p(\Omega)$ e cuja norma é dada por

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{(j)} \left\| D_x^j u \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

$W_0^{m,p}(\Omega)$ representará o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.1. *Para o caso particular de $p = 2$, a notação dos espaços de Sobolev será $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.*

Uma função vetorial é uma função $w(t)$ que para cada $t \in (0,T)$ associa um elemento $w(t)$ do espaço de Banach X. Dizemos que $w : (0,T) \to X$ é *fortemente mensurável* se a função $t \longmapsto ||w(t)||_X$ é mensurável. Representamos por $L^p(0,T;X)$ com $p \geq 1$, o espaço das funções fortemente mensuráveis $w : (0,T) \to X$ tal que

$$\begin{aligned} ||w||_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T ||w(t)||_X^p \right)^{1/p} < \infty \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ ||w||_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{0 \leq t \leq T} ess \, ||w(t)||_X < \infty \quad \text{se} \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Representaremos por $C([0,T];X)$ o espaço das funções contínuas $w : [0,T] \to X$ com a norma

$$||w||_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} ||w(t)||_X .$$

Observação 1.2. *Observe que, para* $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ *tais que* $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$ *tem-se* $L^{p_2}(0,T;X) \subset L^{p_1}(0,T;X)$.

1.1.1 Espaços funcionais das equações de Navier-Stokes

Os seguintes espaços funcionais aparecem no estudo das equações de Navier-Stokes, para mais detalhes, consulte, por exemplo, [1, 14].

$\mathbb{L}^p(\Omega)$ representará o espaço das funções vetoriais $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, tal que $\boldsymbol{u}_i \in L^p(\Omega)$, ou seja, $\mathbb{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^n$. Analogamente, $\mathbb{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^n$, $\mathbb{H}^m_0(\Omega) = (H^m_0(\Omega))^n$, $\mathbb{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^n$ e $\mathbb{W}^{m,p}(\Omega) = (W^{m,p}(\Omega))^n$.

$\mathcal{V}$ é o espaço das funções vetoriais $\boldsymbol{v} \in \mathbb{D}(\Omega)$ com $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Representaremos por V o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ e por H o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Podemos caracterizar V do seguinte modo,

Teorema 1.1. *Seja* Ω *um conjunto aberto Lipschitz e limitado do* $\mathbb{R}^n$. *Então*

$$V = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}.$$

com $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ *no sentido das distribuições em* Ω.

O espaço de Banach separável $\widetilde{V}$ é o fecho de $\mathcal{V}$ no espaço $H^1_0(\Omega) \cap L^n(\Omega)$ equipado com a norma:

$$\|u\|_{\widetilde{V}} = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^n(\Omega)}\,.$$

1.2 Algumas desigualdades.

1) Desigualdade de Cauchy com ϵ**:**

Se $a, b, \epsilon > 0$, então

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

2) Desigualdade de Hölder:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,um conjunto não vazio e mensurável. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, com $1 < p < \infty$, então

$$\int_\Omega |u\,v|dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^q(\Omega)}.$$

3) Desigualdade de Young: Para todo $a, b > 0$, e para p, q tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, com $1 < p < \infty$ tem-se

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

4) Desigualdade de Gronwall (forma diferencial):

Seja $\eta(.)$ uma função absolutamente contínua não negativa em $[0, T]$, que satisfaz, para t q.s, a desigualdade diferencial

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

em que $\phi(t), \psi(t)$ são funções integráveis não negativas em $[0, T]$. Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)\, ds}\Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds\Big], \tag{1.1}$$

para todo $t \in [0, T]$.

5) Desigualdade de Poincaré:

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então existe uma constante $c_p > 0$ que depende de Ω e n, tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.3 Método de Galerkin

Para resolvermos uma equação de operadores $Fu = y$ definida no espaço de Banach B podemos considerar problemas aproximados $F_m\, u_m = y_m$ em subespaços B_m com dimensão finita.

Se as sequências (F_m) e (B_m) convergem, em algum sentido, para F e B, respectivamente, então gostaríamos de obter da sequência de soluções aproximadas (u_m) de $F_m\, u_m = y_m$ em B_m uma subsequência (u_{m_j}) convergindo para a solução de $F\, u = y$ em B. Por exemplo, se B é um espaço de Banach com base $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ podemos considerar B_m o subespaço gerado pelas m primeiras funções de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$, ou seja, $B_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$.

Sejam $P_m : B \to B_m$ projeções definidas por $P_m u = \sum_{k=1}^{m} x_k w_k$ com $u = \sum_{k=1}^{\infty} x_k w_k$ então podemos considerar o seguinte problema aproximado em B_m:

$$F_m u_m = P_m y \;\text{ para }\; u_m \in B_m \tag{1.2}$$

com $F_m = P_m F_{|_{B_m}}$. O sistema (1.2) é chamado *método ou aproximação de Galerkin* da equação $Fu = y$.

Para o caso que B é um espaço *reflexivo* temos o seguinte resultado de compacidade fraca (veja, por exemplo [6, p. 639]):

Teorema 1.1 (Teorema de compacidade fraca)**.** *Seja B uma espaço de Banach reflexivo. Se a sequência $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset B$ é limitada. Então existe uma subsequência $(u_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ e $u \in B$ tais que $u_{k_j} \rightharpoonup u$.*

Assim, para resolvermos $Fu = y$ passando o limite em (1.2) precisamos:

1. determinar estimativas *a priori* da sequência de soluções (u_k), ou seja, obter $||u_k|| \leq C$ com $C > 0$ uma constante que independe de m, e portanto, obter uma subsequência (u_{k_j}) que converge fracamente para u;

2. usar as propriedades de F e da construção de Galerkin para mostrar que u é solução do problema original, isto é, $Fu = y$.

1.4 Resultados auxiliares

Nesta seção enunciaremos os principais resultados auxiliares que usaremos no trabalho, entre eles, o Teorema de ponto fixo de Brouwer e uma de suas consequências, o Lema do ângulo agudo, as imersões de Sobolev, derivada fracionada e o Lema de De Rham para caracterização da pressão nas equações de Navier-Stokes.

Ressaltamos que a demonstração do Teorema de ponto fixo de Brouwer pode ser encontrada, por exemplo, em [5], a prova das imersões em [2] e [14] e os resultados sobre derivadas fracionadas em [14].

1.4.1 Teorema do ponto fixo de Brouwer

Lema 1.1 (Teorema do ponto fixo de Brouwer)**.** *Sejam X um espaço de dimensão finita e $\mathcal{K}$ um subconjunto não vazio, convexo, fechado e limitado de X. Se $F : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ é uma aplicação contínua, então F tem um ponto fixo, isto é, existe $\xi \in \mathcal{K}$ tal que $F(\xi) = \xi$.*

Lema 1.2 (Teorema do ângulo agudo). *Sejam X um espaço de dimensão finita com produto escalar $(\cdot,\cdot)_X$ e norma $\|\cdot\|_X$. Se $P : X \to X$ uma aplicação contínua tal que*

$$(P(x), x)_X > 0, \quad para \quad \|x\|_X = k > 0. \tag{1.3}$$

Então, existe um $\bar{x} \in X$ com $\|\bar{x}\|_X \leq k$ e $P(\bar{x}) = 0$.

Demonstração: Seja $B = \{x \in X; \|x\|_X \leq k\}$ e suponhamos que $P(x) \neq 0, \forall x \in B$. Assim, a aplicação de $F : B \to B$:

$$x \mapsto F(x) = -\frac{kP(x)}{\|P(x)\|_X}$$

está bem definida e é contínua.

Então, pelo Teorema do ponto fixo de Brouwer, existe $\bar{x} \in B$ tal que $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Logo,

$$-\frac{kP(\bar{x})}{\|P(\bar{x})\|_X} = \bar{x},$$

o que implica, $\|\bar{x}\|_X = k$ e $(P(\bar{x}), \bar{x})_X = -k\,\|P(\bar{x})\|_X < 0$. Mas, isto contradiz (1.3).
■

1.4.2 Imersões de Sobolev

Teorema 1.2. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são contínuas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega) \quad para\ p < n, \quad p^* = np/(n-p),\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \quad para\ p = n, \quad \forall q \in [p, +\infty),\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega) \quad para\ p > n.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \quad para\ p < n, \quad \forall q \in [1, p^*),\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega) \quad para\ p = n, \quad \forall q \in [p, +\infty),\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \quad para\ p > n.
\end{aligned}$$

com $p^* = np/(n-p)$.

1.4.3 Derivada generalizada de funções vetoriais

Vamos introduzir a noção de derivada fraca de uma função vetorial.

Lema 1.3. *Seja X um espaço de Banach e X' seu dual. Sejam u e g funções de $L^1(a, b; X)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) u é q.s. igual a primitiva de g,

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s)ds, \qquad \xi \in X, \ q.s. \ t \in [a, b]; \tag{1.4}$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{D}((a, b))$,

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = -\int_a^b g(t)\phi(t)dt, \qquad \left(\phi' = \frac{d\phi}{dt}\right); \tag{1.5}$$

(iii) Para cada $\eta \in X'$

$$\frac{d}{dt}\langle \eta, u(t)\rangle = \langle \eta, g(t)\rangle, \tag{1.6}$$

no sentido das distribuições sobre (a, b).

Se (i)-(iii) são satisfeitas, em particular, u é q.s. igual a uma função de $C((a, b); X)$.

O Lema 1.3 sugere a seguinte definição:

Definição 1.1. *A função g dada no Lema* 1.3 *é chamada derivada fraca de u e será representada pelos símbolos usuais, isto é,*

$$g = u' = \frac{du}{dt}.$$

Agora vamos introduzir os espaços funcionais usados na resolução de problemas de evolução. Nesta seção, faremos isto de modo abstrato sem especificar os espaços.

Considere V e H dois espaços de Hilbert com produtos internos e normas $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$, $((\cdot, \cdot))$ e $\|\cdot\|$, respectivamente. Sejam H' e V' os espaços duais de H e V, respectivamente, com $||\cdot||_*$ a norma de V'. Representamos o par de dualidade $\langle \cdot \rangle_{V' \times V}$ por $\langle \cdot \rangle$.

Suponhamos que $V \subset H$ com imersão densa e contínua. Identificando H como o seu dual H' pelo Teorema de representação de Riez temos que H pode ser identificado com um subespaços de V' e as seguintes inclusões são densas e contínuas:

$$V \subset H \cong H' \subset V'. \tag{1.7}$$

Observe que, para $f \in H$ e $v \in V$ tem-se

$$\langle f, v \rangle_{V' \times V} = (f, v). \tag{1.8}$$

Seja $T > 0$ um número real fixo. Considere o seguinte espaço normado:

$$W(0,T) = \{v \in L^2(0,T;V)\,;\; u' \in L^2(0,T;V')\}$$

com norma

$$||v||_{W(0,T)} = \left(\int_0^T ||v(t)||^2 + ||v'(t)||_*^2 \right)^{1/2}.$$

Portanto, $W(0,T)$ é um espaço de Hilbert e pelo Lema 1.3 um elemento de $W(0,T)$ coincide q.s. com uma função de $C([0,T];V')$. De fato, temos que coincide q.s. com uma função de $C([0,T];H)$, como prova-se no seguinte lema:

Lema 1.4. *Sejam V e H espaços de Hilbert tal que* (1.7) *vale. Se $u \in W(0,T)$ então $u \in C([0,T];H)$. Além disso,*

(i) a seguinte igualdade vale no sentindo das distribuições em $(0,T)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \langle u'(t), u(t) \rangle\,,$$

(ii) a seguinte fórmula de Green vale $\forall u, v \in W(0,T)$:

$$\int_0^T \Big(< u'(t), v(t) > + < u(t), v'(t) > \Big)\, dt = < u(T), v(T) > - < u(0), v(0) > .$$

1.4.4 Formas e operadores

Seja $a : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e contínua. Podemos associar a forma $a(u,v)$ um operador linear e contínuo $A : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u \in V$, a aplicação $v \longmapsto a(u,v)$ de V em $\mathbb{R}$ é linear e contínua, logo pelo teorema de representação de Riez, existe um único $\xi_u \in V'$.

Representaremos por A o operador $u \longmapsto \xi_u$ de V em V'. Portanto, pelas propriedades de $a(u,v)$ temos que A é linear e contínuo. De fato, pela continuidade de $a(u,v)$ tem-se

$$|\xi_u(v)| = |\langle \xi_u, v \rangle| = |a(u,v)| \leq C||u||\,||v||,$$

e logo

$$||A(u)||_* = \sup \frac{|\langle \xi_u, v \rangle|}{||v||} \leq C||u||,$$

o que implica $||A||_{\mathcal{L}(V,V')} \leq C$.

Reciprocamente dado um operador linear e contínuo $A \in \mathcal{L}(V, V')$ podemos associar a A uma forma bilinear contínua $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definindo

$$\langle A(u), v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Se $a(u, v) = ((u, v))$ é o produto interno de V então $A : V \to V'$ é o isomorfismo canônico de V em V'.

Se a forma bilinear $a(u, v)$ é "coerciva" isto é, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \, ||u||^2,$$

então temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Se $a : V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva então $A : V \to V'$ é um isomorfismo.*

Agora, considere a forma $b : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ trilinear e contínua. Podemos associar a forma $b(u, v, w)$ um operador linear e contínuo $B : V \to V'$ do seguinte modo: para cada $u, v \in V$ a função $w \longmapsto b(u, v, w)$ é linear e contínua, e logo, existe um único elemento $\xi(u, v) \in V'$ tal que

$$\langle \xi(u, v), w \rangle = b(u, v, w) \quad \forall w \in V.$$

Representaremos por $B(u, v)$ o operador $w \longmapsto \xi(u, v)$ de V em V'. Em particular, $B(u) = B(u, u)$.

1.4.5 Teoremas de compacidade

Sejam X_0, X, X_1 espaços de Banach. Considere o seguinte espaço

$$W(X_0, X_1) = \{v \, ; \, v \in L^{p_0}(0, T; X_0), \; v' \in L^{p_1}(0, T; X_1)\} \tag{1.9}$$

com $T > 0$ finito e $1 < p_0, p_1 < \infty$.

$W(X_0, X_1)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}$$

e $W(X_0, X_1) \subset L^{p_0}(0, T; X)$.

Teorema 1.5. *Sejam X_0, X, X_1 espaços de Banach com X_0 e X_1 espaços reflexivos tais que $X_0 \subset X \subset X_1$ com as inclusões contínuas e a inclusão de X_0 em X compacta. Se $1 < p_0, p_1 < \infty$, então, $W \subset L^{p_0}(0,T;X)$ é compacta.*

1.4.5.1 Derivada Fracionada

Considere os espaços X_0, X, X_1 dados no teorema 1.5 espaços de Hilbert. Se v é uma função de $\mathbb{R}$ em X_1, nos denotaremos por $\widehat{v}$ sua transformada de Fourier

$$\widetilde{v}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\tau} v(t)\, dt$$

A derivada em t de ordem γ de v é a transformada de Fourier inversa $\widehat{D_t^\gamma v(\tau)} = (2i\pi\tau)^\gamma \widehat{v}$.

Para $\gamma > 0$, definimos o espaço

$$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1) = \{v \in L^2(\mathbb{R}; X_0), D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R}, X_1)\}.$$

$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}, X_0, X_1)$ é um espaço de Hilbert com norma dada por

$$\|v\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R},X_0,X_1)} = \left(\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R};X_0)} + \||\tau|^\gamma \widehat{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R};X_1)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Associamos a cada conjunto $K \subset \mathbb{R}$, o subespaço $\mathcal{H}^\gamma_K$ de $\mathcal{H}^\gamma$ definido pelo conjunto de todas as funções $\boldsymbol{v}$ com suporte contido em K.

Teorema 1.6. *Sejam X_0, X, X_1 espaços de Hilbert satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.5. Então para quaisquer conjunto K e $\gamma > 0$, a imersão $\mathcal{H}^\gamma_K(\mathbb{R}, X_0, X_1) \subset L^2(\mathbb{R}; X)$ é compacta.*

1.4.6 Resultados de De Rham

Proposição 1.1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$, $\boldsymbol{f}_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. Uma condição necessária e suficiente para*

$$\boldsymbol{f} = \nabla p \tag{1.10}$$

para alguma $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é que

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{1.11}$$

Proposição 1.2. *Seja Ω um conjunto aberto Lipschitz e limitado do $\mathbb{R}^n$*

(i) Se p é uma distribuição tal que $D_ip \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \|\nabla p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

(ii) Se p é uma distribuição tal que $D_ip \in H^{-1}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \|\nabla p\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}.$$

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em Girault & Raviart [11, p. 34]

Teorema 1.7. *Seja $\boldsymbol{l} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ tal que*

$$< \boldsymbol{l}, \boldsymbol{v} >_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Então, existe um única função $\phi \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$< \boldsymbol{l}, \boldsymbol{v} >_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \phi \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dx = - < \nabla\phi, \boldsymbol{v} >_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}_0^1(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

com $L_0^2(\Omega) = \{\phi \in L^2(\Omega)\,;\, (\phi, 1)_{L^2(\Omega)} = 0\}$.

1.5 Formas e suas propriedades

Nesta seção analisaremos as principais propriedades das formas $a(u, v)$, $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ e $c(u, v)$ que aparecerão na formulação fraca dos problemas que serão tratados.

1.5.1 Formas $a(u, v)$ e $c(u, v)$.

Seja $W = H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ e considere as formas $a, c : W \times W \to \mathbb{R}$ definidas por

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n (D_iu, D_iv) + \lambda(u, v) \tag{1.12}$$

$$c(u, v) = a(u, v) + \int_\Omega u^3(x)v(x)dx \tag{1.13}$$

com λ uma constante positiva.

Note que $a(u, v)$ é uma forma bilinear contínua e $c(u, v)$ está bem definida, pois para $u, v \in W$ tem-se $u, v \in L^4(\Omega)$ e $u^3 \in L^{4/3}(\Omega)$, portanto, pela desigualdade de Hölder, concluímos que $u^3v \in L^1(\Omega)$.

Lema 1.5. *A forma $c(u,v)$ tem as seguintes propriedades:*

(i) É contínua;

(ii) $c(u, u-v) \geq c(v, u-v), \;\; \forall u, v \in W.$

Demonstração: (i) Como $a(u,v)$ é contínua, basta provarmos que a forma $\bar{c} : W \times W \to \mathbb{R}$ dada por

$$\bar{c}(u,v) = \int_\Omega u^3(x)v(x)dx$$

é contínua. De fato, aplicando a desigualdade de Hölder com $u_1, u_2, v_1, v_2 \in W$, temos

$$\begin{aligned}|\bar{c}(u_1,v_1) - \bar{c}(u_2,v_2)| &= \left| \int_\Omega u_1^3(x)v_1(x)dx - \int_\Omega u_2^3(x)v_2(x)dx \right| \\ \leq \left| \int_\Omega u_1^3(x)(v_1(x) - v_2(x))dx \right| &+ \left| \int_\Omega (u_1^3(x) - u_2^3(x))v_2(x)dx \right| \\ \leq \left\| u_1^3 \right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} &+ \left\| u_1^3 - u_2^3 \right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \|v_2\|_{L^4(\Omega)}\end{aligned}$$

Logo, a continuidade de $\bar{c}$ segue do fato da aplicação $u \mapsto u^3$ ser contínua de $L^4(\Omega)$ em $L^{4/3}(\Omega)$. □

(ii) Usando o fato da função $x \mapsto x^3$ ser crescente temos

$$(u^3(x) - v^3(x))(u(x) - v(x)) \geq 0, \qquad q.s.$$

Logo,

$$\int_\Omega (u^3(x) - v^3(x))(u(x) - v(x))dx \geq 0,$$

e consequentemente

$$c(u, u-v) - c(v, u-v) = a(u-v, u-v) + \int_\Omega (u^3(x) - v^3(x))(u(x) - v(x))dx \geq 0$$

■

1.5.2 Forma trilinear $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$

Considere a forma $b : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times (\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)) \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{u}_i(x) D_i \boldsymbol{v}_j(x) \boldsymbol{w}_j(x) dx \tag{1.14}$$

Lema 1.6. *A forma $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ está bem definida, é trilinear e contínua em $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times (\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega))$.*

Demonstração: Se $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e $\boldsymbol{w} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)$, aplicando o Teorema 1.2 com $p=2$ e $n \geq 3$, obtemos

$$\boldsymbol{u}_i \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega), \quad D_i\boldsymbol{v}_j \in L^2(\Omega), \quad \boldsymbol{w}_j \in L^n(\Omega), \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Portanto, $\boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{w}_j \in L^1(\Omega)$. Usando estes resultados e desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |\boldsymbol{u}_i(x) D_i\boldsymbol{v}_j(x)\boldsymbol{w}_j(x)| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|\boldsymbol{u}_i\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|D_i\boldsymbol{v}_j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_j\|_{L^n(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i\boldsymbol{v}_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{w}_j\|_{L^n(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sqrt{n}\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_j\|_{L^n(\Omega)} \\
&\leq n\sqrt{n}\, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)} \\
&\leq n\sqrt{n}C \, \|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $n=2$ temos que $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^2(\Omega) = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e pelo Teorema 1.2 tem-se

$$\boldsymbol{u}_i \in L^4(\Omega), \quad D_i\boldsymbol{v}_j \in L^2(\Omega), \quad \boldsymbol{w}_j \in L^4(\Omega), \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Portanto, $\boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{w}_j \in L^1(\Omega)$. Usando estes resultados e desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| &\leq \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega |\boldsymbol{u}_i(x) D_i\boldsymbol{v}_j(x)\boldsymbol{w}_j(x)| dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{2} \|\boldsymbol{u}_i\|_{L^4(\Omega)} \|D_i\boldsymbol{v}_j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_j\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C^2 \sum_{i,j=1}^{2} \|\boldsymbol{u}_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|D_i\boldsymbol{v}_j\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_j\|_{H_0^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| &\leq C^2 \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{2} \|D_i \boldsymbol{v}_j\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{w}_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C^2 \|\boldsymbol{u}\| \sum_{j=1}^{2} \|\boldsymbol{v}_j\|_{H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C^2 \|\boldsymbol{u}\| \left(\sum_{j=1}^{2} \|\boldsymbol{v}_j\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{2} \|\boldsymbol{w}_j\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C^2 \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\| \leq C^2 \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Note que, nas duas situações, C é a constante dada pelas imersões contínuas do Teorema 1.2.

Portanto, para qualquer $n \geq 2$, existe uma constante C, dependendo de n, tal que

$$|b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})| \leq C \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)\cap\mathbb{L}^n(\Omega)} \tag{1.15}$$

e demonstração está completa. ■

Lema 1.7. *A forma trilinear $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ tem as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0, && \boldsymbol{u} \in V, \quad \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}. \\
&(ii) \quad b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = -b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}), && \boldsymbol{u} \in V, \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \widetilde{V}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Vamos provar que a afirmação (i) é valida para $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

Observe que

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j dx = \int_\Omega \boldsymbol{u}_i D_i \frac{(\boldsymbol{v}_j)^2}{2} dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega D_i \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{v}_j)^2 dx.$$

Então,

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_i \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{v}_j)^2 dx = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} (\boldsymbol{v}_j)^2 dx = 0$$

e a afirmação (i) está provada. ■

Para provarmos a afirmação (ii), sejam $\boldsymbol{u} \in V$ e $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \widetilde{V}$. Pelo resultado do item (i) tem-se $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = 0$. Agora, pela linearidade de $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ obtemos

$$b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = 0.$$

Portanto, $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}) = 0$, o que prova (ii). ■

Capítulo 2

Problemas preliminares

Neste capítulo, investigaremos a existência e unicidade da equação de Poisson, de um problema elíptico com não linearidade polinomial e do problema parabólico linear. A análise matemática destes problemas preliminares tem como objetivo facilitar o entendimento dos procedimentos e técnicas que serão usados nos Capítulos posteriores.

2.1 Equação de Poisson

Dada $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, consideremos o problema de encontrar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que

$$-\Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.1}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma. \tag{2.2}$$

Lema 2.1. *Para $f \in L^2(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz (2.1) no sentido das distribuições em Ω e (2.2) no sentido do traço.

(ii) $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz $(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponha que a afirmação (i) é verdadeira. Então,

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.3}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \langle D_i u, D_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i \varphi)_{L^2(\Omega)} = (u, \varphi)_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.4}$$

e

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Por (2.4) e (2.5), concluímos que (2.3) é equivalente a

$$(u, \varphi)_{H_0^1(\Omega)} = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.6}$$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, então para qualquer $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência φ_n em $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que φ_n converge para v em $H_0^1(\Omega)$. Como as aplicações $v \mapsto (u, v)_{H_0^1(\Omega)}$ e $v \mapsto (f, v)_{L^2(\Omega)}$ são contínuas em $H_0^1(\Omega)$ temos que $(u, \varphi_n)_{H_0^1(\Omega)}$ converge para $(u, v)_{H_0^1(\Omega)}$ e $(f, \varphi_n)_{L^2(\Omega)}$ converge para $(f, v)_{L^2(\Omega)}$. Portanto, (2.6) vale para $\varphi = v \in H_0^1(\Omega)$.

($\Leftarrow$) Suponha a afirmação (ii) é verdadeira. Então, tomando $v = \varphi$ em (ii) com $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ e usando (2.4) e (2.5), obtemos

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Além disso, como $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que $u = 0$ no sentido do traço. ■

Observe que o Lema 2.1 afirma que para $f \in L^2(\Omega)$ toda u que satisfaz (ii) é solução do problema (2.1)-(2.2) no sentido dado por (i). Portanto, podemos usar a seguinte definição de solução:

Definição 2.1. *Para $f \in L^2(\Omega)$, dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema* (2.1)-(2.2) *se*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Note que o Lema 2.1 não garante a existência de u. No próximo resultado mostraremos a existência e unicidade da solução fraca do problema (2.1)-(2.2).

Teorema 2.1. *Para $f \in L^2(\Omega)$, o problema* (2.1)-(2.2) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Como a aplicação $v \to (f,v)_{L^2(\Omega)}$ é um funcional linear contínuo em $H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema da Representação de Riez (veja Evans [6, p.639]), existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra a existência e unicidade da solução. ■

O seguinte resultado de regularidade para a solução fraca de (2.1)-(2.2), pode ser encontrado em Evans [6].

Teorema 2.2. *Sejam Ω um aberto de classe $\mathcal{C}^{m+2}$ e $f \in H^m(\Omega)$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 0$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de* (2.1)-(2.2), então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ e tem-se

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq \|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

2.2 Um problema elíptico não linear

Nesta Seção estudaremos a existência e unicidade para uma equação elíptica não-linear. Para provarmos a existência de solução usaremos o método de Galerkin juntamente com argumento de ponto fixo, o Lema 1.2.

Dada $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, queremos encontrar uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que satisfaz o seguinte problema elíptico não-linear:

$$-\Delta u + \lambda u + u^3 = f \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.7}$$

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \tag{2.8}$$

com λ uma constante positiva.

Lema 2.2. *Seja $f \in L^2(\Omega)$. A condição suficiente para que uma função $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ satisfaça* (2.7) no sentido das distribuições em Ω e (2.8) no sentido do traço é

$$c(u,w) = (f,w)_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega). \tag{2.9}$$

com $c(u,v)$ a forma definida por

$$c(u,v) = a(u,v) + \int_\Omega u^3(x)v(x)dx,$$

com $a(u,v)=\sum_{i=1}^{n}(D_iu,D_iv)_{L^2(\Omega)}+\lambda(u,v)_{L^2(\Omega)}$.

Demonstração: Se a condição (2.9) é verdadeira, podemos escolher $w=\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ e obter

$$\begin{aligned}
&-\langle\Delta u,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}+\lambda\langle u,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}+\langle u^3,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\langle D_iu,D_i\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}+\lambda\langle u,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}+\left\langle u^3,\varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}\\
&=\sum_{i=1}^{n}(D_iu,D_i\varphi)_{L^2(\Omega)}+\lambda(u,\varphi)_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega u^3(x)\varphi(x)dx\\
&=c(u,\varphi).
\end{aligned}$$

Mas, $c(u,\varphi)=(f,\varphi)_{L^2(\Omega)}=\langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$, e logo,

$$\left\langle-\Delta u+\lambda u+u^3,\varphi\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}=\langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Além disso, como $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$ temos que $u=0$ no sentido do traço. ■

Portanto, podemos considerar a seguinte definição de solução fraca:

Definição 2.2. *Para $f\in L^2(\Omega)$, dizemos que $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$ é solução fraca do problema* (2.7)-(2.8) se u satisfaz (2.9).

No seguinte teorema mostraremos que o problema (2.7)-(2.8) tem uma única solução fraca.

Teorema 2.3. *Dada $f\in L^2(\Omega)$, existe uma e somente uma solução fraca de* (2.7)-(2.8).

Demonstração: Primeiro provaremos a unicidade. Para isto, sejam $z,w\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega)$ duas soluções fracas de (2.7)-(2.8), então satisfazem (2.9), e portanto,

$$c(z,v)-c(w,v)=0,\quad\forall v\in H_0^1(\Omega)\cap L^4(\Omega).$$

Fazendo $u=z-w$ e tomando $v=u$ tem-se

$$a(u,u)+\int_\Omega(z^3(x)-w^3(x))(z(x)-w(x))dx=0.$$

Agora, pelo Lema 1.5 sabemos que

$$\int_\Omega(z^3(x)-w^3(x))(z(x)-w(x))dx\geq0$$

e logo, $\lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq a(u,u) \leq 0$, o que implica $u = 0$.

Para provarmos a existência de solução aplicaremos o *método de Galerkin* (veja seção 1.3). Como $H^1_0(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ é um espaço de Banach separável, considere (w_m) uma base de $H^1_0(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, W_m o espaço gerado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $u_m \in W_m$ tal que

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} w_i, \qquad \xi_{im} \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

$$c(u_m, w_j) = (f, w_j)_{L^2(\Omega)}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{2.11}$$

Primeiro vamos provar que o problema aproximado acima tem uma única solução para cada m fixo. Para isto, observe que, para $u, v \in W_m$, existem $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, tais que

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i w_i \quad \text{e} \quad v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i. \tag{2.12}$$

Além disso,

$$(u, v)_{W_m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i$$

é um produto interno sobre W_m e a norma $\|\cdot\|_{W_m}$ associada a este produto interno é equivalente a qualquer outra norma sobre W_m (veja, por exemplo Bachman [3, p.122]). Logo, existe uma constante positiva k_m, dependendo de m, tal que

$$k_m \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_m} \leq \frac{1}{k_m} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in W_m.$$

Seja a aplicação $P : W_m \to W_m$ definida por

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} \left(c(u, w_i) - (f, w_i)_{L^2(\Omega)} \right) w_i.$$

Como consequência do Lema 1.5 a aplicação P é continua. Além disso, tomando u como em (2.12) tem-se

$$\begin{aligned}
(P(u), u)_{W_m} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(c(u, w_i) - (f, w_i)_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= c(u, u) - (f, u) \\
&\geq \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \lambda k_m^2 \|u\|^2_{W_m} - \frac{1}{k_m} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{W_m}.
\end{aligned}$$

Portanto, para $k > (\lambda k_m^3)^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|u\|_{W_m} = k$ temos que $(P(u), u)_{W_m} > 0$ e as hipóteses do Lema 1.2 são satisfeitas. Deste modo, existe $u_m \in W_m$ tal que

$$P(u_m) = \sum_{i=1}^{m} \left(c(u_m, w_i) - (f, w_i)_{L^2(\Omega)} \right) w_i = 0.$$

Mas, os vetores $\{w_1, \ldots, w_m\}$ são linearmente independentes, o que implica

$$c(u_m, w_i) = (f, w_i)_{L^2(\Omega)}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Portanto, para cada m fixo, u_m é solução de (2.11).

Agora, obteremos duas estimativas *a priori* para a solução do problema (2.11). Para isto, multiplique (2.11) por ξ_{jm}, some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$c(u_m, u_m) = (f, u_m)_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré tem-se

$$c(u_m, u_m) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq c_p \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

com c_p a constante dada pela desigualdade de Poincaré. Aplicando as propriedades da forma bilinear $a(u, v)$ obtemos

$$\min(1, \lambda) \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq c_p \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{c_p}{\min(1, \lambda)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.13}$$

$$\|u_m\|_{L^4(\Omega)} \leq \left(\frac{c_p^2}{\min(1, \lambda)} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/4}. \tag{2.14}$$

Por (2.13) e (2.14) temos que a seqüência (u_m) é uniformemente limitada em $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ e pelo fato de $H_0^1(\Omega)$ e $L^4(\Omega)$ serem espaços de Banach reflexivos (veja Brezis [2]) existe $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ e uma subsequência (u_{m_k}) de (u_m) tais que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \tag{2.15}$$

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^4(\Omega). \tag{2.16}$$

Agora, seja $w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} W_m$ então $w \in W_i$ para algum $i \in \mathbb{N}$, logo para $m_k > i$ temos que $w \in W_{m_k}$ e podemos usar (2.11) para obter

$$c(u_{m_k}, w - u_{m_k}) = (f, w - u_{m_k})_{L^2(\Omega)}.$$

Aplicando o Lema 1.5 tem-se

$$c(w, w - u_{m_k}) \geq c(u_{m_k}, w - u_{m_k}) = (f, w - u_{m_k})_{L^2(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Por outro lado, usando (2.15) e (2.16) obtemos

$$\begin{aligned} & a(w, w - u_{m_k}) \to a(w, w - u), \\ & \int_\Omega w^3(x) u_{m_k}(x) dx \to \int_\Omega w^3(x) u(x) dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Combinando (2.17) e (2.18) tem-se

$$c(w, w - u) \geq (f, w - u)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.19}$$

Como $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ é denso em $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, então para cada $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$, existe uma sequência (w_n) em $\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$, tal que w_n converge para w em $H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$. Usando que as aplicações $c(u, v)$ e $w \mapsto (f, w - u)_{L^2(\Omega)}$ são contínuas temos $c(w_n, w_n - u) \to c(w, w - u)$ e $(f, w_n - u)_{L^2(\Omega)} \to (f, w - u)_{L^2(\Omega)}$, o que implica, que a desigualdade (2.19) vale para todo $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$.

Portanto, para $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ e $\kappa \in \mathbb{R}$, podemos escolher $w = u + \kappa v$ em (2.19). Agora, pela linearidade da aplicação $v \mapsto c(u, v)$ e para $\kappa > 0$ obtemos

$$c(u + \kappa v, \kappa v) \geq (f, \kappa v)_{L^2(\Omega)} \Rightarrow \kappa c(u + \kappa v, v) \geq \kappa (f, v)_{L^2(\Omega)} \Rightarrow c(u + \kappa v, v) \geq (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Usando a continuidade de $c(u, v)$ e fazendo $\kappa \to 0$, obtemos

$$c(u, v) \geq (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Analogamente, para $\kappa < 0$, tem-se $c(u, v) \leq (f, v)_{L^2(\Omega)}$. Combinando as duas últimas desigualdades, concluímos que $c(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}$.

E a prova do Teorema 2.3 está completa. ■

2.3 Problema de evolução parabólico linear

Nesta Seção investigaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções da equação de evolução parabólica linear.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2, $Q = \Omega \times (0,T)$ e $S = \partial\Omega \times (0,T)$ para algum $T > 0$ fixo.

Dadas $f : Q \to \mathbb{R}$ e $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, queremos encontrar uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f, \quad \text{em} \quad Q, \tag{2.20}$$

$$u = 0, \quad \text{em} \quad S, \tag{2.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.22}$$

com L o operador diferencial na forma divergente

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x,t)D_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)D_i u + c(x,t)u. \tag{2.23}$$

Vamos supor que $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$ e que existe uma constante $\theta > 0$, que independe de x e t, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \quad \text{q.s em } Q, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.24}$$

Vamos considerar os espaços de Hilbert separáveis $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e o espaço dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$. Representaremos por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$ o produto interno e a norma, respectivamente, de $L^2(\Omega)$ e por $((\cdot,\cdot))$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e a norma, respectivamente, de $H_0^1(\Omega)$. O par de dualidade $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ será representado por $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ Portanto, temos que as imersões $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ são contínuas.

Queremos obter a *formulação fraca* do problema parabólico linear (2.20). Para isto, considere as aplicações $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ e $f : [0,T] \to L^2(\Omega)$ definidas, respectivamente, por $u(t)[x] := u(x,t)$ e $f(t)[x] = f(x,t)$.

Seja $0 < T < \infty$, representamos por $W(0,T)$ o seguinte espaço:

$$W(0,T) = \{u\,;\, u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))\,;\, u' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

Portanto, valem as seguintes propriedades:

$$W(0,T) \subset C([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.25}$$

$$\langle u'(\cdot), v\rangle = \frac{d}{dt}(u(\cdot), v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.26}$$

para $u \in W(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

Lembrando que (2.26) é equivalente a

$$\int_0^T \langle u'(t), v\rangle \psi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.27}$$

Forma bilinear associada ao problema parabólico linear

Vamos definir uma forma bilinear associada ao problema (2.20)-(2.22). Para isto, multiplique a equação diferencial em (2.20) por v, integre em Ω e use a fórmula de Green para obter

$$\int_\Omega u'(t)v(x)\, dx + B[u(t), v; t] = \int_\Omega f(t)v(x)\, dx,$$

com

$$B[u,v;t] := \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x,t) D_i u(x) D_j v(x)\, dx +$$

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i(x,t) D_i u(x) v(x)\, dx + \int_\Omega c(x,t) u(x) v(x)\, dx, \tag{2.28}$$

quase sempre em $[0,T]$.

Observe que para $w, v \in H_0^1(\Omega)$ a função $t \mapsto B[w,v;t]$ é mensurável.

No seguinte lema, provaremos as principais propriedades da forma bilinear $B[w,v;t]$:

Lema 2.1. *Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tais que, para $t \in (0,T)$, a forma bilinear $B[\cdot,\cdot,t] : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

$$|B[w,v;t]| \leq \alpha ||w||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.29}$$

$$\beta ||v||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[v,v;t] + \gamma ||v||^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.30}$$

para todo $w, v \in H_0^1(\Omega)$, q.s. em $[0,T]$.

Demonstração: Como $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$ tem-se

$$C_0 = \sup_{ij}\left(\sup_{(x,t)\in Q} \text{ess}\, |a_{ij}(x,t)|\right), \quad C_1 = \sup_{i}\left(\sup_{(x,t)\in Q} \text{ess}\, |b_i(x,t)|\right),$$
$$C_2 = \sup_{(x,t)\in Q} \text{ess}\, |c(x,t)|.$$

são constantes reais não negativas.

Logo, para $w, v \in H_0^1(\Omega)$ $\forall t \in [0,T]$ q.s. temos que

$$|B[w,v;t]| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_i w D_j v \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i D_i w v \, dx + \int_\Omega cwv \, dx \right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |B[w,v;t]| &\leq C_0 n^2 \int_\Omega |\nabla w(x)||\nabla v(x)| \, dx \\ &\quad + C_1 n \int_\Omega |\nabla w(x)||v(x)| \, dx \\ &\quad + C_2 \int_\Omega |w(x)||v(x)| \, dx \\ &\leq C_0 n^2 |\nabla w||\nabla v| + C_1 n |\nabla w||v| + C_2 |w||v| \\ &= C_0 n^2 \|w\| \, \|v\| + C_1 n \|w\| \, |v| + C_2 |w||v| \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Poincaré obtemos

$$|B[w,v;t]| \leq C \|w\| \, \|v\| ,$$

o que mostra (2.29).

Para mostrarmos (2.30), usaremos a hipótese (2.24). Assim, para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\forall t \in [0,T]$ q.s. tem-se

$$\begin{aligned} \theta \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) D_i v(x) D_j v(x) \, dx \\ &= B[v,v;t] - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i v(x) v(x) + c(x,t)|v(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Mas, para $C_1 > 0$ (se $C_1 = 0$, esta desigualdade é desnecessária) temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,t) D_i v(x) v(x) \, dx \right| &\leq C_1 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_i v(x)||v(x)| \, dx \\ &\leq C_1 n \int_\Omega |\nabla v(x)||v(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy com ϵ e tomando $\epsilon = \theta/2nC_1$ obtemos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(x,t) D_i v(x) v(x) \, dx \right| \leq C_1 n |\nabla v||v| \leq \frac{\theta}{2} |\nabla v|^2 + \frac{nC_1}{2\theta} |v|^2.$$

Por outro lado,

$$\left| \int_\Omega c(x,t)|v(x)|^2 \, dx \right| \leq C_2 |v|^2.$$

Deste modo, pelas desigualdades acima obtemos

$$\frac{\theta}{2}\|v\|^2 \leq B[v,v;t] + \left(\frac{nC_1}{2\theta} + C_2\right)|v|^2,$$

o que mostra (2.30).

E a prova do Lema 2.1 está completa. ■

Portanto, podemos considerar a seguinte formulação variacional do problema (2.20):

Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Queremos encontrar uma função $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + B[u(t),v;t] = (f(t),v) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.31}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.32}$$

Definição 2.3. *Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$. Se $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ satisfaz* (2.31)-(2.32), então dizemos que u é solução fraca de (2.20)-(2.20).

Lembrando que

$$\int_0^T \langle u'(t),v\rangle\psi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt, \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

temos que (2.31) é equivalente a

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \int_0^T B[u(t),v;t]\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt, \tag{2.33}$$

$\forall\psi \in \mathcal{D}(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, para cada $t \in [0,T]$ e para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, a forma bilinear $B[u,v;t]$ define um operador linear contínuo $A(t) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ dado por

$$\langle A(t)u,v\rangle = B[u,v;t], \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||A(t)||_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \leq \alpha. \tag{2.34}$$

com α a constante dada em (2.29).

Então podemos escrever (2.31), (2.32) na forma equivalente:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \;\; \text{no sentido de} \;\; L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$
$$u(0) = u_0.$$

2.3.1 Existência e unicidade

No seguinte teorema, provaremos que o problema (2.20)-(2.22) tem uma única solução fraca:

Teorema 2.1. *Para* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *o problema* (2.20)-(2.22) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Para mostrarmos a existência da solução fraca de (2.20)-(2.22) vamos aplicar o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, seja (w_k) em $H_0^1(\Omega)$ a sequência formada pelas autofunções do operador Laplaciano, ou seja,

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \lambda_k\, w_k \quad \text{em} \quad \Omega, \\ w_k &= 0 \qquad\quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Considere V_m o espaço gerado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$. Portanto, existe uma sequência (u_{0m}) tal que

$$u_{0m} \in V_m \ \ \forall m \ \text{ e } \ u_{0m} \to u_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \tag{2.36}$$

Agora, considere o seguinte problema aproximado: encontrar uma função $u_m : [0,T] \to V_m$ na forma

$$u_m(t) := \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i, \tag{2.37}$$

tal que

$$\begin{aligned} &(u_m'(t), w_j) + B[u_m(t), w_j; t] = (f(t), w_j), \ \ 1 \le j \le m, \\ &u_m(0) = u_{0m}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Observe que, para $1 \le j \le m$, temos

$$\begin{aligned} (u_m'(t), w_j) &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}'(t)(w_i, w_j), \\ B[u_m(t), w_j; t] &= \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) B[w_i, w_j; t] = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}(t) g_{im}(t), \\ (f(t), w_j) &= f^j(t), \end{aligned}$$

com $\beta_{ij} = B[w_i, w_j; t]$. Postanto, o sistema (2.38) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de 1^a ordem:

$$\begin{aligned} &AG'(t) + B(t)G(t) = F(t), \\ &G_i(0) = i\text{-ésima coordenada de } u_{0m}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

com $A_{ij} = (w_j, w_i),\ G_i(t) = g_{im}(t),\ B_{ij}(t) = \beta_{ji},\ F_i(t) = f^i(t)$ para $1 \leq k, j \leq m$.

Para cada m fixo, vamos provar que o problema aproximado (2.38) tem um única solução. De fato, como os elementos da sequência (w_k) são linearmente independente temos que a matriz A é inversível. Além disso, os coeficientes da matriz $B(t)$ são dados pelos coeficientes da forma bilinear $B[u(t), v; t]$, ou seja, pelas funções $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ e $c(x,t)$. Portanto, pela teoria das equações diferenciais lineares de 1^a ordem (veja, por exemplo, [4]), existe uma única G solução de (2.39) tal que g_{im} é absolutamente contínua. Como as funções $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$ e a função $t \mapsto f^i(t)$ pertence a $L^2(0,T)$ temos que $g'_{im} \in L^2(0,T)$. Deste modo garantimos que existe uma única u_m solução de (2.38) tal que

$$u_m \in C([0,T]; V_m) \quad \text{e} \quad u'_m \in L^2(0,T; V_m)$$

No que segue, obteremos estimativas *a priori* da solução u_m do problema (2.38). Para isto, multiplique (2.38) por $g_{jm}(t)$ e some para $j = 1, ..., m$, para obter

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2B[u_m(t), u_m(t); t] = 2(f(t), u_m(t)). \tag{2.40}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy no segundo membro de (2.40) e usando (2.30) obtemos

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\beta \|u_m(t)\|^2 \leq |f(t)|^2 + c_1|u_m(t)|^2 \tag{2.41}$$

com $c_1 = 1 + 2\gamma$. Aplicando a desigualdade de Gronwall em (2.41) tem-se

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 &\leq e^t \left(|u_m(0)|^2 + c_1 \int_0^t |f(s)|^2 ds \right) \\ &\leq c_2 \left(|u_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(Q)} \right). \end{aligned}$$

com $c_2 = e^T c_1$. Portanto,

$$||u_m||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1 \left(|u_0| + \|f\|_{L^2(Q)} \right). \tag{2.42}$$

com C_1 dependendo de T e γ. Integrando (2.40) em $(0,T)$ e usando (2.42), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m(s)\|^2 ds &\leq (2\beta)^{-1} \left(\|f\|^2_{L^2(Q)} + c_1 \int_0^T |u_m(s)|^2 ds \right) \\ &\leq c_3 \left(|u_0|^2 + \|f\|^2_{L^2(Q)} \right) \end{aligned}$$

com $c_3 = (2\beta)^{-1}(1 + c_1 c_2 T)$. Portanto,

$$||u_m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C_2 \left(|u_0| + \|f\|_{L^2(Q)} \right). \tag{2.43}$$

com C_2 dependendo de T, γ e β.

Das estimativas (2.42) e (2.43) temos que a sequência (u_m) é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $A(\cdot)u_m$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Logo, existem uma subsequência (u_{m_l}) de (u_m) e $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tais que

$$u_{m_l} \rightharpoonup u \quad \text{fraca em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.44}$$

$$u_{m_l} \rightharpoonup u \quad \text{fraca-}* \text{ em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.45}$$

$$A(\cdot)u_{m_l} \rightharpoonup A(\cdot)u \quad \text{fraca em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.46}$$

Observação 2.1. *A convergência* (2.46) *segue do fato de $A(\cdot)$ ser um operador linear contínuo de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ (em particular na topologia fraca) e da convergência* (2.44).

Sejam $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Como $(w_k)_{k=1}^\infty$ é uma base de $H_0^1(\Omega)$, temos que existe uma sequência $v_m \in V_m$ tal que $v_m \to v$ (forte) em $H_0^1(\Omega)$ com cada v_m uma combinação linear finita de certos elementos w_k. Portanto, para $\phi_m(t) = \psi(t)v_m$ e $\phi(t) = \psi(t)v$ temos que

$$\phi_{ml} \to \phi \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.47}$$

$$\phi'_{ml} \to \phi' \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.48}$$

De (2.38) deduzimos que

$$-\int_0^T (u_{ml}(t), \phi'_{ml}(t))\, dt + \int_0^T B[u_{ml}(t), \phi_{ml}(t); t]\, dt = \int_0^T (f(t), \phi_{ml}(t))\, dt. \tag{2.49}$$

De (2.47) tem-se

$$\int_0^T (f(t), \phi_{ml}(t))\, dt \to \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt.$$

Usando a convergência (2.45) e (2.48) tem-se

$$\int_0^T B[u_{ml}(t), \phi_{ml}(t); t]\, dt = \int_0^T (A(t)u_{ml}(t), \phi_{ml}(t))\, dt \to \int_0^T B[u(t), \phi(t); t]\, dt.$$

Portanto, podemos passar o limite em (2.38) e obter

$$-\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\, dt + \int_0^T B[u(t), v; t]\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\, dt, \tag{2.50}$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega), \forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$.

Agora resta mostrarmos que $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e a condição inicial (2.32). Para isso, notemos que de (2.50) temos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt &= \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt - \int_0^T B[u(t),v;t]\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T (f(t)-A(t)u(t),v)\psi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Como $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $A(\cdot)u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ temos que $g = f - A(\cdot)u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt = \int_0^T (g(t),v)\psi(t)\,dt,$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$, o que implica

$$u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.51}$$

Para provar que $u(0) = u_0$, usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [16]:

Lema 2.2. *Para toda $u, w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u', w' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e para $t \in [0,T]$ arbitrário, vale a seguinte integração por partes generalizada:*

$$(u(t),w(t)) - (u(0),w(0)) = \int_0^t \langle u'(\tau),w(\tau)\rangle + \langle w'(\tau),u(\tau)\rangle\,d\tau$$

Como $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, podemos aplicar o Lema 2.2 e obter

$$\int_0^T \langle u'(t),\, v\rangle\psi(t)dt = -\int_0^T \langle u(t),v\rangle\psi'(t)\,dt - (u(0),v)\psi(0), \tag{2.52}$$

$\forall \psi \in \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\psi(T) = 0$ e $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, de (2.50) e (2.51) temos que

$$\int_0^T (u'(t),v)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt - \int_0^T B[u(t),v;t]\psi(t)\,dt. \tag{2.53}$$

De (2.38) deduzimos

$$\int_0^T (u'_{ml}(t),v_{ml})\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v_{ml})\psi(t)\,dt - \int_0^T B[u_{ml}(t),v_{ml};t]\psi(t)\,dt. \tag{2.54}$$

Além disso,

$$\int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\,dt = -\int_0^T (u_{ml}(t), v_{ml})\psi'(t)\,dt - (u_{0m}, v)\psi(0). \tag{2.55}$$

Passando o limite em (2.54) e (2.55) quando $l \to \infty$, obtemos

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v)\psi(t)\,dt - \int_0^T B[u(t), v; t]\psi(t)\,dt, \tag{2.56}$$

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\,dt - (u_0, v)\psi(0). \tag{2.57}$$

Usando (2.53) em (2.56) obtemos

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^T (u'_{ml}(t), v_{ml})\psi(t)\,dt = \int_0^T (u(t), v)\psi'(t)\,dt. \tag{2.58}$$

Em particular, para $\psi(0) = 1$, comparando (2.52), (2.57) e (2.58), obtemos

$$(u(0), v) = (u_0, v), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.59}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, (2.59) é válida $\forall v \in L^2(\Omega)$ e tem-se $u(0) = u_0$.

Agora, vamos provar a unicidade. Para isto, suponhamos que u_1 e u_2 são soluções fracas de (2.20)-(2.22) e considere $u = u_1 - u_2$. Então, $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz

$$\begin{aligned} &\langle u'(t), v\rangle + B[u(t), v; t] = 0, \quad \text{q.s. } t \in [0, T], \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \\ &u(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Tomando $v = u(t)$ e aplicando o Lema 1.4 tem-se

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2B[u(t), u(t); t] = 0, \qquad \text{q.s. } t \in [0, T]. \tag{2.61}$$

Mas, por (2.30) sabemos que

$$B[u(t), u(t); t] \geq \beta\,\|u(t)\|^2 - \gamma|u(t)|^2 \geq -\gamma|u(t)|^2$$

e (2.61) torna-se

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq 2\gamma|u(t)|^2.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$|u(t)|^2 \leq 0 \Rightarrow u(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

e provamos a unicidade da solução do problema (2.20)-(2.22).

E a prova do Teorema 2.1 está completa. ■

2.3.2 Regularidade

Para obtermos mais regularidade para a solução do problema (2.20), vamos considerar o seguinte caso particular:

$$\begin{cases} u' - \Delta u &= f \quad \text{em } Q, \\ u &= 0 \quad \text{em } S, \\ u(x,0) &= u_0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.62}$$

Provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja um Ω um domínio de classe $\mathcal{C}^2$. Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ então a única solução u do problema* (2.62) *satisfaz $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.*

Demonstração: Multiplicando a equação (2.38) por $g'_{jm}(t)$, e somando para $k = 1, \ldots, m$, obtemos

$$(u'_m(t), u'_m(t)) + B[u_m(t), u'_m(t); t] = (f(t), u'_m(t)) \quad \text{q.s. em } [0,T].$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, tem-se

$$\frac{1}{2}||u'_m(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}||f(t)||^2_{L^2(\Omega)}.$$

Integrando em $(0,t)$ com $t \in (0,T)$, temos

$$\max_{0 \leq t \leq T} ||u_m(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t ||u'_m(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \leq ||u_m(0)||^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^T ||f(\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau. \tag{2.63}$$

Usando $||u_m(0)||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||u_0||_{H_0^1(\Omega)}$, deduzimos de (2.63) que u_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ e u'_m é uniformemente limitada em $L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Logo, temos que $u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$.

Agora, de (2.62), temos que

$$\begin{cases} -\Delta u(t) & = & f(t) - u'(t) & \text{em } \Omega, \\ u(t) & = & 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $f(t) - u'(t) \in L^2(\Omega)$ q.s. em $[0, T]$, então pela *teoria de regularidade das equações elípticas*, obtemos $u(t) \in H^2(\Omega)$ q.s. em $[0, T]$ tal que

$$||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} \leq C(||f(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)})$$

Integrando em $[0, T]$ e usando (2.63), deduzimos que $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$.

E a prova do Teorema 2.62 está completa. $\blacksquare$

Capítulo 3

Equações de Navier-Stokes

Este Capítulo trata da teoria clássica das equações de Navier-Stokes. Investigaremos os casos lineares e não lineares, estacionários e de evolução. Essencialmente usaremos o *método de Galerkin* para investigar a existência de solução. Para o caso estacionário não linear usaremos o método de Galerkin com argumento de ponto fixo e para o caso de evolução não linear usaremos o método de Galerkin com argumento de compacidade.

3.1 Equações de Stokes estacionárias

Dadas uma função escalar $p : \Omega \to \mathbb{R}$ e uma função vetorial $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, consideremos o problema de encontrar uma função vetorial $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, tal que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{em } \Omega \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \tag{3.3}$$

Lema 3.1. *Para $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e existe uma distribuição $p \in L^2(\Omega)$ tal que as equações (3.1) e (3.2) são satisfeitas no sentido das distribuições em Ω e (3.3) no sentido do traço;

(*ii*) $\boldsymbol{u} \in V$ satisfaz $\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V.$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que a afirmação (i) é verdadeira. Então, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ no sentido das distribuições em Ω. Logo, pelo Teorema 1.1, temos que $\boldsymbol{u} \in V$. Por outro lado,

$$\langle -\nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}, \qquad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Tomando $\varphi = \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{D}(\Omega)$ tem-se

$$\nu \langle -\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} + \langle \nabla p, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle -\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \langle -\Delta \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle D_j \boldsymbol{u}_i, D_j \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_j \boldsymbol{u}_i(x) D_j \boldsymbol{v}_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)_{H_0^1(\Omega)} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla p, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \langle D_i p, \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = -\sum_{i=1}^{n} \langle p, D_i \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= -\langle p, \operatorname{div} \boldsymbol{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = 0\end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{v}_i)_{L^2(\Omega)} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{3.6}$$

Então,

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{3.7}$$

Como $\mathcal{V}$ é denso em V, então para qualquer $\boldsymbol{v} \in V$, existe uma sequência $\boldsymbol{v}_n$ em $\mathcal{V}$ tal que $\boldsymbol{v}_n$ converge para $\boldsymbol{v}$ em V. Como as aplicações $\boldsymbol{v} \mapsto ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$ e $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ são contínuas em $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tem-se $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n))$ converge para $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$ e $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ converge para $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Portanto, (3.7) vale para $\boldsymbol{v} \in V$.

($\Leftarrow$) Suponha a afirmação (ii) é verdadeira. Então, $\boldsymbol{u} \in V \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ o que implica que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ no sentido do traço e pelo Teorema 1.1 temos que $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ no sentido das distribuições em Ω. Portanto, para $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, usando (3.4) e (3.6), obtemos

$$\nu \langle -\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle,$$

ou seja,

$$\langle \boldsymbol{f} + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}.$$

Aplicando proposições 1.1 e 1.2 temos que existe uma distribuição $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

no sentido das distribuições em Ω. ■

Observe que o Lema 3.1 afirma que, para $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, toda $\boldsymbol{u}$ que satisfaz (ii) é solução do problema (3.1)-(3.3) no sentido dado por (i). Portanto, podemos usar a seguinte definição de solução:

Definição 3.1. *Para $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, dizemos que $\boldsymbol{u} \in V$ é solução fraca de* (3.1)-(3.3) *se*

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.8}$$

3.1.1 Existência e unicidade

No seguinte resultado provamos existência e unicidade da solução do problema (3.1)-(3.3).

Teorema 3.1. *Para $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, então o problema* (3.1)-(3.3) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Primeiro provaremos a unicidade. Para isto, suponhamos que $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ são duas soluções fracas de (3.1)-(3.3) então satisfazem (3.8), e logo,

$$\nu((\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v})) = \nu((\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

o que implica $\nu((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})) = 0$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Fazendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ tem-se

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V$$

e tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ obtemos $\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})) = \nu \left\|\boldsymbol{u}\right\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} = 0$, o que implica $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Para provarmos a existência de solução fraca do problema de Stokes (3.1)-(3.3) usaremos o *método de Galerkin* (veja Seção 1.3 do Capítulo 1).

Como V é um espaço de Hilbert separável considere $(\boldsymbol{v}_m)$ uma base de V, V_m o subespaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\boldsymbol{u}_m \in V_m$ tal que

$$\boldsymbol{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} \boldsymbol{v}_i, \qquad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

$$\nu(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.10}$$

Primeiro vamos mostrar que o problema aproximado (3.10) tem uma única solução. Para isto, observe que a equação (3.10) é equivalente ao seguinte sistema de m equações nas variáveis ξ_{im}:

$$\nu \sum_{i=1}^{m} \xi_{im}((\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.11}$$

Para mostrar a existência e unicidade de $\boldsymbol{u}_m$ é suficiente provar que o sistema linear homogêneo associado a (3.11), ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i((\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) = 0 \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.12}$$

tem somente a solução $\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0$.

De fato, se $\xi_1, \ldots, \xi_m$ satisfazem (3.12), então multiplicando cada equação de (3.12) pelo correspondente ξ_j e somando as equações sobre j, temos

$$\sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \xi_j((\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) = 0. \tag{3.13}$$

Fazendo $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \boldsymbol{v}_i$ temos que (3.13) torna-se $((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})) = 0$, o que implica $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, ou seja, $\sum_{i=1}^{m} \xi_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$. Portanto, $\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0$, pois os vetores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ são linearmente independentes.

Agora, obteremos uma estimativa *a priori* da solução de (3.10). Para isto, multiplique (3.10) por ξ_{jm} e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$\nu((\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)},$$

ou seja,

$$\nu||\boldsymbol{u}_m||^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m \rangle_{V' \times V} \leq ||\boldsymbol{f}||_{V'}||\boldsymbol{u}_m||_V,$$

o que implica

$$||\boldsymbol{u}_m||_V \leq \frac{1}{\nu}||\boldsymbol{f}||_{V'}. \tag{3.14}$$

Portanto, de (3.14) temos que a sequência $(\boldsymbol{u}_m)$ é limitada em V por uma constante independente de m. Como V é um espaço de Hilbert reflexivo isto implica que existem $\boldsymbol{u} \in V$ e uma subsequência $(\boldsymbol{u}_{m_k})$ de $(\boldsymbol{u}_m)$ tais que

$$\boldsymbol{u}_{m_k} \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{em} \quad V.$$

Como para cada $\boldsymbol{v}_j$, a aplicação $\boldsymbol{u} \mapsto ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j))$ é um funcional linear contínuo em V temos que $((\boldsymbol{u}_{m_k}, \boldsymbol{v}_j)) \to ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j))$. Logo, tomando $m = m_k$ em (3.10) e passando ao limite obtemos que

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j)) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Além disso, pela linearidade do produto interno tem-se

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \tag{3.15}$$

para toda $\boldsymbol{v} \in \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$.

Como $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ é denso em V temos que, para $\boldsymbol{v} \in V$, existe uma sequência $(\boldsymbol{v}_n)$ em $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ tal que $(\boldsymbol{v}_n)$ converge para $\boldsymbol{v}$ em V. Mas, as aplicações $\boldsymbol{v} \mapsto ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$ e $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ são contínuas em V, logo $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n)) \to ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$ e $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Portanto, (3.15) vale para $\boldsymbol{v} \in V$.

E a prova do Teorema 2.1 está completa. ■

3.1.2 Regularidade

O seguinte resultado de regularidade para a solução fraca do problema de Stokes pode ser encontrado em [14]

Proposição 3.1. *Seja* Ω *um conjunto aberto e limitado de classe* $\mathcal{C}^r$ *com* $r = \max(m+2, 2)$, $m \in \mathbb{Z}$ *e* $m > 0$. *Se* $\boldsymbol{f} \in \mathbb{W}^{m,\alpha}(\Omega)$ *e* $(\boldsymbol{u}, p)$ *é a solução do problema de Stokes* (3.1)-(3.3) *tal que* $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbb{W}^{2,\alpha}(\Omega) \times W^{1,\alpha}(\Omega)$ *com* $1 < \alpha < +\infty$, *então*

$$\boldsymbol{u} \in \mathbb{W}^{m+2,\alpha}(\Omega), \qquad p \in W^{m+1,\alpha}(\Omega) \tag{3.16}$$

e existe uma constante c_0 *que depende de* α, ν, m *e* Ω *tal que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)} + \|p\|_{W^{m+1,\alpha}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq \Big(\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{W}^{m,\alpha}(\Omega)} + d_\alpha \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^\alpha(\Omega)}\Big) \tag{3.17}$$

com $d_\alpha = 0$ *se* $\alpha \geq 2$ *e* $d_\alpha = 1$ *se* $1 < \alpha < 2$.

3.2 Equações de Navier-Stokes estacionárias

Dada a função vetorial $\boldsymbol{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar uma função vetorial $\boldsymbol{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tais que

$$-\nu\Delta\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.18}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \tag{3.20}$$

Lema 3.2. *Seja* $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*

(*i*) $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ e existe uma distribuição $p \in L^2(\Omega)$ tais que as equações (3.18) e (3.19) são satisfeitas no sentido das distribuições em Ω e (3.20) no sentido do traço,

(*ii*) $\boldsymbol{u} \in V$ satisfaz

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}.$$

com a forma trilinear $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ dada por

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \boldsymbol{u}_i(x) D_i \boldsymbol{v}_j(x) \boldsymbol{w}_j(x) dx.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha a afirmação (*i*) é verdadeira. Usando os mesmos argumentos do Lema 3.1 temos que $\boldsymbol{u} \in V$. Além disso,

$$\left\langle -\nu\Delta\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p, \varphi \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \varphi \rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Tomando $\varphi = \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \subset \mathbb{D}(\Omega)$ obtemos

$$\nu \left\langle -\Delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} + \left\langle \nabla p, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = \left\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{v}_j \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i(x) D_i \boldsymbol{u}_j(x) \right) \boldsymbol{v}_j(x)\,dx \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \boldsymbol{u}_i(x) D_i \boldsymbol{u}_j(x) \boldsymbol{v}_j(x)\,dx \\ &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Combinando (3.4), (3.5), (3.6) e (3.21) tem-se

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{3.22}$$

Porém, $\widetilde{V}$ é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbb{L}^n(\Omega)$ e portanto para cada $\boldsymbol{v} \in \widetilde{V}$ existe uma sequência $(\boldsymbol{v}_n)$ em $\mathcal{V}$ convergindo para $\boldsymbol{v}$ em $\widetilde{V}$ e pela continuidade dos membros de (3.22) concluímos que $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n)) \to ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$, $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_n) \to b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_n)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. Logo, (3.22) vale para todo $\boldsymbol{v} \in \widetilde{V}$.

($\Leftarrow$) Suponha que a afirmação (ii) é verdadeira. Então, por (3.4), (3.6) e (3.21) tem-se

$$\left\langle \nu \Delta \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \right\rangle_{\mathbb{D}'(\Omega)\times\mathbb{D}(\Omega)} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}.$$

Como $\Delta \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ e $\boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} \in \mathbb{L}^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$, as hipóteses das Proposições 1.1 e 1.2 são satisfeitas e, logo, existe uma distribuição $p \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}$$

é satisfeita no sentido das distribuições em Ω. ■

Observe que o Lema 3.2 garante que, para cada $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, toda $\boldsymbol{u}$ que satisfaz (ii) é solução do problema (3.18)-(3.20) no sentido dado por (i). Logo, podemos definir solução fraca do problema (3.18)-(3.20) do seguinte modo:

Definição 3.2. *Dada $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, dizemos que $\boldsymbol{u} \in V$ é solução fraca de* (3.18)-(3.20) *se*

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}.$$

3.2.1 Existência

No seguinte teorema mostraremos que o problema de Navier-Stokes estacionário tem solução.

Teorema 3.2. *Seja* $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. *Então o problema* (3.18)-(3.20) tem solução fraca $\boldsymbol{u} \in V$ tal que $p \in L^2(\Omega)$.

Demonstração: Para provarmos a existência de solução fraca usaremos *método de Galerkin* (veja seção 1.3) e argumento de ponto fixo, o Lema 1.2.

Como $\widetilde{V}$ é um espaço de Banach separável podemos considerar uma base $(\boldsymbol{v}_m) \subset \mathcal{V}$ de $\widetilde{V}$, $\widetilde{V}_m$ o espaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\boldsymbol{u}_m \in \widetilde{V}_m$, tal que

$$\boldsymbol{u}_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_{im} \boldsymbol{v}_i, \qquad \xi_{i,m} \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

$$\nu((\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_j)) + b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_j) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.24}$$

Primeiro provaremos que, para cada m fixo, o problema (3.23)-(3.24) tem uma única solução. Por simplicidade de notação omitiremos, nesta prova, o índice m de $\boldsymbol{u}_m$.

Considere, para cada $\boldsymbol{u} \in \widetilde{V}_m$, a aplicação $F : \widetilde{V}_m \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Logo, $F_{\boldsymbol{u}}$ é um funcional linear contínuo em $(\widetilde{V}_m, \|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)})$. Aplicando o Teorema da representação de Riez temos que existe um único $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}} \in \widetilde{V}_m$ tal que

$$F_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = ((\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{v})), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \widetilde{V}_m.$$

Deste modo, podemos considerar a aplicação $P_m : \widetilde{V}_m \to \widetilde{V}_m$ dada por $P_m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{u}}$.

Afirmamos que P_m é contínua. De fato, seja $(\boldsymbol{u}_k)$ uma sequência tal que $(\boldsymbol{u}_k)$ converge para $\boldsymbol{u}$ em $\widetilde{V}_m$. Então, $(\boldsymbol{u}_k)$ é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Fazendo $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}$, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as propriedades $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ obtemos

$$
\begin{aligned}
|((P_m(\boldsymbol{u}_k) - P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{w}))| &= |F_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{w}) - F_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})| \\
&\leq |\nu((\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w})) + b(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w})| \\
&\leq (\nu + C_b(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_k\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)})) \|\boldsymbol{v}_k\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \\
&\leq (\nu + C_b(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} + M)) \|\boldsymbol{v}_k\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Tomando $\boldsymbol{w} = P_m(\boldsymbol{u}_k) - P_m(\boldsymbol{u})$ na desigualdade acima, tem-se

$$
\|P_m(\boldsymbol{u}_k) - P_m(\boldsymbol{u})\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq (\nu + C_b(\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} + M)) \|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} .
$$

Logo, a aplicação P_m é contínua.

Agora provaremos que $(P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} > 0$. De fato, usando as propriedades $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
((P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})) &= \nu \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&= \nu \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \\
&\geq \nu \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} - \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Poincaré, tem-se

$$
\begin{aligned}
((P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})) &\geq \nu \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} - c_p \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \\
&\geq \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} (\nu \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} - c_p \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}).
\end{aligned}
$$

Portanto, para $k > c_p/\nu \|\boldsymbol{f}\|_{V'}$ e $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = k$ temos que $((P_m(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u})) > 0$ com c_p a constante da desigualdade de Poincaré. Deste modo, as hipóteses do Lema 1.2 são satisfeitas e podemos concluir que existe $\boldsymbol{u} \in \widetilde{V}_m$ tal que $P_m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$,ou seja , $\boldsymbol{u}$ é solução de (3.23)-(3.24).

No que segue, obteremos estimativas *a priori* da solução $\boldsymbol{u}_m$ do problema aproximado (3.24). Para isto, multiplique (3.24) por ξ_{jm}, some para $j = 1, \ldots, m$ e use o Lema 1.7 para obter

$$
\nu \|\boldsymbol{u}_m\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - b(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_m) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c_p \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_m\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} .
$$

Portanto,

$$\|\boldsymbol{u}_m\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_p}{\nu} \|\boldsymbol{f}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} . \tag{3.25}$$

Deste modo, a seqüência $(\boldsymbol{u}_m)$ é uniformente limitada em V. Como V é uma espaço de Banach reflexivo e a imersão de V em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ é compacta temos que existe $\boldsymbol{u} \in V$ e uma subsequência $(\boldsymbol{u}_{m_k})$ de $(\boldsymbol{u}_m)$ tais que

$$\boldsymbol{u}_{m_k} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad V. \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{u}_{m_k} \to u \quad \text{em} \quad \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{3.27}$$

Tomando $m = m_k$ em (3.24), usando as convergências (3.26) e (3.27) podemos passar o limite em (3.24) e obter

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j)) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_j)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \;\; j = 1, \ldots, m$$

para todo $\boldsymbol{v} \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{V}_m$.

Como o espaço $\bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{V}_m$ é denso em $\widetilde{V}$, então igualdade acima vale para todo $\boldsymbol{v} \in \widetilde{V}$.

E a prova do Teorema 3.2 está completa. ■

3.2.2 Unicidade

No seguinte teorema mostraremos que o problema de Navier-Stokes estacionário tem solução única quando os dados satisfazem certas condições e $n \leq 4$.

Teorema 3.3. *Se $n \leq 4$ e ν é suficientemente grande tal que*

$$\nu^2 > C_b \|\boldsymbol{f}\|_{V'} . \tag{3.28}$$

então o problema (3.18)-(3.20) *tem uma única solução.*

Demonstração: Para $n \leq 4$ podemos tomar $\widetilde{V} = V$. Assim, a solução fraca $\boldsymbol{u}$ de (3.18)-(3.20) satisfaz

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} , \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.29}$$

Agora, tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ e aplicando o Lema 1.7 obtemos

$$\nu \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle_{V' \times V} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{V'} \|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} ,$$

o que implica

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}\|_{V'} \tag{3.30}$$

Agora, sejam $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{z}$ duas soluções de (3.18)-(3.20) e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{z}$. Então,

$$\nu((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.31}$$

$$\nu((\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.32}$$

Subtraindo (3.32) e (3.31) obtemos

$$\nu((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0.$$

Agora, tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ e usando o Lema 1.7 tem-se

$$\nu\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = -b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}).$$

Usando as propriedades de $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ tem-se

$$\nu\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Usando (3.30) para a solução $\boldsymbol{w}$ obtemos

$$\nu\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\nu}\|\boldsymbol{f}\|_{V'}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\left(\nu - \frac{C}{\nu}\|\boldsymbol{f}\|_{V'}\right)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq 0 \Rightarrow \left(\nu^2 - C\|\boldsymbol{f}\|_{V'}\right)\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \leq 0.$$

Mas, por hipótese tem-se (3.28), o que implica que $\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} = 0$, ou seja, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

E a prova do Teorema 3.3 está completa. ■

3.3 Equações de Stokes de evolução

Dadas as funções vetoriais $\boldsymbol{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar uma função vetorial $\boldsymbol{u} : Q \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : Q \to \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{em } Q, \tag{3.33}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{em } Q, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{em } S, \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x) \qquad \text{em } \Omega. \tag{3.36}$$

Para obtermos a formulação fraca do problema (3.33)-(3.36) consideramos $\boldsymbol{u} \in \left(C^2(\overline{Q})\right)^n$ e $p \in C^1(\overline{Q})$ soluções clássicas de (3.33)-(3.36). Fazendo o produto escalar de $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ com (3.33), integrando sobre Ω e usando os mesmos argumentos da Seção 3.1, obtemos

$$(\boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.37}$$

Por outro lado, sabemos que $(\boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$.

Estes resultados motivam a seguinte formulação fraca para o problema (3.33)-(3.36). Considere V e H os espaços de Hilbert definidos na Seção 1.1.1 do Capítulo 1.

Formulação Variacional 3.1. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$, queremos encontrar uma função $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} \quad em \quad \mathcal{D}'(0,T), \ \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.39}$$

Definição 3.3. *Sejam $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$. Se $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ satisfaz* (3.38)-(3.39), então dizemos que $\boldsymbol{u}$ é solução fraca de (3.33)-(3.36).

No que segue, usaremos a relação entre formas e operadores descrita na Seção 1.4.4 do Capítulo 1 para obter uma formulação equivalente à dada na definição 3.1.

Para cada $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ considere a aplicação $t \longmapsto A\boldsymbol{u}(t)$ defindas q.s. em $[0,T]$ por

$$\begin{aligned} &A\boldsymbol{u}(t) \in V', \\ &< A\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} >_{V' \times V} = ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Com o seguinte resultado obteremos algumas propriedades do operador A:

Proposição 3.1. *Se $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ então $A\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$.*

Demonstração: Note que $A\boldsymbol{u}(t) \in V'$ e $t \longmapsto A\boldsymbol{u}(t)$ é mensurável q.s. em $[0,T]$. Como $((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))$ é uma forma bilinear e contínua em V temos que

$$| < A(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} > | = |((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}| \leq C||\boldsymbol{u}(t)||\,||\boldsymbol{v}||.$$

Logo,

$$\frac{|< A(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} >|}{||\boldsymbol{v}||} \leq C||\boldsymbol{u}(t)|| \Rightarrow ||A\boldsymbol{u}(t)||_*^2 \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2.$$

Portanto,

$$\int_0^T ||A\boldsymbol{u}(t)||_*^2 \, dt \leq \int_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||^2 \, dt \Rightarrow ||A\boldsymbol{u}||_{L^2(0,T;V')} \leq C||\boldsymbol{u}||_{L^2(0,T;V)},$$

ou seja, $A\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$ e $A \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V), L^2(0,T;V'))$ e a prova da Proposição 3.1 está completa. ■

Teorema 3.4. *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *é solução* (3.38) *então* $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V')$.

Demonstração: Observe que $\langle A\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V' \times V} = ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Então, pelo Lema 1.3 da Seção 1.4 do Capítulo 1, cada solução $\boldsymbol{u}$ de (3.38) satisfaz

$$\frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V' \times V} = \langle \boldsymbol{f}(t) - \nu A\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V' \times V} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Logo, $\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t) - \nu A\boldsymbol{u}(t) \in V'$. Então, aplicando a Proposição 3.1 e usando que $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$, o resultado segue. ■

Observe que, podemos aplicar o Lema 1.4 da Seção 1.4 do Capítulo 1 e obter $\boldsymbol{u} \in C([0,T];H)$, o que justifica a condição (3.39).

Portanto, temos a seguinte formulação equivalente do problema (3.38)-(3.39):

Formulação Equivalente 3.1. *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$, *queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V') \\ &\boldsymbol{u}' + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \qquad \textit{em} \quad L^2(0,T;V'), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Resta verificarmos a equivalência entre o problema (3.41) e o problema original (3.33)-(3.36). Como (3.41) é obtida essencialmente multiplicando-se (3.33) por uma função de $\mathcal{V}$, é suficiente recuperarmos a pressão p (perdida no processo). Para isto, considere o seguinte problema:

Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$, queremos encontrar o par $(\boldsymbol{u},p) \in X \times \mathcal{D}'(Q)$ com $X = L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tal que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} && \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q) \\ &\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Lema 3.1. *Os problemas* (3.41) *e* (3.42) *são equivalentes.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Claramente, se $(\boldsymbol{u},p)$ é solução de (3.42) então $\boldsymbol{u}$ satisfaz (3.41).

$(\Rightarrow)$ suponha que $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ é solução de (3.41) e considere a aplicação $\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v}) : \mathbb{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v}) = \int_0^t \Big(\langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} - \nu((\boldsymbol{u}(s),\boldsymbol{v}))\Big)\, ds - (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Para cada t, $\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v})$ é um funcional linear em $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ que se anula em V. Então, pelo Lema 1.7 da Seção 1.4 do Capítulo 1 temos que, para cada t, existe uma única função $P(t) \in L^2_0(\Omega)$ tal que

$$\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v}) = - < \nabla P(t), \boldsymbol{v} >_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbb{H}^1_0(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),$$

ou seja,

$$(P(t), \mathrm{div}\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_0^t \Big(\langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} - \nu(\boldsymbol{u}(s),\boldsymbol{v})_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}\Big)\, ds - (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \tag{3.43}$$

$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$.

Como $A\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$ podemos verificar que $P \in C([0,T], L^2_0(\Omega))$.

Agora, diferenciando (3.43) obtemos

$$(P'(t), \mathrm{div}\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} - \nu((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})) - (\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

Tomando $p = P'$ em $\mathcal{D}'(Q)$ obtemos a primeira equação de (3.42) e a prova do Lema 3.1 está completa. ■

3.3.1 Existência e unicidade

No seguinte teorema, provaremos que o problema (3.38)-(3.39) tem um única solução.

Teorema 3.5. *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in H$*, existe uma única solução fraca* $\boldsymbol{u}$ *do problema* (3.38)-(3.39).

Demonstração: Para provarmos a existência usaremos novamente o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, considere $(\boldsymbol{v}_m)$ uma base de V, V_m o espaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: encontrar $\boldsymbol{u}_m \in V_m$ tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\boldsymbol{v}_j \qquad & \\ (\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \nu((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_i)) &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_i \rangle_{V' \times V}, \quad i = 1, \ldots, m \\ \boldsymbol{u}_m(0) &= \boldsymbol{u}_{0m} \in V_m. \end{aligned} \tag{3.44}$$

$\boldsymbol{u}_{0m}$ escolhido tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{u}_{0m} = \boldsymbol{u}_0$ em H. Por exemplo, $\boldsymbol{u}_{0m}$ pode ser a projeção ortogonal de $\boldsymbol{u}_0$ em V_m.

Primeiro provaremos que o problema aproximado (3.44) tem uma única solução para cada m fixo. Para isto, note que (3.44) é um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem dado por

$$\sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\, g'_{jm}(t) + \nu \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}\, g_{jm}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_i \rangle_{V' \times V}, \quad i = 1, \ldots, m$$

ou na forma matricial

$$A\, G'(t) + B\, G(t) = F(t)$$

com

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \qquad & G_i(t) &= g_{im}(t), \\ B_{ij} &= \nu(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}, \qquad & F_i(t) &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_i \rangle_{V' \times V}. \end{aligned}$$

Como os vetores $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ são linearmente independentes, a matriz A é inversível e obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} G'(t) + A^{-1}\, B\, G(t) = A^{-1}\, F(t) \\ G(0) = \Psi \end{cases} \tag{3.45}$$

para $\Psi_i = \alpha_{im}$ os coeficientes de $\boldsymbol{u}_{0m}$.

Logo, pela teoria da equações diferenciais ordinárias (para mais detalhes consulte Coddington[4]) existe uma única $G(t)$ solução de (3.45) tal que g_{im} é absolutamente contínua. Mas, a função $t \mapsto \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_i \rangle_{V' \times V}$ pertence a $L^2(0,T)$, e logo, $g'_{im} \in L^2(0,T)$. Portanto, para cada m, existe uma única $\boldsymbol{u}_m$ solução de (3.44) tal que

$$\boldsymbol{u}_m \in \mathcal{C}([0,T]; V_m) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u}'_m \in L^2(0,T; V_m).$$

No que segue, representaremos o produto interno e a norma de $\mathbb{L}^2(\Omega)$ por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente. Representaremos o produto interno e a norma de $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ por $((\cdot,\cdot))$ e $\|\cdot\|$, respectivamente e $\langle \cdot,\cdot \rangle$ representará o par de dualidade de V' e V.

Agora obteremos estivativas *a priori* da solução $\boldsymbol{u}_m$ de (3.44). Para isto, multiplique a primeira equação de (3.44) por $g_{im}(t)$, some as equações com $i = 1, \ldots, m$ para obter

$$(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) + \nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle .$$

Usando

$$2(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2$$

tem-se

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + 2\nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 = 2\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle . \tag{3.46}$$

Observando que

$$2\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle \leq 2\|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'} \|\boldsymbol{u}_m(t)\| \leq \nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 + \frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} \tag{3.47}$$

(3.46) torna-se

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + \nu \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} . \tag{3.48}$$

Integrando (3.48) em $(0,t)$ com $t \in (0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(s)\|^2 ds &\leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} dt \\ &\leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{0\leq t\leq T} |\boldsymbol{u}_m(t)|^2 \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} dt.] \tag{3.49}$$

Integrando (3.48) em $(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_m(T)|^2 + \nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 dt &\leq |u_{0m}|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} dt \\ &\leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{V'} dt. \end{aligned}$$

Logo,
$$\int_0^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2\, dt \leq \frac{1}{\nu}|u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2\, dt. \tag{3.50}$$
Por (3.50) e (3.49), temos que a sequência $\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$. Portanto, existem $\boldsymbol{u}^* \in L^\infty(0,T;H)$, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ e uma subsequência $(\boldsymbol{u}_{m'})$ de $(\boldsymbol{u}_m)$ tais que
$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{m'} &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{u}^* \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H),\\ \boldsymbol{u}_{m'} &\rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V). \end{aligned}$$
Podemos mostrar que $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}$ em $L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ (para mais detalhes consulte Temam [14, p. 258]).

No que segue, vamos usar o seguinte resultado que pode ser encontrado em Zeidler [16, p. 411]:
$$\int_0^T \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{u}_{m'}(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle \boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{u}(t)\rangle\, dt, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in L^2(0,T;V'). \tag{3.51}$$

Agora, seja $\psi \in \mathcal{C}^1([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando (3.44) por $\psi(t)$ e integrando em $(0,T)$ obtemos
$$\int_0^T (\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)dt + \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j))\psi(t)dt = \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j\rangle\, \psi(t)dt.$$
Mas, por integração por partes, temos
$$\int_0^T (\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)dt = -(\boldsymbol{u}_m(0), \boldsymbol{v}_j)\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi'(t)dt.$$
Logo,
$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t), \psi'(t)\boldsymbol{v}_j)dt &+ \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t), \psi(t)\boldsymbol{v}_j))dt\\ &= (\boldsymbol{u}_{0m}, \boldsymbol{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j\rangle\, \psi(t)dt. \end{aligned}$$
Por (3.51) e a definição de $\boldsymbol{u}_{0m}$ temos que
$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \psi'(t)\boldsymbol{v}_j)dt &+ \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \psi(t)\boldsymbol{v}_j))dt\\ &= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j\rangle\, \psi(t)dt \end{aligned} \tag{3.52}$$
Como (3.52) é valida para cada $\boldsymbol{v}_j$, qualquer que seja j, então por linearidade
$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt &+ \nu\int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))\psi(t)dt\\ &= (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle\, \psi(t)dt \end{aligned} \tag{3.53}$$

para todo $\boldsymbol{v} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$. Mas, $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$ é denso em V, então, para cada $\boldsymbol{v} \in V$, existe uma sequência $(\boldsymbol{v}_n) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$ convergindo pra $\boldsymbol{v}$ em V. Como ambos os membros de (3.53) definem funcionais lineares contínuos na variável $\boldsymbol{v}$ temos que (3.53) vale para todo $\boldsymbol{v} \in V$.

Fazendo $\psi = \phi \in \mathcal{D}((0,T))$ em (3.53) temos que

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \tag{3.54}$$

Resta mostrarmos que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$. Para isto, multiplicando (3.54) por ψ (o mesmo ψ usado em (3.53)), integrando em $(0,T)$ e usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)dt \quad &+ \quad \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))\psi(t)dt \\ &= \quad (\boldsymbol{u}(0), \boldsymbol{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \, \psi(t)dt. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Combinando (3.53) e (3.55) tem-se

$$(\boldsymbol{u}(0) - \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})\psi(0) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Logo, para $\psi(0) \neq 0$ temos

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0.$$

Agora provaremos a unicidade de solução fraca. Para isto, suponhamos que $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ são soluções de (3.38)-(3.39) e $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ então

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V,$$
$$\boldsymbol{u}(0) = 0.$$

Tomando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}(t)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \nu \left\| \boldsymbol{u}(t) \right\|^2 = 0.$$

Logo, $\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}(t)|^2 \leq 0$, integrando em $(0,T)$ tem-se $|\boldsymbol{u}(t)|^2 \leq |\boldsymbol{u}(0)|^2 = 0$, o que implica $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

E a prova do Teorema 3.5 está completa. ■

3.3.2 Regularidade

Proposição 3.2. *Sejam* Ω *um domínio de classe* $\mathcal{C}^2$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H)$ *e* $\boldsymbol{u}_0 \in V$. *Se* $(\boldsymbol{u}, p)$ *é a solução de* (3.33)-(3.36) então

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T,\mathbb{H}^2(\Omega)), \quad \boldsymbol{u}' \in L^2(0,T,H) \quad \text{e} \quad p \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$$

Demonstração: Multiplicando a primeira equação de (3.44) por $g'_{im}(t)$ e somando para $i = 1, \dots, m$, obtemos

$$|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 + \nu((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}'_m(t))) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}'_m(t)),$$

ou ainda,

$$2|\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 + \nu\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 = 2(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}'_m(t)).$$

Integrando em $(0,T)$ e usando a desigualdade de Cauchy tem-se

$$\begin{aligned} 2\int_0^T |\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 dt + \nu\|\boldsymbol{u}_m(T)\|^2 &= \nu\|\boldsymbol{u}_{0m}\|^2 + 2\int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}'_m(t))dt \\ &\leq \nu\|\boldsymbol{u}_{0m}\|^2 + \int_0^T |\boldsymbol{f}(t)|^2 dt + \int_0^T |\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 dt \end{aligned}$$

o que implica

$$\int_0^T |\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 dt \leq \nu\|\boldsymbol{u}_{0m}\|^2 + \int_0^T |\boldsymbol{f}(t)|^2 dt. \tag{3.56}$$

Podemos tomar a sequência $(\boldsymbol{w}_m)$ tal que $\boldsymbol{u}_{0m}$ seja a projeção ortogonal em V de $\boldsymbol{u}_0$ sobre V_m, logo

$$\boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0, \quad \text{em} \quad V \quad \text{e} \quad \|\boldsymbol{u}_{0m}\| \leq \|\boldsymbol{u}_0\|, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Então, (3.56) torna-se

$$\int_0^T |\boldsymbol{u}'_m(t)|^2 dt \leq \nu\|\boldsymbol{u}_0\|^2 + \int_0^T |\boldsymbol{f}(t)|^2 dt. \tag{3.57}$$

Assim, a sequência $(\boldsymbol{u}'_m)$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H)$ e, logo, existe $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;H)$. Portanto, $\boldsymbol{f} - \boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ e podemos considerar o seguinte problema estacionário:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\boldsymbol{u}(t) + \nabla p(t) &= \boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{u}'(t) && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u}(t) &= 0 && \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{u}(t) &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

para q.s. $t \in [0,T]$. Aplicando a proposição 3.1 da Seção 3.1 do Capítulo 2, obtemos $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ e $p(t) \in H^1(\Omega)$. Além disso,

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)} + \|p(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Portanto, $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T,\mathbb{H}^2(\Omega))$ e $p \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

E a prova da proposição 3.2 está completa. ■

3.4 Equações de Navier-Stokes de evolução

Considere $n \leq 4$. Dadas as funções vetoriais $\boldsymbol{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, queremos encontrar uma função vetorial $\boldsymbol{u} : Q \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p : Q \to \mathbb{R}$ tais que

$$\boldsymbol{u}' - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \qquad \text{em } Q, \tag{3.58}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{em } Q, \tag{3.59}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{em } S, \tag{3.60}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) \qquad \text{em } \Omega. \tag{3.61}$$

Formulação fraca

Para obtermos a formulação fraca do problema (3.58)-(3.61) consideramos $\boldsymbol{u} \in \left(C^2(\overline{Q})\right)^n$ e $p \in C^1(\overline{Q})$ soluções clássicas de (3.58)-(3.61). Fazendo o produto escalar de $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ com (3.58), integrando sobre Ω e usando os mesmos argumentos da Seção 3.3 obtemos

$$(\boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}),$$
$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0.$$

Assim, temos a seguinte formulação variacional do problema (3.58)-(3.61):

Formulação Variacional 3.2. *Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $u_0 \in H$, queremos encontrar uma função $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tal que*

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) + \nu((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle , \tag{3.62}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.63}$$

Definição 3.4. *Sejam* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$. *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *satisfaz* (3.62)-(3.63), então dizemos que $\boldsymbol{u}$ é solução fraca de (3.58)-(3.61)

No que segue usaremos a relação entre formas e operadores descrita Seção 1.4.4 do Capítulo 1 para obter uma formulação equivalente à dada na definição 3.2.

Para cada $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ considere as aplicações $t \longmapsto A\boldsymbol{u}(t)$ e $t \longmapsto B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t))$ defindas q.s. em $[0,T]$ e dadas por

$$A\boldsymbol{u}(t), B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)) \in V',$$

$$\langle A\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} = ((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.64}$$

$$\langle B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)),\boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} = b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.65}$$

Usaremos a notação $B(\boldsymbol{u}(t))$ para $B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t))$.

Nas Proposições abaixo provaremos algumas propriedades do operador B. Para isto, precisamos dos seguintes resultados de interpolação, cujas provas podem ser encontradas em [14, p. 291].

Lema 3.2. *Para* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ *temos que*

$$||\boldsymbol{v}||_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C\sqrt{2}\,||\boldsymbol{v}||^{1/2}_{\mathbb{H}^1(\Omega)}\,||\boldsymbol{v}||^{1/2}_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad se \quad n=2, \tag{3.66}$$

$$||\boldsymbol{v}||_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C\sqrt{2}\,||\boldsymbol{v}||^{3/4}_{\mathbb{H}^1(\Omega)}||\boldsymbol{v}||^{1/4}_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad se \quad n=3. \tag{3.67}$$

Proposição 3.2. *Se* $n \leq 4$ *e* $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$ *então* $B\boldsymbol{u} \in L^1(0,T;V')$.

Demonstração: Note que $B(\boldsymbol{u}(t)) \in V'$ e $t \longmapsto B(\boldsymbol{u}(t))$ é mensurável q.s. em $[0,T]$. Como, para $n \leq 4$, $b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})$ é trilinear e contínua em V temos que

$$| < B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v} > | = |b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})| \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2\,||\boldsymbol{v}||.$$

Logo,

$$\frac{| < B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v} > |}{||\boldsymbol{v}||} \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2 \Rightarrow ||B\boldsymbol{u}(t)||_* \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2.$$

Portanto,

$$\int_0^T ||B\boldsymbol{u}(t)||_*\,dt \leq C\int_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||^2\,dt \Rightarrow ||B\boldsymbol{u}||_{L^1(0,T;V')} \leq C||\boldsymbol{u}||_{L^2(0,T;V)}, \tag{3.68}$$

ou seja, $B\boldsymbol{u} \in L^1(0,T;V')$ e $B : L^2(0,T;V) \to L^1(0,T;V')$ e a prova da Proposição 3.2 está completa. ■

Proposição 3.3. *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *então*

$$B\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V') \quad se \quad n=2, \tag{3.69}$$

$$B\boldsymbol{u} \in L^{4/3}(0,T;V') \quad se \quad n=3. \tag{3.70}$$

Demonstração: Pela propriedades da forma $b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})$, dadas nos Lemas 1.6 e 1.7 da Seção 1.5 do Capítulo 1 temos que

$$|b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})| = |-b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}(t))| \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\,||v||.$$

Portanto,

$$|< B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v} >| = |b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})| \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)}\,||\boldsymbol{v}||.$$

Logo,

$$\frac{|< B(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v} >|}{||\boldsymbol{v}||} \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{L^4(\Omega)} \Rightarrow ||B\boldsymbol{u}(t)||_* \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)}. \tag{3.71}$$

Agora, vamos considerar separadamente os casos $n=2$ e $n=3$.

Se $n=2$, podemos combinar (3.66) e (3.71) e obter

$$||B\boldsymbol{u}(t)||_* \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C||\boldsymbol{u}(t)||\,||\boldsymbol{u}(t)||_H,$$

o que implica $\int_0^T ||B\boldsymbol{u}(t)||^2_*\,dt \leq C\int_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||^2\,||\boldsymbol{u}(t)||^2_H\,dt$, e logo,

$$||B\boldsymbol{u}||_{L^2(0,T;V')} \leq C||\boldsymbol{u}||_{L^2(0,T;V)}||\boldsymbol{u}||_{L^\infty(0,T;H)},$$

ou seja, $B\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V')$ se $n=2$.

Se $n=3$, podemos combinar (3.67) e (3.71) e obter

$$||B\boldsymbol{u}(t)||_* \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq C||\boldsymbol{u}(t)||^{3/2}\,||\boldsymbol{u}(t)||^{1/2}_H,$$

o que implica $\int_0^T ||B\boldsymbol{u}(t)||^{4/3}_*\,dt \leq C\int_0^T ||\boldsymbol{u}(t)||^2\,||\boldsymbol{u}(t)||^{2/3}_H\,dt$, e logo,

$$||B\boldsymbol{u}||_{L^{4/3}(0,T;V')} \leq C||\boldsymbol{u}||^{3/2}_{L^2(0,T;V)}||\boldsymbol{u}||^{1/2}_{L^\infty(0,T;H)},$$

ou seja, $B\boldsymbol{u} \in L^{4/3}(0,T;V')$ se $n=3$.

E prova da Proposição 3.3 está completa. ∎

Teorema 3.6. *Se* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *é solução de* (3.62) *então, para* $n \leq 4$, *temos que* $\boldsymbol{u}' \in L^1(0,T;V')$. *Em particular,*

$$\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V') \quad se \quad n = 2, \tag{3.72}$$

$$\boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0,T;V') \quad se \quad n = 3. \tag{3.73}$$

Demonstração: Observe que $\langle A\boldsymbol{u}(t) - B\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} = ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})) + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Então, pelo Lema 1.3 da Seção 1.4 do Capítulo 1, cada solução $\boldsymbol{u}$ de (3.62) satisfaz

$$\langle \boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} = \langle \boldsymbol{f}(t) - \nu A\boldsymbol{u}(t) - B\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V'\times V} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Logo, $\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}(t) - \nu A\boldsymbol{u}(t) - B\boldsymbol{u}(t) \in V'$. Então, aplicando as Proposições 3.2 e 3.3 e usando que $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$, o resultado segue. ■

Pelos resultados do Teorema 3.6, para $n \leq 4$, tem-se $\boldsymbol{u} \in C([0,T];V')$, o que justifica a condição (3.63). Observe que , para $n = 2$, podemos aplicar o Lema 1.4 da Seção 1.4 do Capítulo 1 e obter $\boldsymbol{u} \in C([0,T];H)$.

Portanto, temos a seguinte formulação equivalente do problema (3.62)-(3.63):

Formulação Equivalente 3.2. *Para* $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$, *queremos encontrar uma função* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}' \in L^1(0,T;V') \quad && se \quad n \leq 4, \\ &\boldsymbol{u}' + A\boldsymbol{u} + B\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad && em \quad L^1(0,T;V'), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Em particular, $\boldsymbol{u}' \in L^{4/3}(0,T;V')$ *se* $n = 3$ *e* $\boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;V')$ *se* $n = 2$.

Resta verificarmos a equivalência entre o problema (3.74) e o problema original (3.58)-(3.61). Como (3.74) é obtida essencialmente multiplicando-se (3.58) por uma função de $\mathcal{V}$, é suficiente recuperarmos a pressão p (perdida no processo). Para isto, considere o seguinte problema:

Para $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $\boldsymbol{u}_0 \in H$, queremos encontrar o par $(\boldsymbol{u}, p) \in X \times \mathcal{D}'(Q)$ com $X = L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ tal que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad && \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q) \\ &\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) && \text{em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Lema 3.3. *Os problemas* (3.74) *e* (3.75) *são equivalentes.*

Demonstração: A prova é essencialmente a dada no Lema 3.1 da Seção 3.3 deste Capítulo, definindo-se o funcional linear $\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v}) : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\boldsymbol{l}(t;\boldsymbol{v}) = \int_0^t \Big(\langle \boldsymbol{f}(s), \boldsymbol{v} \rangle_{V' \times V} - \nu((\boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{v})) - b(\boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{u}(s), \boldsymbol{v}) \Big) \, ds - (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} - (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

■

3.4.1 Existência

No seguinte resultado provaremos existência de solução do problema (3.62)-(3.63) (ou (3.74)).

Teorema 3.7. *Para $n \leq 4$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;V')$ e $u_0 \in H$, existe uma solução fraca $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ do problema* (3.62)-(3.63).

Demonstração: Para mostrarmos a existência de solução fraca do problema (3.62)-(3.63) vamos aplicar o *método de Faedo-Galerkin.* Para isto, seja $(\boldsymbol{v}_m)$ uma base de V, V_m o espaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada m fixo, encontrar uma solução aproximada $\boldsymbol{u}_m \in V_m$ na forma

$$\boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \boldsymbol{v}_i$$

satisfazendo, para $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}_m'(t), \boldsymbol{v}_j) + \nu((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)) + b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j) &= \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle, & (3.76) \\ \boldsymbol{u}_m(0) &= \boldsymbol{u}_{0m} \in V_m. & (3.77) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{u}_{0m}$ escolhido tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{u}_{0m} = \boldsymbol{u}_0$ em H. Por exemplo, $\boldsymbol{u}_{0m}$ pode ser a projeção ortogonal de $\boldsymbol{u}_0$ em V_m.

Observe que o problema (3.76) é equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\sum_{i=1}^m (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) g_{im}'(t) + \nu \sum_{i=1}^m ((\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) g_{im}(t) + \sum_{i,l=1}^m b(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_j) g_{im}(t) g_{lm}(t) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle,$$

para $1 \leq j \leq m$,

$$g_{im}(0) = g_{im}^0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m. \tag{3.78}$$

com g_{im}^0 os coeficientes de $\boldsymbol{u}_{0m}$.

Como a matriz de elementos $[(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)]$ é inversível, pois $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ são LI, temos que (3.78) torna-se

$$\begin{aligned} & g'_{jm}(t) = \Phi_j(t, g_{1m}(t), g_{2m}(t), \cdots, g_{mm}(t)) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq m, \\ & g_{im}(0) = g_{im}^0 \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Agora, pelo Teorema de Carathéodory [4], o sistema (3.79) tem uma solução maximal local $\boldsymbol{u}_m(t)$ no intervalo $[0, t_m)$ para algum $t_m \leq T$. Se $t_m < T$ então necessariamente temos que

$$\lim_{t \to t_m^-} ||\boldsymbol{u}_m(t)||_H = \infty.$$

Portanto, se mostrarmos que $||\boldsymbol{u}_m(t)||_H$ é limitada independente de m e t então provaremos que $t_m = T$, $\forall m$, o que implica que $\boldsymbol{u}_m(t)$ é solução global. Para isto, multiplique (3.76) por $g_{jm}(t)$, some as equações para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) + \nu||\boldsymbol{u}_m(t)|| + b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle$$

e pelo Lema 1.7 da Seção 1.4 do Capítulo 1 obtemos

$$(\boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) + \nu||\boldsymbol{u}_m(t)|| = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + 2\nu \left\| \boldsymbol{u}_m(t) \right\|^2 = 2 \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle. \tag{3.80}$$

Usando (3.47) temos

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + \nu \left\| \boldsymbol{u}_m(t) \right\|^2 \leq \frac{1}{\nu} \left\| \boldsymbol{f}(t) \right\|_{V'}^2. \tag{3.81}$$

Integrando (3.81) em $(0, t)$ obtemos

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \left\| \boldsymbol{u}_m(s) \right\|^2 ds \ & \leq \ \frac{1}{\nu} \int_0^t \left\| \boldsymbol{f}(s) \right\|_{V'}^2 ds + |\boldsymbol{u}_{0m}|^2 \\ & \leq \ \frac{1}{\nu} \int_0^T \left\| \boldsymbol{f}(s) \right\|_{V'}^2 dt + |\boldsymbol{u}_0|^2. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Logo $|\boldsymbol{u}_m(t)|$ é limitada por uma constante que independe de m e t. Portanto, $\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0, T; H)$.

Além disso, fazendo $t = T$ em (3.82) obtemos

$$|\boldsymbol{u}_m(T)|^2 + \nu \int_0^T \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^2 \, dt \leq \frac{1}{\nu} \int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'}^2 \, dt + |\boldsymbol{u}_0|^2. \tag{3.83}$$

Logo, $\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)$. Não é complicado mostrar que $\boldsymbol{u}_m$ é a única solução de (3.79). Portanto,

$$||\boldsymbol{u}_m||_{L^\infty(0,T;H)} + ||\boldsymbol{u}_m||_{L^2(0,T;V)} \leq C \tag{3.84}$$

com C uma constante independente de m.

No que segue, obteremos uma estimativa de alguma derivada fracionada de $\boldsymbol{u}_m$. Pela definição do espaço $\mathcal{H}^\gamma(0,T;V,H)$ (veja Seção 1.4.5.1 do Capítulo 1), primeiro estenderemos $U_m(t)$ por zero fora de $[0,T]$ e depois consideramos a transformada de Fourier da função estendida. Para isto, seja $\widetilde{\boldsymbol{u}}_m : \mathbb{R} \to V$ tal que

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t) = \begin{cases} \boldsymbol{u}_m(t) & \text{se} \quad t \in [0,T], \\ 0 & \text{se} \quad t \in \mathbb{R} \setminus [0,T]. \end{cases}$$

e $\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t)$.

Assim, o sistema (3.76) é estendido para $\mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t), \boldsymbol{v}_j) + \nu((\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t), \boldsymbol{v}_j)) + b(\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t), \widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t), \boldsymbol{v}_j) = \left\langle \widetilde{\boldsymbol{f}}(t), \boldsymbol{v}_j \right\rangle +$$

$$(\boldsymbol{u}_{0m}, \boldsymbol{v}_j)\delta_0 - (\boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{v}_j)\delta_T, \tag{3.85}$$

com δ_0 e δ_T as distribuições de Dirac em 0 e T, respectivamente, e $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ a extensão de $\boldsymbol{f}$ por zero.

Representaremos por $\widehat{\boldsymbol{f}}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $\widetilde{\boldsymbol{f}}(t)$ e $\widehat{B}_m(\tau)$ a transformada de Fourier de $B(\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t))$

Calculando a transformada de Fourier em (3.85) obtemos, para $1 \leq j \leq m$,

$$2i\pi\tau(\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau), \boldsymbol{v}_j) + ((\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau), \boldsymbol{v}_j)) + \left\langle \widehat{B}_m(\tau), \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \left\langle \widehat{\boldsymbol{f}}(\tau), \boldsymbol{v}_j \right\rangle +$$

$$(\boldsymbol{u}_{0m}, \boldsymbol{v}_j) - (\boldsymbol{u}(T), \boldsymbol{v}_j)e^{-2i\pi\tau T}.$$

Multiplicando por $\widehat{g}_{jm}(t)$ (transformada de Fourier de $\widetilde{g}_{jm}(t)$) e somando para $j = 1, \ldots, m$ tem-se

$$2i\pi\tau|\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|^2 + \nu||\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|| + \left\langle \widehat{B}_m(\tau), \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \left\langle \widehat{\boldsymbol{f}}(t), \widehat{\boldsymbol{u}}_m(t) \right\rangle +$$

$$(\boldsymbol{u}_{0m}, \widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)) - (\boldsymbol{u}(T), \widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau))e^{-2i\pi\tau T}.$$

Da parte imaginária da igualdade acima obtemos a seguinte cota superior:

$$2\,\pi\,|\tau|\,|\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|^2 \leq \Big(||\widehat{B}_m(\tau)||_* + ||\widehat{\boldsymbol{f}}(\tau)||_*\Big)||\boldsymbol{u}_m(\tau)|| + \Big(|\widehat{\boldsymbol{u}}_{0m}(\tau)| + |\widehat{\boldsymbol{u}}_m(T)|\Big)|\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|.$$

Mas,

$$||\widehat{\boldsymbol{f}}(\tau)||_* \leq \int_{-\infty}^{+\infty} ||\widetilde{\boldsymbol{f}}(\tau)||_* dt \leq C_1.$$

Além disso, por (3.68) temos

$$||\widehat{B}_m(\tau)||_* \leq \int_{-\infty}^{+\infty} ||B(\widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t), \widetilde{\boldsymbol{u}}_m(t))||_* dt \leq C_2 \int_0^T ||\boldsymbol{u}_m(t)||^2\,dt \Rightarrow ||\widehat{B}_m(\tau)||_* \leq C_3.$$

Lembrando que $|\boldsymbol{u}_m(0)| \leq C$ e $|\boldsymbol{u}_m(T)| \leq C$ obtemos a seguinte estimativa para todo $\tau \in \mathbb{R}$:

$$|\tau||\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|^2 \leq C_4\Big(||\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|| + |\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|\Big). \tag{3.86}$$

Observe que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{||\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)||}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau \leq ||\boldsymbol{u}_m||_{L^2(0,T;V)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^\sigma)^2}\right)^{1/2}.$$

Então, para $\sigma > 1/2$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{||\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)||}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau \leq C_5||\boldsymbol{u}_m||_{L^2(0,T;V)}.$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\boldsymbol{u}}_m(\tau)|}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau \leq C_5||\boldsymbol{u}_m||_{L^2(0,T;H)}.$$

Assim, dividindo os dois lados de (3.86) por $(1+|\tau|^\sigma)$ para algum σ tal que $1/2 < \sigma < 1$ e integrando em $\mathbb{R}$ e usando (3.84) concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau||\boldsymbol{u}_m(\tau)|^2}{1+|\tau|^\sigma}\,d\tau \leq C_6 \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1, \quad \forall m. \tag{3.87}$$

Então, (3.87) junto com (3.86) implicam que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma}|\boldsymbol{u}_m(\tau)|^2\,d\tau \leq C_7$$

para algum γ tal que $0 < \gamma < \dfrac{1}{4}$ (por exemplo, $\gamma = (1-\sigma)/2$).

Logo, $\widetilde{\boldsymbol{u}}_m$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}^\gamma(0, T, V, H)$.

Usando as estimativas (3.86) e aplicando o Teorema 1.6 temos que existe $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ e uma subsequência $(\boldsymbol{u}_l)$ de $(\boldsymbol{u}_m)$ tais que

$$\boldsymbol{u}_l \to \boldsymbol{u} \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;V), \tag{3.88}$$

$$\boldsymbol{u}_l \to \boldsymbol{u} \quad \text{fraco-}* \text{ em} \quad L^\infty(0,T;H), \tag{3.89}$$

$$\boldsymbol{u}_l \to \boldsymbol{u} \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H). \tag{3.90}$$

As convergências (3.88), (3.89) e (3.90) nos permitirão passar o limite no problema (3.76) com $m = l$. Para isto, condidere $\psi \in C^1([0,T])$ tal que $\psi(T) = 0$. Multiplicando (3.76) por $\psi(t)$ e integrando em $[0,T]$ tem-se

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}_m'(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)\,dt + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j))\psi(t)\,dt + \int_0^T b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)\,dt =$$
$$\int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle \psi(t)\,dt.$$

Mas, por integração por partes, temos

$$\int_0^T (\boldsymbol{u}_m'(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)dt = -(\boldsymbol{u}_m(0), \boldsymbol{v}_j)\psi(0) - \int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi'(t)dt.$$

Logo, para $1 \leq j \leq m$ tem-se

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi'(t)\,dt + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j))\psi(t)\,dt +$$
$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j)\psi(t)\,dt = (\boldsymbol{u}_{0m}, \boldsymbol{v}_j)\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle \psi(t)dt. \tag{3.91}$$

Fixando um inteiro arbitrário l_0 e tomando $\boldsymbol{v} \in V_{l_0}$, (3.91) implica que

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt + \nu \int_0^T ((\boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{v}))\psi(t)\,dt +$$
$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{v})\psi(t)\,dt = (\boldsymbol{u}_{0l}, \boldsymbol{v})\psi(0) + \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \psi(t)dt, \quad \forall\, l > l_0. \tag{3.92}$$

Usando a convergência (3.88) temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} \int_0^T (\boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt &= \int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt, \\
\lim_{l\to\infty} \int_0^T ((\boldsymbol{u}_l(t), \boldsymbol{v}))\psi(t)\,dt &= \int_0^T ((\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}))\psi(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^T b(\boldsymbol{u}_l(t),\boldsymbol{u}_l(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt &= -\int_0^T b(\boldsymbol{u}_l(t),\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_l(t))\psi(t)\,dt\\ &= \int_0^T\left(\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega(\boldsymbol{u}_l)_j\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_j}\,(\boldsymbol{u}_l)_i\,\phi(t)\right)dx\,dt,\end{aligned}$$

com $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial x_j}\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Usando (3.90) temos que o produto $(\boldsymbol{u}_l)_j\,(\boldsymbol{u}_l)_i$ converge forte para $\boldsymbol{u}_j\,\boldsymbol{u}_i$ em $L^1(Q)$, portanto

$$\lim_{l\to\infty}\int_0^T b(\boldsymbol{u}_l(t),\boldsymbol{u}_l(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt=\int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt. \tag{3.94}$$

Lembrando que, por hipótese, $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{u}_{0l}=\boldsymbol{u}_0$ em H e usando as convergências (3.93) e (3.94) passamos o limite em (3.92) para obter

$$\begin{gathered}-\int_0^T(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt+\nu\int_0^T((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}))\psi(t)\,dt\\ +\int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt=(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})\psi(0)+\int_0^T\langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle\,\psi(t)\,dt\end{gathered}\tag{3.95}$$

para todo $\boldsymbol{v}\in V_{l_0}$ e $\forall\psi\in C^1([0,T])$ com $\psi(T)=0$.

Como l_0 é arbitrário e $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}V_m$ é denso em V, temos que (3.95) é válida para toda $\boldsymbol{v}\in V$. Além disso, tomando ψ em $\mathcal{D}((0,T))$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})+\nu((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}))+b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})=\langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle\quad\text{em}\quad\mathcal{D}((0,T))\quad\forall\boldsymbol{v}\in V,$$

que é exatamente (3.62).

Resta mostrarmos que $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$. Para isto, multipliquemos(3.62) por ψ (o mesmo ψ usado em (3.95), integrando em $(0,T)$ e usando integração por partes obtemos

$$\begin{gathered}-\int_0^T(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})\psi'(t)\,dt+\nu\int_0^T((\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}))\psi(t)\,dt\\ +\int_0^T b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})\psi(t)\,dt=(\boldsymbol{u}(0),\boldsymbol{v})\psi(0)+\int_0^T\langle \boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle\,\psi(t)\,dt.\end{gathered}\tag{3.96}$$

Comparando (3.95) e (3.96) tem-se

$$(\boldsymbol{u}(0)-\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v})\psi(0)=0,\qquad\forall\boldsymbol{v}\in V.$$

Logo, para $\psi(0)\neq 0$ temos $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0$.

E a prova do Teorema 3.7 está completa. ■

3.4.2 Unicidade para o caso bidimensional

Só temos unicidade da solução do problema (3.62)-(3.63) quando $n = 2$. De fato,

Teorema 3.8. *Para* $n = 2$, *o problema* (3.62)-(3.63) *tem uma única solução* $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$.

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ duas soluções do problema (3.62)-(3.63) e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$. Então, por (3.74), $\boldsymbol{w}$ satisfaz

$$\boldsymbol{w}' - \nu A\boldsymbol{w} + B\boldsymbol{u}_1 - B\boldsymbol{u}_2 = 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T;V'),$$
$$\boldsymbol{w}(0) = 0.$$

Logo,

$$\langle \boldsymbol{w}'(t), \boldsymbol{w}(t)\rangle - \nu\langle A\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{w}(t)\rangle + \langle B\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{w}(t)\rangle - \langle B\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)\rangle = 0, \tag{3.97}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{w}(t)|^2 + 2\nu\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\|^2 + 2b(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{w}(t)) - 2b(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) = 0.$$

Por outro lado,

$$b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) = b(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) - b(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \;\; \text{q.s} \;\; \text{em } (0,T).$$

Isto implica

$$-b(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) = b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) - b(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \;\; \text{q.s} \;\; \text{em } (0,T).$$

Assim,

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{w}(t)) - b(\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) &= b(\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \\ &\quad + b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \\ &= b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{w}(t)|^2 + 2\nu\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\|^2 + 2b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) = 0$$

Usando as propriedades de $b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t))$ e a desigualdade de interpolação (3.66) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{w}(t)|^2 + 2\nu\,\|\boldsymbol{w}(t)\|^2 &= -2\,b(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w}(t)) \\ &\leq C_1\,||\boldsymbol{u}_2(t)||\,||\boldsymbol{w}(t)||^2_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \\ &\leq C_2\,||\boldsymbol{u}_2(t)||\,|\boldsymbol{w}(t)|\,||\boldsymbol{w}(t)||.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy com $\epsilon = \nu$

$$ab \leq \nu\, a^2 + \frac{1}{4\nu}\, b^2$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{w}(t)|^2 + 2\nu\,\|\boldsymbol{w}(t)\|^2 \leq \nu||\boldsymbol{w}(t)||^2 + C_3||\boldsymbol{u}_2(t)||^2|\boldsymbol{w}(t)|^2,$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{w}(t)|^2 \leq C_3|\boldsymbol{w}(t)|^2||\boldsymbol{u}_2(t)||^2|\boldsymbol{w}(t)|^2 \quad \text{q.s em } (0,T). \tag{3.98}$$

Como $\boldsymbol{w} \in W(0,T)$, pois $n = 2$ podemos integrar (3.98) em $(0,t)$ e obter

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{w}(t)|^2 \leq C_3 \int_0^t ||\boldsymbol{u}_2(s)||^2|\boldsymbol{w}(s)|^2\,ds.$$

Mas, $W(0,T) \subset C([0,T]\ H)$ o que implica que a função $t \to |\boldsymbol{w}(t)|^2$ é contínua em $[0,T]$. Portanto, aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos que $|\boldsymbol{w}(t)| = 0$ em $[0,T]$.

E a prova o Teorema 3.8 está completa. ■

3.4.3 Solução forte

Nesta Seção apresentaremos alguns resultados de regularidade da solução fraca das equações de Navier-Stokes para os casos $n = 2$ e $n = 3$. A prova destes resultados pode ser encontrada em [8, 9, 14].

Teorema 3.9 (solução forte no caso $n = 2$). *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira de classe C^∞. Suponha que $\mathbf{u}_0 \in V$ e $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$. Então, a solução $\mathbf{u}$ dada no Teorema 3.8 satisfaz*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in L^2(Q) \quad \textit{para} \quad i,j,k = 1,2.$$

Além disso, $\mathbf{u} \in C([0,T];V)$ e a pressão e suas derivadas pertencem a $L^2(Q)$.

Teorema 3.10 (solução forte local no caso $n = 3$)**.** *Seja* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^3$ *com fronteira de classe* C^∞*. Suponha que* $\boldsymbol{u}_0 \in V$ *e* $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^3$*. Então, existe* T_**,* $0 < T_* \leq T$ *dependendo de* Ω*,* ν*,* $\boldsymbol{f}$*,* $\boldsymbol{u}_0$ *e* T *tal que em* $[0, T_*)$ *existe uma única solução* $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *do problema* (3.62)-(3.63) *satisfazendo*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in L^2(Q_*) \quad para \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{3.99}$$

com $Q_* = (0, T_*) \times \Omega$*. Além disso,* $\boldsymbol{u} \in C([0, T_*); V)$*.*

A unicidade da solução forte do Teorema 3.10 é no sentido que não existe outra solução forte satisfazendo (3.99) com os dados $\boldsymbol{u}_0 \in V$ e $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^3$ e não existe outra solução fraca em $[0, T_*)$.

Observação 3.1. *No caso bidimensional, a solução fraca das equações de Navier-Stokes satisfaz a igualdade energia:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \nu||\boldsymbol{u}(t)||^2 =< \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t) > . \tag{3.100}$$

Porém, para o caso $n = 3$ *a igualdade (3.100) não é necessáriamente satisfeita, apenas podemos garantir que a seguinte desigualdade energia é satisfeita, no sentido das distribuições:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \nu||\boldsymbol{u}(t)||^2 \leq< \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t) > .$$

No caso bidimensional, as equações de Navier-Stokes apresentam uma propriedade de "suavidade" (regularidade) isto é, se o dado inicial $\boldsymbol{u}_0$ é regular então a solução será regular. Por exemplo, se $\boldsymbol{u}_0 \in H$ e $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$ então a solução $\boldsymbol{u}$ será contínua $(0, T]$ com valores em V, isto é $\boldsymbol{u} \in C((0, T]\ V)$. Assim, para dados suficientemente regulares teremos solução suficientemente regular. Por exemplo, se $m \geq 2$, Ω é de classe C^{m+2}, $\boldsymbol{u}_0 \in V \cap (H^m(\Omega))^n$ e $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; (H^{m-1}(\Omega))^n)$ então a solução $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V \cap (H^{m+1}(\Omega))^n)$ e é contínua em $(0, T]$ com valores em $H \cap (H^m(\Omega))^n$.

Observação 3.2. *Obsserve a solução* $\boldsymbol{u}$ *é contínua em* $(0, T]$ *com valores em* $H \cap (H^m(\Omega))^n$ *e não em* $[0, T]$ *com valores em* $H \cap (H^m(\Omega))^n$*. Temos que a continuidade valerá em* $[0, T]$ *com valores em* $H \cap (H^m(\Omega))^n$ *se certas "condições de compatibilidade" nos dados forem satisfeitas. Este problema não é específico das equações de Navier-Stokes, mas aparece tem todos os problemas de equações diferenciais de evolução. Para mais detalhes, consulte* [13]*.*

Capítulo 4

Problemas parabólicos fortemente não lineares

Neste capítulo trataremos um problema parabólico fortemente não linear e um modelo de fluido quase-newtoniano investigado por J. L. Lions em [9, p. 207].

4.1 Problema fortemente não linear clássico

Seja $p > 1$, então p' será o número real positivo que satisfaz $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Representaremos por V o espaço normado $W_0^{1,p}(\Omega)$ com norma $\|\cdot\|$ e V' o espaço $W^{-1,p'}(\Omega)$ com o par de dualidade dado por V' e V por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $\|\cdot\|_q$ a norma no espaço $L^q(\Omega)$. Em particular, para o espaço $L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$ e seu produto interno será denotado por $(\cdot,\cdot)$.

Dadas as funções $f : Q \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ e $p > 2$, queremos encontrar uma função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= f \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), && (4.1)\\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), && (4.2)\\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ em } \Omega, && (4.3) \end{aligned}$$

Formulaçao variacional

Agora vamos obter a formulação variacional do problema (4.1)-(4.3). Para isto, definamos para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, a aplicação $Au : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle Au, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \, dx$$

como $|D_i u|^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$ e $D_i u, D_i v \in L^p(\Omega)$, então aplicando a desigualdade de Hölder generalizada temos que $|D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \in L^1(\Omega)$, portanto a aplicação Au está bem definida. Além disso,

$$|\langle Au, v\rangle| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^{p-2} D_i u D_i v \, dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u|^{p-1} |D_i v| \, dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|D_i u\|_p^{p-1} \|D_i v\|_p \leq n \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1} \|v\|$$

o que implica, $Au \in V'$ com

$$\|Au\|_{V'} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^{p-1}.$$

Definição 4.1. *Um operador $\mathcal{A} : V \to V'$ é dito hemicontínuo se a função $\lambda \to \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w\rangle$ é contínua para quaisquer que sejam $u, v, w \in V$.*

Definição 4.2. *Um operador $\mathcal{A} : V \to V'$ é dito monótono se $\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geq 0$, quaisquer que sejam $u, v \in V$.*

A prova das seguintes propriedades do operador A pode ser encontrada em Lions [9, pag. 157]:

Lema 4.1. *A é um operador hemicontínuo e monótono.*

Finalmente, para $u \in L^p(0, T; V)$ temos

$$\int_0^T \|A(u(t))\|_{V'}^{p'} \, dt \leq C^{p'} \int_0^T \|u(t)\|^{p'(p-1)} \, dt = C^{p'} \int_0^T \|u(t)\|^p \, dt < \infty$$

logo, $A(u(\cdot)) \in L^{p'}(0, T; V')$.

Os resultados acima motivam a seguinte definição de solução fraca do problema (4.1)-(4.3):

Definição 4.3. *Dadas* $f \in L^{p'}(0,T;V')$ *e* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Diremos que* $u \in L^p(0,T;V)$ *é solução fraca de* (4.1)-(4.3) se $u' \in L^{p'}(0,T;V')$ e

$$\begin{aligned} \langle u', v\rangle + \langle Au, v\rangle &= \langle f, v\rangle\,,\ \forall v \in V \text{ em } \mathcal{D}'(0,T) \quad (4.4)\\ u(0) &= u_0 \quad (4.5)\end{aligned}$$

4.1.1 Existência e unicidade

No seguinte Teorema provaremos a existência e a unicidade da solução fraca do problema (4.1)-(4.3) aplicando o método de *Faedo-Galerkin*.

Teorema 4.1. *Sejam* $f \in L^{p'}(0,T;V')$ *e* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *O problema* (4.1)-(4.3) tem uma única solução fraca.

Demonstração: Considere (w_m) uma base de V e V_m o espaço gerado por $\{w_1, \ldots, w_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar uma solução aproximada $u_m \in V_m$ tal que

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i,$$

$$(u'_m(t), w_j) + \langle Au_m(t), w_j\rangle = \langle f(t), w_j\rangle\,, \quad 1 \le j \le m, \quad (4.6)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \in V_m,\ u_{0m} \to u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.7)$$

Não é complicado verificar que (4.6)-(4.7) é equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares e que este sistema tem uma solução maximal local definida para algum intervalo $[0, t_m)$, $0 < t_m \le T$. Portanto, se obtivermos estimativas uniformes desta solução, provaremos que é uma solução global. Para isto, multiplique (4.6) por $g_{jm}(t)$ e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$(u'_m(t), u_m(t)) + \langle Au_m(t), u_m(t)\rangle = \langle f(t), u_m(t)\rangle\,.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u_m(t)|^2\right) + \|u_m(t)\|^p = \langle f(t), u_m(t)\rangle \le \|f(t)\|_{V'}\,\|u_m(t)\|\,. \quad (4.8)$$

Aplicando a desigualdade de Young tem-se

$$\|f(t)\|_{V'}\,\|u_m(t)\| \le \frac{1}{p'}\,\|f(t)\|_{V'}^{p'} + \frac{1}{p}\,\|u_m(t)\|^p$$

e (4.8) torna-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|u_m(t)|^2\right) + \frac{1}{p'}\|u_m(t)\|^p \leq \frac{1}{p'}\|f(t)\|_{V'}^{p'}. \tag{4.9}$$

Integrando (4.9) em $(0,t)$, $0 < t \leq t_m$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{1}{p'}\int_0^t \|u_m(\tau)\|^p\, d\tau &\leq \frac{1}{p'}\int_0^t \|f(\tau)\|_{V'}^{p'}\, d\tau + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 \\
&\leq \frac{1}{p'}\int_0^T \|f(\tau)\|_{V'}^{p'}\, d\tau + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $|u_m(t)|$ é limitada por uma constante que independe de t e m, logo $t_m = T$.

Além disso,

$$\sup_{0\leq t\leq T}|u_m(t)|^2 \leq \frac{2}{p'}\int_0^T \|f(\tau)\|_{V'}^{p'}\, d\tau + |u_{0m}|^2 \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \frac{1}{p'}\int_0^T \|u_m(\tau)\|^p\, d\tau \leq \frac{1}{p'}\int_0^T \|f(\tau)\|_{V'}^{p'}\, d\tau + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 \tag{4.11}$$

$$\int_0^T \|Au_m(t)\|_{V'}^{p'}\, dt \leq C^{p'}\int_0^T \|u_m(t)\|^p\, dt \leq C^{p'}\left(\int_0^T \|f(\tau)\|_{V'}^{p'}\, d\tau + \frac{p'}{2}|u_{0m}|^2\right) \tag{4.12}$$

Como o lado direito das desigualdades (4.10), (4.11) e (4.12) é uniformemente limitado tem-se

$$\left\{\begin{array}{rll}
u_m & \text{é limitada em} & L^p(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\
u_m(T) & \text{é limitada em} & L^2(\Omega); \\
Au_m & \text{é limitada em} & L^{p'}(0,T;V').
\end{array}\right.$$

Logo, existe $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^p(0,T;V)$ e uma subsequência $(u_{m'})$ de (u_m) tais que

$$u_{m'} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \tag{4.13}$$

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^p(0,T;V); \tag{4.14}$$

$$u_{m'}(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{em} \quad L^2(\Omega); \tag{4.15}$$

$$Au_{m'} \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;V'). \tag{4.16}$$

Usando as convergências (4.13) vamos passar o limite na equação (4.6). Para isto, multiplicaque(4.6) por $\varphi(t) \in C^1([0,T])$ e integre em $[0,T]$ para obter

$$\int_0^T (u'_m(t), w_j)\varphi(t)dt + \int_0^T \langle Au_m(t), w_j\rangle\,\varphi(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\,\varphi(t)dt.$$

Integrando por partes temos

$$\int_0^T \langle u_m'(t), w_j\varphi(t)\rangle \, dt = (u_m(T), w_j)\varphi(T) - (u_m(0), w_j)\varphi(0) - \int_0^T \langle w_j\varphi'(t), u_m(t)\rangle \, dt,$$

e logo,

$$\begin{aligned}(u_m(T), w_j)\varphi(T) - (u_m(0), w_j)\varphi(0) - \int_0^T \langle w_j\varphi'(t), u_m(t)\rangle \, dt \\ + \int_0^T \langle Au_m(t), w_j\varphi(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \, \varphi(t) dt.\end{aligned}$$

Passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned}(\xi, w_j)\varphi(T) - (u_0, w_j)\varphi(0) - \int_0^T \langle w_j\varphi'(t), u(t)\rangle \, dt \\ + \int_0^T \langle \chi(t), w_j\varphi(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \, \varphi(t) dt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\xi, v)\varphi(T) - (u_0, v)\varphi(0) - \int_0^T \langle u(t), v\rangle \, \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - \chi(t), v\rangle \, \varphi(t) \, dt \qquad (4.17)$$

para todo $v \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, mas como este espaço é denso em V e os membros de (4.17) são contínuos na variável v, então (4.17) vale para toda $v \in V$.

Se $\varphi \in \mathcal{D}([0,T])$ em (4.17), então

$$-\int_0^T \langle u(t), v\rangle \, \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - \chi(t), v\rangle \, \varphi(t) \, dt \qquad (4.18)$$

Como V é reflexivo, então (4.18) satisfaz (iii) no Lema 1.3 e concluímos que

$$u' + \chi = f \;\; \text{em } L^{p'}(0,T;V').$$

Assim, para quaisquer $\varphi \in C^1([0,T])$ e $v \in V$ tem-se

$$\int_0^T \langle u'(t), v\varphi(t)\rangle \; dt = \int_0^T \langle f(t) - \chi(t), v\varphi(t)\rangle \; dt.$$

Integrando por partes obtemos

$$(u(T), v)\varphi(T) - (u(0), v)\varphi(0) - \int_0^T \langle u(t), v\rangle \, \varphi'(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t) - \chi(t), v\rangle \, \varphi(t) \, dt. \quad (4.19)$$

Comparando (4.17) e (4.19) tem-se

$$(u(T) - \xi, v)\varphi(T) - (u(0) - u_0, v)\varphi(0) = 0.$$

Como $\varphi \in C^1([0,T])$ é arbitrária, podemos escolher $\varphi(0) = 0$. e $\varphi(T) \neq 0$ e obter $\xi = u(T)$. Analogamente, para $\varphi(0) \neq 0$ e $\varphi(T) = 0$ temos que $u_0 = u(0)$.

Agora vamos provar que $\chi = Au$. Para isto, usaremos o fato de A ser um operador monótono, mais precisamente temos

$$X_{m'} = \int_0^T \langle Au_{m'}(t) - Av(t), u_{m'}(t) - v(t)\rangle \, dt \geq 0, \quad v \in L^p(0,T;V).$$

Como

$$\int_0^T \langle Au_{m'}(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}|u_{0m'}|^2 - \frac{1}{2}|u_{m'}(T)|^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} X_{m'} = & \int_0^T \langle f(t), u_{m'}(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}|u_{0m'}|^2 - \frac{1}{2}|u_{m'}(T)|^2 \\ & - \int_0^T \langle Au_{m'}(t), v(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Av(t), u_{m'}(t) - v(t)\rangle \, dt. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|u_{m'}(T)|^2 = (u_{m'}(T), u_{m'}(T)) = (u_{m'}(T) - u(T), u_{m'}(T) - u(T))$$

$$+(u_{m'}(T) - u(T), u(T)) + (u(T), u_{m'}(T)) \geq (u_{m'}(T) - u(T), u(T)) + (u(T), u_{m'}(T)).$$

Logo,

$$\lim\ \inf\ |u_{m'}(T)|^2 \geq |u(T)|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim\ \sup\ X_{m'} \leq & \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 \\ & - \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Av(t), u(t) - v(t)\rangle \, dt. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle \, dt,$$

o que implica

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Av(t), u(t) - v(t)\rangle \, dt \geq 0. \tag{4.20}$$

Como v é arbitrário em (4.20), podemos tomar $v = u - \lambda w$, com $\lambda > 0$ e $w \in L^p(0,T;V)$ e obter

$$\lambda \int_0^T \langle \chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle \, dt \geq 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T \langle \chi(t) - A(u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle \, dt \geq 0.$$

Usando que A é hemicontínuo temos, para $\lambda \to 0$,

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), w(t)\rangle \, dt \geq 0.$$

Analogamente, para $\lambda < 0$, obtemos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Au(t), w(t)\rangle \, dt \leq 0.$$

Portanto, $\chi = Au$.

Para provarmos a unicidade, considere u_1 e u_2 soluções de (4.1)-(4.3) e $w = u_1 - u_2$. Então

$$w' + Au_1 - Au_2 = 0 \text{ em } L^{p'}(0, T; V'),$$

$$w(0) = 0.$$

Logo,

$$\langle w', w\rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle = 0.$$

Usando que A é um operador monótono tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0,$$

o que implica $|w(t)|^2 \leq |w(0)|^2 = 0$ e portanto $w = 0$.

E a prova do Teorema 4.1 está completa. ∎

4.2 Um modelo de fluido quase-newtoniano

Sejam V é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ com $\|\cdot\|$, H é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{L}^2(\Omega)$ com $|\cdot|$, V_s é o fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbb{H}^s(\Omega)$ com $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o par de dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'\times V}$.

Para $\boldsymbol{u} \in C^2(Q)$ considere

$$A\boldsymbol{u} = -\sum_{i=1}^{n} D_i(|\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2} D_i \boldsymbol{u}).$$

E para $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ considere

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^{p-2} D_i \boldsymbol{u} D_i \boldsymbol{v}\, dx.$$

Dadas as funções vetoriais $\boldsymbol{f} : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e a constante $\nu > 0$, queremos encontrar uma função vetorial $\boldsymbol{u} : \overline{Q} \to \mathbb{R}^n$ e uma função escalar $p_* : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nu A(\boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i D_i \boldsymbol{u} + \nabla p_* = \boldsymbol{f}, \qquad \text{em } Q, \tag{4.21}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{em } Q, \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{em } S, \tag{4.23}$$

$$\boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), \qquad \text{em } \Omega, \tag{4.24}$$

Definição 4.4. *Dadas as funções* $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(0,T;V')$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$, $p \geq \frac{3n+2}{n+2}$. *Diremos que* $\boldsymbol{u} \in L^p(0,T;V)$ *é solução fraca de (4.21)-(4.24) se* $\boldsymbol{u}' \in L^{p'}(0,T;V')$ *e*

$$\langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}\rangle + \nu \langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \,, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T)$$
$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

4.2.1 Existência

Vamos provar o seguinte resultado de existência:

Teorema 4.2. *Dadas as funções* $\boldsymbol{f} \in L^{p'}(0,T;V')$, $\boldsymbol{u}_0 \in H$ e

$$p \geq \frac{3n+2}{n+2}.$$

Existe uma solução fraca $\boldsymbol{u}$ do problema (4.21)-(4.24), tal que

$$\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^p(0,T;V).$$

Demonstração: Primeiro, escolhamos s tal que $s > 1 + \dfrac{n}{2}$. Logo, $\mathbb{H}^{s-1}(\Omega) \subset \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, pois $\dfrac{1}{2} - \dfrac{s-1}{n} < 0$. Portanto, se $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^s(\Omega)$ então $D_i\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^{s-1}(\Omega) \subset \mathbb{L}^\infty(\Omega)$, o que implica, em particular, que $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ e

$$V_s \subset V \subset H \cong H' \subset V' \subset V_s'$$

Sejam as funções $(\boldsymbol{v}_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de V_s tal que

$$(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v})_{V_s} = \lambda_j(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in V_s.$$

Para mostrarmos a existência de solução fraca de (4.21)-(4.24) vamos aplicar o *método de Faedo-Galerkin*. Para isto, considere V_m o espaço gerado por $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ e o seguinte problema aproximado: para cada $m \in \mathbb{N}$, queremos encontrar $\boldsymbol{u}_m \in V_m$ tal que

$$\boldsymbol{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\boldsymbol{v}_i,$$

$$\langle \boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{v}_j \rangle + \nu \langle A\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j \rangle + b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{v}_j) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle, \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{u}_m(0) = \boldsymbol{u}_{0m} \in V_m, \;\; \boldsymbol{u}_{0m} \to \boldsymbol{u}_0 \text{ em } H. \tag{4.26}$$

com g_{jm} uma função de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$.

Por argumentos análogos ao dados para o problema (3.76)-(3.77) temos que o problema (4.25) tem solução maximal local em algum intervalo $[0, t_m)$, $0 < t_m \leq T$.

Para obter as estimativas da solução, multiplique (4.25) por $g_{jm}(t)$ e some para $j = 1, \ldots, m$ para obter

$$\langle \boldsymbol{u}'_m(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle + \nu \langle A\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle + b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t)) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2\right) + \|\boldsymbol{u}_m(t)\|^p = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}_m(t) \rangle \leq \|\boldsymbol{f}(t)\|_{V'} \|\boldsymbol{u}_m(t)\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_m(t)|^2 + \frac{1}{p'}\int_0^t \|\boldsymbol{u}_m(\tau)\|^p \, d\tau &\leq \frac{1}{p'}\int_0^t \|\boldsymbol{f}(\tau)\|_{V'}^{p'} \, d\tau + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_{0m}|^2 \\ &\leq \frac{1}{p'}\int_0^T \|\boldsymbol{f}(\tau)\|_{V'}^{p'} \, d\tau + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_{0m}|^2. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Portanto, $|u_m(t)|$ é limitada por uma constante que independe de t e m, logo $t_m = T$.

Usando (4.26) e a estimativa (4.27) concluímos que

$$\boldsymbol{u}_m \quad \text{é limitada em} \quad L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H), \tag{4.28}$$

$$A\boldsymbol{u}_m \quad \text{é limitada em} \quad L^{p'}(0,T;V'). \tag{4.29}$$

Por outro lado, para $\boldsymbol{w} \in V_s$ temos que $D_i \boldsymbol{w}_j \in L^\infty(\Omega)$, e, logo

$$\begin{aligned}|b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w})| &= |-b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_m(t))| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |\boldsymbol{u}_{mi} D_i \boldsymbol{w}_j \boldsymbol{u}_{mj}|\, dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \|\boldsymbol{u}_{mi}\|_{L^2(\Omega)} \|D_i \boldsymbol{w}_j\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_{mj}\|_{L^2(\Omega)} \leq n^2 C |\boldsymbol{u}_m(t)|^2 \|\boldsymbol{w}\|_{V_s}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Usando $\boldsymbol{u}_m \in L^\infty(0, T; H)$ em (4.30) concluímos que $B\boldsymbol{u}_m \in L^\infty(0, T; V_s')$ para

$$\langle B\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}\rangle_{V_s' \times V_s} = b(\boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{u}_m(t), \boldsymbol{w}).$$

Por outro lado, podemos escrever (4.25) na forma

$$\boldsymbol{u}_m' + \nu A\boldsymbol{u}_m + B\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{f}. \tag{4.31}$$

Seja P_m o operador projeção ortogonal em H sobre V_m. Temos que a sequência P_m é uniformemente limitada em $\mathcal{L}(H; H)$, $\mathcal{L}(V_s; V_s)$ e $\mathcal{L}(V_s'; V_s')$. Aplicando P_m em (4.31) obtemos

$$\boldsymbol{u}_m' + \nu P_m A\boldsymbol{u}_m + P_m B\boldsymbol{u}_m = P_m \boldsymbol{f}. \tag{4.32}$$

Mas, $A\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^{p'}(0, T; V')$, em particular em $L^{p'}(0, T; V_s')$, e portanto $P_m A\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^{p'}(0, T; V_s')$. Similarmente, $P_m B\boldsymbol{u}_m$ é limitado em $L^\infty(0, T; V_s')$, pois $B\boldsymbol{u}_m$ é uniformemente limitado em $L^\infty(0, T; V_s')$ e $P_m \boldsymbol{f}$ é limitado em $L^{p'}(0, T; V_s')$. Este resultados implicam que

$$\boldsymbol{u}_m' \text{ é limitada em } L^{p'}(0, T; V_s'). \tag{4.33}$$

Aplicando o Teorema 1.5 para $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V_s'$, $p_0 = p$ e $p_1 = p'$, temos que existe $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^p(0, T; V)$ e uma subsequência $\boldsymbol{u}_{m'}$ tais que

$$\boldsymbol{u}_{m'} \to \boldsymbol{u} \text{ em } L^p(0, T; H). \tag{4.34}$$

Além disso, de (4.28) e (4.29) temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_{m'} &\overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{u} && \text{em} \quad L^\infty(0, T; H); \\ \boldsymbol{u}_{m'} &\rightharpoonup \boldsymbol{u} && \text{em} \quad L^p(0, T; V); \\ \boldsymbol{u}_{m'}' &\rightharpoonup \boldsymbol{u}' && \text{em} \quad L^p(0, T, V_s'); \\ A\boldsymbol{u}_{m'} &\rightharpoonup \chi && \text{em} \quad L^{p'}(0, T; V'). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Usando as convergências (4.34) e (4.35) podemos passar o limite em (4.25) e obter

$$\langle \boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v}_j \rangle + \nu \langle \chi, \boldsymbol{v}_j \rangle + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}_j) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}_j \rangle, \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),$$

ou seja,

$$\langle \boldsymbol{u}'(t), \boldsymbol{v} \rangle + \nu \langle \chi, \boldsymbol{v} \rangle + b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle \tag{4.36}$$

para toda $\boldsymbol{v} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$, mas este espaço é denso em V_s e os membros de (4.36) são contínuos na variável $\boldsymbol{v}$ sobre V_s então (4.36) vale para toda $\boldsymbol{v} \in V_s$.

Agora, queremos mostrar que (4.36) vale também para $\forall \boldsymbol{v} \in V$. Para isso, notemos

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

para $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$ ou qualquer que seja q se $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \leq 0$.

Logo, $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ será contínua sobre V se $\frac{2}{q} + \frac{1}{p} \leq 1$, ou seja, para termos continuidade em qualquer caso, precisamos que $p \geq \frac{3n}{n+2}$, que é hipótese.

Portanto, como V_s é denso em V e os membros de (4.36) dependem continuamente de $\boldsymbol{v}$ em V, então (4.36) vale para todo $\boldsymbol{v} \in V$.

Agora, queremos provar que $\chi = A\boldsymbol{u}$. Para isto, precisamos do seguinte Lema:

Lema 4.1. *Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^p(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ e $p \geq \frac{3n}{n+2}$ então a função $t \to b(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$ pertence a $L^1(0,T)$.*

Sejam $s_0, s \in (0,T)$, $s_0 < s$. Considere a função contínua $\theta_m(t)$ e linear por partes em $[0,T]$ tal que

$$\begin{aligned} \theta_m(t) = 1 \quad &\text{se} \quad s_0 + \frac{2}{m} < t < s - \frac{2}{m}, \\ \theta_m(t) = 0 \quad &\text{se} \quad t > s - \frac{1}{m} \text{ ou } t < s_0 + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Além disso, seja $\rho_n(t)$ uma sequência regularizante em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ com $\rho_n(t) = \rho_n(-t)$, suporte em $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\, dt = 1.$$

Então, para $n > 2m$, definamos a função $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ da seguinte forma

$$\boldsymbol{v} = ((\theta_m \boldsymbol{u}) * \rho_n * \rho_n)\theta_m. \tag{4.37}$$

Portanto, temos os seguintes limites quando $n \to +\infty$

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v} \rangle \ dt = \int_0^T \langle \theta_m \boldsymbol{u}', (\theta_m \boldsymbol{u}) * \rho_n * \rho_n \rangle \ dt$$

$$= \int_0^T \langle (\theta_m \boldsymbol{u})' * \rho_n, (\theta_m \boldsymbol{u}) * \rho_n \rangle \ dt - \int_0^T \langle \theta_m' \boldsymbol{u}, (\theta_m \boldsymbol{u}) * \rho_n * \rho_n \rangle \ dt$$

$$= - \int_0^T \langle \theta_m' \boldsymbol{u}, (\theta_m \boldsymbol{u}) * \rho_n * \rho_n \rangle \ dt \to - \int_0^T \theta_m \theta_m' |\boldsymbol{u}|^2 \, dt$$

e

$$\int_0^T b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \, dt \to \int_0^T \theta_m^2 b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \, dt = 0.$$

Usando $\boldsymbol{v}$ dada em (4.37) em (4.36) e fazendo $n \to +\infty$ obtemos

$$\int_0^T (-\theta_m \theta_m') |\boldsymbol{u}|^2 \, dt + \nu \int_0^T \theta_m^2 \langle \chi, \boldsymbol{u} \rangle \ dt = \int_0^T \theta_m^2 \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \ dt.$$

Portanto, para $m \to +\infty$

$$\int_0^T (-\theta_m \theta_m') |\boldsymbol{u}|^2 \, dt \to \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s)|^2 - \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s_0)|^2$$

Assim,

$$\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s)|^2 + \nu \int_{s_0}^s \langle \chi, \boldsymbol{u} \rangle \ dt = \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s_0)|^2 + \int_{s_0}^s \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \ dt$$

para quase todo s e s_0.

Como $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; H)$, então podemos tomar uma sequência $s_{0n} \to 0$ tal que $\boldsymbol{u}(s_{0n})$ é fracamente convergente em H. E como $\boldsymbol{u}(s) \to \boldsymbol{u}_0$ em V_1', então $\boldsymbol{u}(s_{0n}) \rightharpoonup \boldsymbol{u}_0$ em H e obtemos

$$\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s)|^2 + \nu \int_0^s \langle \chi, \boldsymbol{v} \rangle \ dt \geq \int_0^s \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \ dt + \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}_0|^2 \tag{4.38}$$

para quase todo s.

Consideremos para cada $\boldsymbol{v} \in L^p(0, T; V)$

$$X_{m'}^s = \nu \int_0^s \langle A\boldsymbol{u}_{m'} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_{m'} - \boldsymbol{v} \rangle \ dt + \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}_{m'}(s)|^2$$

tal que s é escolhido para que a desigualdade (4.38) seja válida.

Tomando uma subsequência de $\boldsymbol{u}_{m'}$ (ainda denotada por $\boldsymbol{u}_{m'}$) tal que $\boldsymbol{u}_{m'}(s) \rightharpoonup \boldsymbol{u}(s)$ em H e usando que o operador A é monótono obtemos

$$\liminf_{m' \to +\infty} X_{m'}^s \geq \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(s)|^2.$$

Mas, de (4.25) tem-se

$$X^s_{m'} = \int_0^s \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_m \rangle \, dt + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_{0m'}|^2 - \nu \int_0^s \langle A\boldsymbol{u}_{m'}, \boldsymbol{v} \rangle \, dt - \nu \int_0^s \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_{m'} - \boldsymbol{v} \rangle \, dt,$$

e logo, $X^s_{m'} \to X^s$ com

$$X^s = \int_0^s \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \, dt + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \nu \int_0^s \langle \chi, \boldsymbol{v} \rangle \, dt - \nu \int_0^s \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle \, dt$$

Então,

$$\int_0^s \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u} \rangle \, dt + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \nu \int_0^s \langle \chi, \boldsymbol{v} \rangle \, dt - \nu \int_0^s \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle \, dt \geq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(s)|^2$$

e portanto,

$$\nu \int_0^s \langle \chi - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \rangle \, dt \geq 0.$$

Usando que o operador A é hemicontínuo e procedendo como em (4.20), concluímos que $\chi = A\boldsymbol{u}$.

E a prova do Teorema 4.2 está completa. ■

Considerações finais

Nesta dissertação essencialmente investigamos a teoria clássica das equações de Navier-Stokes e um modelo de fluido quase-newtoniano proposto por J. L. Lions [9]. Destacamos os seguintes aspectos do trabalho:

(i) A técnica usada para obtenção da solução das equações diferenciais tratadas foi o método de Faedo-Galerkin acoplado com argumento de compacidade e/ou ponto fixo e/ou a teoria de operadores monótonos. Este procedimento possibilita uma posterior análise numérica e/ou tratamento computacional dos problemas.

(ii) O estudo das equações de Navier-Stokes por sua importância teórica, numérica e variada aplicação. Particularmente, a análise matemática que envolve espaços funcionais especiais, teoria de distribuição para funções vetoriais e uma formulação fraca adequada, que elimina a pressão. etc.

(iii) O estudo de problemas parabólicos fortemente não lineares que envolvem operadores monótonos.

Futuramente, a partir desde trabalho, pretende-se estudar outros tipos de modelos envolvendo as equações de Navier-Stokes, como por exemplo, modelos que descrevem mudança de fase com interface difusa, em particular os modelos de campos de fase.

Bibliografia

[1] L. A. da J. Medeiros, *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, Parte I.* Rio de Janeiro:UFRJ/IM, 2006.

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[3] G. Bachman and L. Narici, *Functional Analysis.* Academic Press.

[4] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc. 1955.

[5] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Vol. 1, Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, New York, 1958.

[6] L. C. Evans, *Partial diferential equations*, American Mathematical Society, vol 19, 1998.

[7] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[8] O.A. Ladyzhenskaya,*The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1969.

[9] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[10] G. D. Galdi, *An introduction the Mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, vol I ,II, Springer, 1997.

[11] V. Girault & P. A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics, 749, Springer-Verlag, 1970

[12] B. D. Reddy, *Functional Analysis and Boundary-value problems an Introductiory treatment*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematical, Logman Scientific & Technical, No. 30, 1986.

[13] R. Temam, *Behaviour at time* $t = 0$ *of the solutions os semi-linear evolution equations*, J. Differential Equations, 17, (1982), pp. 73-92.

[14] R. Temam, *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[15] R. Temam, *Numerical Analysis*, D. Reidel Publishing Company, 1973.

[16] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications II/A: Linear monotone operators*, Springer, New York, 1990.