Universidade Federal do Pará
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística
Curso de Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado

Existência de solução para uma classe de equações quasilineares

Caroline Lima de Souza †

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Existência de solução para uma classe de equações quasilineares

por

Caroline Lima de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemáticatica e Estatística - ICEN - PPGME, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Data da defesa: 03 de abril de 2012.

Aprovada por:

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Universidade Federal do Pará - PPGME
Orientador

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa
Universidade Federal do Pará - PPGME

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Universidade Estadual de Londrina-PR

Agradecimentos

Ao longo destes anos, não posso deixar de agradecer a quem, de fato, merece.

Agradeço a Deus que me ajuda a ter força nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus pais, Jorge Nobre e Jaciara Lima, pelo amor e estrutura familiar que me proporcionam. Sou grata a minha irmã Roberta Lima pelas conversas, ajuda e apoio de onde quer que ela estivesse.

Agradeço ao meu orientador prof. Giovany Figueiredo, admirável pesquisador, pela oportunidade, paciência e pelos ensinamentos que me foi dado.

Agradeço aos professores do PPGME dos quais participei dos cursos: José Miguel Veloso, Carlos Bocker, Valcir Cunha, Rúbia Nascimento, Paulo Marques, Giovany Figueiredo, Geraldo Mendes, Dilberto Almeida Júnior. De todos, sem exceção, levei ensinamentos que vão além de apenas estudar para as provas.

Agradeço aos professores Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa e Marcos Tadeu Pimenta por terem aceitado participar da banca examinadora.

Agradeço aos meus colegas de turma do mestrado, doutorado e Mateus, pela convivência e aprendizado, em especial, a Elany Maciel que foi muito mais do que uma colega de classe.

Agradeço a Kelmem Barroso e a Denilson Pereira pela ajuda no início do curso.

Agradeço aos meus familiares e amigos (da Seicho, do CEFET, da graduação e etc.) que entenderam todos os momentos de ausência e que me faziam sorrir sempre que os encontrava.

E, finalmente, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

A todos os citados acima, o meu MUITO OBRIGADA!

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de solução ground-state para a seguinte classe de equações quasilineares:

$$
(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}
$$

onde $2 \leq p < N$, $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostraremos também um resultado de compacidade quando o funcional associado ao problema está restrito à Variedade de Nehari.

Palavras-chave: Equação Elíptica Quasilinear; p-Laplaciano; Método Variacional.

Abstract

In this work we study the existence of ground-state solution for the following class of quasilinear equations:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u) \quad in \quad \mathbb{R}^N \\ \qquad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

where $2 \leq p < N$, $\triangle_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ and $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a function of class C^1. We will show also a compactness result for the functional associated when restriced on the Nehari Manifold.

Conteúdo

Introdução

Esta dissertação é baseada em um capítulo do artigo de Alves [1] que estuda a existência de solução para uma classe de equações quasilineares. Nos argumentos encontrados em [1] é importante obter solução ground-state para o problema:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $-\Delta_p u = div(|\ \nabla u\ |^{p-2}\ \nabla u)$, $\ 2 \leq p < N$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 verificando as seguintes hipóteses :

A função f satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1)

$$\limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{|\ t\ |^s} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{|\ t\ |^{p-1}} = 0,$$

para algum $s \in \mathbb{R}$ com $p-1 < s < p^* - 1$, onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Existe $\theta > p$ tal que

(f_2)

$$0 \leq \theta F(t) < tf(t), \forall t > 0,$$

onde $F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$.

Existe $\eta \in (p-1, p^*-1)$ com $C > 0$ tal que

(f_3)

$$f'(t)t - (p-1)f(t) \geq Ct^{\eta}, \forall t > 0.$$

Um exemplo de função que satisfaz estas três hipóteses é dada por $f(t) = t^{\eta}$, com $p < \eta < s$.

Mostraremos que o problema (P) possui solução ground-state, ou seja, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e que assume o seguinte ínfimo:

$$E(u) = \inf_{\mathcal{M}} E,$$

em que $\mathcal{M}$ é a Variedade de Nehari associada ao funcional E e cuja a definição será dada no Capítulo 1.

A solução do problema (P) é obtido como ponto crítico do funcional energia definido por

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

Este funcional é de classe C^1 como mostra o Apêndice A e tem derivada dada por

$$E'(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uw dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)w dx.$$

Quando consideramos $p = 2$, os resultados aqui estudados estão relacionados ao problema

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

cujos resultados podem ser encontrados em Benci & Cerami ([5] [6] [7]), Clap & Ding [9], Rey [12] e Bahri & Coron [3]. A principal dificuldade que os problemas (P) e (P_1) apresentam é a falta de imersões compactas dos espaços de Sobolev nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$.

No problema (P) existe uma dificuldade a mais, pois o operador p-Laplaciano é um operador não linear definido em um espaço de Banach, o que o difere do operador Laplaciano, operador que aparece no problema (P_1).

Uma outra motivação para estudar o problema (P) é o fato do operador p-Laplaciano aparecer em várias áreas da ciência, como por exemplo, na Astronomia, Glaciologia, Climatologia, fluidos não-newtonianos, extração de petróleo, etc, como pode ser visto em [2].

Este trabalho será estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 estudaremos o Problema (P). Mais precisamente, mostraremos que (P) possui uma solução ground-state.

No Capítulo 2, usando o Princípio Variacional de Ekeland, mostraremos um resultado de compacidade para o funcional associado ao problema (P) quando restrito a Variedade de Nehari.

No Apêndice A mostramos a regularidade do funcional $E(u)$.

No Apêndice B enunciamos resultados e teoremas (demonstrando alguns) importantes utilizadas nos Capítulo 1 e 2.

Notações

No corpo deste trabalho usaremos as seguintes notações:

$|A|$: Medida de Lebesgue no conjunto A.

$B_r(0)$: Bola de raio r e centro zero.

$\rightarrow$: Convergência forte.

$\rightharpoonup$: Convergência fraca.

$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p + |u|^p)dx.$

$A(h) = o(|h|)$ desde que $|\frac{A(h)}{|h|}| \rightarrow 0$ quando $h \longrightarrow 0$.

Capítulo 1

A solução ground-state para o problema (P).

Neste capítulo estudaremos um resultado de existência de solução do tipo ground state para o problema (P).

Usaremos a versão, devido a Willem, do Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais Smale (ver Apêndice B) para mostrar a exisência de solução do problema. Considerando o espaço de Banach $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com a norma definida por

$$\| u \|^p = \int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u |^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} | u |^p \, dx,$$

considere o funcional energia $E : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$E(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u |^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} | u |^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

Mostraremos no Apêndice A que $E \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com

$$E'(u)w = \int_{\mathbb{R}^N} | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^N} | u |^{p-2} u w dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u) w dx,$$

para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e assim os pontos críticos de E são soluções fracas de (P). Uma condição necessária para que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ seja ponto crítico de E é que $E'(u)u = 0$. Esta condição define a Variedade de Nehari:

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; E'(u)u = 0 \right\}.$$

Lema 1.1 *O funcional E satisfaz a geometria do Passo da Montanha, ou seja,*

(i) Existem $r, \rho > 0$ tais que $E(u) \geq r > 0$, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\| u \|= \rho$.

(ii) Existe $e \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||e|| > \rho$ tal que $E(e) < 0$.

Demonstração: Decorre da definição do funcional que $E(0) = 0$. Assim, por (f_1), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

(i)

$$\frac{| f(t) |}{| t |^{p-1}} < \epsilon \Longrightarrow | f(t) | < \epsilon \mid t \mid^{p-1}, \forall \mid t \mid < \delta_\epsilon. \tag{1.1}$$

Ainda de $(f1)$, dado $\epsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que

$$\frac{| f(t) |}{| t |^{s}} < \epsilon \Longrightarrow | f(t) | < \epsilon \mid t \mid^{s}, \forall \mid t \mid > k. \tag{1.2}$$

Para todo $| t | \in [\delta, k]$ temos

$$\frac{| f(t) |}{| t |^{s}} \leq M \Longleftrightarrow | f(t) | < M \mid t \mid^{s} . \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3)

$$| f(t) | \leq M \mid t \mid^{s} + \epsilon \mid t \mid^{s} = (M + \epsilon) \mid t \mid^{s} = C_\epsilon \mid t \mid^{s} \tag{1.4}$$

onde $C_\epsilon = M + \epsilon$.

De (1.1) e (1.4) temos a condição de crescimento:

$$| f(t) | < \epsilon \mid t \mid^{p-1} + C_\epsilon \mid t \mid^{s}, \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Além disso, decorre da definição de $F(t)$ e de (1.5) que

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(\xi) d\xi \\ &\leq \int_0^t \left[\epsilon \mid \xi \mid^{p-1} + C_\epsilon \mid \xi \mid^{s} \right] d\xi \end{aligned}$$

implicando em

$$F(t) \leq \frac{\epsilon \mid t \mid^{p}}{p} + \frac{C_\epsilon}{s+1} \mid t \mid^{s+1}, \tag{1.6}$$

$\forall s \in \mathbb{R}$ e $p-1 < s < p^*-1$.

E, portanto,

$$
\begin{aligned}
E(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u \mid^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\
&\geq \frac{1}{p}||u \, \|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{\epsilon \mid u \mid^p}{p} + \frac{C_\epsilon}{s+1} \mid u \mid^{s+1} \right] dx \\
&= \frac{\| \, u \, \|^p}{p} - \frac{\epsilon}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^p dx - \frac{C_\epsilon}{s+1}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^{s+1} dx.
\end{aligned}
$$

Usando a imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq r \leq p^*$ obtemos as constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$
E(u) \quad \geq \quad \frac{1}{p}(1-\epsilon c_1) \parallel u \parallel^p - \frac{C_\epsilon c_2}{s+1} \parallel u \parallel^{s+1} .
$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon c_1 < 1$, encontramos $c_3, c_4 > 0$ tal que

$$
E(u) \geq c_3 \parallel u \parallel^p - c_4 \parallel u \parallel^{s+1}, \forall \; u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).
$$

Note que para termos $E(u) \geq r$ temos que ter

$$
c_3 \parallel u \parallel^p - c_4 \parallel u \parallel^{s+1} > 0,
$$

implicando

$$
c_3 > c_4 \parallel u \parallel^{s+1-p} .
$$

Assim

$$
\parallel u \parallel < \left(\frac{c_3}{c_4} \right)^{\frac{1}{s+1-p}} .
$$

Considerando $\parallel u \parallel = \frac{1}{2}(\frac{c_3}{c_4})^{\frac{1}{s+1-p}}$ com $\rho = \frac{1}{2}(\frac{c_3}{c_4})^{\frac{1}{s+1-p}}$ temos que

$$
E(u) \geq r > 0, \quad \forall ||u|| = \rho.
$$

Portanto, o item (i) está demonstrado.

(ii) Temos da condição (f_2) que

$$0 < \frac{\theta}{t} \leq \frac{f(t)}{F(t)},\ \forall t > 0,$$

implicando em

$$0 < \int_1^a \frac{\theta}{t} \leq \int_1^a \frac{f(t)}{F(t)},\ \forall t > 0,$$

de onde segue que

$$\theta \ln a - \theta \ln 1 \leq \ln F(a) - \ln F(1).$$

Portanto,

$$\theta \ln a \leq \ln F(a) - \ln d_1,$$

onde $d_1 = F(1) > 0$. Logo,

$$\ln a^\theta \leq \ln\left(\frac{F(a)}{d_1}\right) \Longrightarrow a^\theta \leq \frac{F(a)}{d_1},$$

pois ln é uma função crescente. Daí

$$F(a) \geq a^\theta d_1, \forall a > 1.$$

Seja $d_2 \in \mathbb{R}$ tal que $d_2 > 0$. Assim,

$$F(a) \geq d_1 a^\theta - d_2, \forall a > 1. \tag{1.7}$$

Fixando $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\phi > 0$ e $t > 0$ temos:

$$\begin{aligned} E(t\phi) &= \frac{1}{p} \parallel t\phi \parallel^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi)dx \\ &= \frac{t^p}{p} \parallel \phi \parallel^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(t\phi)dx. \end{aligned}$$

Usando (1.7) temos

$$E(t\phi) \leq \frac{t^p}{p} \parallel \phi \parallel^p - t^\theta d_1 |\phi|_\theta^\theta + d_2 |supp\phi|.$$

Passando ao limite quando $t \to +\infty$, encontramos

$$E(t\phi) \longrightarrow -\infty,$$

de onde concluimos que existe $t_0 > 0$ tal que $e = t_0\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $E(e) < 0$. ■

Sendo assim, pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale (ver Apêndice B) concluimos que existe uma sequência (u_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$E(u_n) \to c_* \ \text{ e } \ E'(u_n) \to 0,$$

com

$$0 < c_* = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} E(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Agora, provaremos algumas propriedades sobre sequências Palais-Smale para o funcional E.

Lema 1.2 *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para E. Então:*

a) (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

b) $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a menos de uma subsequência.

c) $E'(u) = 0$.

Demonstração:

a)Temos que $E(u) \longrightarrow c_*$ e portanto $(E(u_n))$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$E(u_n) \leq | E(u_n) | \leq c \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que $E'(u_n) \longrightarrow 0$, então para todo $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| E'(u_n) \|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^N))'} < \epsilon, \ \ \forall n > n_0.$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta}E'(u_n)(u_n) &\leq \frac{1}{\theta} \mid E'(u_n)(u_n) \mid \\
&\leq \frac{1}{\theta} \parallel E'(u_n) \parallel\parallel (u_n) \parallel .
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta}E'(u_n)(u_n) &\leq \frac{1}{\theta} \parallel u_n \parallel \\
&\leq \parallel u_n \parallel, \quad \forall\ n \geq n_0.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
E(u_n) - \frac{1}{\theta}E'(u_n)u_n \leq c+ \parallel u_n \parallel .
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
E(u_n) - \frac{1}{\theta}E'(u_n)u_n &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u \mid^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n \mid^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \\
&- \frac{1}{\theta}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n \mid^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} \mid u_n \mid^{p-2} u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx\right]
\end{aligned}
$$

e da condição (f_2), temos que

$$
\begin{aligned}
c+ \parallel u_n \parallel &\geq E(u_n) - \frac{1}{\theta}E'(u_n)u_n \\
&= (\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}) \parallel u_n \parallel^p + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\theta}f(u_n)_{u_n} - F(u_n)\right]dx \\
&\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)\parallel u_n \parallel^p .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
c_1 \parallel u_n \parallel^p \leq c+ \parallel u_n \parallel, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}
$$

onde $c_1 = \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{\theta}\right) > 0$, mostrando que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

b) Sendo $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ reflexivo então, a menos de uma subsequência, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

c) Para mostrar este item é necessário, primeiramente, mostrar que

(i) $u_{nj}(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

(ii) $\triangledown u_{nj}(x) \longrightarrow \triangledown u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Usando a imersão compacta $W^{1,p}(B_r) \hookrightarrow L^s(B_r)$, com $p \leq s < p^*$, obtemos

$$u_n \longrightarrow u \;\; em \;\; L^s(B_r).$$

Em particular,

$$u_{n|_{B_r}} \longrightarrow u|_{B_r} \;\; em \;\; L^p(B_r) \;\; \forall r > 0.$$

Assim, fixando $r = 1$, existe uma subsequência $(u_{1n}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{1n}(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; B_1.$$

Usando a imersão compacta em (u_{1n}) e fixando $r = 2$, existe $(u_{2n}) \subset (u_{1n})$ tal que

$$u_{2n}(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; B_2.$$

Usando raciocínio análogo repetidas vezes, fixando $k \in \mathbb{N}$, existe $(u_{kn}) \subset (u_{(k-1)n})$ tal que

$$u_{kn}(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; B_k.$$

Agora, vamos provar que a sequência (u_{jj}) é tal que

$$u_{jj}(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Considere $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, onde $S_n = \{x \in B_k; u_{kn}(x) \not\longrightarrow u(x)\}$. Então $|S| = 0$. Seja $x \in \mathbb{R}^N \setminus S$, então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$ e $u_{j_0 n}(x) \longrightarrow u(x)$. Como $(u_{jj}(x))$ é uma subsequência de $(u_{j_0 n}(x))$ para $j \geq j_0$ podemos concluir que

$$u_{jj}(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Denotando ainda tal sequência por (u_n), obtemos

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

e assim demonstramos (i).

Considere $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & se \; x \in B_1(0) \\ 0, & se \;\; x \notin B_2(0). \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ e $\psi_\epsilon(x) := \psi(\frac{x}{\epsilon})$. Definimos

$$P_n(x) = (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)(x)$$

ou ainda

$$P_n(x) = |\nabla u_n|^p - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n) + |\nabla u|^p.$$

Assim,

$$\int_{B_\epsilon(0)} P_n dx = \int_{B_\epsilon(0)} P_n \psi_\epsilon dx.$$

Observe que no $\mathbb{R}^N$ vale a seguinte desigualdade (ver Lema B.6 no Apêndice B):

$$\langle |x|^{p-2}x - |x|^{p-2}y, x-y\rangle \geq \begin{cases} C_\rho |x-y|^p, & se \;\; p \geq 2 \\ \\ \dfrac{C_\rho |x-y|^p}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & se \;\; 1 \leq p < 2. \end{cases}$$

Assim, $P_n \geq 0$ e daí

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} P_n dx \;\; & \leq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u dx \\ & - \;\; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\psi_\epsilon \nabla u \nabla u_n) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \psi_\epsilon dx \\ \\ & = \;\; J_1 - J_2 + J_3 + J_4 + J_5, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \psi_\epsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n \psi_\epsilon dx, \\
J_2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n u \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u \psi_\epsilon dx, \\
J_3 &= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \psi_\epsilon dx, \\
J_4 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n u \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \psi_\epsilon dx \quad e \\
J_5 &= \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u_n \psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n) u \psi_\epsilon dx.
\end{aligned}$$

Estimaremos cada uma das integrais J_i, com $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Segue da definição de J_1 que

$$J_1 = E'(u_n)(u_n \psi_\epsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon dx.$$

Desde que $(u_n \psi_\epsilon)$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $E'(u_n) \longrightarrow 0$ e usando a Proposição B.1 (ver Apêndice B), temos

$$\limsup_{n\to\infty} J_1 = -\limsup_{n\to\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon dx \right].$$

Passando ao limite a expressão acima

$$\lim_{\epsilon\to 0} [\limsup_{n\to\infty} J_1] = -\lim_{\epsilon\to 0} \left[\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon dx \right].$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} J_1 = o_\epsilon(1)$.

Observe que da definição de J_2 temos

$$J_2 = E'(u_n)(u \psi_\epsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon u_n dx.$$

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito no caso anterior, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} J_2 = o_\epsilon(1)$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$.

Considere $F(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \psi_\epsilon u_n$ dx, com $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Note que F é um funcional linear contínuo e desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w \psi_\epsilon u_n dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \psi_\epsilon dx.$$

Então, $\lim_{n\to\infty} J_3 = 0$.

Observe que $|u_n|^{p-2}u_n u \psi_\epsilon \longrightarrow |u|^p \psi_\epsilon$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_n|^{p-2} u_n u \psi_\epsilon \right|^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dx \leq ||u_n||^p \leq k$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ e para algum $k > 0$. Desde que $\frac{p}{p-1} > 1$, do Lema de Brezis-Lieb

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2} u_n u \psi_\epsilon dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \psi_\epsilon dx.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} J_4 = o_n(1)$

Para estimar J_5 usaremos a continuidade da f, daí

$$f(u_n) \longrightarrow f(u) \text{ q.t.p. no } \mathbb{R}^N \text{ e}$$
$$f(u_n)u_n\psi_\epsilon \longrightarrow f(u)u\psi_\epsilon \text{ q.t.p. no } \mathbb{R}^N.$$

Da condição de crescimento da f temos

$$|f(u_n)u_n\psi_\epsilon| \leq \epsilon|u_n|^p|\psi_\epsilon| + C_\epsilon|u_n|^{s+1}|\psi_\epsilon|.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n\psi_\epsilon dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\psi_.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n\psi_\epsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u\psi_\epsilon dx \longrightarrow 0.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} J_5 = o_n(1)$, demonstrando (ii).

Recorde que

$$0 \leq \int_{B_{2\epsilon}(0)} C_p|\nabla u_n - \nabla u|^p \leq \int_{B_{2\epsilon}(0)} P_n.$$

Desde que $\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\epsilon}(0)} P_n = 0$, do Teorema do Sanduíche

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{2\epsilon}(0)} C_p|\nabla u_n - \nabla u|^p = 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial u_{nj}}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad em \quad L^p(B_\epsilon(0)).$$

Assim, a menos de uma subsequência,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p. \quad em \quad B_\epsilon(0)$$

e pela arbitrariedade de ϵ, usando argumento diagonal

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}^N.$$

Agora, podemos provar que $E'(u)w = 0$, para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$0 \leq ||E'(u_n)w|| \leq ||E'(u_n)||.||w|| \longrightarrow 0$$

pois (u_n) é $(P.S.)_c$ o que implica que $E'(u_n)w \longrightarrow 0$.

Da definição de derivada do funcional

$$E'(u_n)w = \int |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla w + \int |u_n|^{p-2}u_n w - \int f(u_n)w, \quad \forall\ w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Passando ao limite a expressão acima obtemos

$$\lim_{n\to\infty} E'(u_n)w = \int |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w + \int |u|^{p-2}uw - \int f(u)w = E'(u)w.$$

Da unicidade do limite, segue-se que

$$E'(u)w = 0, \quad \forall\ w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

portanto,

$$E'(u) = 0.$$

■

Observe que o Lema 1.2 não nos permite concluir que o ponto crítico u de E é não-trivial, para isto temos o próximo lema que descreve o comportamento da sequência $(PS)_d$ para E.

Lema 1.3 *Seja E o funcional associado a (P) e (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para E com $u_n \rightharpoonup 0$. Então, somente uma das alternativas ocorre:*

a) $u_n \to 0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ou

b) Existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R > \beta > 0$ tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} | u_n |^p \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponha que b) não ocorra. Assim:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} | u_n |^p \, dx = 0.$$

Desde que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue-se de um resultado de Lions (Lema B.3 no Apêndice B) que $u_n \longrightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq s < p^*$.

Dado $\varepsilon > 0$ e da condição de crescimento de f obtemos:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} | u_n |^{p-1} \, dx + c_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} | u_n |^s \, dx$$

e portanto, sendo ϵ arbitrário, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)u_n dx \to 0.$$

Como $E'(u_n) = o_n(1)$, segue-se que

$$u_n \to 0 \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto a) ocorre.

■

Teorema 1.1 *O problema (P) possui solução Ground-state.*

Demonstração: Se o limite fraco u da sequência $(PS)_d$ para E for não-trivial, então do Lema 1.2, u é solução fraca de problema (P). Portanto, $E'(u)\varphi = 0$, $\forall \varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Considerando $u = 0$, não podemos ter $u_n \to 0$, pois da continuidade do funcional E e da unicidade do limite teríamos

$$c_* = 0,$$

o que é absurdo. Assim, do Lema 1.3, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas β e R tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} \mid u_n \mid^p dx \geq \beta > 0.$$

Definindo $v_n(x) = u(x + y_n)$, temos, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação que (v_n) é limitada em $W^{1,P}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, da reflexividade deste espaço,a menos de uma subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a imersão compacta de Sobolev e fazendo a mudança de variável, temos

$$\int_{B_R(0)} \mid v \mid^p dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{\beta_R(y_n)} \mid u \mid^p dx \geq \beta > 0$$

consequentemente $v \neq 0$.

Observe também

$$E(v_n) = E(u_n) = c + o_n(1).$$

Além disso, $\forall \psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\| \psi \| \leq 1$ segue que

$$\begin{aligned} \mid E'(v_n(x))\psi(x) \mid &= \mid E'(u_n(x + y_n))\psi(x) \mid \\ &= \mid E'(u_n(z))\psi(z - y_n) \mid \end{aligned}$$

de onde encontramos

$$\| E'(v_n) \| \leq \| E'(u_n) \| = o_n(1).$$

Portanto, (v_n) é uma sequência $(PS)_{c*}$ para E e v é solução do problema (P). Mostraremos que esta solução é ground-state. De fato, desde que v é solução não-trivial, segue-se que $E'(v)v = 0$ implica que $v \in \mathcal{M}$ e assim $c_* \leq E(v)$. Além disso,

$$\begin{aligned} c_* &\leq E(v) \\ &= E(v) - \frac{1}{p}E'(v)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v)v - F(v) \right] dx. \end{aligned}$$

Do Lema de Fatou encontramos

$$\begin{aligned} c_* &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v_n)v_n - F(v_n) \right] dx \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[E(v_n) - \frac{1}{p}E'(v_n)v_n \right] \\ &= c_* \end{aligned}$$

mostrando que $E(v) = c_*$.

■

Capítulo 2

Um resultado de compacidade para o funcional associado ao problema (P).

Neste capítulo vamos estabelecer um resultado de compacidade na Variedade de Nehari envolvendo sequências minimizantes.

Primeiramente, vamos demonstrar o Teorema da Função Implícita, necessário para a prova do resultado principal deste capítulo.

Lema 2.1 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m, K \subset \mathbb{R}^k$ compacto, $f : X \times K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ contínua e $c \in \mathbb{R}^p$. Se $f^{-1}(c)$ é o gráfico de uma aplicação $\xi : X \to K$, isto é, para cada $x \in X$ existe um único $y = \xi(x) \in K$ com $f(x, \xi(x)) = c$. Então ξ é contínua.*

Demonstração: Dado $x_0 \in X$ e seja $y_0 = \xi(x_0)$. Definimos uma sequência de pontos $x_n \in X$, queremos provar que $\lim \xi(x_n) = y_0$. Como $\xi(x_n) \in K$ para todo n então $(\xi(x_n))$ é limitada, basta provar que para toda subsequência $\xi(x'_n)$ temos

$$\lim \xi(x'_n) = y_0 \quad em \quad \mathbb{R}^k.$$

Veja que se $\lim \xi(x'_n) = y$ em $\mathbb{R}^k$ então $y \in K$ pois K é fechado. Como $f(x'_n, \xi(x'_n) = c$. Pela unicidade de y_0, temos $y = y_0$ o que demonstra o lema.

Teorema 2.1 *(Teorema da Função Implícita) Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k,*

$k \geq 1$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe um retângulo aberto $I \times J$, de centro (x_0, y_0), tal que $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \to J$, de classe C^k. Tem-se $\xi'(x) = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$ estas derivadas sendo calculadas no ponto $(x, \xi(x))$.

Demonstração: Suponha que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua, existem $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que, pondo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $J = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$, temos $I \times \bar{J} \subset$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ para todo ponto $(x, y) \in I \times \bar{J}$. Em particular, como $f(x_0, y_0) = c$, temos $f(x_0, y_0 - \epsilon) < c$ e $f(x_0, y_0 + \epsilon) > c$. Pela continuidade da f, podemos supor δ tão pequeno que, para todo $x \in I$, tenhamos $f(x_0, y_0 - \epsilon) < c$ e $f(x_0, y_0 + \epsilon) > c$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe, para cada $x \in I$, um único $y = \xi(x) \in \bar{J}$ tal que $f(x, y) = c$. Tem-se obrigatoriamente $y \in J$, portanto $f^{-1}(c) \cap (I \times \bar{J}) = f^{-1}(c) \cap (I \times J)$ é o gráfico de uma função $\xi : I \to J$. Vamos mostrar que ξ é de classe C^k, ou seja, que existe $\xi'(x)$, para todo $x \in$ e que $\xi' : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^{k-1}. Seja $k = \xi(x+h) - \xi(x)$, temos $\xi(x+h) = \xi(x) + k$, logo

$$f(x + h, \xi(x) + k) = f(x, \xi(x)) = c.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe θ, com $0 < \theta < 0$, tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\theta),$$

desta maneira

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + h, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \xi(x) + \theta k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta h, \xi(x) + \theta k)k. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta h, \xi(x) + \theta k)}.$$

De acordo com o Lema 2.1, ξ é contínua.Assim, temos $\lim_{h \to 0} k = 0$. E da continuidade das derivadas parciais da f temos

$$\xi'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\xi(x+h) - \xi(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}. \tag{2.1}$$

Veja que se f é de classe C^1, sendo as derivadas parciais de f e ξ contínuas, (2.1) mostra que ξ' é contínua, logo $\xi \in C^1$. Da mesma maneira, se $f \in C^2$ então as derivadas parciais de f e ξ são de classe C^1. A fórmula que mostra que ξ' também mostra que $\xi' \in C^1$, assim, $\xi \in C^2$. Repetindo este procedimendo inúmeras vezes, temos que se $f \in C^K$ então $\xi \in C^k$.

$\blacksquare$

Teorema 2.2 *(Teorema de compacidade na Variedade de Nehari) Seja* $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *uma sequência satisfazendo* $E(u_n) \longrightarrow c_*$ *e* $(u_n) \subset \mathcal{M}$. *Então,* (u_n) *é fortemente convergente ou existe* $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *com* $|y_n| \to \infty$ *tal que a sequência* $v_n(x) = u_n(x + y_n)$ *é fortemente convergente para* $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *verificando*

$$E(v) = c_* \text{ e } v \in \mathcal{M}.$$

Demonstração: Observe que $u_n \not\longrightarrow 0$, pois se ocorresse, da continuidade de E teríamos

$$\lim_{n\to\infty} E(u_n) = 0 = c_*.$$

Assim, do Lema 1.3, existe $(\tilde{y_n}) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\int_{B_R(\tilde{y_n})} |u_n|^p \geq \beta > 0$ para algum $\beta, R > 0$. Considere $v_n(x) = u_n(x + \tilde{y_n})$. Temos que $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $v \neq 0$. De fato, desde que $E(u_n) \longrightarrow c_*$ e $E'(u_n)u_n = 0$ segue-se que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Da reflexividade deste espaço, segue-se $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pelas imersões compactas

$$\int_{B_R(0)} |v|^p dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^p dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p dx \geq \beta > 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $t_n > 0$ tal que $t_n v_n = \tilde{v_n} \in \mathcal{M}$ (ver Apêndice B, Lema B.7). Temos que

$$\begin{aligned} c_* &= E(\tilde{v_n}) = E(v_n t_n) \\ &= E(u_n t_n) \\ &\leq \max_{t\geq 0} E(u_n t), \end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$\begin{aligned} c_* &\leq E(u_n) \\ &= c + o_n(1). \end{aligned}$$

Assim, $E(\tilde{v_n}) \longrightarrow c_*$ e $(\tilde{v_n}) \subset \mathcal{M}$. Temos também que, a menos de uma subsequência, $t_n \longrightarrow t_0 > 0$. De fato, desde que $v_n \not\longrightarrow 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \delta \leq ||v_n||$. Da limitação de $(\tilde{v_n})$ segue-se

$$0 < |t_n|\delta \leq ||t_n v_n|| = ||\tilde{v_n}|| \leq k.$$

Assim, (t_n) é limitada. Passando a subsequência, temos $t_n \longrightarrow t_0 \geq 0$. Concluimos que $t_0 > 0$ pois se $t_0 = 0$ teríamos

$$0 = ||\tilde{v_n}|| = ||t_n v_n|| \leq |t_n|k \longrightarrow 0$$

e da continuidade de E, teríamos $E(0) = c_* = 0$, o que é um absurdo.
Considere o seguinte espaço métrico completo: $(\mathcal{M}, d) = (\mathcal{M}, ||.||_*)$, temos que E é limitado invariante em $\mathcal{M}$ e desde que $\mathcal{M} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que $E : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente. Do Princípio Variacional de Ekeland com $\epsilon = \frac{1}{n}$ e $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$ existe

(i) $\hat{v_n} \subset \mathcal{M}$ tal que

(ii) $E(\hat{v_n}) \leq E(\tilde{v_n})$

(iii) $||\hat{v_n} - \tilde{v_n}||$, quando $n \longrightarrow \infty$

(iv) $E(\hat{v_n}) < E(u) + \frac{1}{\sqrt{n}}||u - \hat{v_n}||, \forall u \neq \hat{v_n}$.

Temos de (i) e (ii) que

$$E(\hat{v_n}) \longrightarrow c_*.$$

Provaremos que $E'(\hat{v_n}) \longrightarrow 0$. Observe que

$$\mathcal{M} = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; J(u) = 0\},$$

onde

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx.$$

Desde que $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ segue-se que $J \in C^2(W^{1,p}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$. Afirmamos que $J'(u) \neq 0$, $\forall u \in M$. De fato,

$$J'(u)u = p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)u^2 dx.$$

Desde que $u \in \mathcal{M}$, segue-se que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx$. Assim, pela igualdade acima e por (f_3):

$$\begin{aligned} J'(u)u &= p\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)udx \\ &= (p-1)\int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx - \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)udx \\ &\leq -C\int_{\Omega} u^{\eta+1}dx \end{aligned}$$

onde $p \leq \eta \leq p^* - 1$ e $C > 0$.

Seja $w \in \mathcal{M}$ com $||w|| \leq 1$. Considere $h_n : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h_n(t,s) = J(\hat{v}_n + tw + s\hat{v}_n).$$

Temos que

a) $h_n \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, pois $h_n = J \circ \psi$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com

$$\psi(t,s) = \hat{v}_n + tw + s\hat{v}_n.$$

b) $h_n(0,0) = J(\hat{v}_n) = 0$, pois $(\hat{v}_n) \subset \mathcal{M}$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_n}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s}(J \circ \psi)(0,0) \\ &= J'(\psi(0,0))\frac{\partial}{s}\psi(0,0) \\ &= J'(\hat{v}_n)\hat{v}_n \neq 0 \end{aligned}$$

Do Teorema 2.1 aplicado a h_n no ponto $(0,0)$, existe $\delta > 0$ e uma aplicação $T_n : (-\delta,\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $T_n \in C^1((-\delta,\delta),\mathbb{R})$ e $h(t,T_n(t)) = 0$ para todo $t \in (-\delta,\delta)$ e $T_n(0) = 0$. Assim,

$$J(\hat{v}_n + tw + T_n(t)\hat{v}_n) = 0,$$

daí $\alpha(t) = \hat{v}_n + tw + st_n(t)\hat{v}_n) \in \mathcal{M}$, para todo $t \in (-\delta,\delta)$.

Temos que $\alpha(0) = \hat{v}_n$ e $\alpha'(0) = w + T_n'(0)\hat{v}_n$.

De (iv), obtemos

$$\begin{aligned} E(\hat{v}_n + tw + T_n(t)\hat{v}_n) - E(\hat{v}_n) &> -\frac{1}{\sqrt{n}}||tw + T_n(t)\hat{v}_n|| \\ &\geq -\frac{t}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{t}{\sqrt{n}}\left|\left|\frac{T_n(t)}{t}(\hat{v}_n)\right|\right|, \quad \forall t \in (0,\delta). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{E(\alpha(t)) - E(\alpha(0))}{t} > -\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\left|\frac{T_n(t)}{t}(\hat{v}_n)\right|\right|.$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto G(t) = E(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Temos que $G \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $G(0) = E(\hat{v}_n)$ e $G'(0) = E'(\hat{v}_n)\alpha'(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} E'(\hat{v}_n)\alpha'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{G(t) - G(0)}{t} \\ &\geq -\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||, \end{aligned}$$

ou seja,

$$E'(\hat{v}_n)(w + T_n'(0)\hat{v}_n) \geq -\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||$$

implicando em

$$E'(\hat{v}_n)w + T_n'(0)E'(\hat{v}_n)\hat{v}_n > -\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||.$$

Como $E'(\hat{v}_n)\hat{v}_n = 0$, temos

$$E'(\hat{v}_n)w > -\frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||.$$

Para $-w$, temos

$$E'(\hat{v}_n)w \leq \frac{1}{\sqrt{n}}||w|| + \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||.$$

e então

$$|E'(\hat{v}_n)w| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}||w|| - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||,$$

uma vez que $||w|| \leq 1$, concluimos que

$$||E'(\hat{v}_n)w|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}||T_n'(0)(\hat{v}_n)||.$$

Desde que $(\hat{v}_n)$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$, segue-se

$$||E'(\hat{v}_n)|| = o_n(1).$$

Sem perda de generalidade, podemos concluir

$$||E'(u_n)|| = o_n(1).$$

Agora, podemos dividir nosso estudo em dois casos: $u \neq 0$ ou $u = 0$.

Caso 1: $u \neq 0$.

Usando argumentos conhecidos temos

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Do Lema 1.2, temos $E'(u)u = 0$. Assim,

$$c_* \leq E(u) = E(u) - \frac{1}{\theta}E'(u)u.$$

Implicando em

$$c_* \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p) + |u|^p)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)\right]dx.$$

Do lema de Fatou

$$\Gamma \quad \leq \quad \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^p) + |u_n|^p)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right]dx \leq c_*.$$

onde $\Gamma = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p) + |u|^p)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\theta}f(u)u - F(u)\right]dx.$

Concluindo que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^p) + |u_n|^p)dx = \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p) + |u|^p)dx. \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3), chegamos a

$$u_n \longrightarrow u \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Caso 2: $u = 0$.

Por argumentos vistos no Lema 1.3, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $R > \eta > 0$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}\sup\int_{\beta_R(y_n)} |\ u_n\ |^p \geq \eta > 0.$$

Da imersão de Sobolev, temos que $|y_n| \longrightarrow 0$. Definindo $v_n(x) = u_n(x + y_n)$, e obtemos

$$E(v_n) \longrightarrow c_* \quad e \quad E'(v_n) \longrightarrow 0.$$

Da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, temos que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, da reflexividade deste espaço,a menos de uma subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Da imersão compacta de Sobolev, temos que

$$\int_{B_R(0)}|v|^p = \liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(0)}|v_n|^p = \liminf_{n\to\infty}\int_{B_R(y_n)}|u_n|^p \geq \eta.$$

Repetindo os argumentos usados no Caso 1, segue que

$$v_n \longrightarrow v \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Apêndice A

Regularidade do funcional associado.

Neste apêndice, mostraremos que o funcional E associado ao problema (P) é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$. Para isto, enunciaremos algumas definições e proposições sobre funcionais diferenciáves.

Definição A.1 *Seja $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que I tem uma derivada de Gateaux, $f \in X'$, em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$*

$$I'(u)h = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u) - f(th)}{t} = 0.$$

Definição A.2 *Seja $I : A \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que I tem uma derivada de Fréchet, $f \in X'$, em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$*

$$I'(u)h = \lim_{||h||\to 0} \frac{I(u+h) - I(u) - f(h)}{||h||} = 0.$$

Proposição A.1 *Seja X um espaço de Banach e I um funcional definido em X, se I tem derivada de Gateaux contínua em X, então, $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$.*

Demonstração: Ver [14]

Proposição A.2 *O funcional E relacionado ao problema (P) é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$.*

Demonstração:

Mostraremos que E possui derivada de Gateaux e é contínua.

Para facilitar os cálculos, consideraremos os funcionais $E_1, E_2, E_3 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por $E_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u \mid^p dx$, $E_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^p dx$ e $E_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx$. Desta forma $E = E_1 + E_2 - E_3$.

Inicialmente, observemos que o funcional E está bem definido. De fato

Temos que $\mid \nabla u \mid \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto

$$E_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid \nabla u \mid^p dx < \infty.$$

Temos que $\mid u \mid \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto

$$E_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^p dx < \infty.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_0^t f(\xi)d\xi\right| dx.$$

Lembre que $\mid f(t) \mid \leq \epsilon \mid t \mid^{p-1} + C_\epsilon \mid t \mid^s$ e considerando $u \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(\xi)d\xi\right| &\leq \int_0^t \mid f(\xi) \mid d\xi \\
&\leq \epsilon \int_0^t \mid \xi \mid^{p-1} d\xi + C_\epsilon \int_0^t \mid \xi \mid^s d\xi \\
&= \frac{\epsilon}{p} \mid t \mid^p + \frac{c_\epsilon}{s+1} \mid t \mid^{s+1}.
\end{aligned}$$

Para $u < 0$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(\xi)d\xi\right| d\xi &= -\left|\int_t^o f(\xi)d\xi\right| d\xi \\
&\leq \int_t^0 \mid f(\xi) \mid d\xi d\xi \\
&\leq \epsilon \int_t^0 \mid \xi \mid^{p-1} d\xi + C_\epsilon \int_t^0 \mid \xi \mid^s d\xi \\
&= \frac{\epsilon}{p} \mid t \mid^p + \frac{c_\epsilon}{s+1} \mid t \mid^{s+1}.
\end{aligned}$$

Da imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ com $p \leq r \leq p^*$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\epsilon}{p} \mid u \mid^p dx + \frac{c_\epsilon}{s+1} \int_{\mathbb{R}^N} \mid u \mid^{s+1} dx < \infty.$$

De (i), (ii) e (iii) concluimos que E está bem definido. Feito isto, provaremos que $E \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$.

Afirmação A.1 *O funcional* $E_1 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N);\mathbb{R})$.

Para demonstrar a afirmação, mostraremos que E_1 possui Derivada de Gateaux. Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 <\mid t \mid< 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ função definida por $g(s) = \frac{1}{p}|\nabla u + st\nabla v|^p$. Observe que

$$\begin{aligned}
g'(s) &= |\nabla u + st\nabla v|^{p-2}(\nabla u + st\nabla v)t\nabla v,\\
g(1) &= \frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p,\\
g(0) &= \frac{1}{p}|\nabla u|^p.
\end{aligned}$$

Sendo g contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla u|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} = |\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t\nabla v)\nabla v.$$

Logo, sendo (t_n) uma sequência tal que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t_n\nabla u|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t_n} = |\nabla u|^{p-2}\nabla u + \nabla v.$$

Note que

$$\left|\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla u|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t}\right| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|$$

com $|\gamma t| < 1$. Desde que $(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade de Holder, $(|\nabla u|+|\nabla v|)^{p-1}\nabla v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u(x) + t_n\nabla u(x)|^p - \frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p}{t_n}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x)dx.$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
E_1'(u)v &= \lim_{t_n\to 0}\frac{E_1(u+t_nv)-E_1(u)}{t_n}\\
&= \lim_{n\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u+t_n\nabla u|^p-\frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t_n}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx.
\end{aligned}
$$

Mostrando que existe a derivada de Gateaux do funcional $E_1(u)$, sendo

$$E_1'(u)v=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx.$$

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de E_1.

Seja $(u_n)\subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $|\nabla u_n|\longrightarrow|\nabla u|$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Logo, a menos de uma subsequência,

$$\nabla u_n(x)\longrightarrow\nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.1}$$

e

$$|\ \nabla u_n(x)|\leq r(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.2}$$

onde $r\in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Para todo $v\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||v||\leq 1$ temos

$$
\begin{aligned}
|E_1'(u_n)v-E_1'(u)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v\right|\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left||\ \nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|\ |\ \nabla v|
\end{aligned}
$$

Usando Holder para $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left||\ \nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|\ |\ \nabla v|\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||\ \nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n-|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}||v||.$$

Assim,

$$|E_1'(u_n)v - E_1'(u)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|| \nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} .||v||.$$

Como

$$\sup_{||v||\leq 1} |E_1'(u_n)v - E_1'(u)v| = ||E_1'(u_n) - E_1'(u)||_{(W^{1,p(\mathbb{R}^N)})'}$$

então

$$|| E_1'(u_n) - E_1'(u)||_{(W^{1,p(\mathbb{R}^N)})'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} || \nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (A.3)$$

Segue de (A.1) que

$$\left| | \nabla u_n(x) | \nabla u_n(x) - | \nabla u(x) |^{p-2} \nabla u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e por (A.2)

$$\left| | \nabla u_n(x) | \nabla u_n(x) - | \nabla u(x) |^{p-2} \nabla u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^{\frac{p}{p-1}}(r^p + |\nabla u |^p), \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $r^p, | \nabla u |^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim, $2^{\frac{p}{p-1}}(r^p + |\nabla u |^p) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| | \nabla u_n(x) | \nabla u_n(x) - | \nabla u(x) |^{p-2} \nabla u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} dx = 0$$

De (A.3), quando $n \to \infty$

$$|| E_1'(u_n) - E_1'(u)||_{(W^{1,p(\mathbb{R}^N)})'} \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$E_1'(u_n) \longrightarrow E_1'(u) \text{ em } (W^{1,p(\mathbb{R}^N)})'.$$

Portanto, $E_1 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R}^N)$.

Afirmação A.2 *O funcional* $E_2 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$.

Mostraremos que E_2 possui Derivada de Gateaux.

Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 <| t |< 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ função definida por $g(s) = \frac{1}{p}|u + stv|^p$. Observe que

$$\begin{aligned} g'(s) &= |u + stv|^{p-2}(u + stv)tv, \\ g(1) &= \frac{1}{p}|u + tv|^p, \\ g(0) &= \frac{1}{p}|u|^p. \end{aligned}$$

Sendo g contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\gamma)$, isto é,

$$\frac{\frac{1}{p}|u + tu|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t} = |u + \gamma tv|^{p-2}(u + \gamma tv)v.$$

Logo, sendo (t_n) uma sequência tal que $t_n \to 0$ quando $n \to \infty$, então

$$\lim \frac{\frac{1}{p}|u + t_n u|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t_n} = |u|^{p-2}u + v.$$

Note que

$$\left| \frac{\frac{1}{p}|u + tu|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t} \right| \leq (|u| + |v|)^{p-1}|v|$$

com $|\gamma t| < 1$. Desde que $(|u| + |v|)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Da desigualdade de Holder, $(|u| + |v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}|u(x) + t_n u(x)|^p - \frac{1}{p}|u(x)|^p}{t_n} = \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} E_2'(u)v &= \lim_{t_n \to 0} \frac{E_2(u + t_n v) - E_2(u)}{t_n} \\ &= \lim_{n \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}|u + t_n u|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t_n} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uv dx \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux do funcional $E_2(u)$, sendo

$$E_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx \text{ para todo } v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de E_2.

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $|u_n| \longrightarrow |u|$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) e uma função $\in L^p$ tais que

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.4}$$

e

$$| \, u_n(x)| \leq j(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.5}$$

onde $j \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Com $||v|| \leq 1$ e para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} |E_2'(u_n)v - E_2'(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{p-2}u_n dx - |u|^{p-2}u)vdx \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\big|| \, u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\big| \, | \, v| \right) dx. \end{aligned}$$

Usando Holder para $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big|| \, u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\big| \, | \, v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \big|| \, u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\big|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} .||v||.$$

De $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|E_2'(u_n)v - E_2'(u)v| \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} \big|| \, u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\big|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} .||v||.$$

Como

$$\sup_{||v|| \leq 1} |E_2'(u_n)v - E_2'(u)v| = ||E_2'(u_n) - E_2'(u)||_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^N))'}$$

então,

$$|| E_2'(u_n) - E_2'(u)||_{(W^{1,p(\mathbb{R}^N)})'} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^N} || u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{A.6}$$

Segue de (A.6) que

$$\left| | u_n(x) | u_n(x) - | u(x) |^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e por (A.5)

$$\left| | u_n(x) | u_n(x) - | u(x) |^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2^{\frac{p}{p-1}}(j^p + |u|^p), \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $j^p, | u |^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e, assim, $2^{\frac{p}{p-1}}(j^p + |u|^p) \in L^1$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| | u_n(x) | u_n(x) - | u(x) |^{p-2} u(x) \right|^{\frac{p}{p-1}} dx = 0$$

De (A.6), quando $n \to \infty$

$$|| E_2'(u_n) - E_1'(u)||_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^N))'} \longrightarrow 0$$

ou seja,

$$E_2'(u_n) \longrightarrow E_2'(u) \text{ em } (W^{1,p}(\mathbb{R}^N))'.$$

Mostrando que a aplicação $u \longmapsto E_2'(u)$ é contínua no dual de $W^{1,p(\mathbb{R}^N)}$ e o funcional é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R}^N)$.

Afirmação A.3 *O funcional* $E_3 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R})$.

Demonstração

Mostraremos que E_3 possui Derivada de Gateaux.

Seja $t \in \mathbb{R}$ com $0 <| t |< 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Considere $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $q(s) = F(u + stv)$. Observe que

$$\begin{aligned} q'(s) &= f(u + stv)tv, \\ q(1) &= F(u + tv) \ \ e \\ q(0) &= F(u). \end{aligned}$$

Como q é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que $q(1) - q(0) = q'(\gamma)$, ou seja

$$\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u + \gamma tv)v.$$

Note que

$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| = |f(u+\gamma tv)||v|.$$

Da condição de crescimento da f temos

$$|f(u+\gamma tv)| \leq 2^{p-1}\epsilon(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + 2^s C_\epsilon(|u|^s + |v|^s).$$

Daí

$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| \leq 2^{p-1}\epsilon(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + 2^s C_\epsilon(|u|^s + |v|^s)$$

onde $2^{p-1}\epsilon(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + 2^s C_\epsilon(|u|^s + |v|^s) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u)v.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx = f(u)v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E_3'(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{E_3(u+tv) - E_3(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx.
\end{aligned}$$

Mostrando que o funcional E_3 é Gateaux Diferenciável e $E_3'(u)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v dx$, $\forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Mostraremos a continuidade da derivada de Gateaux de E_3.

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $|u_n| \longrightarrow |u|$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) e uma função $h \in L^p$ tais que

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$| \, u_n(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

onde $h \in L^P(\mathbb{R}^N)$. Como f é contínua temos que

$$\begin{gathered} f(u_n(x)) \longrightarrow f(u(x)) \text{ q.t.p. no } \mathbb{R}^N \text{ e} \\ f(u_n(x))v(x) \longrightarrow f(u(x))v(x) \text{ q.t.p. no } \mathbb{R}^N. \end{gathered}$$

Da condição de crescimento da f temos

$$|f(u_n(x))v(x)| \leq \epsilon |u_n(x)|^{p-1}|v(x)| + C_\epsilon |u_n(x)|^s |v(x)|.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx. \tag{A.7}$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx \right| \leq \epsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

O que implica

$$\sup_{||v|| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(u_n)vdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)vdx \right| \leq \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, ou seja,

$$||E_3 - E_3'||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$$

mostrando que $u \longmapsto E_3'(u)$ é contínua no dual do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e o funcional E_3 é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R}^N)$.

Pela Afirmação A.1, A.2 e A.3 temos que $E \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \mathbb{R}^N)$.

Apêndice B

Teoremas e resultados importantes.

Lema B.1 *Seja X um espaço de Banach. Suponha que $I \in C^1(X, R)$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Assuma que*

$$\forall \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])) : ||I'(u)|| \geq 2\epsilon.$$

Então existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$

(ii) $\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$

Demonstração: Ver [11]

Teorema B.1 *(Teorema do Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\| u \| = r$

(H_2) Existe $e \in X$ tal que $\| e \| > r$ e $I(e) < 0$.

(H_3) $b := inf_{||u||=r} I(u) > I(0) \geq I(e)$.

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $(u) \in X$ tal que:

a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$,

b) $||I'(u)|| < 2\epsilon$,

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Assumindo (H_3) implica que

$$b \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)).$$

De fato, seja $\gamma \in \Gamma$ e definamos a aplicação $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(t) = ||\gamma(t)||, \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Pela continuidade da norma e de γ, segue-se que ψ é contínua. Desde que $||e|| > \rho$, temos

$$\psi(0) = ||\gamma(0)|| = ||0|| = 0 < \rho$$

e

$$\psi(1) = ||\gamma(1)|| = ||e|| > \rho.$$

Assim,

$$\psi(0) < \rho < \psi(1).$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que

$$\psi(t_0) = ||\gamma(t_0)|| = \rho.$$

Portanto,

$$I(\gamma(t_0)) \geq c := \inf I(\gamma(t_0)) > I(0) \geq I(e),$$

logo,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq c, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Pelo Postulado de Dedekind, a expressão acima possui ínfimo em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) = c.$$

E, então

$$b \leq c \leq \max_{0 \leq t \leq 1} I(t).$$

Suponha que, para algum $\epsilon > 0$, o teorema não é satisfeito. Considerando $\beta := \eta \circ \gamma$, onde η é dado pelo lema de deformação (Lema B.1). Sendo $\eta \in C(X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $\beta \in C([0,1], X)$. Uma vez que $0, e \in X$, então:

$$c - 2\epsilon \geq I(e). \tag{B.1}$$

Logo, $I(e) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, e assim $e \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$.

Do mesmo modo

$$c - 2\epsilon \geq I(0). \tag{B.2}$$

Logo, $I(0) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, e assim $0 \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$.

Usando (i) , temos

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0,$$

e similarmente, $\beta(1) = e$, de modo que $\beta \in \Gamma$. Assim,

$$I(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon.$$

implicando em

$$c\gamma(t) \in I^{c+\varepsilon}, \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Segue de (ii) que

$$\beta(t) = \eta(\gamma(t)) \in I^{c-\varepsilon}, \quad \forall\ t \in [0,1],$$

ou seja,

$$I(\beta(t)) \leq c - \varepsilon, \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Logo,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon,$$

e desde que $\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) = c$, temos

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon,$$

isto é uma contradição. $\blacksquare$

Os itens (a) e (b) implicam em uma sequência Palais Smale no nível c.

Lema B.2 *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ verificando a condição (P.S) com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\| u \| = r$.

(H_2) Existe $e \in X$ tal que $\| e \| > r$ e $I(e) < 0$.

Para

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

defina

$$0 < c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma(t))$$

Então $c \geq \alpha$ e c é o valor crítico de I.

Demonstração: Ver [14].

Teorema B.2 *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço de Banach e $G \in C^2(X,\mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V = \{v \in X; G(v) = 1\}$, temos $G'(v) \neq 0$. Sejam $v \in V$ e $\varepsilon, \delta > 0$ com*

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon;$$

então existe $u \in V$ tal que

a)$F(u) \leq \inf_V F + 2\varepsilon$

b)$\| u - v \| \leq 2\delta$;

c)$\min_{\lambda\in\mathbb{R}} \| F'(u) - \lambda G'(u) \| \leq 8\varepsilon/\delta$.

Demonstração: Ver [14].

Teorema B.3 *Seja H um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em H, então existem uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) e $u \in H$ tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H.$$

Demonstração: Ver [8].

Lema B.3 *(Lema de Lions) Seja $r > 0$ e $p \leq q < p^*$. Se (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx \to 0,$$

então $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $p < q < p^*$

Demonstração: Vamos considerar o caso $N \geq 3$. Seja $q < s < p^*$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pelas desigualdades de Hölder e Sobolev temos

$$\begin{aligned} |u|_{L^s(B(y,r))} &\leq |u|^{1-\lambda}_{L^q(B(y,r))} |u|^{\lambda}_{L^{p^*}(B(y,r))} \\ &\leq c|u|^{1-\lambda}_{L^q(B(y,r))} \left[\int_{B(y,r)} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right]^{\frac{\lambda}{p}} \end{aligned}$$

onde $\lambda := \dfrac{s-q}{p^*-q} \dfrac{p^*}{s}$. Escolhendo $\lambda = \dfrac{p}{s}$, obtemos

$$\int_{B(y,r)} |u|^s dx \leq c^s |u|^{(1-\lambda)s}_{L^q(B(y,r))} \left[\int_{B(y,r)} (|u|^p + |\nabla u|^p) dx \right]^{\frac{\lambda}{p}}.$$

Agora, cobriremos $\mathbb{R}^N$ com bolas de raio r, de tal forma que cada ponto do $\mathbb{R}^N$ está contido em, no máximo, $N+1$ bolas. Assim, encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^s dx \leq (N+1) c^s sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left[\int_{B(y,r)} |u|^{(1-\lambda)\frac{s}{q}} dx \right] \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |\nabla u|^p)^{\frac{\lambda}{p}} dx.$$

Pela hipótese do lema, $u_n \longrightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Desde que $p < s < p^*$, $u_n \longrightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $p < q < p^*$, pelas desigualdades de Hölder e Sobolev. ■

Teorema B.4 *(Brézis -Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto de R^N e seja $u_n \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$.Se*

(i) u_n é limitada em $L^p(\Omega)$.

(ii) $u_n \to u$ q.t.p em Ω, então

$$|u_n|^p_{L^p(\Omega)} = |u_n|^p_{L^p(\Omega)} + |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} + o_n(1).$$

Demonstração: Ver [14].

Lema B.4 *(Brézis -Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto de R^N e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω e exista $C > 0$, tal que*

$$\int |f_n|^p dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int f_n \varphi dx \to \int f \varphi dx, \forall \varphi \in L^q(\omega)$$

onde , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Ver [10].

Teorema B.5 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ q.t.p em Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema B.5 *(Lema de Fatou) Seja u_n uma sequência de funções integráveis não negativas, então*

$$\int \liminf u_n dx \leq \liminf \int u_n dx.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema B.6 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que

(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;

(ii) $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω $\forall j$, onde $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [4].

Lema B.6 *Para todos, $v, w \in \mathbb{R}^N$ com $N \geq 1$ e $p \geq 2$*

$$(|v|^{p-2}v - |w|^{p-2}w)(v - w) \geq |v - w|^p.$$

Demonstração: Ver [13]

Teorema B.7 *(Desigualdade de Hölder) Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \;\; e \;\; |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [8]

Proposição B.1 *Seja (u_n) uma sequência $(P.S.)_c$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi(x) \leq 1$ e*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & se \; x \in B_1(0) \\ 0, & se \;\; x \notin B_2(0). \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ *e* $\psi_\epsilon(x) := \psi(\frac{x}{\epsilon})$. *Então*

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right] = 0.$$

Demonstração: Observe que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-1}|u_n||\nabla\psi_\epsilon|dx.$$

Da desigualdade de Hölder com $\frac{p}{p-1}$ e p, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e desde que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\psi_\epsilon = 1$ se $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$ e $supp(\psi_\epsilon) \subset B_\epsilon(x_i)$ temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq ||u_n||^{p-1}\left(\int_{B_\epsilon(x_i)}|u_n|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\left(\int_{B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|u_n|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (B.3)\end{aligned}$$

onde $C = ||u_n||^{p-1}$. Desde que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência, $u_n \longrightarrow u$ em $L^p_{loc}(B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i))$, tal que $|u_n| \leq g(x)$ q.t.p. em $B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. Assim, fazendo $f_n(x) = |u_n(x)|^p|\nabla\psi_\epsilon(x)|^p$, concluimos que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad q.t.p. \;\; em \;\; B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$$

onde $f(x) = |u(x)|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p$. Além disso,

$$|f_n(x)| = |u_n(x)|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p \leq g(x)^p|\nabla\psi_\epsilon| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Converência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} = \int_{B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|u_n(x)|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx = \int_{B_\epsilon(x_i)\setminus B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|u(x)|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx \qquad (B.4).$$

Portanto, de (B.3) e (B.4), concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right|\leq C\left(\int_{B_\epsilon(x_i)\backslash B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|u|^p|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (B.5)$$

Usando, novamente, a desigualdade de Hölder com $\frac{N}{N-p}$ e $\frac{N}{p}$ no segundo membro da desigualdade acima, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon\right|\leq C\left[\left(\int_{B_\epsilon(x_i)\backslash B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|u|^{p*}dx\right)^{\frac{N-p}{p}}\left(\int_{B_\epsilon(x_i)\backslash B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)}|\nabla\psi_\epsilon|^N\right)^{\frac{N}{p}}dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

e desde que $B_\epsilon(x_i)\backslash B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)\subset B_\epsilon(x_i)$ segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon\right|\leq C\left[\left(\int_{B_\epsilon(x_i)}|u|^{p*}dx\right)^{\frac{N-p}{p}}\left(\int_{B_\epsilon(x_i)}|\nabla\psi_\epsilon|^N dx\right)^{\frac{N}{p}}\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (B.6)$$

Mas, pela Regra da Cadeia

$$\frac{\partial\psi_\epsilon}{\partial x_i}=\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\phi}{x_i}\left(\frac{x-x_i}{\epsilon}\right)$$

e fazendo

$$y=\frac{x-x_i}{\epsilon}\Longrightarrow x=\epsilon y+x_i\Longrightarrow dx=\epsilon^N dy$$

além disso

$$|x-x_i|<\epsilon\Longrightarrow|\epsilon y|<\epsilon\Longrightarrow|y|<1.$$

Assim

$$\left(\int_{B_\epsilon(x_i)}|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{p}{N}}=\left(\int_{B_1(0)}|\nabla\psi_\epsilon|^p dx\right)^{\frac{p}{N}}.$$

De onde obtemos por (B.6) que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right|\leq C\left(\int_{B_\epsilon(x_i)}|u|^{p*}dx\right)^{\frac{N-p}{p}\frac{N}{p}}. \qquad (B.7)$$

Considere a sequência $h_\epsilon(x)=|u(x)|^{p*}\chi_{B_\epsilon(x_i)}$ com $\epsilon_n\to 0$ quando $n\to\infty$. Temos que $h_\epsilon(x)\longrightarrow 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso,

$$|h_\epsilon(x)| = |u(x)|^{p*}|\chi_{B_\epsilon(x_i)}| \leq |u(x)|^{p*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{B_\epsilon(x_i)} |u|^{p*}dx\right] = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{B_1(0)} |u(x)|^{p*}\chi_{B_\epsilon(x_i)}dx\right] = 0. \qquad (B.8)$$

Portanto, de (B.7) e (B.8)

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\psi_\epsilon dx\right] = 0.$$

Lema B.7 *Seja* $\mathcal{M} = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}; E'(u)u = 0\}$. *Então, para qualquer* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*, não-nulo, existe um único* t_* *tal que* $t_*u \in \mathcal{M}$. *Além disso, o máximo de* $E(tu)$*, para todo* $t > 0$*, é atingido em* t_*u *e a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\longmapsto \phi(u) = t_* \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Fixaremos $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ arbitrário. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto g(t) = E(tu). \end{aligned}$$

Temos que $g'(t) = 0$ se, e somente se,

$$t^{p-1}||u||^p - \int_{\mathbb{R}^N} f(tu) = 0, \qquad (B.9)$$

o qual é equivalente a $tu \in \mathcal{M}$.

Além disso, $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $g(t) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Assim, existe $t_* > 0$ tal que

$$g(t_*) = \max_{t \geq 0} g(t) \;\; e \;\; g'(t_*) = 0.$$

Para mostrar a unicidade, seja $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $0 < t_1 < t_2$ com

$$g'(t_1) = 0 \;\; e \;\; g'(t_2) = 0.$$

Assim,

$$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_1 u)u}{t_1^{p-1}} dx = 0$$

e

$$||u||^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_2 u)u}{t_2^{p-1}} dx = 0.$$

Seja $A = \{x \in \mathbb{R}^N; u(x) = 0\}$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_2 u)u}{t_2^{p-1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} \frac{f(t_1 u)u}{t_1^{p-1}} dx.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} \left[\frac{f(t_2 u)u}{t_2^{p-1}} - \frac{f(t_1 u)u}{t_1^{p-1}} \right] dx = 0 \qquad (B.10)$$

Usando a hipótese (f_3) e o fato de que $u^p > 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus A$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A} \left[\frac{f(t_2 u)u}{t_2^{p-1}} - \frac{f(t_1 u)u}{t_1^{p-1}} \right] dx > 0,$$

contradizendo (B.10). Logo, t_* é único.

Seja agora (u_n) uma sequência $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}.$$

Seja (t_n) uma sequência em $\mathbb{R}^+$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(t_n u_n) \in \mathcal{M}$. Assim,

$$||u_n||^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_n u_n)(u_n)^p}{t_n^{p-1}} dx \qquad (B.11)$$

onde $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N; (u_n)(x) = 0\}$.

Temos que (t_n) não pode ter uma sequência convergindo para zero, caso contrário, considerando a sequência

$$h_n(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} \dfrac{f(t_n u_n(x))(u_n(x))^p}{(t_n u_n)^{p-1}} dx, & se \;\; u_n \neq 0 \\ \\ 0, & se \;\; u_n = 0 \end{cases}$$

e desde que a hipótese (f_2) e (u_n) é limitado em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$h_n(x) \longrightarrow 0 \;\; q.t.q. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Além disso, da condição de crescimento da f, de $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ e das imersões temos que existe $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $|h_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h_n dx \longrightarrow 0$$

e assim

$$u_n \longrightarrow 0 \;\; em \;\; W^{1,p}(\mathbb{R}_N) \setminus \{0\}$$

o que é um absurdo.

Dado $R > 0$, existe $(t_{nj}) \subset (t_n)$ tal que $(t_{nj}) > R$. Assim, por $t \to \frac{f(t)}{t}^{p-1}$

$$\begin{aligned} ||u_n||^p &\geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_n} \frac{f(Ru_n(x))(u_n(x))^p}{(Ru_n)^{p-1}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_n} \frac{f(Ru_n(x))(u_n(x))}{(R)^{p-1}} dx. \end{aligned}$$

Do Lema de Fatou

$$\begin{aligned} ||u_n||^p &\geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_n} \frac{f(Ru(x))(u(x))}{R^{p-1}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} \frac{f(Ru(x))(u(x))^p}{(Ru)^{p-1}} dx. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $R \longrightarrow \infty$ temos por (f_2) que $||u_n||^p \longrightarrow \infty$, o que é um absurdo.

Deste modo, temos que (t_n) é uma sequência limitada e por (B.11) toda subsequência de (t_n) tem o mesmo limite t_0. Assim,

$$t_n \longrightarrow t_0 \ \ e \ \ t_n u_n \longrightarrow t_0 u.$$

Passando ao limite em ambos os membros de (B.11) quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$||u_n||^p = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_0 u)(u)^p}{t_0^{p-1}} dx.$$

Logo,

$$t_0 = t_*$$

de onde concluimos que

$$t_n \longrightarrow t_*.$$

Bibliografia

[1] Alves, C.O., Existence and Multiplicity of Solution for a Class of Quasilinear Equations. Advanced Nonlinear Studies 5 (2005), 73-87.

[2] Arcoya, D. , Diaz,J.I., and Tello L., S-Shaped Bifurcation Branch in a Quasilinear Multivalued Model Arising in Climatology, JDE 150 (1998), 215-225.

[3] Bahri A. and Coron J. M.,On a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev expoent: The effect of domain topology of the domain, Comm. Pure Appl. Math 41 (1988) 253-294.

[4] Bartle, R. G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[5] Benci V. and Cerami G., Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains, Arch. Rational Mech. Anal. 99 (1987) 283-300.

[6] Benci V. and Cerami G., The effect of domain topology on the number of the positive solutions of nonlinear elliptic problems, Arch. Rational Mech. Anal. 114 (1991) 79-83.

[7] Benci V. and Cerami G., Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology, Cal. Var. Partial Differential Equations 02 (1994), 29-48.

[8] Brezis, H., Analisis Funcional, Teoria y Applicaciones, Version española de Juan Ramon Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[9] Clap, M. and Ding, Y. H.,Positive solutions of a Schrondinger equation with critical nonlinear (to appear im ZAMP).

[10] Kavian O. Introduction à la théorie des points critiques et applicatons aux problemes elliptiques. Springer, Heidelberg (1983).

[11] Rabinowitz, P.H., Minimax methods in critical point theory with applications to diffrencial equations, CBMS Regional Conference in Mathmatics. 65, MAS, Provience, RI, 1984.

[12] Rey, O., A multiplicity result for a variacional problem with lack of compactness, Non linear Analysis - TMA, 13 (1989) 1241-1249.

[13] Yang, J.F, Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents,Nonlinear Analysis 25 (1995) 1283-1306.

[14] Willem, M., Minimax Theorems, Progressin Nonlinear Diferential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.