UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréa Silva Gonçalves

ESTABILIZAÇÃO NA FRONTEIRA DE EQUAÇÃO DE ONDAS

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréa Silva Gonçalves

ESTABILIZAÇÃO NA FRONTEIRA DE EQUAÇÃO DE ONDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém
2012

Gonçalves, Andréa Silva

Estabilização na Fronteira de equação de Ondas/(Andréa Silva Gonçalves); orientador, Mauro de Lima Santos. - 2012.

61 f. il. 28 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2011.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Método de Galerkin. I. Santos, Mauro de Lima, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciênciais Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatítica. III. Título.

CDD 22. ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Andréa Silva Gonçalves

ESTABILIZAÇÃO NA FRONTEIRA DE EQUAÇÃO DE ONDAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Membro)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Membro)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco (Membro)
UNIFAP

Dedicatória

Aos meus pais e meus avós ,

pela força e incentivo que me proporcionaram .

Agradecimentos

Em primeiro lugar eu agradeço à Deus por me proporcionar esse e outros momentos importantes em minha vida, ao meu pai Antonio Luiz Gonçalves Neto, por tudo que me ensinou a minha mãe Maria das Dores Silva Gonçalves, por tudo que me proporcionou, aos meus filhos: Andrey José, Andressa Rafaela e Alessa, pelo apoio e compreensão, por alguns momentos em que estive ausente, ao meu tio Nazareno de Freitas Gonçalves que mesmo estando em Manaus, sempre me apoiou em tudo, principalmente nos momentos difíceis em que eu pensei em desistir, aos meus avós maternos (in memória) Luiz Antonio e Maria de Nazaré, que mesmo não estando em nosso meio, sei que sempre torceram por mim, pois quando eu pensava em desistir, lembrava o quanto eles me apoiavam e sempre me mostraram acreditar em mim e ao meu marido Robert Barroso Calil por dedicação, companheirismo e paciência.

Ao meu Orientador o Professor Dr Mauro de Lima Santos, pela orientação, incentivo, paciência, oportunidade e sobre tudo pelo exemplo de profissional sério e competente.

Aos professores Valcir Farias e Dilberto Almeida por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho.

Aos professores Paulo Marques e Marcos Rocha, por acreditarem em mim.

Ao departamento de matemática, especialmente ao Programa de Pós - Graduação da UFPA.

Ao meu grande amigo Raimundo de Almeida, por toda paciência e ajuda que me foi prestada em vários finais de semanas e feriados em sua casa.

A minha amiga Lucélia Lima por disponibilizar o seu tempo e ter paciência em me ajudar a correr contra o tempo, disponibilizando de suas folgas.

Aos meus amigos de mestrado: Marcelo, Verônica, Hugo, Xirlene, Romulo e Raimundo, que sempre estavam juntos para ajudar.

Enfim, obrigada a todos os companheiros que me ajudaram desde a graduação ao mestrado.

Resumo

A proposta deste trabalho é estudar a estabilização da equação de onda com damping na fronteira, onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ com fronteira Γ de classe C^2 e denotamos por ν o vetor normal (unitário) exterior a Γ. Fixemos um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrariamente e o conjunto

$$\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u &= 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0, \infty) \\
u &= 0 \;\text{ sobre }\; \Omega_- \times (0, \infty) \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + Lu + Ku_t &= 0 \;\text{ sobre }\; \Omega_+ \times (0, \infty) \\
u(x, 0) &= u_0(x) \;\text{ em }\; \Omega \\
u_t(x, 0) &= u_1(x) \;\text{ em }\; \Omega
\end{aligned}$$

onde $K, L \in Ł^\infty(\Gamma_-)$ são duas funções não negativas.

Palavras - chaves: Soluções Fortes e decaimento exponencial.

Abstract

The proposal of this paper is to study the stabilization of the ware equation with damping at border, where Ω is a limited domain of $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ with boundary Γ of class C^2 and denote by ν the vector normal(unitary) pool Γ. Let us fix an arbitrary point $x_0 \in \mathbb{R}$ and the set

$$\begin{aligned} u_{tt} - u\Delta &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty) \\ u &= 0 \text{ on } \Omega_- \times (0,\infty) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + Lu + Ku_t &= 0 \text{ on } \Omega_+ \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ in } \Omega \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

where $K, L \in \mathbb{L}^\infty(\Gamma_-)$ are two non-negative functions.

Key words: Strong solutions and Exponential decay.

Conteúdo

Introdução

Nas últimas décadas, vários tipos de equações têm sido utilizadas como modelo matemático que descreve algumas propriedades físicas, químicas, biológicas e engenharia de sistemas. Entre elas, os modelos matemáticos de vibração, estruturas flexíveis, tem sido estimulados consideravelmente nos últimos anos por um número crescente de questões de interesse prático. Algumas pesquisas sobre a estabilização dos sistemas de parâmetros distribuídos são em grande parte voltadas à estabilização de modelos de dinâmicas individuais de membros estruturais, tais como, cordas, membranas e vigas.

O decaimento de energia de soluções da equação de onda no domínio exterior tem sido exaustivamente investigada desde o início dos anos 1960; veja: Lax [8] Lax e Phillips [9]. O estudo do problema análogo em domínios limitados com uma "de absorção de energia" começou em meados da década de 1970; Conforme Quinn e Russell [13], Rauch e Taylor [14], Slemrod [16]. Para este último problema, o decaimento exponencial da energia foi comprovado por Chen [3], adaptando as múltiplas técnicas desenvolvidas anteriormente para o problema exterior.

A pesquisa foi continuada ao longo de duas, um pouco opostas, linhas:

✓ Encontrar grandes classes de feedbacks dando decaimento exponencial;

✓ Encontrar feedbacks especiais que dão rápido decaimento de energia.

Na primeira direção os resultados mais gerais até agora foram provados por Bardos, [1]. Destacamos que o método não fornece estimativas da taxa de decaimento explícitas.

Neste trabalho estamos interessados na segunda linha de pesquisa, ou seja, na estabilização exponencial associada a equação de onda com amortecimento atuando na fronteira. Dado por

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u &= 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty) \\
u &= 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_- \times (0,\infty) \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + Lu + Ku_t &= 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_+ \times (0,\infty) \\
u(x,0) &= u_0(x) \ \text{ em } \ \Omega \\
u_t(x,0) &= u_1(x) \ \text{ em } \ \Omega
\end{aligned}
$$

Onde Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2 tal que $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ e $\overline{\Gamma}_+ \cap \overline{\Gamma}_- = \emptyset$.

Aqui u denota o deslocamento vertical de onda e $k, L \in L^\infty(\Gamma_+)$ são duas funções não-negativas e ∂_ν a derivada normal. Com as notações acimas desejamos mostrar que o problema em questão é bem posto e em seguida obter o decaimento exponencial.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, apresentamos alguns lemas, teoremas e algumas desigualdades que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Alguns desses resultados serão demonstrados e outros serão omitidos, porém indicada na bibliografia.

No capítulo 2, enunciamos e demonstramos o teorema de existência e unicidade da solução global, usando o metódo de Galerkin. No Capítulo 3, mostramos o resultado principal do trabalho, isto é, a estabilização na fronteira da equação de ondas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais Parciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Desse modo, não nos preocupamos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionamos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

1.1 Alguns Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.1 *(Convergência Fraca). Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E^{'}.$$

Definição 1.2 *(Convergência Fraca Estrela). Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Diz-se $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco -$\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E.$$

Lema 1.1 *(Lema de Gronwall). Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \le \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\, ds\right], \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.1 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \;\text{ e }\; supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1 *Sendo* Ω *limitado, obtemos* $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, para todo* p*, tal que* $1 \leq p < \infty$*, com imersão contínua e densa. De fato, dado* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Mostraremos que*

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [10]

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $1 \leq p, q$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *e* $g \in \mathrm{L}^q(\Omega)$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \| f \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \| g \|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}$$

Teorema 1.2 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$*. Então, existe uma constante* c *dependendo de* Ω *e* n *tal que, para todo* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$*,*

$$\| u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq c \| \nabla u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$$

1.1.2 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, por L. Schwartz.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle , \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.2 *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1 *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada u' não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Com efeito, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u', \varphi > = - < u, \varphi' > = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = < \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.3 *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção de derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^{\alpha}T_u = T_{D^{\alpha}u} \quad \forall\, |\alpha| \leq k,$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentamos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\right\},$$

1.3 O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [11] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.
A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.3 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração:: Ver [10].

Proposição 1.1 *(Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$) Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração:: Ver [11].

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Capítulo 2

Existência e unicidade da solução global

O objetivo principal deste capítulo é estudar a existência de solução fraca e forte para o seguinte sistema de equação de onda com damping linear na fronteira, dado por:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta u &= 0 \text{ em } \Omega \times (0, \infty) && (2.1)\\
u &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_- \times (0, \infty) && (2.2)\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + Lu + Ku_t &= 0 \text{ sobre } \Gamma_+ \times (0, \infty) && (2.3)\\
u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) &= u_1(x) \text{ em } \Omega && (2.4)
\end{aligned}
$$

Aqui por Ω estamos denotando um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ com fronteira Γ regular. Também aqui estamos considerando que $K, L \in L^\infty(\Gamma_+)$ são duas funções reais não-negativas.

Fixe um ponto arbitrário $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e considere a função

$$
m(x) = x - x_0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \ e \ R = \sup\{|m(x)| : x \in \Omega\}. \tag{2.5}
$$

Sejam Γ_+ e Γ_- dois subconjuntos abertos e disjuntos de Γ tal que

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \{x \in \Gamma : m.v \geq 0\},\\
\Gamma_- &= \{x \in \Gamma : m.v \leq 0\}. && (2.6)
\end{aligned}
$$

Então $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ e $\overline{\Gamma}_+ \cap \overline{\Gamma}_- = \varnothing$.

Considere os espaços de Hilbert

$$
V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma_-\}
$$

e

$$H = \{v \in V : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$$

Além disso, o sistema é dissipativo e a energia do sistema aqui estudado é definida por

$$E = E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega u_t(t)^2 + |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} Lu(t)^2 d\Gamma. \tag{2.7}$$

Consideramos ainda, as seguintes condições

$$k \geq \frac{1}{R} \qquad e \qquad k|m| \leq 1 \ sobre \ \Gamma_+, \tag{2.8}$$

$$e$$

$$K = (m.\nu)k \qquad e \qquad L = \frac{n-1}{2}(m.\nu)k^2. \tag{2.9}$$

O teorema a seguir garante a existência de solução forte para o problema (2.1)-(2.4).

Teorema 2.1 *Suponhamos que os dados iniciais* $\{u_0, u_1\} \in V \cap H^2(\Omega) \times V$ *satisfazem a condição de compatibilidade* $\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + Lu_0 + Ku_1 = 0$ *sobre* Γ_+. *Então o problema (2.1)-(2.4) possui uma única solução* u *na classe* $u \in L^\infty(0,\infty; V \cap H^2(\Omega))$ $u_t \in L^\infty(0,\infty;V)$ $u_{tt} \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$.

Demonstração: Seja $\{w_n\}$ uma base de V. Com essa base podemos construir uma base especial $\{w_n\}$ para o problema (2.1)-(2.4) da seguinte forma:
Se u_0 e u_1 são linearmente independentes, definimos $w_1 = u_0$, $w_2 = u_1$ e para $n \geq 3$ os vetores de w_n são escolhidos de modo que sejam l.i. com u_0 e u_1. Se os vetores u_0 e u_1 são linearmente dependentes, escolhemos $w_1 = u_0$ e para w_j, $j \geq 2$ os vetores de w_n que são l.i. com u_0. Desse modo podemos considerar o subspaço

$$V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$$

gerado por $w_1, ..., w_m$. Em V_m considere o problema aproximado:

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{j=1}^m \gamma_j(t) w_j \in V_m \\ \int_\Omega u_{tt}^m(t)w-jdx + \int_\Omega \nabla u^m(t)\nabla w_j dx + \int_{\Gamma_+} Ku_t^m(t)w_j d\Gamma + \int_{\Gamma_+} Lu^m(t)w_j d\Gamma &= 0, \ \forall \ w \in V_m \\ u^m(0) = u_{0,m}; \ \ u_t^m(0) &= u_{1,m}, \ \ \forall \ m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde

$$u_{0,m} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \int_{\Omega} u_0 w_j dx \right\} wj, \quad u_{1,m} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \int_{\Omega} u_1 w_j dx \right\} wj.$$

O problema aproximado tem solução local $u_m(t)$ de acordo com o Teorema de Picard. A extensão destas soluções para o intervalo $[0, T]$, $0 < T < \infty$, é consequência das estimativas a seguir:

2.1 Estimativa a Priori I

Multiplicando a equação (2.10) por $\gamma'_{i,m}$ e somando em $i = 1, 2, 3, ..., m$ obtemos,

$$\int_{\Omega} u_{tt}^m \sum_{j=1}^{m} \gamma'_{i,m} w_i dx + \int_{\Omega} \nabla u^m \nabla (\sum \gamma'_{i,m} w_i) dx + \int_{\Gamma+} K u_t^m \sum_{i=1}^{m} \gamma'_{i,m} w_i d\Gamma + \int_{\Gamma+} L u^m \sum_{i=1}^{m} \gamma'_{i,m} w_i d\Gamma = 0.$$

Substituindo $\sum_{i=1}^{m} \gamma'_{i,m} w_i = u_t^m$, temos

$$\int_{\Omega} u_{tt}^m u_t^m dx + \int_{\Omega} \nabla u^m \nabla u_t^m dx + \int_{\Gamma+} K u_t^m u_t^m d\Gamma + \int_{\Gamma+} L u^m u_t^m d\Gamma = 0.$$

Daí, segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t^m|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u^m|^2 dx + \int_{\Gamma+} K (u_t^m)^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma+} L (u^m)^2 d\Gamma = 0,$$

logo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \int_{\Omega} |u_t^m|^2 + |\nabla u^m|^2 dx + \int_{\Gamma+} L (u^m)^2 d\Gamma \} + \int_{\Gamma+} K (u_t^m)^2 d\Gamma = 0,$$

portanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = - \int_{\Gamma+} K (u_t^m)^2 d\Gamma \leq 0.$$

Integrando a desigualdade acima em $[0, T]$, encontramos

$$E(u^m, u_t^m, t) \leq E(u^m(0), u_t^m(0), 0), \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T].$$

o que implica

$$E(u^m, u_t^m, t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_{1,m}|^2 + |\nabla u_{0,m}|^2 dx + \int_{\Gamma_+} (u_{0,m})^2 d\Gamma.$$

Da escolha sobre $u_{0,m}$ e $u_{1,m}$, segue que

$$E(u^m, u_t^m, t) \leq C, \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T].$$

Portanto,

$$\left| \begin{array}{l} (u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \\ (u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ (u) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_+)) \end{array} \right. \tag{2.11}$$

2.2 Estimativa a Priori II

O nosso objetivo é obter uma 2ª estimativa da energia. Para isto, vamos estimar os dados iniciais $u_{tt}^m(0)$ na norma $L^2(\Omega)$. Multiplicando a equação (2.10) por $\gamma''_{i,m}(0)$ e somando em i, de 1 a m obtemos

$$\int_\Omega |u_{tt}^m(0)|^2 dx = -\int_\Omega \nabla u_{0,m}.\nabla u_{tt}^m(0)dx - \int_{\Gamma_+} K u_{1,m}.u_{tt}^m(0)d\Gamma - \int_{\Gamma+} L u_{0,m}.u_{tt}^m(0)d\Gamma$$

Usando a Identidade de Green, e as condições de compatibilidade segue que

$$||u_{tt}^m(0)||_2 \leq C, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Diferenciando a equação (2.10) em relação a t, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}^m.w_j dx + \int_\Omega \nabla u_t^m.\nabla w_j dx + \int_{\Gamma_+} K u_{tt}^m.w_j d\Gamma + \int_{\Gamma_+} L u_t^m.w_j d\Gamma = 0 \ \forall w \in Vm. \tag{2.13}$$

Multiplicando a equação (2.13) por $\gamma''_{i,m}$ e somando em i, de 1 a m, temos

$$\int_\Omega u_{ttt}^m.u_{tt}^m dx + \int_\Omega \nabla u_t^m.\nabla u_{tt}^m dx + \int_{\Gamma_+} K u_{tt}^m.u_{tt}^m d\Gamma + \int_{\Gamma_+} L u_t^m.u_{tt}^m d\Gamma = 0.$$

Logo, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_{\Gamma+} K u_{tt}^m u_{tt}^m d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma+} L|u_t^m|^2 d\Gamma = 0$$

portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\{\int_\Omega |u_{tt}^m|^2 + |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_{\Gamma+} L|u_t^m|^2 d\Gamma\}}_{E_2(t)} = -\int_{\Gamma+} K|u_{tt}^m|^2 d\Gamma \leq 0$$

Integrando o resultado de 0 a t, temos

$$E(u_t^m,\, u_{tt}^m,\, t) \leq C\, E(u_t^m(0),\, u_{tt}^m(0),\, 0) + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{\Gamma_+} L|u_t^m|^2 d\Gamma\right) ds.$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$E(u_t^m,\, u_{tt}^m,\, t) \leq C,\ \forall t \in [0,T], \forall m \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left| \begin{array}{l} (u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \\ (u_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \right. \tag{2.14}$$

As estimativas feita em (2.11) e (2.14), permite-nos obter subsequências (u^m) denotadas da mesma forma, satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} u^m \rightharpoonup^* u \in L^\infty(0,T;V) \\ u_t^m \rightharpoonup^* u_t \in L^\infty(0,T;V) \\ u_{tt}^m \rightharpoonup^* u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Passagem ao limite

Multiplicando a equação (2.10) por $\beta \in C^2([0,T])$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega u_{tt}^m\, w_j \beta(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u^m . \nabla w_j \beta(t) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_+} K u_t^m\, w_j\, \beta(t) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_+} L u_t^m . w_j . \beta(t) d\Gamma dt = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Considerando as convergências (2.14) podemos passar ao limite quando $m \longrightarrow \infty$ em (2.16) de forma que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega u_{tt}\, w_j \beta(t) dx dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u . \nabla w_j \beta(t) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_+} K u_t\, w_j\, \beta(t) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_+} L u_t . w_j . \beta(t) d\Gamma dt = 0. \end{aligned}$$

Por regularidade elíptica, concluímos que

$$u \in L^\infty(0,\infty; H^2(\Omega)).$$

Os dados iniciais seguem imediatamente a partir das convergências obtidas e a unicidade é obtida usando o Método da Energia, conforme Lions [10].

Portanto segue que u é solução forte do sistema (2.1)-(2.4).

□

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento assintótico do sistema (2.1)-(2.4). Para isso, vamos considerar o seguinte Lema devido a Haraux cuja demonstração podemos encontrar em [4,5].

Lema 3.1 . *Seja* $E : [0,\infty[\rightarrow [0,\infty[$ *uma função não decrescente localmente absolutamente continua tal que existem constantes não-negativas* β *e* A *com*

$$\int_S^\infty E(t)^{\beta+1}dt \leq AE(S), \qquad \forall S \geq 0.$$

Então temos

$$E(t) \leq \begin{cases} \left\{exp\left(1-\frac{t}{A}\right)\right\}E(0), & \forall t \geq 0 \quad se \quad \beta = 0, \\ \left(A\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)^{1/\beta} t^{-1/\beta}, & \forall t \geq 0 \quad se \quad \beta > 0. \end{cases}$$

O Teorema a seguir resulta o decaimento exponencial para o problema aqui estudado.

Teorema 3.1 *Fixe uma função positiva* $k \in L^\infty$ *tal que*

$$k \geq \frac{1}{R} \qquad e \qquad k|m| \leq 1 \qquad sobre \qquad \Gamma_+$$

e considere

$$K = (m.\nu)k \qquad e \qquad L = \frac{n-1}{2}(m.\nu)k^2.$$

Para $n = 2, 3$ *as soluções de (2.1)-(2.4) satisfazem as seguintes estimativas:*

$$E(t) \leq e^{1-(t/4R)}E(0) \qquad \forall t \geq 4R \qquad se \qquad n = 2, \tag{3.1}$$

$$E(t) \leq e^{1-(t/2R)}E(0) \qquad \forall t \geq 2R \qquad se \qquad n = 3. \tag{3.2}$$

A demonstração do Teorema (3.1) será consequência dos Lemas seguintes.

O Lema a seguir garante a propriedade dissipativa do sistema (2.1)-(2.4).

Lema 3.2 . *Seja u a solução forte do sistema (2.1)-(2.4), então*

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_+} K|u_t|^2 d\Gamma. \tag{3.3}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.1) por u_t e integrando sobre $\Omega \times (S,T)$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_\Omega u_t(u_{tt} - \Delta u) dx dt, \\ &= \int_S^T \int_\Omega u_t\, u_{tt} dx dt - \int_S^T \int_\Omega u_t\, \Delta u dx dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando a fórmula de Green obtemos

$$-\int_S^T \int_\Omega u_t\, \Delta u\, dx dt = \int_S^T \int_\Omega \nabla u_t\, \nabla u\, dx dt - \int_S^T \int_\Gamma u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma dt.$$

A partir das condições de fronteira (2.2) e (2.3) obtemos

$$-\int_S^T \int_\Omega u_t\, \Delta u dx dt = \frac{1}{2}\int_S^T \frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt + \frac{1}{2}\int_S^T \frac{d}{dt}\int_\Omega L|u|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_+} k|u_t|^2 d\Gamma dt. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4) e notando que

$$\int_S^T \int_\Omega u_t\, u_{tt} dx dt = \frac{1}{2}\int_S^T \frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dx dt,$$

obtemos

$$\int_S^T \frac{d}{dt} E(t) = -\int_S^T \int_{\Gamma_+} k|u_t|^2 d\Gamma dt,$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_+} L|u|^2 d\Gamma,$$

é a energia do sistema. Então encontramos

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_+} K|u_t|^2 d\Gamma.$$

O que conclui a demonstração do Lema.

$\square$

A identidade seguinte é essencial e é devido a F. Rellich [15].

Lema 3.3 . *Dado $\varphi \in H^2(\Omega)$, temos*

$$\int_\Omega (2(\Delta\varphi)m.\nabla\varphi + (2-n)|\nabla\varphi|^2)dx = \int_{\Gamma_+} 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)m.\nabla\varphi - (m.\nu)|\nabla\varphi|^2 d\Gamma.$$

Demonstração: Da fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega (\Delta\varphi)m.\nabla\varphi dx &= 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)m.\nabla\varphi d\Gamma - 2\int_\Omega \nabla\varphi.\nabla(m.\nabla\varphi)dx, \\ &= 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)m.\nabla\varphi d\Gamma - \int_\Omega 2|\nabla\varphi|^2 + m.\nabla|\nabla\varphi|^2 dx, \\ &= 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)m.\nabla\varphi - (m.\nu)|\nabla\varphi|^2 d\Gamma + (n-2)\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

De onde segue a conclusão do Lema.

□

Estabeleceremos a seguir uma identidade básica que será usada posteriormente.

Lema 3.4 . *Seja u a solução forte do sistema (2.1)-(2.4). Então*

$$\begin{aligned} &2\int_S^T E(t)dt - \int_S^T \int_{\Gamma_-} (m.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt + \left[\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right]_S^T \\ &= \int_S^T \int_{\Gamma_+} (m.\nu)|u_t|^2 - |\nabla u|^2 + Lu^2 - (ku_t + Lu)(2m.\nabla u + (n-1)u)d\Gamma dt, \end{aligned}$$

com $\quad 0 \le S < T < \infty.$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.1) por $2m.\nabla u + (n-1)u$ e integrando por partes encontramos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_\Omega (2m.\nabla u + (n-1)u)(u_{tt} - \Delta u)dxdt, \\ &= (1-n)\int_S^T \int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma dt + \left(\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right)_S^T \\ &+ \int_S^T \int_\Omega (-2(m.\nabla u)\Delta u - m.\nabla(u_t)^2 + (n-1)(|\nabla u|^2 - u_t^2))dxdt \\ &= \int_S^T \int_\Gamma (1-n)u\frac{\partial u}{\partial\nu} - (m.\nu)u_t^2 d\Gamma dt + \left(\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right)_S^T \\ &+ \int_S^T \int_\Omega (-2(m.\nabla u)\Delta u + u_t^2 + (n-1)|\nabla u|^2)dxdt. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aplicando o Lema (3.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dxdt + \left[\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right]_S^T \\
= &\int_S^T \int_\Gamma (m.\nu)(u_t^2 - |\nabla u|^2) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(2m.\nabla u + (n-1)u)d\Gamma dt. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Usando as condições de fronteira e substituindo a equação (3.7) em (3.6) obtemos a desigualdade desejada.

□

Para demonstrar a estabilidade assintótica necessitamos dos seguintes lemas.

Lema 3.5 . *A solução do problema (2.1)-(2.4) satisfaz*

$$\left|\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right| \leq 2RE, \qquad \forall t \geq 0,$$

onde E é a energia do sistema.

Demonstração: Aplicando o Teorema da divergência obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (2m.\nabla u + (n-1)u)^2 dx &= \int_\Omega ((2m.\nabla u)^2 + (n-1)^2 + (2n-2)m.\nabla u^2)dx, \\
&= \int_\Omega \{(2m.\nabla u)^2 + (n-1)^2u^2 - (2n-2)n\, u^2\}dx \\
&+ (2n-2)\int_\Gamma (m.\nu)u^2 d\Gamma, \\
&= \int_\Omega \{(2m.\nabla u)^2 + (n^2 - 2n + 1 - 2n^2 + 2n)u^2\}dx \\
&+ (2n-2)\int_\Gamma (m.\nu)\, u^2\}d\Gamma, \\
&= \int_\Omega ((2m.\nabla u)^2 + (1-n^2)u^2\}dx + (2n-2)\int_{\Gamma_+} (m.\nu)\, u^2\}d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Usando as condições (2.5) e (2.6) obtemos

$$\int_\Omega (2m.\nabla u + (n-1)u)^2 dx \leq 4R^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + (2n-2)\int_{\Gamma_+} (m.\nu)u^2 d\Gamma. \qquad (3.8)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, da desigualdade acima e usando as condições (2.8) e (2.9) obtemos:

$$\left|\int_\Omega u_t(2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right| \;\leq\; \left(\int_\Omega |u_t|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega (2m.\nabla u + (n-1)u)dx\right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(2R\int_\Omega |u_t|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \frac{1}{2R}(2m.\nabla u+(n-1)u)dx\right)^{1/2}\\
&\leq R\|u_t\|_{L^2}^2+\frac{1}{2R}\|2m.\nabla u+(n-1)u\|_{L^2}^2,\\
&\leq R\int_\Omega |u_t|^2dx+\frac{4R^2}{4R}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{2(n-1)}{4R}\int_{\Gamma_+}(m.\nu)u^2d\Gamma,\\
&= R\left\{\int_\Omega(|u_t|^2+|\nabla u|^2dx+\int_{\Gamma_+}\frac{(n-1)}{2R^2}(m.\nu)u^2d\Gamma\right\},\\
&\leq R\left\{\int_\Omega(|u_t|^2+|\nabla u|^2dx+\int_{\Gamma_+}\frac{(n-1)}{2}(m.\nu)k^2\,u^2d\Gamma\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_t(2m.\nabla u+(n-1)u)dx\right| &\leq R\left\{\int_\Omega(|u_t|^2+|\nabla u|^2dx+\int_{\Gamma_+}L\,u^2d\Gamma\right\},\\
&= 2RE
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.6 . *A solução forte do problema (2.1)-(2.4) satisfaz*

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Gamma(m.\nu)\{|u_t|^2-|\nabla u|^2\}+\{L\,u^2-(k\,u_t+Lu)(2m.\nabla u+(n-1)u)\}d\Gamma dt\\
&\qquad\leq\int_\Gamma 2RK(u_t)^2+\frac{3-n}{2}Lu^2d\Gamma, \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

para qualquer $0\leq S<T<\infty$.

Demonstração: Da condição (2.9) temos que o lado esquerdo da equação em (3.9) é igual a

$$
\int_\Gamma(m.\nu)\{|u_t|^2-|\nabla u|^2\}+\frac{(n-1)}{2}k^2\,u^2-(k\,u_t+\frac{(n-1)}{2}k^2u)(2m.\nabla u+(n-1)u)\}d\Gamma. \qquad (3.10)
$$

Aplicando Cauchy-Schwarz e usando a condição (2.8) temos:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\Gamma_+}(k\,u_t+\frac{(n-1)}{2}k^2u)2m.\nabla ud\Gamma\right| &\leq \left\{\int_{\Gamma_+}(k\,u_t+\frac{(n-1)}{2}k^2u)^2d\Gamma\right\}^{1/2}2|m|^2\left(\int_{\Gamma_+}|\nabla u|^2d\Gamma\right)^{1/2},\\
&\leq |m|^2k^2\int_{\Gamma_+}u_t^2d\Gamma+\frac{(n-1)^2}{4}|m|^2k^2k^2\int_{\Gamma_+}u^2d\Gamma\\
&+ 2|m|^2\frac{(n-1)}{2}k^2k\int_{\Gamma_+}u\,u_td\Gamma+\int_{\Gamma_+}|\nabla u|^2d\Gamma,\\
&\leq \int_{\Gamma_+}u_t^2d\Gamma+\frac{(n-1)^2}{4}|m|^2k^2\int_{\Gamma_+}u^2d\Gamma\\
&+ (n-1)k\int_{\Gamma_+}u\,u_td\Gamma+\int_{\Gamma_+}|\nabla u|^2d\Gamma. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$-\int_{\Gamma_+}(ku_t+\frac{n-1}{2}k^2u)(n-1)ud\Gamma=-(n-1)k\int_{\Gamma_+}u\,u_td\Gamma-\frac{(n-1)^2}{2}k^2\int_{\Gamma_+}u^2d\Gamma. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.10) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_+}(m.\nu)\left\{u_t^2-|\nabla u|^2+\frac{(n-1)}{2}k^2u^2+u_t^2+\frac{(n-1)^2}{4}k^2u^2\right.\\
&\left.+(n-1)ku\,u_t+|\nabla u|^2-(n-1)ku\,u_t-\frac{(n-1)^2}{2}k^2u^2\right\}d\Gamma,\\
&=\int_{\Gamma_+}(m.\nu)\left\{2\left(\frac{(n-1)}{2}+\frac{(n-1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2}{2}\right)k^2u^2\right\}d\Gamma,\\
&=\frac{2}{k}\int_{\Gamma_+}(m.\nu)ku_t^2d\Gamma\int_{\Gamma_+}\frac{(3-n)}{2}\frac{(n-1)^2}{2}k^2u^2d\Gamma,\\
&\le 2R\int_{\Gamma_+}Ku_t^2d\Gamma+\frac{(3-n)}{2}\int_{\Gamma_+}Lu^2d\Gamma.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do Lema.

□

Lema 3.7 . *A solução forte do problema (2.1)-(2.4) satisfaz*

$$2\int_S^T E(t)dt+\frac{3-n}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_+}Lu^2d\Gamma dt. \tag{3.13}$$

para qualquer $0\le S<T<\infty$.

Demonstração: De acordo com os Lemas (3.5) e (3.6) encontramos

$$\begin{aligned}
&2\int_S^T E(t)dt-\int_S^T\int_{\Gamma_-}(m.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\\
&\le 2R(E(S)+E(T))+\int_S^T\int_{\Gamma_+}2RKu_t^2+\frac{3-n}{2}Lu^2d\Gamma.dt
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema (3.2) concluímos que

$$\begin{aligned}
&2\int_S^T E(t)dt-\int_S^T\int_{\Gamma_-}(m.\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2d\Gamma dt\\
&\le 2RE(S)+2E(T)+2RE(S)-2E(T)+\frac{3-n}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_+}Lu^2d\Gamma.dt,\\
&\le 4RE(S)+\frac{3-n}{2}\int_S^T\int_{\Gamma_+}Lu^2d\Gamma dt. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Como $m.\nu\le 0$ sobre Γ_-, obtemos a conclusão do Lema.

$\square$

Para demonstrar e Teorema (3.1) assumimos que $n \neq 2$. Então, o segundo termo em (3.13) é não-negativo visto que $L \geq 0$ sobre Γ_+, e $L = 0$ se $n = 1$. Então,

$$\int_S^T E(t)dt \leq 2R(E(S), \qquad 0 \leq S < T < \infty.$$

Fazendo $T \to \infty$ concluímos que

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq 2R(E(S), \qquad \forall S \in [0, \infty[\qquad se \qquad n \neq 2. \tag{3.15}$$

Agora aplicando um argumento usual do tipo Gronwall, podemos reescrever (3.15) na forma

$$\frac{d}{ds}\left(e^{s/2R}\int_s^\infty E(t)dt\right) \leq 0 \qquad \forall s \geq 0,$$

e concluir que

$$e^{s/2R}\int_s^\infty E(t)dt \leq \int_0^\infty E(t)dt \qquad \forall s \geq 0.$$

Desde que $E(t)$ é decrescente e não-negativa (conforme Lema (3.2) e (2.7)), a integral do lado esquerdo é minorada por $2RE(S + 2R)$. Por outro lado, a integral do lado direito é majorada por $2RE(0)$(como em (3.15)). Então

$$2RE^{(s/2R)}E(S + 2R) \leq 2RE(0),$$

no qual é equivalente a (3.2).

Assumindo que $n = 2$. Então o segundo termo em (3.13) não é necessariamente maior ou igual a zero, mas é sempre minorada por $-\int_S^T E(t)dt$ (como em (2.7)). Isto leva para estimativa

$$\int_S^T E(t)dt \leq 4R(E(S), \qquad 0 \leq S < T < \infty,$$

em vez de (3.15) e, substituindo $2R$ por $4R$ em todo raciocínio acima, obtemos a estimativa (3.1). O que conclui a demonstração do Teorema.

Bibliografia

[1] BARDOS, C., LEBEAU, G.,& RAUCH, J., **Contrôle et stabilisation dans les problèms hyperboliques**. in LIONS, J. L., **Contrôlabilité exacte et stabilisation de systems distribués. Vol. 1, Contôlabilité exacte**. Massom, Paris, 1988, pp. 492-537.

[2] CAVALCANTI, M. M., CAVALCANTI, V. N. D. & MARTINEZ, P.,**Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary dampind and source term.**, SIAM J. Math.2004.

[3] CHEN. G., **Energy decay estimates and exact boundary value controllabitity for the wave equation in a bounded domain** J. Math. Pures Appl., 58 (1979), pp. 249-274.

[4] HARAUX. A.,1978., **Oscillations forcees ppour certain systemes diddipatifs nonlineaires**. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, N° 78010 Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[5] HARAUX. A.,1978., **Semi-groupes linéaires equations d'evolution linéaires périodiques**. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, N° 78011 Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[6] KOMORNIK, V., 2010., **Boundary Stabilization of a Coupled System of Wave Equations.** Département de Mathématique, Université Louis Pasteur.

[7] KOMORNIK, V. 1991.,**Rapid Boundary Stabilization of the Wave Equation.**. SIAM J. Control and Optimization. Vol. 29,N° 1, pp. 197-208.

[8] LAX, P., MORAWETZ, C.S. & PHILLIPS, R. S. ,**Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle**. Comm. Pure Appl. math., 16 (1963), pp. 477-486.

[9] LAX, P., & PHILLIPS, R. S. ,**Scattering Theory**. Academic Press, New York, 1967.

[10] LIONS, J. L., MAGENES, E., **Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications**. Springer-Verlag, New York, Vol. I,(1972).

[11] LIONS, J.L., **Quelques Mèthodes de resolution de problèmes aux limites non lineaires**. Dunod Gauthiers Villars, Paris,(1969).

[12] MORAWETZ, C. S., RALSTON, J. V. & STRAUSS, W. A., **Decay of the wave equation outside nontrapping obstacles**. Comm. Pure Appl. Math., 30(1977),pp.447-508.

[13] QUINN, J.P. & RUSSELL, D. L., **Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of hyperbolic equations with boundary damping**. Proc. Roy. soc. Edinburgh Sect. A, 77 (1977), pp. 97-127.

[14] RAUCH, J.& TAYLOR, M. E., **Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains**. Indiana Univ. Math., 24(1974), pp. 79-86.

[15] RELLICH, F., **Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral**. Math. Z. 18 (1940), pp. 635-636.

[16] SLEMROD, M., **Stabilization of boundary control systems**. J. Differential Equations, 22 (1976), pp. 402-415.