UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lucélia Lima Costa

DECAIMENTO GERAL DA ENERGIA ASSOCIADA AS PLACAS TERMOVISCOELÁSTICAS COM MEMÓRIA

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lucélia Lima Costa

DECAIMENTO GERAL DA ENERGIA ASSOCIADA AS PLACAS TERMOVISCOELÁSTICAS COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém
2011

Costa, Lucélia Lima

Decaimento geral da energia associada as placas termoviscoelásticas com memória/(Lucélia Lima Costa); orientador, Mauro de Lima Santos. - 2011.

61 f. il. 28 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2011.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Método de Galerkin. I. Santos, Mauro de Lima, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciênciais Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatítica. III. Título.

CDD 22. ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lucélia Lima Costa

DECAIMENTO GERAL DA ENERGIA ASSOCIADA AS PLACAS TERMOVISCOELASTICAS COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Membro)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha (Membro)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera (Membro)
LNCC - UFRJ

"Eu aprendi, que posso ir além dos limites que eu próprio me coloquei."

(William Shakespeare)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a vida e por ser em muitos momentos, as duas pegadas na areia.

Em especial meu marido e sempre companheiro André. Pelo incansável incentivo principalmente nas horas difíceis e pela paciência sem fim. A minha filha Ana Luísa, fonte inesgotável de alegria na minha vida.

Aos meus pais Raimundo e Olgarina que transformaram essa oportunidade em realização, através de suas orações, incentivos e carinho.

A todos meus amigos e familiares. Obrigada por torcerem sempre por esta conquista.

De maneira especial a meu orientador Prof. Dr. Mauro de Lima Santos. Pelas portas abertas no início deste trabalho, pela paciência, compreensão e atenção desprendidos durante toda a jornada, por acreditar em mim e por me fazer confiar que este dia chegaria.

Ao Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, ao Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha e ao Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias. Pelas críticas e sugestões no exame de qualificação.

Aos amigos e colegas do mestrado, que, com momentos de alegria e tristeza, superamos juntos todos os obstáculos que encontramos. Em especial, Anderson Ramos, pelo companheirismo e contribuições. E Liliane Ribeiro, obrigada pela amizade sincera, pela energia positiva e entusiasmo que muitas batalhas me ajudou a ganhar, pela atenção e carinho, enfim, pelas valiosas contribuições concedidas ao meu trabalho.

Ao programa de Pós-graduação e a todos os professores do PPGME. Enfim, ao povo paraense pelo investimento em minha formação, que prometo retribuir da melhor forma possível.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar a existência e regularidade de soluções e o decaimento geral para placas termoviscoelásticas com memória. Observe que o termo memória significa a propriedade que o material constitutivo possui de recuperar sua posição inicial em razão da viscosidade [1]. Em particular estudamos o caso de uma placa fina, homogênea, isotrópica, termoviscoelástica, de densidade uniforme, modelada pelas equações

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + \alpha\Delta\theta = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty),\\
\theta_t - k\Delta\theta + \gamma\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty),
\end{aligned}
$$

com as seguintes condições iniciais:

$$
u(x,y,0) = u_0(x,y),\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y),\ \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y)\ (x,y) \in \Omega,
$$

e condições de fronteira:

$$
\begin{aligned}
k\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \lambda\theta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty),\\
u = \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty),\\
\mathcal{B}_1 u + \alpha\theta - \mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty),\\
\mathcal{B}_2 u - h\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu} - \mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 u &= \Delta u + (1-\mu)\mathrm{B}_1 u,\\
\mathcal{B}_2 u &= \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial \mathrm{B}_2 u}{\partial\tau},
\end{aligned}
$$

sendo B_1 e B_2 dados por

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}_1 u &= 2\nu_1\nu_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \nu_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\
\mathrm{B}_2 u &= (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \nu_1\nu_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Aqui Ω é um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ regular tal que, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ com $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing$, ambas com medida de Lebesgue positiva.

A existência será obtida usando o Método de Galerkin e para o comportamento assintótico, usaremos o Método da energia.

Palavras-chave: Decaimento geral, Dissipação tipo memória.

Abstract

The objective is to show the existence and regularity of solutions and the general decay termoviscoelastic plates with memory. Note that the term memory means the property that the constitutive material has to regain his starting position because of the viscosity [1]. In particular we study the case a thin of homogeneous, isotropic termoviscoelastic plate, of uniform thickness, modeled by equations

$$\begin{aligned} u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + \alpha\Delta\theta = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \theta_t - k\Delta\theta + \gamma\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

with the following initial conditions:

$$u(x,y,0) = u_0(x,y),\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y),\ \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y)\ (x,y) \in \Omega,$$

with the following boundary conditions:

$$\begin{aligned} k\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \lambda\theta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty), \\ u = \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \mathcal{B}_1 u + \alpha\theta - \mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \mathcal{B}_2 u - h\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu} - \mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 u &= \Delta u + (1-\mu)\mathrm{B}_1 u, \\ \mathcal{B}_2 u &= \frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + (1-\mu)\frac{\partial \mathrm{B}_2 u}{\partial\tau}, \end{aligned}$$

and B_1 and B_2 are given by

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_1 u &= 2\nu_1\nu_2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \nu_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \mathrm{B}_2 u &= (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \nu_1\nu_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}. \end{aligned}$$

Here Ω is a open bounded set of $\mathbb{R}^2$ such that $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ with $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing$, both with positive Lebesgue measure.

The existence will be obtained using the Galerkin method and the asymptotic behavior, we use the method of energy.

Keywords: General decay, memory dissipation.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar o decaimento geral das soluções para o sistema de placas termoviscoelásticas na presença de um efeito memória. Isto é, mostrar que a taxa de decaimento da solução não depende da taxa de decaimento da função relaxamento g.

Este trabalho está baseado no artigo de Muñoz Rivera e Barreto [20] o qual os autores provaram que a taxa de decaimento da solução do sistema de placas termoviscoelásticas depende da taxa de decaimento da função relaxamento g.

Em [3] Dafermos mostrou que a solução para problemas viscoelásticos se estabiliza sem taxa de decaimento. Lagnese [10] considerou a equação linear viscoelástica, obtendo taxas uniformes de decaimento, mas introduzindo um termo adicional de amortecimento agindo na fronteira. Por outro lado, taxas uniformes de decaimento para soluções de equações lineares viscoelásticas com memória só foram obtidas por Muñoz Rivera [17] em 1994. Posteriormente, significativos progressos sobre o aspecto linear e não-linear do sistema termoelástico foram obtidos; veja [2, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 17, 18, 19], onde os autores obtiveram a existência, unicidade e decaimento uniforme da solução.

A nossa contribuição neste trabalho, consiste em generalizar o resultado de decaimento visto anteriormente em [20]. Mais precisamente, mostrar que a energia decai com uma taxa de decaimento similar a da função relaxamento, que não é necessariamente um decaimento na forma exponencial ou polinomial. De fato, nosso resultado permite uma grande classe de funções relaxamento.

O trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 1, apresentamos alguns lemas, teoremas e algumas desigualdades que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, por exemplo: Lema Du Bois Raymond e Desigualdade de Korn. Alguns desses resultados serão demonstrados e outros serão omitidos, porém indicada a bibliografia adequada. Faremos também, uma introdução às equações integrais de Volterra.

No Capítulo 2, enunciamos e demonstramos o teorema de existência e o teorema de reguralidade da solução do sistema dado. Para mostrar a existência da solução, usamos o metódo de Galerkin.

No Capítulo 3, mostramos o resultado principal associado com a estabilidade do sistema de placa termoviscoelástica com memória. Para isto, usamos algumas condições, sobre a função relaxamento g, com as necessárias modificações exigidas pela natureza do nosso problema.

Capítulo 1

Fundamentos

Neste capítulo apresentamos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais Parciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Desse modo, não nos preocuparemos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathrm{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula, e vale as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$
2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$
3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda \; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathrm{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1 *Seja* $\varphi : (0,1) \to R$ *tal que* $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$*: Verifica-se que o* $supp\,(\varphi) = (0,1)$*, não é um conjunto compacto.*

Neste estudo, demos destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow$ R, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e de suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1.2 *Dados $x_0 \in R^n$, $r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 e raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in R^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow R$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right) & se \;\; \|x - x_0\| < r \\ 0 & se \;\; \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares continuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1 *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Denotamos por $\mathrm{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $\mathrm{L}^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Quando $p = 2$, $\mathrm{L}^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.2 *Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \to 0.$$

note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [10]

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathrm{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi\rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbf{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em R para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1 *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow R$ é localmente integrável em Ω.quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.3 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow R$ por*

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, a linearidade de T_u segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo *em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *para uma função teste* φ*. Então*

$$|\langle T_u,\varphi_\nu\rangle-\langle T_u,\varphi\rangle|=|\langle T_u,\varphi_\nu-\varphi\rangle|=\left|\int\limits_\Omega u(x)\left(\varphi_\nu-\varphi\right)(x)\,dx\right|\leq\int\limits_\Omega|u(x)\left(\varphi_\nu-\varphi\right)(x)|\,dx$$

$$\leq\sup|\varphi_\nu-\varphi|\int_\Omega|u\,(x)|\,dx\rightarrow 0,$$

pois, $\varphi_\nu\rightarrow\varphi$ *uniformemente.*

A distribuição T_u assim definida é dita *gerada pela função localmente integrável* u e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u=T_v$ se, e somente se, $u=v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1 (de Du Bois Raymond) *Seja* $u\in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então* $T_u=0$ *se, e somente se,* $u=0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: ver [11]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.4 *Seja* x_0 *um ponto de* Ω *e definamos a função* $\delta_{x_0}:\mathcal{D}(\Omega)\rightarrow R$ *dada por*

$$<\delta_{x_0},\varphi>=\varphi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} *é uma distribuição, conhecida por* Distribuição de Dirac*, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição* δ_{x_0} *não é definida por uma função* $u\in L^1_{loc}(\Omega)$*, isto é, não existe* $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx=\varphi(x_0),\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} *é definida por alguma função*

$u\in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então tem-se:*

$$<\delta_{x_0},\varphi>=\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx=\varphi(x_0),\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi\in\mathcal{D}(\Omega)$ *definida por*

$$\xi(x)=\|x-x_0\|^2\,\varphi(x)$$

temos,

$$\xi(x_0) = < \delta_{x_0}, \xi > = \int_\Omega u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x) dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema 1.1, segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω*, logo* $u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω*, isto é,* $< \delta_{x_0}, \varphi > = 0$*, para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, ou seja,* $\varphi(x_0) = 0$*, para toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, que é uma contradição.*

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $1 \leq p, q$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *e* $g \in \mathrm{L}^q(\Omega)$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \| f \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \| g \|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}$$

Teorema 1.2 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$*. Então, existe uma constante c dependendo de* Ω *e n tal que, para todo* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$*,*

$$\| u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)} \leq c \| \nabla u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, por L. Schwartz.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathrm{R},$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha} T_v = D^{\alpha} T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.3 *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.5 *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em R e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada u' não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Com efeito, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u^{'}, \varphi >= - < u, \varphi^{'} >= - \int_0^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev*.*

Observação 1.4 *Se $u \in C^k(R^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção de derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^{\alpha} T_u = T_{D^{\alpha} u} \quad \forall |\alpha| \leq k,$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentamos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do R^n com fronteira regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\right\},$$

1.3 Desigualdade de Korn

Na matemática, a desigualdade de Korn é um resultado sobre as derivadas de funções de Sobolev. Além disso, esta desigualdade desempenha um papel importante na teoria da elasticidade linear.

Teorema 1.3 *(Desigualdade de Korn) Sejam $[v]$ e $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ normas equivalentes em V, isto é, existem constantes $c_1, c_2 > 0$, tais que*

$$c_1\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq [v] \leq c_2\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

para todo v em V.

Demonstração: Consultar [6]

1.4 O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [12] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.4 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: Ver [11].

Proposição 1.1 *(Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$) Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: Ver [12].

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

1.5 Equação Integral de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações de Volterra.

Definição 1.2 *É um tipo especial de equação integral. Tais equações são divididas em dois grupos, referenciados como do primeiro tipo e do segundo tipo.*
Uma equação de Volterra do primeiro tipo é expressa na forma

$$f(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)ds,$$

enquanto uma equação de Volterra do segundo tipo é dada por

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds. \tag{1.1}$$

Na teoria dos operadores e na teoria de Fredholm, as equações correspondentes são denominadas operadores de Volterra. Uma equação integral de Volterra é uma convolução, se

$$f(t) = g(t) + \int_{t_0}^t k(t-s)f(s)ds$$

A função k na integral é denominada núcleo.

Teorema 1.5 *Seja $k(t,s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T$, $T \geq 0$ e $g(t)$ uma função contínua em $0 \leq t \leq T$. Então, existe uma única função contínua $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

Demonstração: Ver [21].

1.6 Equação Resolvente

Pelo teorema anterior vimos que, dada $g \in \mathrm{C}([0,T])$ existe uma única $f \in \mathrm{C}([0,T])$, tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds = g(s)$$

Desta forma, consideremos o operador

$$\begin{aligned} \mathrm{K} : \mathrm{C}[0,T] &\longrightarrow \mathrm{C}[0,T] \\ f &\longmapsto \mathrm{K}[f] = f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds\cdot \end{aligned}$$

O operador K é linear e bijetivo. De fato,

K é linear.

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}[f_1 + \lambda f_2] &= f_1(t) + \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s)(f_1(s) + \lambda f_2(s))ds \\
&= f_1(t) + \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s) f_1(s) ds + \lambda \int_0^t k(t,s) f_2(s)) ds \\
&= f_1(t) + \int_0^t k(t,s) f_1(s) ds + \lambda(f_2(t) + \int_0^t k(t,s) f_2(s) ds) \\
&= \mathrm{K}[f_1] + \lambda \mathrm{K}[f_2] \cdot
\end{aligned}$$

K é bijetivo

A sobrejetividade segue do fato que dada $g \in \mathrm{C}[0,T]$, pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in \mathrm{C}[0,T]$ tal que $\mathrm{K}[f] = g$. A injetividade é obtida de maneira análoga, pois $\mathrm{K}[f] = 0$ pode ser interpretada como a equação $\mathrm{K}[f] = g$ sendo $g \equiv 0$ e pelo teorema de existência e unicidade existe uma única $f \in \mathrm{C}[0,T]$ que satisfaz essa equação, a saber $f(x) = 0$. A função $K(t,s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra. Note que, como definido, $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_0(s)ds$, de onde segue que

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= \int_0^t k(t,s)\varphi_1(s) ds \\
&= \int_0^t k(t,s) \int_0^s k(s,\tau) g(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) g(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) ds g(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em $0 \leq \tau \leq s \leq t$. Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t,\tau) g(\tau) d\tau,$$

sendo

$$k_2(t,\tau) = \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) ds.$$

Indutivamente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t,s) g(s) ds \ \forall n \geq 1,$$

sendo $k_1(t,s) = k(t,s)$, $k_n(t,s) = \int_s^t k(t,\tau) k_{n-1}(\tau,s) d\tau$ para $n \geq 2$. Como $f_n(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)$ temos

$$f_n(t) = \int_0^t r_n(t,s) g(s) ds,$$

sendo $r_n(t,s) = \sum_{i=1}^{n} k_i(t,s)$. Usando a continuidade da função k temos, $|k(t,s)| \leq$ K. Analogamente, podemos mostrar que $|k_n(t,s)| \leq \frac{\mathrm{K}^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$. Daí, segue que a série $r(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,s)$ é absoluta e, portanto, uniformente convergente. A função $r(t,s)$ é chamada o núcleo resolvente de $k(t,s)$.

Teorema 1.6 *Se $k(t,s)$ e $g(t)$ são contínuas então a única solução contínua de* **??** *é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

Demonstração

Das relações anteriores

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t,s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente podemos permutar a ordem do somatório com a integração, obtendo

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t k_i(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

□

Observação 1.5 *O teorema anterior mostra que o operador inverso* K^{-1} *tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja,*

$$\begin{aligned} \mathrm{K}^{-1} : \mathrm{C}[0,T] &\longrightarrow \mathrm{C}[0,T] \\ g &\longmapsto \mathrm{K}^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds. \end{aligned}$$

1.7 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.3 *(Convergência Fraca). Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E'.$$

Definição 1.4 *(Convergência Fraca Estrela). Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Diz-se $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco -$\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle, \forall u \in E.$$

Lema 1.2 *(Lema de Gronwall). Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração: Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega^{'}(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$

Logo,

$$\omega^{'}(t) \leq \omega(t)\,\psi(t),$$

onde segue,

$$\frac{\omega^{'}(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t, obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega^{'}(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Assim

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right), \;\; t \in [a,b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

□

Capítulo 2

Existência e Regularidade de Solução

2.1 Sistema Acoplado de uma Placa Termoelástica

Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ regular. Assumimos que a fronteira Γ está dividida em duas partes, tal que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{com} \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing \quad \text{e} \quad \Gamma_0 \neq \varnothing \cdot \tag{2.1}$$

Denotamos por $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ o vetor unitário normal exterior a Γ e por $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ o vetor tangente unitário orientado positivamente sobre Γ. Tendo em vista estas notações, consideremos o seguinte problema de valor inicial e de fronteira que descreve as pequenas vibrações de uma placa fina, homogênea, isotrópica, termoviscoelástica, de densidade uniforme h dado por:

$$u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds + \alpha\Delta\theta = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

$$\theta_t - k\Delta\theta + \gamma\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.3}$$

com as seguintes condições iniciais:

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \; u_t(x,y,0) = u_1(x,y), \; \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y) \; (x,y) \in \Omega, \tag{2.4}$$

e condições de fronteira:

$$k\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \lambda\theta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty), \tag{2.5}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \tag{2.6}$$

$$\mathcal{B}_1 u + \alpha\theta - \mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \tag{2.7}$$

$$\mathcal{B}_2 u - h\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu} - \mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \tag{2.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 u &= \Delta u + (1-\mu)\mathrm{B}_1 u, \\
\mathcal{B}_2 u &= \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial \mathrm{B}_2 u}{\partial \tau},
\end{aligned}$$

sendo B_1 e B_2 dados por

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_1 u &= 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\
\mathrm{B}_2 u &= (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Em (2.2)-(2.3), $u = u(x, y, t)$ denota a posição da placa no instante de tempo t e $\theta = \theta(x, y, t)$ a diferença de temperatura. Podemos interpretar a equação (2.2) dizendo que as tensões a qualquer momento depende do comportamento completo das tensões que o material sofreu.

Por $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ denotamos uma função real positiva e por μ uma constante tal que $\mu \in]0, 1/2[$. Assumimos que as constantes k, γ, α, h e λ são positivas.

Além disso, supomos que g satisfaz as seguintes condições:

$$g, g', g'' \in L^1(0, \infty), \qquad 1 - \int_0^\infty g(s)ds > 0, \tag{2.9}$$

$$g(t) \geq 0, \qquad g'(t) \leq 0\cdot \tag{2.10}$$

E ainda, supomos que existe uma função diferenciavél ξ satisfazendo

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \;\; \xi(t) > 0, \; \xi'(t) < 0, \;\; t \geq 0\cdot \tag{2.11}$$

Existem muitas funções que satisfazem (2.11), por exemplo, para $a > 0$ e $w > 0$ a ser escolhido corretamente,

- se $g(t) = a\, e^{-w(t+1)^p}$, $0 < p < 1$ temos $\xi = pw(t+1)^{p-1}$.

- se $g(t) = a(t+1)^q$, $q < -1$ temos $\xi = q(t+1)^{-1}$.

- se $g(t) = \frac{1}{\ln(3+t)}$, $t \geq 0$ temos $\xi = \frac{1}{(3+t)(\ln(3+t))}$.

Para estudar a existência de solução da equação (2.2)-(2.3), consideramos os seguintes espaços funcionais:

$$\begin{aligned}
V &= \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}, \\
W &= \{w \in H^2(\Omega); w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}\cdot
\end{aligned}$$

Considere a forma bilinear $a(.,.)$, dada por

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + 2(1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right\} dA\cdot$$

Devido a desigualdade de Korn a forma bilinear $a(.,.)$ define uma norma em W equivalente à norma usual de $H^2(\Omega)$. Note que, o espaço V junto com a norma

$$\|\psi\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Lema 2.1 *Sejam u e v funções em $H^4(\Omega) \cap W$. Então, temos:*

$$\int_\Omega (\Delta^2 u) v dA = a(u,v) + \int_{\Gamma_1} \left\{ (\mathcal{B}_2 u) v - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1$$

Demonstração: Da fórmula de Green, temos

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u) v dA = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dA + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v d\Gamma_1, \tag{2.12}$$

sendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta u \frac{\partial v}{\partial x_i}) = \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \Delta u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2},$$

integrando em Ω, somando em i e usando o Lema de Gauss, obtemos

$$-\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dA = \int_\Omega \Delta u \Delta v dA - \int_{\Gamma_1} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1 \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta(\Delta u) v dA &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1 + \int_\Omega \Delta u \Delta v dA \\
&= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1} \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_1 + a(u,v) + (1-\mu) \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dA - 2(1-\mu) \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dA \cdot
\end{aligned}$$

Pela definição de $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ e usando o fato que

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dA - 2 \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dA = \int_{\Gamma_1} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{B}_2 u}{\partial \eta} \right) v - (\mathcal{B}_1 u) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} d\Gamma_1,$$

o resultado é obtido.

□

Para mostrar a existência de soluções regulares, primeiro obtemos usando o método de Galerkin, a existência de solução fraca, e em seguida usamos a regularidade elíptica para obter a regularidade de soluções para a equação da placa termoviscoelástica.

Para simplificar nossa análise, definimos os seguintes operadores binários:

$$
\begin{aligned}
g\Box\partial^2 u &= \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds,\\
g\Box\nabla u &= \int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s)|^2 dAds,\\
g\Box u &= \int_0^t g(t-s)|u(x,t)-u(x,s)|^2 dAds\cdot
\end{aligned}
$$

Com esta notação obtemos o seguinte Lema.

Lema 2.2 *Para qualquer* $v \in \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{H}^2(\Omega))$, *temos:*

$$
\begin{aligned}
a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) &= -\frac{1}{2}g(t)a(v,v)+\frac{1}{2}g'\Box\partial^2 v\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 v-\left(\int_0^t gds\right)a(v,v)\right\},\\
\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla v(s)ds\nabla v_t dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dA+\frac{1}{2}g'\Box\nabla v\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\nabla v-\left(\int_0^t gds\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 dA\right\},\\
\int_\Omega\int_0^t g(t-s)v(x,s)dsv_t(x,t)dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |v|^2 dA+\frac{1}{2}g'\Box v\\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box v-\left(\int_0^t gds\right)\int_\Omega |v|^2 dA\right\}.
\end{aligned}
$$

Demonstração: Da simetria de $a(\cdot,\cdot)$, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{g\Box\partial^2 v\} &= \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(t-s)a(v(t)-v(s),v(t)-v(s)ds)\right\}\\
&= \int_0^t g'(t-s)a(v(t)-v(s),v(t)-v(s))ds\\
&\quad +\int_0^t g(t-s)ds\frac{d}{dt}a(v,v)-2\int_0^t g(t-s)a(v_t,v(s))ds.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\int_0^t g(t-s)ds\frac{d}{dt}a(v,v)=\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)dsa(v,v)-g(t)a(v,v),
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g\Box\partial^2 v &= g'\Box\partial^2 v+\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)dsa(v,v)-g(t)a(v,v)\\
&\quad -2\int_0^t g(t-s)a(v_t,v(s))ds.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
2\int_0^t g(t-s)a(v_t, v(s))ds &= -g(t)a(v,v) + g'\Box\partial^2 v - \frac{d}{dt}g\Box\partial^2 v \\
&\quad +\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)dsa(v,v)\cdot
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) &= -\frac{1}{2}g(t)a(v,v) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 v \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 v - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(v,v)\right\}\cdot
\end{aligned}
$$

O que prova a primeira identidade. A partir desta demonstração podemos fazer as outras duas identidades usando as mesmas idéias.

□

A definição de solução fraca que usamos neste trabalho é dada a seguir.

Definição 2.1 *Dizemos que o par (u, v) é uma solução fraca das equações (2.2) - (2.8) se $u \in C^1([0,T];V)\cap C^0([0,T];W)$, $\theta \in C^0([0,T];H^1(\Omega))$ e as seguintes identidades são satisfeitas:*

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega(-u_t\varphi_t - h\nabla u_t\nabla\varphi_t)dA + \int_0^T a(u,\varphi)dt + \alpha\int_0^T\int_\Omega \theta\Delta\varphi dAdt \\
-\int_0^T a(g{*}u,\varphi)dt = \int_\Omega u_1\varphi(.,0)dA + h\int_\Omega \nabla u_1\nabla\varphi(.,0)dA, \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \theta\psi_t dAdt + \int_0^T\int_\Omega k\nabla\theta\nabla\psi + \gamma\theta\psi dAdt - \alpha\int_0^T\int_\Omega \Delta u_t\psi dAdt \\
= \int_\Omega \theta_0\psi(.,0)dA - \alpha\int_\Omega \Delta u_0\psi(.,0)dA - \lambda\int_0^T\int_{\Gamma_1}\theta\psi d\Gamma dt, \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

para qualquer função $\varphi \in C^1([0,T];W)$ tal que $\varphi(.,T) = 0$, $\varphi_t(.,T) = 0$ e $\psi \in C^1([0,T];V)$ tal que $\psi(.,T) = 0$.

Lema 2.3 *A energia associada com a solução forte do sistema (2.2)-(2.8) sastisfaz a seguinte condição:*

$$
E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega(|u_t|^2 + h|\nabla u_t|^2 + |\theta|^2)dA + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)a(u,u) + g\Box\partial^2 u\right\}\cdot
$$

Demonstração: De fato, multiplicando a equação (2.2) por u_t e integrando em Ω, obtemos:

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dA - h\int_\Omega \Delta u_{tt}u_t dA + \int_\Omega \Delta^2 u u_t dA - \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dA + \alpha\int_\Omega \Delta\theta u_t dA = 0. \quad (2.16)$$

Agora, multiplicando a equação (2.3) por θ e integrando em Ω encontramos:

$$\int_\Omega \theta_t\theta dA - k\int_\Omega \Delta\theta\theta dA + \gamma\int_\Omega \theta\theta dA - \alpha\int_\Omega \Delta u_t\theta dA = 0. \quad (2.17)$$

Analisando separadamente cada termo da equação (2.16), temos que

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dA = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dA. \quad (2.18)$$

Aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\begin{aligned} -h\int_\Omega \Delta u_{tt}u_t dA &= h\int_\Omega \nabla u_{tt}\nabla u_t dA - h\int_{\Gamma_1} u_t\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} d\Gamma_1 \\ &= \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA - h\int_{\Gamma_1} u_t\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta^2 u u_t dA &= a(u,u_t) + \int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Usando novamente a fómula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dA =& -\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t) ds - \int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s) ds\right\} u_t d\Gamma_1 \\ &+ \int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s) ds\right\}\frac{\partial u_t}{\partial\nu} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e

$$\alpha\int_\Omega \Delta\theta u_t dA = -\alpha\int_\Omega \nabla\theta\nabla u_t dA + \alpha\int_{\Gamma_1} u_t\frac{\partial\theta}{\partial\nu} d\Gamma_1. \quad (2.22)$$

De forma análoga, analisando separadamente os termos da equação (2.17) obtemos:

$$\int_\Omega \theta_t\theta dA = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2 dA. \quad (2.23)$$

Usando a fórmula de Green, temos

$$
\begin{aligned}
-k\int_\Omega \Delta\theta\theta dA &= k\int_\Omega \nabla\theta\nabla\theta dA - k\int_\Gamma \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\theta d\Gamma\\
&= k\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA + \lambda k\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

e

$$
\gamma\int_\Omega \theta\theta dA = \gamma\int_\Omega |\theta|^2 dA. \qquad (2.25)
$$

Novamente, usando a fórmula de Green, obtemos

$$
-\alpha\int_\Omega \Delta u_t\theta dA = \alpha\int_\Omega \nabla u_t\nabla\theta dA - \alpha\int_{\Gamma_1}\theta\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_1. \qquad (2.26)
$$

Substituindo (2.18) - (2.26) em (2.16) e (2.17), encontramos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA - h\int_{\Gamma_1} u_t\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu}d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u)\\
&+\int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2u)u_t - (\mathcal{B}_1u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\}d\Gamma_1 - \int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds\\
&-\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}u_t d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_1\\
&-\alpha\int_\Omega \nabla\theta\nabla u_t dA + \alpha\int_{\Gamma_1} u_t\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma_1 = 0, \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2 dA + k\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA + \lambda k\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma + \gamma\int_\Omega |\theta|^2 dA + \alpha\int_\Omega \nabla u_t\nabla\theta dA\\
&-\alpha\int_{\Gamma_1}\theta\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_1 = 0\cdot \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Somando (2.27) e (2.28) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2 dA\\
&-\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds + \int_{\Gamma_1}\left\{\mathcal{B}_2u - h\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} - \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right.\\
&\left.-\mathcal{B}_2\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right)\right\}u_t d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_1}\left\{\mathcal{B}_1u + \alpha\theta\right.\\
&\left.-\mathcal{B}_1\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right)\right\}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_1 = -k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA\right.\\
&\left.+\lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2 dA\cdot \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Usando as condições de fronteira (2.7) e (2.8) obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2\,dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dA$$
$$-\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds = -k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dA + \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2\,dA\cdot \tag{2.30}$$

Usando o Lema 2.2, temos que

$$\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds = a\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds, u_t\right)$$
$$= -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\}\cdot \tag{2.31}$$

Substituindo (2.31) em (2.30) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2\,dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dA$$
$$+\frac{1}{2}g(t)a(u,u) - \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\}$$
$$= -k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dA + \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2\,dA\cdot$$

Assim sendo, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2\,dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g\Box\partial^2 v = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u$$
$$-k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dA + \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2\,dA.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_t|^2\,dA + h\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \int_\Omega |\theta|^2\,dA + g\Box\partial^2 u + \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\} =$$
$$-\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u - k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dA + \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2\,dA,$$

daí vem que

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u - k\left(\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA + \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma\right) - \gamma\int_\Omega |\theta|^2\,dA\cdot$$

Portanto

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega (|u_t|^2 + h|\nabla u_t|^2 + |\theta|^2)dA + \left(1-\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u) + g\Box\partial^2 u\right\}\cdot$$

$\Box$

2.2 Existência de Solução

A existência de solução fraca é dado no teorema abaixo.

Teorema 2.1 *Suponhamos que g satisfaz (2.9) e (2.10). Então para quaisquer dados iniciais* $(u_0, u_1, \theta_0) \in W \times V \times L^2(\Omega)$, $h > 0$ *e* $T > 0$, *existe uma única solução fraca para o sistema* $(2.2) - (2.8)$.

Demonstração: A demonstração será baseada no método de Galerkin. Para isto, seja $\{w_i \in W; i \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal de W. O nosso objetivo aqui é determinar $u^m(x,t)$ e $\theta^m(x,t)$ tais que

$$u^m(.,t) = \sum_{i=1}^{m} h_{i,m}(t) w_i(.), \qquad , \qquad \theta^m(.,t) = \sum_{i=1}^{m} b_{i,m}(t) v_i(.),$$

soluções do seguinte problema

$$\int_\Omega u_{tt}^m w_j dA + h \int_\Omega \nabla u_{tt}^m \nabla w_j dA + a(u^m, w_j) - a(g{*}u^m, w_j) + \alpha \int_\Omega \theta^m \Delta w_j dA = 0 \cdot \tag{2.32}$$

$$\int_\Omega \theta_t^m v_j dA + k \int_\Omega \nabla \theta^m \nabla v_j + \gamma \int_\Omega \theta^m v_j dA - \alpha \int_\Omega \Delta u_t^m v_j dA = -\lambda \int_\Gamma \theta^m v_j d\Gamma. \tag{2.33}$$

$$u^m(.,0) = u_{0,m} \qquad , \qquad u_t^m(.,0) = u_{1,m} \qquad , \qquad \theta^m(.,0) = \theta_{0,m},$$

onde

$$u_{0,m} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_\Omega u_0 w_i dA \right\} w_i, \qquad u_{1,m} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_\Omega u_1 w_j dA \right\} w_i,$$

$$\theta_{0,m} = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_\Omega \theta_0 v_i dA \right\} v_i.$$

Denotamos por $A = (a_{ij})$ a matriz dada por

$$a_{ij} = \left(\int_\Omega w_i w_j dA + h \int_\Omega \nabla w_i \nabla w_j dA \right),$$

onde $dA = dxdy$.

$A = (a_{ij})$ é uma matriz definida positiva. De fato, seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$. Então,

$$\begin{aligned} x^T A x &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i \left(\int_\Omega w_i w_j dA + h \int_\Omega \nabla w_i \nabla w_j dA \right) x_j, \\ &= x_i \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \int_\Omega w_i w_j dA x_j + x_i \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} h \int_\Omega \nabla w_i \nabla w_j dA x_j, \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \sum_{j=1}^{m} w_j x_j dA + h \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \nabla w_i x_i \sum_{j=1}^{m} \nabla w_j x_j dA. \end{aligned}$$

Se $v = \sum_{i=1}^{m} x_i w_i$, $v \in V$, obtemos

$$
\begin{aligned}
x^T A\, x &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega (w_i x_i)(w_j x_j)dA + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega (\nabla w_i x_i)(\nabla w_j x_j)dA,\\
x^T A\, x &= \int_\Omega |v|^2 dA + h\int_\Omega |\nabla v|^2 dA \geq \delta_2 \|v\|^2_{H^1(\Omega)} > 0, \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

para $1, h > 0$, onde $\delta_2 = min\{1, h\}$.

Portanto A é definida positiva, logo inversível.

Como A é uma matriz definida positiva, segue que a existência de solução local para o problema aproximado é garantida. O próximo passo é estender a solução u^m e θ^m a todo intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0$. Isto será feito através de estimativas a priori.

Estimativa a priori

Multiplicando a equação (2.32) por $h'_{j,m}$ e somando em $j = 1, 2, 3, \ldots, m$ obtemos,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u^m_{tt}\sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} w_j dA + h\int_\Omega \nabla u^m_{tt}\nabla\left(\sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} w_j\right) dA + a(u^m, \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} w_j)\\
-a(g{*}u^m, \sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} w_j) + \alpha\int_\Omega \theta^m \Delta\left(\sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} w_j\right) dA = 0,
\end{aligned}
$$

substituindo $\sum_{j=1}^{m} h'_{j,m} wj = u^m_t$, temos

$$
\int_\Omega u^m_{tt} u^m_t dA + h\int_\Omega \nabla u^m_{tt}\nabla u^m_t dA + a(u^m, u^m_t) - a(g{*}u^m, u^m_t) + \alpha\int_\Omega \theta^m \Delta u^m_t dA = 0\cdot
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^m_t|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u^m_t| dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u^m, u^m) - a(g{*}u^m, u^m_t)\\
+\alpha\int_\Omega \theta^m \Delta u^m_t dA = 0\cdot \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Multiplicando a equação (2.33) por $b_{j,m}$ e somando em $j = 1, 2, 3, \ldots, m$ temos,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \theta^m_t \sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j dA + k\int_\Omega \nabla\theta^m \nabla\left(\sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j\right) dA + \gamma\int_\Omega \theta^m \sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j dA\\
-\alpha\int_\Omega \Delta^m_t \sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j dA = -\lambda\int_\Gamma \theta^m \sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j d\Gamma,
\end{aligned}
$$

substituindo $\sum_{j=1}^{m} b_{j,m} v_j = \theta^m$, obtemos,

$$
\int_\Omega \theta^m_t \theta^m dA + k\int_\Omega \nabla\theta^m \nabla\theta^m dA + \gamma\int_\Omega \theta^m\theta^m dA - \alpha\int_\Omega \Delta u^m_t \theta^m dA = -\lambda\int_\Gamma \theta^m\theta^m d\Gamma,
$$

de onde vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^m|^2 dA + k\int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dA + \gamma\int_\Omega |\theta^m|^2 dA - \alpha\int_\Omega \Delta u_t^m \theta^m dA =$$
$$-\lambda\int_\Gamma |\theta^m|^2 d\Gamma\cdot \qquad (2.36)$$

Somando (2.35) e (2.36) encontramos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t^m| dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m,u^m) - a(g{*}u^m, u_t^m)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^m|^2 dA + k\int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dA + \gamma\int_\Omega |\theta^m|^2 dA = -\lambda\int_\Gamma |\theta^m|^2 d\Gamma\cdot$$

Usando o Lema 2.2 concluímos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m)$$
$$-\frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g\Box\partial^2 u^m - \left(\int_0^t g ds\right)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^m|^2 dA$$
$$+k\int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dA + \gamma\int_\Omega |\theta^m|^2 dA = -\lambda\int_\Gamma |\theta^m|^2 d\Gamma.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + h\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA + \left(1 - \int_0^t g ds\right)a(u^m,u^m) + g\Box\partial^2 u^m + \int_\Omega |\theta^m|^2 dA\right\}$$
$$= \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m - \frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) - k\int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dA - \gamma\int_\Omega |\theta^m|^2 dA - \lambda\int_\Gamma |\theta^m|^2 d\Gamma.$$

Em vista das hipóteses sobre g obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{E}(t,u^m,\theta^m) = \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m - \frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) - k\int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dA - \gamma\int_\Omega |\theta^m|^2 dA$$
$$-\lambda\int_\Gamma |\theta^m|^2 d\Gamma \le 0\cdot$$

Integrando a desigualdade acima em $[0,t]$ e levando em consideração as condições iniciais $u_{0,m}$, $u_{1,m}$ e $\theta_{0,m}$ concluímos que

$$E(t,u^m,\theta^m) \le E(0,u^m,\theta^m)\cdot$$

Da escolha sobre $u_{0,m}$, $u_{1,m}$ e $\theta_{0,m}$ segue que

$$\begin{array}{lll} u^m & \text{é limitada em} & C([0,T];W)\cap C^1([0,T];V), \\ \theta^m & \text{é limitada em} & C([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2([0,T];H^1(\Omega))\cdot \end{array}$$

Multiplicando a equação (2.32) por $\beta \in C^2([0,T])$, tal que $\beta(T) = 0$ e integrando sobre $[0,T]$ obtemos

$$-\int_0^T\int_\Omega u_t^m w_j \beta_t dAdt + h\int_0^T\int_\Omega \nabla u_t^m \nabla w_j \beta_t dAdt + \int_0^T a(u^m, w_j)\beta dt - \int_0^T a(g*u^m, w_j)\beta dt$$

$$+\alpha\int_0^T\int_\Omega \theta^m \Delta w_j \beta dAdt = \int_\Omega u_{1,m} w_j \beta(0) dA + h\int_\Omega \nabla u_{1,m} \nabla w_j \beta(0) dA\cdot \quad (2.37)$$

Analogamente, multiplicando a equação (2.33) por β temos

$$-\int_0^T\int_\Omega \theta^m v_j \beta_t dAdt + k\int_0^T\int_\Omega \nabla\theta\nabla v_j \beta dAdt + \gamma\int_0^T\int_\Omega \theta^m v_j \beta dAdt + \alpha\int_0^T\int_\Omega \Delta u^m v_j \beta_t dAdt$$

$$= -\lambda\int_0^T\int_\Gamma \theta v_j \beta d\Gamma dt + \int_\Omega \theta_{0,m} v_j \beta(0) dA - \alpha\int_\Omega \Delta u_{o,m} v_j \beta(0) dA\cdot \quad (2.38)$$

Visto que,

$$\theta^m \longrightarrow \theta \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

e usando a densidade dos termos $w_j\beta$; $j \in \mathbb{N}$, $\beta \in C([0,T])$, e fazendo $m \to \infty$ nas equações (2.37) e (2.38), segue que o par (u,θ) é solução fraca do sistema (2.2) - (2.8).

□

2.3 Regularidade de Solução

Para provar a regularidade da solução consideremos a seguinte definição.

Definição 2.2 *Dizemos que (u_0, u_1, θ_0) é k-regular se $u_j \in H^{2+k-j}(\Omega) \cap W$, $j = 0, \ldots, k$, $u_{k+1} \in V$, $\theta_j \in H^{k-j}(\Omega)$, onde u_j e θ_j são obtidos pela seguinte fórmula recursiva:*

$$\begin{aligned} u_{j+2} - h\Delta u_{j+2} &= \Delta^2 u_j - \alpha\Delta\theta_j - f_k(0), \\ \theta_{j+1} - k\Delta\theta_j + \gamma\theta_j &= \alpha\Delta u_{j+1}, \\ h\frac{\partial u_{j+2}}{\partial\nu} &= \mathcal{B}_2 u_j + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta_j}{\partial\nu} + \lambda\theta_j &= 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{aligned}$$

e

$$u_j = \frac{\partial u_j}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \qquad \mathcal{B}_1 u_1 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \ \forall j = 1, \ldots, k,$$

onde f_j é dado por

$$f_0 := 0,$$

$$f_{j+1} = f_j(t) - g(t)\Delta^2 u_j\ , \qquad f_j \in L^1(0,T;L^2(\Omega)), \qquad j = 1, \ldots, k\cdot$$

Para mostrar a regularidade usaremos o seguinte lema.

Lema 2.4 *Suponhamos que* $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ *e* $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$; *então qualquer solução de*

$$a(v,w) = \int_\Omega fwdA + \int_{\Gamma_1} gwd\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} h\frac{\partial w}{\partial \nu}d\Gamma_1, \ \forall w \in \mathrm{W}$$

satisfaz $v \in H^4(\Omega)$ *e*

$$\begin{array}{rrcc} & \Delta^2 v = f & \text{em} & \Omega, \\ & v = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre} & \Gamma, \\ \mathcal{B}_1 v = h, & \mathcal{B}_2 v = g & \text{sobre} & \Gamma_1 \cdot \end{array}$$

Além disso, se $(f,g,h) \in H^k(\Omega) \times H^{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{k+\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$, *então* $v \in H^{k+4}(\Omega)$.

Demonstração: Consulte [11].

A regularidade de solução é dada a seguir.

Teorema 2.2 *Suponhamos que o dado inicial* (u_0, u_1, θ_0) *é k-regular* $(k \geq 2)$ *e a hipótese 2.1 seja válida. Então existe somente uma solução do sistema dado satisfazendo*

$$u \in C^1([0,T]; V \cap H^{k+1}(\Omega)) \cap C^0([0,T]; W \cap H^{k+2}(\Omega)),$$
$$\theta \in C^0([0,T]; H^{k-j}(\Omega)), j = 0, \ldots, k.$$

e

$$u \in C^j([0,T]; V \cap H^{k+2-j}(\Omega)); \theta \in C^j([0,T]; V \cap H^{k-j}(\Omega)), j = 0, \ldots, k.$$

Demonstração: Fazendo

$$v_0 = u_{k+1}, \qquad v_1 = u_{k+2}, \qquad \phi_0 := \theta_{k+1}, \qquad f := f_{k+1},$$

então segue do Teorema 2.1 que existe somente uma solução fraca (v, ϕ) do sistema (2.2)-(2.8) satisfazendo

$$v \in C^1([0,T]; V) \cap C^0([0,T]; W), \qquad \theta^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T]; V) \cdot$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} u(.,t) &= \sum_{i=0}^{k} u_i \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_1} v(s) ds dt_1 \ldots dt_k, \\ \theta(.,t) &= \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \ldots \int_0^{t_1} \theta(s) ds dt_1 \ldots dt_{k-1}. \end{aligned}$$

Temos que

$$u \in C^{k+1}([0,T];V) \cap C^k([0,T];W), \qquad \theta \in C^k([0,T];L^2(\Omega)),$$

e satisfaz $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$ e $f = 0$.

Fazendo $\varphi = w\eta$ com $\eta \in C_0^\infty(0,T)$, $w \in W$ na equação (2.14) e $\psi = w\tau$ com $\tau \in C_0^\infty(0,T)$, $w \in V$, na equação (2.15), obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega -u_t w\eta_t dA - \int_0^T \int_\Omega h\nabla u_t \nabla w\eta_t dA + \int_0^T a(u,w\eta)dt + \int_0^T \int_\Omega \theta\Delta w\eta dAdt \\ - \int_0^T a(g{*}u, w\eta)dt = 0,$$

e

$$-\int_0^T \int_\Omega \theta w\tau_t dAdt + \int_0^T \int_\Omega k\nabla\theta\nabla w\tau dAdt + \int_0^T \int_\Omega \gamma\theta w\tau dAdt - \alpha \int_0^T \int_\Omega \Delta u w\tau_t dAdt \\ = -\lambda \int_0^T \int_\Gamma \theta w\tau d\Gamma dt.$$

Integrando por partes as equações acima em $(0,T)$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt} w\eta dA - h\int_0^T \int_\Omega \nabla u_{tt} \nabla w\eta dA + \int_0^T a(u,w\eta)dt + \int_0^T \int_\Omega \theta\Delta w\eta dAdt \\ - \int_0^T a(g{*}u, w\eta)dt = 0,$$

e

$$-\int_0^T \int_\Omega \theta_t w\tau dAdt + k\int_0^T \int_\Omega \nabla\theta\nabla w\tau dAdt + \gamma\int_0^T \int_\Omega \theta w\tau dAdt - \alpha \int_0^T \int_\Omega \Delta u_t w\tau dAdt \\ = -\lambda \int_0^T \int_\Gamma \theta w\tau d\Gamma dt.$$

Pelo Lema Du Bois-Raymond, concluímos que

$$\int_\Omega u_{tt} w dA - h\int_\Omega \Delta u_{tt} w dA + h\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} w d\Gamma_1 + a(u,w) - a(g{*}u, w) \\ + \alpha \int_\Omega \Delta\theta w dA - \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} w d\Gamma_1 = 0\cdot$$

Logo

$$a(u,w) - a(g{*}u,w) = -\int_\Omega u_{tt} w dA + h\int_\Omega \Delta u_{tt} w dA - \alpha\int_\Omega \Delta\theta w dA \\ -h\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} w d\Gamma_1 + \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \theta}{\partial \nu} w d\Gamma_1.$$

Portanto,

$$a(u,w)-a(g*u,w)=-\int_{\Omega}(u_{tt}-h\Delta u_{tt}+\alpha\Delta\theta)w dA-\int_{\Gamma_1}\left\{h\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu}-\alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right\}w d\Gamma_1.$$

Usando o método da indução e supondo que $k=2$. Concluímos que

$$\theta\in C(0,T;H^2(\Omega)).$$

Logo o Lema 2.4 implica que $u-g*u\in H^4(\Omega)$, e também satisfaz as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 u+\alpha\theta-\mathcal{B}_1 g*u=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_1,\\ \mathcal{B}^2 u-\gamma\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu}+\alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu}-\mathcal{B}_2 g*u=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_1\cdot\end{aligned}$$

Usando a equação resolvente de Volterra, segue que $u\in H^4(\Omega)$. Então, o resultado é válido para k = 2, o que significa que u satisfaz (2.2) - (2.8) no sentido forte.

Diferenciando (k - 2) vezes a equação (2.2) - (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}u^{(k)}-h\Delta u^{(k)}+\Delta^2u^{(k-2)}+\alpha\Delta\theta^{(k-2)}-\int_0^t g(t-s)\Delta^2u^{(k-2)}(s)ds=f_k \quad &\text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[,\\ \theta^{(k-1)}-k\Delta\theta^{(k-2)}+\gamma\theta^{(k-2)}-\alpha\Delta u^{(k-1)}=0 \quad &\text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[,\\ u^{(k-2)}=\frac{\partial u^{(k-2)}}{\partial\nu}=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_0\times]0,\infty[,\\ \alpha\theta^{(k-2)}+\mathcal{B}_1u^{(k-2)}-\mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u^{(k-2)}(.,s)ds\right\}=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[,\\ \mathcal{B}_2u^{(k-2)}-\gamma\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\nu}+\alpha\frac{\partial\theta^{(k-2)}}{\partial\nu}-\mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u^{(k-2)}(.,s)ds\right\}=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[,\\ \frac{\partial\theta^{(k-2)}}{\partial\nu}+\lambda\theta^{(k-2)}=0 \quad &\text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[\cdot\end{aligned}$$

Usando novamente a equação resolvente de Volterra temos que $u^{(k-2)}$ satisfaz

$$\begin{aligned}\Delta^2u^{(k-2)} &= F,\\ u^{(k-2)} &= \frac{\partial u^{(k-2)}}{\partial\nu}=0 \text{ sobre } \Gamma_0,\\ \mathcal{B}_1u^{(k-2)} &= \alpha\theta^{(k-1)}\alpha\int_0^t r(t-s)\theta^{(k-1)}ds \text{ sobre } \Gamma_1,\\ \mathcal{B}_2u^{(k-2)} &= \underbrace{\gamma\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\nu}-\alpha\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial\mu}+\int_0^t r(t-s)\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\nu}-\alpha\frac{\partial\theta^{(k-1)}}{\partial\mu}ds}_{:=G} \text{ sobre } \Gamma_1,\end{aligned}$$

em que r é o núcleo de Volterra associado a g e

$$\begin{aligned}F=-\int_0^t r(t-s)\left\{u^{(k)}(.,s)-\Delta u^{(k)}(.,s)+\alpha\Delta\theta^{(k-1)}+f_k\right\}ds\\ -u^{(k)}(.,t)+\Delta u^{(k)}(.,t)+\alpha\Delta\theta^{(k-1)}+f_k\cdot\end{aligned}$$

Da hipótese (2.1) e da regularidade elíptica dada no lema 2.4 concluímos que

$$\begin{aligned}
u^{(k)} \in C(0,T;H^2(\Omega)) &\Rightarrow u^{(k-2)} \in C(0,T;H^4(\Omega)) \quad \text{e} \quad \theta^{(k-2)} \in C(0,T;H^4(\Omega)),\\
u^{(k-2)} \in C(0,T;H^4(\Omega)) &\Rightarrow u^{(k-4)} \in C(0,T;H^6(\Omega)) \quad \text{e} \quad \theta^{(k-4)} \in C(0,T;H^6(\Omega)),\\
u^{(k-4)} \in C(0,T;H^6(\Omega)) &\Rightarrow u^{(k-6)} \in C(0,T;H^8(\Omega)) \quad \text{e} \quad \theta^{(k-6)} \in C(0,T;H^8(\Omega))\cdot
\end{aligned}$$

Novamente, usando o método da indução obtemos

$$u^{(k-2j)} \in C(0,T;H^{2j+2}(\Omega)) \Leftrightarrow u \in C^{k-2j}(0,T;H^{2j+2}(\Omega))\cdot$$

Usando o teorema da derivada intermediária [11] nossa conclusão segue. A unicidade é imediata para soluções k-regulares ($k \geq 2$). Portanto, a prova agora está completa.

$\square$

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento assintótico da solução do sistema (2.2)-(2.8). Mais precisamente, mostrar o decaimento geral da solução associada a este sistema.

Note que, como foi demonstrado no capítulo 2, a energia associada com a solução forte do sistema (2.2)-(2.8) satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t,u,\theta) = \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u - \frac{1}{2}g(t)a(u,u) - k\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA - \gamma\int_\Omega |\theta|^2 dA - \lambda\int_\Gamma |\theta|^2 d\Gamma. \tag{3.1}$$

Este resultado mostra a propriedade dissipativa do sistema (2.2)-(2.8).

Para provar o decaimento geral consideremos $w = u - g * u$. Então segue que w satisfaz

$$\begin{aligned} w_{tt} - h\Delta w_{tt} + \Delta^2 w + g'(0)\{u - h\Delta u\} + g(0)\{u_t - h\Delta u_t\}& \\ +g'' * \{u - h\Delta u\} + \alpha\Delta\theta = 0 \ em \ \Omega\times(0,\infty),& \qquad (3.2) \\ \theta_t - k\Delta\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \ em \ \Omega\times(0,\infty),& \qquad (3.3) \\ w(x,y,0) = u_0(x,y), \ w_t(x,y,0) = u_1(x,y) - g(0)u_0(x,y),& \qquad (3.4) \end{aligned}$$

com as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial\nu} = 0 \ sobre \ \Gamma_0\times(0,\infty),& \qquad (3.5) \\ \mathcal{B}_1 w + \alpha\theta = 0 \ sobre \ \Gamma_1\times(0,\infty),& \qquad (3.6) \\ \mathcal{B}_2 w - h\frac{\partial w_{tt}}{\partial\nu} + g(0)h\frac{\partial u_t}{\partial\nu} + g'(0)h\frac{\partial u}{\partial\nu} + h\frac{\partial g'' * u}{\partial\nu} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \ sobre \ \Gamma_1\times(0,\infty),& \qquad (3.7) \\ \frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \lambda\theta = 0 \ sobre \ \Gamma\times(0,\infty)\cdot& \qquad (3.8) \end{aligned}$$

A principal dificuldade para provar o decaimento geral consiste em estimar os termos $\int_\Omega |u_t|^2 dA$ e $\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA$. Para superar este problema consideremos o funcional de energia $\mathcal{E}(t)$ associado ao sistema (3.2)-(3.8), dado por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega |w_t|^2 + h|\nabla w_t|^2 + |\Delta v|^2 dA\right\} + \sum_{j=1}^{6} S_j(t),$$

onde $S_j(t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
S_1(t) &= -\frac{g'(0)}{2}\int_\Omega \left\{|u|^2 + \left(\int_0^t g ds\right)|u|^2 - 2(g*u)u\right\} dA - \frac{1}{2}g\Box u,\\
S_2(t) &= -\frac{g'(0)}{2}h\left\{\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + \left(\int_0^t g ds\right)|\nabla u|^2 - 2(g*\nabla u)\nabla u\right] dA - hg\Box\nabla u\right\},\\
S_3(t) &= \frac{g(0)}{2}\left\{\int_\Omega \left[g(0)|u|^2 + \left(\int_0^t g' ds\right)|u|^2\right] dA - g'\Box u\right\},\\
S_4(t) &= \frac{g(0)}{2}h\left\{\int_\Omega g(0)\left[|\nabla u|^2 + \left(\int_0^t g' ds\right)|\nabla u|^2\right] dA - g'\Box\nabla u\right\},\\
S_5(t) &= -\frac{1}{2}\left\{g''\Box u + \int_\Omega \left[|g' * u|^2 - \left(\int_0^t g'' ds\right)|u|^2\right] dA\right\},\\
S_6(t) &= -\frac{1}{2}h\left\{g''\Box\nabla u + \int_\Omega \left[|g' * \nabla u|^2 - \left(\int_0^t g'' ds\right)|\nabla u|^2\right] dA\right\}\cdot
\end{aligned}$$

Esta função permite as estimativas para os termos $\int_\Omega |u_t|^2 dA$ e $\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA$, mas inclui termos do tipo $a(u,v)$. O lema seguinte estabelece uma desigualdade para $\mathcal{E}(t)$.

Lema 3.1 *Com a notação acima, o funcional $\mathcal{E}(t)$ satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq \mathrm{C}_\epsilon &\left\{\int_\Omega g(t)|\nabla u|^2 dA + g\Box\nabla u + \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA\right\}\\
+\mathrm{C}\{g(t)a(u,u) + g\Box\partial^2 u\} &+ \epsilon\int_\Omega |\nabla u|^2 dA - g(0)\int_\Omega (|u_t|^2 + h|\nabla u_t|^2) dA.
\end{aligned}$$

onde ϵ é uma constante positiva suficientemente pequena, $\mathrm{C}_\epsilon = \mathrm{C}(\epsilon)$ e $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\Omega)$ são constantes positivas.

Demonstração: Multiplicando a equação (3.2) por w_t e integrando em Ω, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w_{tt}w_t dA - h\int_\Omega \Delta w_{tt}w_t dA + \int_\Omega \Delta^2 w w_t + \int_\Omega g'(0)\{u - h\Delta u\}w_t dA\\
&+\int_\Omega g(0)\{u_t - h\Delta u_t\}w_t dA + \int_\Omega g'' * \{u - h\Delta u\}w_t dA + \alpha\int_\Omega \Delta\theta w_t dA = 0\cdot
\end{aligned}$$

Usando a fómula de Green, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |w_t|^2 dA+\frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dA - h\int_{\Gamma_1} w_t\frac{\partial w_{tt}}{\partial\nu}d\Gamma_1+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(w,w)$$
$$+\int_{\Gamma_1}\left[(\mathcal{B}_2 w)w_t-(\mathcal{B}_1 w)\frac{\partial w_t}{\partial\nu}\right]d\Gamma_1+g'(0)\int_\Omega uw_t-h\nabla u\nabla w_t dA$$
$$+hg'(0)\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}w_t d\Gamma+g(0)\int_\Omega u_t w_t-h\nabla u_t\nabla w_t dA+h\int_\Gamma g(0)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}w_t d\Gamma$$
$$+\int_\Omega\{g''*u-hg''*\Delta u\}w_t dA+\alpha\int_\Omega \Delta\theta w_t dA=0\cdot$$

Visto que

$$-h\int_{\Gamma_1}\left\{\frac{\partial w_{tt}}{\partial\nu}-g'(0)\frac{\partial w}{\partial\nu}w_t-g(0)\frac{\partial w_t}{\partial\nu}\right\}w_t d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2 w)w_t-(\mathcal{B}_1 w)\frac{\partial w_t}{\partial\nu}\right\}d\Gamma_1=0,$$

temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |w_t|^2 dA+h\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dA+a(w,w)\right\}=\sum_{j=0}^{6} I_j, \tag{3.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_0 &= -\alpha\int_\Omega \Delta\theta w_t dA,\\
I_1 &= -g'(0)\int_\Omega uw_t dA,\\
I_2 &= -g'(0)h\int_\Omega \nabla u\nabla w_t dA,\\
I_3 &= -g(0)\int_\Omega u_t w_t dA,\\
I_4 &= -g(0)h\int_\Omega \nabla u_t\nabla w_t dA,\\
I_5 &= -\int_\Omega (g''*u)w_t dA,\\
I_6 &= -h\int_\Omega (g''*\Delta u)w_t dA\cdot
\end{aligned}$$

Analisando cada termo I_j e usando o Lema (2.2) obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= -g'(0)\int_\Omega uw_t dA=-\frac{g'(0)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dA-g'(0)\frac{d}{dt}\int_\Omega (g*u)udA+g'(0)\int_\Omega (g*u)u_t dA\\
&= -\frac{g'(0)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2 dA-g'(0)\frac{d}{dt}\int_\Omega (g*u)udA+\frac{g'(0)}{2}\int_\Omega g(t)|u|^2 dA-\frac{g'(0)}{2}\frac{d}{dt}g\Box u\\
&\quad +\frac{g'(0)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^t gds\right)|u|^2 dA\\
&= -g'(0)\frac{d}{dt}\underbrace{\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega\left[|u|^2+g*uu+\frac{1}{2}\left(\int_0^t gds\right)|u|^2\right]dA-\frac{1}{2}g\Box u\right\}}_{:=S_1(t)}+\frac{g'(0)}{2}g'\Box u\\
&\quad -\frac{g'(0)g(t)}{2}\int_\Omega |u|^2 dA\cdot
\end{aligned}$$

Logo

$$I_1(t) = \frac{d}{dt}S_1(t) + \frac{g'(0)}{2}g'\Box u - \frac{g'(0)g(t)}{2}\int_\Omega |u|^2 dA\cdot$$

Similarmente temos que

$$I_2(t) = \frac{d}{dt}S_2(t) + h\frac{g'(0)}{2}g'\Box\nabla u - \frac{g'(0)g(t)}{2}h\int_\Omega |\nabla u|^2 dA\cdot$$

De I_3 temos:

$$\begin{aligned}
I_3(t) &= -g(0)\int_\Omega |u_t|^2 dA + g(0)\int_\Omega g(0)uu_t + (g' * u)u_t dA \\
&= -g(0)\int_\Omega |u_t|^2 dA - \frac{g(0)}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left\{g'\Box u - \int_0^t g' ds\int_\Omega |u|^2 dA - g(0)\int_\Omega |u|^2 dA\right\}}_{:=S_3(t)} + \frac{g(0)}{2}g''\Box u \\
&\quad - \frac{g(0)g'(t)}{2}\int_\Omega |u|^2 dA\cdot
\end{aligned}$$

Portanto

$$I_3(t) = \frac{d}{dt}S_3(t) - g(0)\int_\Omega |u_t|^2 dA + \frac{g(0)}{2}g''\Box u - \frac{g(0)g'(t)}{2}\int_\Omega |u|^2 dA\cdot$$

Por simetria encontramos

$$I_4(t) = \frac{d}{dt}S_4(t) - g(0)h\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA + \frac{g(0)}{2}hg''\Box\nabla u - \frac{g(0)g'(t)}{2}h\int_\Omega |\nabla u|^2 dA\cdot$$

Finalmente consideremos I_5, então:

$$\begin{aligned}
I_5(t) &= -\int_\Omega g'' * uu_t - \left(\frac{d}{dt}g' * u\right)(g' * u) - g(0)u(g'' * u)dA \\
&\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g''\Box u - \int_\Omega |g' * u|^2 - \int_0^t g'' ds|u|^2 dA\right\} \\
&\quad - \int_\Omega u\int_0^t \{g(0)g''(t-s) - g'(0)g'(t-s)\}\{u(s) - u(t)\}dsdA \\
&\quad - \{g(0)g'(t) - g'(0)g(t)\}\int_\Omega |u|^2 dA,
\end{aligned}$$

e analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
I_6(t) &= \frac{d}{dt}S_6(t) - h\{g(0)g''(t) - g'(0)g'(t)\}\int_\Omega |\nabla u|^2 dA \\
&\quad - h\int_\Omega \nabla u\left(\int_0^t \{g(0)g'(t-s) - g'(0)g(t-s)\}\{\nabla u(s) - \nabla u(t)\}ds\right)dA\cdot
\end{aligned}$$

A partir das igualdades acima, da desigualdade de Poincaré e das hipóteses sobre g concluímos que

$$I_j(t) \leq \frac{d}{dt}S_j(t) + C_\epsilon\left\{\int_\Omega g(t)|\nabla u|^2 dA + g\Box\nabla u\right\} + \epsilon\int_\Omega |\nabla u| dA,$$

para $j \neq 3,4$, e para $j = 3,4$ temos

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \frac{d}{dt}S_3(t) - g(0)\int_\Omega |u_t|^2 + C\left\{g\Box u + g(t)\int_\Omega |u|^2 dA\right\}, \\ I_4(t) &= \frac{d}{dt}S_4(t) - g(0)h\int_\Omega |\nabla u_t|^2 + C\left\{g\Box\nabla u + g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dA\right\}\cdot \end{aligned}$$

Finalmente, estimamos o termo I_0.

$$\begin{aligned} I_0(t) &= -\alpha\int_\Omega u_t\Delta\theta - g' * u\Delta\theta - g(0)\Delta\theta u dA \\ &= \alpha\int_\Omega \nabla\theta\nabla u_t + \nabla\theta g' * \nabla u + g(0)\nabla\theta\nabla u dA \\ &\leq C_\delta\left\{\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA + g\Box\partial u\right\} + \delta\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA\cdot \end{aligned}$$

Assim, a partir da última desigualdade nosso resultado é obtido.

□

Além disso, consideremos os seguintes lemas que são essenciais para a demonstração do teorema do decaimento geral.

Lema 3.2 *Existe uma constante $\kappa > 0$ tal que*

$$\mathcal{E}(t) \leq \kappa E(t)\cdot$$

Demonstração: De fato, mostramos que existe uma constante positiva k tal que

$$\int_\Omega |w_t|^2 + h|\nabla w_t|^2 dA + a(w,w) \leq \kappa E(t)\cdot$$

Provamos somente a desigualdade

$$\int_\Omega |w_t|^2 dA \leq \kappa E(t),$$

pois, a partir desta, as outras são similares. Notando que

$$w_t = u_t - g(t)u - \int_0^t g'(t-s)u(.,s) - u(.,t)ds,$$

temos

$$\int_\Omega |w_t|^2 dA \leq \kappa\left\{\int_\Omega |u_t|^2 dA + g(t)\int_\Omega |u|^2 dA + g\Box u\right\}\cdot$$

Resultando em

$$\int_\Omega |w_t|^2 + h|\nabla w_t|^2 dA + a(w,w) \leq \kappa E(t)\cdot$$

Portanto, pela desigualdade de Korn, concluímos que

$$\mathcal{E}(t) \leq \kappa E(t)\cdot$$

$\square$

Lema 3.3 *Para toda solução forte do sistema (2.2)-(2.3) definimos o seguinte funcional*

$$J(t) = \int_\Omega (u_t u + h\nabla u_t \nabla u) dA\cdot$$

Então

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq \int_\Omega |u_t|^2 + h|\nabla u_t|^2 dA - (1-\epsilon)a(u,u)$$
$$+C_\epsilon \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA + \frac{1}{4\epsilon}\left(\int_0^t g ds\right) g\square\partial^2 u\cdot$$

Demonstração: Multiplicando a equação (2.2) por u e integrando sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt} u dA - h\int_\Omega \Delta u_{tt} u dA + \int_\Omega \Delta^2 u u dA + \alpha \int_\Omega \Delta\theta u dA - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds\, u dA = 0$$

Usando a fórmula de Green, temos que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dA - \int_\Omega |u_t|^2 dA + h\frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dA - h\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dA - h\int_\Gamma \frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} u d\Gamma$$
$$+a(u,u) + \int_\Gamma \left\{(\mathcal{B}_2 u)u - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\} d\Gamma + \alpha\int_\Omega \Delta\theta u dA - \int_0^t g(t-s)a(u(s),u)ds$$
$$-\int_\Gamma \mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} u d\Gamma + \int_\Gamma \mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}\frac{\partial u}{\partial\nu} d\Gamma,$$

daí

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega u_t u dA + h\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dA\right\} = \int_\Omega |u_t|^2 dA + h|\nabla u_t|^2 dA - a(u,u)$$
$$-\int_\Gamma \left\{(\mathcal{B}_2 u)u - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\} d\Gamma + a\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds, u\right) - \alpha\int_\Omega \Delta\theta u dA$$
$$+\int_\Gamma \mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\} u d\Gamma - \int_\Gamma \mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}\frac{\partial u}{\partial\nu} d\Gamma\cdot$$

Usando as condições de fronteira, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &= \int_\Omega |u_t|^2 dA + h|\nabla u_t|^2 dA - a(u,u) - \int_\Gamma \left\{(\mathcal{B}_2 u)u - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\} d\Gamma \\ &+ a\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds, u\right) - \alpha \int_\Omega \Delta\theta u dA\cdot\end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Poincaré, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &\leq \int_\Omega |u_t|^2 dA + h|\nabla u_t|^2 dA - (1-\epsilon)a(u,u) + C_\epsilon \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dA \\ &+ \frac{1}{4\epsilon}\left(\int_0^t g ds\right) g\Box\partial^2 u\cdot\end{aligned}$$

□

Provamos, em seguida, o resultado principal do nosso trabalho.

3.1 Decaimento Geral

Nesta seção mostramos o decaimento geral da solução para um sistema de placas termoviscoelásticas com memória. Neste sentido, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 *Suponha que os dados iniciais* (u_0, u_1, θ_0) *são 2-regular e o núcleo* g *satisfaz as seguintes condições (2.9)-(2.11) então existem constantes positivas* k_0 *e* k_1 *tal que*

$$E(t,u,\theta) \leq k_0 E(0,u,\theta) e^{-k_1 \int_0^t \xi(s)ds}.$$

Demonstração: Considerando o funcional

$$\mathcal{L}(t) = \xi(t)\{NE(t) + \mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}J(t)\},$$

com $N > 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = \xi'(t)\left[NE(t) + \mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}J(t)\right] + \xi(t)\frac{d}{dt}\left[NE(t) + \mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}J(t)\right],$$

e usando o fato que $\xi'(t) \leq 0$ e $[NE(t) + \mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}J(t)] \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq \xi(t)\frac{d}{dt}\left[NE(t) + \mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}J(t)\right] \\ &\leq N\xi(t)\frac{d}{dt}E(t) + \xi(t)\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \frac{g(0)}{2}\xi(t)\frac{d}{dt}J(t)\cdot\end{aligned}$$

Usando a condição (3.1), o Lema (3.3) e escolhendo ϵ suficientemente pequeno e N suficientemente grande, obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -k_0\xi(t)\mathcal{N}(t), \tag{3.10}$$

onde

$$\mathcal{N}(t) = \left\{ \int_\Omega |u_t|^2 + h|\nabla u_t|^2 + |\theta|^2 dA + a(u,u) + g\Box\partial^2 u \right\},$$

e k_0 é uma constante positiva.

Escolhendo N suficientemente grande temos

$$\frac{N}{2}\mathcal{N}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq N\mathcal{N}(t)\cdot$$

De fato,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -k_0\xi(t)\mathcal{N}(t) \leq -\frac{k_0}{N}\xi(t)\mathcal{L}(t)\cdot$$

Então reescrevendo (3.10) encontramos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -k\xi(t)\mathcal{L}(t),$$

onde $k = \frac{k_0}{N}$.

Integrando a desigualdade acima, obtemos que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-k\int_0^t \xi(s)ds}.$$

Da relação de equivalência entre os funcionais $E(t)$ e $\mathcal{L}(t)$, dada por

$$\frac{N}{2}\mathcal{N}(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-k\int_0^t \xi(s)ds} \leq NE(0)e^{-k\int_0^t \xi(s)ds},$$

concluímos que existe uma constante positiva k_1 tal que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -k_1\xi(t)E(t)\cdot$$

Integrando a desigualdade acima, concluímos que

$$E(t) \leq E(0)e^{-k_1\int_0^t \xi(s)ds}. \tag{3.11}$$

$\Box$

Conclusão

Neste trabalho concluímos que as estimativas de decaimento exponencial e polinomial obtidos nos trabalhos anteriores como, por exemplo, em [20], são apenas casos particulares de (3.11).

Exemplos:

1) Obtemos decaimento exponencial para $\xi(t) = a$ com $a > 0$ uma constante, ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0)e^{-k_1 \int_0^t a dt}, \\ E(t) &\leq E(0)e^{-k_1 bt}, \end{aligned}$$

2) Temos decaimento polinomial para $\xi(t) = a(1+t)^{-1}$, ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq E(0)e^{-k_1 \int_0^t a(1+t)^{-1} dt}, \\ E(t) &\leq E(0)e^{-k_1 a \ln(1+t)}, \\ E(t) &\leq E(0)(1+t)^{-k_1 a} \\ E(t) &\leq E(0)\frac{1}{(1+t)^p}, \end{aligned}$$

onde $p = k_1 a$.

Além disso, concluímos que todos os resultados existentes na literatura sobre o sistema de placas termoviscoelásticas com memória são somente válidos para $p > 2$, também sendo um caso particular de nossa hipótese sobre g. Tendo em vista que, o resultado encontrado neste trabalho também é válido para $p \leq 2$.

Referências Bibliográficas

[1] AMMAR-KHODJA, F., BENABDALLAH, A. , RIVERA, J. E. M. & RACKE, R., **Energy decay for Timoshenko systems of memory type**. J.Differential Equations, 194:82-115, 2003.

[2] AVALOS, E.C. & LASIECKA, I.,**Exponential stability of a thermoelastic system with free boudary conditions without mechanical dissipation.**, SIAM J. Math. Anal.to appear.

[3] DAFERMOS, C. M. 1970. **An abstract Volterra equation with application to linear viscoelasticity**.J. Differential Equations 7, 554-589.

[4] DAFERMOS, C. M. 1968., **On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equation of linear thermoelasticity**. Arch. Rat. Mech. Anal. 29, 241-271.

[5] DASSIOS, G. & GRILLAKIS, M. 1984., **Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity**. Arch. Rat. Mech. Anal. 87, 49-91.

[6] DUVAUT, G. & LIONS, J. L. 1976., **Inequalities in Mechanics and Physics**. Springer, New York.

[7] HANSEN, S. W. 1992., **Exponential energy decay on a thermoelastic rod**.J. Math. Anal. Appl. 167, 429-442.

[8] HENRY, D. B., PERISSINITO, A., JR. & LOPES, O. 1993., **Asymptotic behaviour of a semigroup of the thermoelasticity**. J. Nonlinear Anal. TMA 21, 65-75.

[9] KIM, J. U. 1992., **On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate**. SIAM J. Math. Anal. 23, 889-899.

[10] LAGNESE, J. E. 1989., **Asymptotic energy Estimates for Kirchhoff Plates Subject to Weak Viscoelastic damping**. International Series of Numerical Mathematics 91. Basle: Birkhäuser.

[11] LIONS, J. L., MAGENES, E., **Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications**. Springer-Verlag, New York, Vol. I,(1972).

[12] LIONS, J.L., **Quelques Mèthodes de resolution de problêmes aux limites non lineaires**. Dunod Gauthiers Villars, Paris,(1969).

[13] LIU, Z. Y. & RENARDI, M. 1995., **A note on the equation of a thermoelastic plate**. Appl. Math. Lett.8, 1-6.

[14] MESSAOUDI, S.A. 2008., **General decay of solutions of viscoelastic equation**. Journal of Math. Analysis and Applications 341, 1457-1467.

[15] MUÑOZ RIVERA, J. E. 1992., **Energy decay rates in linear thermoeslasticity**.Funkcialaj Etvacioj 35,19-30.

[16] MUÑOZ RIVERA, J. E. 1993., **Decomposition of the displacement vector field and decay rates in linear thermoelasticity**. SIAM J. Math. Anal.24, 390-406.

[17] MUÑOZ RIVERA, J. E. 1994., **Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity**. Quart. Appl. Math. 3, 257-273.

[18] MUÑOZ RIVERA, J. E. & RACKE, R. 1995., **Smoothing properties, decay and global existence of solutions to nonlinear coupled systems of thermoelastic type**. SIAM J. Math. Anal. 26, 1547-1563.

[19] MUÑOZ RIVERA, J. E. & SHIBATA, Y. 1997., **A linear thermoelastic plate equation with dirichlet boudary condition**. J. Math. Meth. Appl. Sci. 20, 915-932.

[20] MUÑOZ RIVERA, J. E. & BARRETO, R. K. 1998., **Decay rates of solutions to thermoviscoelastic plates with memory**. IMA J. Appl. Math. 60, 263-283.

[21] TAVARES, C. C. S. & SANTOS, M. L., **On the Kirchoff plates equations with thermal effects and memory boudary conditions**. Appl. Math. and Comp. 213 (2009).