UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

DECAIMENTO GERAL DE SOLUÇÕES PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA COM MEMÓRIA

Lindalva Ribeiro Barros
Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-Pará

2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Lindalva Ribeiro Barros

DECAIMENTO GERAL DE SOLUÇÕES PARA UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA COM MEMÓRIA

Dissertação de Mestrado apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-Pará

2011

Lindalva Ribeiro Barros

Dissertação de Mestrado apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Conceito: __________

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
PPGME-UFPA

____

Prof. Dr. Geraldo Mendes Araújo (Examinador)
PPGME-UFPA

____

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Examinador)
PPGME-UFPA

Belém-Pará, 30 de Junho de 2011.

Dedico este trabalho a minha mãe por me dar amor, por sempre proporcionar um ambiente de paz em minha vida, por ser minha amiga e exemplo de perseverança, honestidade e humildade.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, força que dá vida à minha alma, pela saúde, pela pessoa que sou, por hoje chegar onde estou, por mostrar-me que sou protegida, guiada e iluminada por Sua presença divina, por permitir-me aprender o pouco que sei e deixar-me conviver com as pessoas maravilhosas que citarei aqui. Obrigado Senhor, por tudo o que já recebi e por tudo o que ainda virá!

Em especial agradeço à minha mãe, Maria de Jesus Ribeiro Barros, minha heroína, pelo seu amor, atenção, carinho, dedicação e por ter proporcionado, com muito sacrifício, a educação que possuo. Ao meu pai, Pedro Duarte Filho, que mesmo ausente teve um papel fundamental em minha trajetória, deu-me a vida.

"Somos todos dotados da Vida de Deus, que se manifestou neste mundo por meio de nossos antepassados e nossos pais. Estamos vivos aqui e agora graças a eles. Ao cultivarmos gratidão a eles, sintonizamos com as 'ondas espirituais' da provisão infinita de Deus e enriquecemos espiritual e materialmente". Masaharu Taniguchi

Agradeço de forma especial a minha segunda família: Raimundo Pereira Sobrinho (pai - in memoriam), Victória Benta Fernandes Sobrinho (mãe), seus filhos e netos pela convivência amorosa e por me apoiarem na realização deste sonho.

Sou muito grata também, a Kátia Gilioli Schuh e família, pela amizade e acolhida em sua casa durante minha estada em Belém e a minha sobrinha, Kamyle Victória Schuh Sobrinho, por me fazer sorrir nos momentos difíceis que passei.

"Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho, pois cada pessoa é única e nenhuma substitui outra. Cada um que passa em nossa vida, passa sozinho, mas não vai só nem nos deixa sós. Leva um pouco de nós mesmos, deixa um pouco de si mesmo. Há os que levam muito, mas há os que não levam nada. Essa é a maior responsabilidade de nossa vida, e a prova de que duas almas não se encontram ao acaso.". Antoine de Saint-Exupéry

Agradeço profundamente ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, por aceitar-me como sua orientanda, por ter acreditado em mim e apoiando-me num momento delicado de minha vida em que pensei em abandonar meus estudos; por seu profissionalismo, competência e imenso conhecimento matemático que proporcionaram-me esta conquista tão especial. Que

Deus continue lhe abençoando!

Meus sinceros agradecimentos aos professores doutores Geraldo Mendes Araújo e Valcir João da Cunha Farias, membros da banca examinadora, por aceitarem avaliar este trabalho, pelas oportunas correções e sugestões.

Agradeço ao corpo de professores do PPGME pelos ótimos cursos dados e que ajudaram-me a entender um pouco melhor este vasto mundo da Matemática. Em particular ao Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso, Profª. Drª. Cristina Lúcia Dias Vaz, Prof. Dr. Geraldo Mendes Araújo e Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Junior.

A todos os meus ex-professores, desde as séries iniciais até a Graduação, expresso meu profundo respeito e meu agradecimento pelos ensinamentos proporcionados com dedicação e carinho.

"Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende." Albert Schweitzer

Deixo aqui minha gratidão aos colegas que fiz no corpo de estudantes da UFPA, especialmente a Anderson, Cristiane, João, Marcel, Mateus, Liliane, Lucélia e Walter, pela boa convivência, pelas horas de estudo sempre bem humoradas, pelo apoio nos momentos de fraqueza, pelas alegrias divididas e experiências compartilhadas. Sucesso a todos!

Agradeço aos colegas da escola "O Pequeno Príncipe", em Marabá, pelo companheirismo, pelo convívio harmonioso e pelo incentivo inicial. Fico feliz por fazer parte desta escola liderada pelos professores e amigos Antônio Luís Silva Soares e Francilete Souza de Almeida.

À amiga Ghabrielly Silva de Almeida, agradeço pela amizade e por acompanhar-me, mesmo que à distância, nos momentos bons e ruins. Espero manter esse laço de amizade por bastante tempo. Aos demais amigos que não mencionei aqui, mas que com uma palavra, com um gesto, com um pensamento, levavam-me sempre a acreditar que tudo na vida é possível. Guardo vocês em meu coração!

"Em um mundo que se fez deserto, temos sede de encontrar companheiros."
Antoine de Saint-Exupéry

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação. De forma mais precisa, agradeço ao povo paraense que através do Programa Especial de Formação Continuada da SEDUC financiou os meus estudos.

La tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé celui de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune. À ce compte, l'histoire de la science doit être notre guide.

Henri Poincaré

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e regularidade de soluções fortes bem como o decaimento geral para o sistema acoplado de equações de onda com memória, dado por:

$$
\begin{gathered}
u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\
v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds - \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\
u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,\infty), \\
(u(x,0),v(x,0)) = (u_0(x),v_0(x)),\ (u_t(x,0),v_t(x,0)) = (u_1(x),v_1(x)) \quad \text{em } \Omega,
\end{gathered}
$$

com convenientes hipóteses sobre as funções relaxamento g_1 e g_2. Aqui, Ω é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular e α é uma constante positiva.

Palavras-chave: Decaimento geral, Equações viscoelásticas acopladas, Função relaxamento.

Abstract

In this work we are going to study the existence and regularity of strong solutions as well as general decay of the coupled system of wave equations with memory, given by:

$$
\begin{gathered}
u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha(u-v) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds - \alpha(u-v) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
u = v = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0,\infty), \\
(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)),\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{in } \Omega,
\end{gathered}
$$

with suitable assumptions on the relaxation functions g_1 e g_2. Here, Ω is an open bounded subset of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ and α is a positive constant.

Keywords: General decay, Coupled viscoelastic equations, Relaxation function.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar o decaimento geral de soluções fortes para o sistema acoplado de equações de onda com memória[1], dado por:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds - \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,\infty), \tag{3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), \quad (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)), \quad \text{em } \Omega, \tag{4}$$

onde Ω é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular, u e v denotam os deslocamentos transversais das membranas e $\alpha > 0$ é a constante de acoplamento. As funções relaxamento (ou núcleos da memória) g_i, com $i = 1,2$, são positivas e não crescentes. O subíndice t representa a derivada em relação ao tempo e Δ o operador laplaciano [2], que é dado por $\Delta(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\cdot)$.

O sistema acima é originado do trabalho de Santos [25], no qual o autor estudou o comportamento assintótico das soluções. Ele provou que quando os núcleos das convoluções decaem exponencialmente, a energia de primeira e segunda ordem das soluções decaem exponencialmente. Santos também mostrou que quando os núcleos decaem polinomialmente, essas energias

[1] A noção de memória em conexão com a análise de materiais elásticos foi introduzida, em 1874, por Ludwig Boltzmann (1844-1906). Mais tarde, Vito Volterra (1860-1940) desenvolveu, em obra magistral de 1909-13, seu estudo sobre equações integro-diferenciais e sua teoria matemática dos "fenômenos hereditários"(1928 e 1940).

[2] Nome dado em homenagem a Pierre-Simon Laplace (1749-1827) que estudou a equação $\Delta u = 0$ em seu *Traité de Mécanique Céleste* publicado em 5 volumes entre 1799 e 1785. Apesar desta equação levar o nome de Laplace ela já era conhecida antes dele.

decaem polinomialmente.

Esse tipo de problema descreve a interação entre dois campos escalares e coloca-se na teoria da viscoelasticidade. O efeito viscoelástico é descrito pelos termos de memória

$$\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds, \quad \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds,$$

que levam a informação de todos os instantes $s < t$ para dentro do material no instante t.

Sistemas acoplados dissipativos de equações de onda foram estudados por vários autores e muitos resultados de existência, comportamento assintótico e observabilidade foram provados. Em [10], Komornik e Rao estudaram um sistema linear de duas equações de onda compactamente acoplado com damping friccional na fronteira em ambas equações. Eles mostram a existência, regularidade e estabilidade das soluções correspondentes. Os resultados obtidos na estabilidade em [10] foi extendido por Aassila [1] para um sistema acoplado com damping friccional fraco no infinito. Em outro trabalho, Aassila [2] removeu a dissipação de uma equação e mostrou a forte estabilidade assintótica ou a estabilidade não uniforme para alguns casos particulares dependendo da constante de acoplamento. Um sistema acoplado similar com damping friccional na fronteira em apenas uma das equações foi estudado por Alabau [4]. Ela mostrou o decaimento polinomial das soluções fortes correspondentes quando a velocidade de propagação da onda de ambas equações é a mesma. Alguns outros sistemas acoplados com damping interno ou com outro tipo de acoplamento pode ser encontrado em [5, 6, 7, 11, 21, 23, 26].

No que concerne aos sistemas acoplados de equações de onda com memória, Messaoudi e Tatar [19] consideraram o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + f(u,v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} - \Delta v + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\Delta v(x,s)ds + k(u,v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{5}$$

onde as funções f e k satisfazem para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ as seguintes hipóteses

$$\begin{cases} |f(u,v)| \leq d(|u|^{\beta_1} + |v|^{\beta_2}) \\ |k(u,v)| \leq d(|u|^{\beta_3} + |v|^{\beta_4}) \end{cases} \tag{6}$$

para alguma constante $d > 0$ e

$$\beta_i \geq 1, \quad (N-2)\beta_i \leq N, \quad i = 1,2,3,4.$$

Eles mostraram que o resultado de decaimento uniforme pode ser obtido com condições mais fracas do que aquelas em [25] e para funções de acoplamento mais gerais f e k. O resultado em [19] foi melhorado por Liu[14]. Ele mostrou que para certa classe de funções relaxamento e certos dados iniciais, a solução de energia decai com taxa semelhante ao decaimento das funções relaxamento, que não é necessariamente um decaimento da forma polinomial ou exponencial.

Em outro trabalho, Liu [13] usando o mesmo método introduzido em [19] obteve as mesmas taxas de decaimento que em [19] para um sistema mais geral da forma

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds + f(u,v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ |v_t|^\rho v_{tt} - \Delta v - \Delta v_{tt} + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\Delta v(x,s)ds + k(u,v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{7}$$

onde as funções f e k satisfazem as seguintes hipóteses

$$\begin{cases} |f(u,v)| \leq d \cdot min\{(|u|^{\beta_1} + |v|^{\beta_2}), |u|^{\beta-1}|v|^\beta\}, \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ |k(u,v)| \leq d \cdot min\{(|u|^{\beta_3} + |v|^{\beta_4}), |u|^{\beta}|v|^{\beta-1}\}, \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{8}$$

para alguma constante $d > 0$ e

$$1 \leq \beta_i \leq \frac{N}{N-2}, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$\beta > 1 \text{ se } N = 1,2; \ \ 1 \leq \beta \leq \frac{N-1}{N-2} \text{ se } N \geq 3.$$

Ambos os resultados em [13] e [19] são baseados na técnica tipo Lyapunov[3] para algum funcional de energia perturbado.

Said-Houari em [24] considerou o mesmo sistema (7) com

$$\begin{cases} f(u,v) = -a|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) - b|u|^\rho u|v|^{(\rho+2)} \\ k(u,v) = -a|u+v|^{2(\rho+1)}(u+v) - b|u|^{\rho+2}|v|^\rho v \end{cases} \tag{9}$$

como termos de fonte e os termos de amortecimento da forma $|u_t|^{m-1}u_t$ e $|v_t|^{r-1}v_t$ agindo na primeira e na segunda equação de (7), respectivamente. Ele mostrou que a energia associada ao sistema é ilimitada. Na verdade, a energia cresce como uma função exponencial quando $t \to \infty$, desde que os dados iniciais sejam suficientemente grandes.

[3]Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) foi um matemático e físico russo conhecido por seu desenvolvimento da teoria da estabilidade de um sistema dinâmico, bem como por suas diversas contribuições a física matemática e a teoria da probabilidade. O nome de Lyapunov é grafado de diversas outras formas: Liapunov, Liapounov, Liapounoff, etc.

A principal contribuição do presente trabalho é generalizar e melhorar os resultados de decaimento visto anteriormente em Santos [25]. Mais precisamente, mostrar que para certa classe de funções relaxamento e certos dados iniciais, a taxa de decaimento da solução de energia é semelhante ao das funções relaxamento.

Passemos agora a descrever o conteúdo desta dissertação que está organizada da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos as notações essenciais e alguns resultados básicos usados para o entendimento do trabalho.

No Capítulo 2, será enunciado e demonstrado o teorema de existência, unicidade e regularidade de soluções fortes do sistema (1) - (4). Para provar a existência de solução forte usamos o Método de Faedo-Galerkin [4] e para unicidade é utilizamos o Método da Energia.

Finalmente no Capítulo 3, será enunciado e demonstrado o nosso resultado principal que é o decaimento geral de soluções fortes para o sistema (1) - (4). O método usado é baseado na construção de um funcional de Lyapunov $\mathcal{L}$ adequado equivalente ao funcional de energia $E(t)$ satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\kappa\,\xi(t)\mathcal{L}(t)$$

para alguma constante positiva κ.

As notações que usamos neste trabalho são padrões e pode ser encontrada no livro de Lions[5][12]. Além disso, ao longo deste trabalho seram apresentados algumas notas históricas retiradas de [3, 9, 22, 27] e utilizadas aqui somente como um aspecto motivacional ao estudo do nosso objeto de interesse: a Matemática.

[4]Este método foi idealizado para encontrar soluções dos problemas de evolução e desenvolvido por Alessandro Faedo (1913-2001) trinta anos após o Método de Galerkin. Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945) realizou um trabalho fundamental aplicando técnicas de aproximação para resolver problemas de contorno associados a problemas de engenharia civil. Ele publicou o seu Método de Elementos Finitos em 1915 e seu manuscrito fundamental sobre placas finas elásticas, em 1937.

[5]Jacques-Louis Lions (1928-2001) foi um matemático francês reconhecido por suas contribuições ao estudo de equações diferenciais parciais e análise numérica. Em 1979, ele foi eleito membro da "Academia Brasileira de Ciências"(ABC).

CAPÍTULO

1

Preliminares

Destinamos este capítulo à fixação de notações e apresentação do maior número de conceitos e resultados, a fim de auxiliar a compreensão dos capítulos seguintes. Sendo assim, não nos preocuparemos com todas as demonstrações dos resultados utilizados de forma preliminar, mas mencionaremos o referencial bibliográfico para posterior consulta.

1.1 Algumas Noções de Análise Funcional

Definição 1.1. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** em E se, para quaisquer $u, v \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são satisfeitas:

a) $\|u\| \geq 0$;

b) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$;

c) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$;

d) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado **espaço vetorial normado** e denotado por $(E, \|\cdot\|)$.

Observação 1.1. Sendo $v \in E$, em todo o trabalho, denotaremos por $\|v\|_E$ a norma do vetor v do espaço vetorial E. No entanto, em algumas ocasiões, para não sobrecarregar a notação, denotaremos simplesmente $\|v\|$ deixando subentendido que se trata da norma do espaço vetorial ao qual v pertence.

Definição 1.2. Seja M um conjunto não vazio. Uma **métrica** em M é uma função

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada par $(x,y) \in M \times M$ um número real $d(x,y)$, denominado a distância de x a y. Para tal função, considerando-se $x,y,z \in M$ devem ser satisfeitas as seguintes condições:

a) $d(x,x) = 0$

b) Se $x \neq y$ então $d(x,y) > 0$

c) $d(x,y) = d(y,x)$

d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Se M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M, dizemos que o par (M,d) é um **espaço métrico**[1].

Observação 1.2. Em particular todo espaço vetorial normado é um espaço métrico. É fácil verificar que toda norma, define ou induz uma métrica d em E, basta por: $d = \|u - v\|$, onde $u, v \in E$.

Definição 1.3. Um espaço métrico é dito **completo** se toda sequência de Cauchy nele é convergente, isto é, converge para um elemento do próprio espaço.

Definição 1.4. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**[2].

[1] A noção de Espaço Métrico foi introduzida por Maurice René Fréchet (1878-1973) na sua tese de doutoramento em 1906, porém, a expressão "espaço métrico"não foi sua invenção, tendo sido cunhada por Felix Hausdorff (1868-1942) em 1914.

[2] A noção abstrata de Espaço de Banach foi introduzida por Stefan Banach (1892-1945) na sua dissertação escrita em 1920. O termo "espaço de Banach"foi cunhado por Fréchet em 1928.

Definição 1.5. Um **produto interno** num espaço vetorial E é uma forma bilinear simétrica definida positiva, isto é, uma função

$$(\cdot,\cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

a) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u,w) + \beta(v,w)$
$(u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u,v) + \beta(u,w)$;

b) $(u,v) = (v,u)$;

c) $(u,u) > 0$ se $u \neq 0$.

Observação 1.3. Semelhantemente ao caso da norma, às vezes podemos omitir o subíndice E da notação $(\cdot,\cdot)_E$, levando em consideração que provavelmente o contexto não cause confusão com a notação de par ordenado.

Definição 1.6. Um espaço vetorial dotado de um produto interno é dito um **espaço de Hilbert**[3] se ele é completo com relação à norma dada por

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Definição 1.7. Sejam $V \subset H$ espaços de Hilbert. Ao operador linear, injetivo,

$$\tau : V \longrightarrow H,$$

que a cada $v \in V$ faz corresponder τv como um elemento de H, chamamos de operador de imersão ou a imersão τ de V em H. Quando existe uma constante $k > 0$, tal que

$$\|v\|_H \leq k\,\|v\|_V\,,\ \forall v \in V$$

[3] A noção abstrata de Espaço de Hilbert foi introduzida por Erhard Schmidt (1876-1959), por volta de 1905, inspirado em idéias de seu orientador David Hilbert (1862-1943) sobre equações integrais, notadamente sobre a obra de Erik Ivar Fredholm (1866-1927). O trabalho de Fredholm representou o pontapé inicial para um estudo sistemático das equações integrais, no qual se destacou Hilbert durante a primeira década do século XX. Hilbert foi o principal matemático na virada do século XX e sua mais famosa aparição foi em uma palestra no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, no ano de 1900, durante a qual ele apresentou 23 problemas que considerava importantes, alguns deles até hoje sem resolução.

dizemos que τ é uma imersão contínua. Neste caso denotamos $V \hookrightarrow H$ para representar a imersão contínua. Quando o fecho da imagem de conjuntos limitados de V por τ forem compactos em H, dizemos que τ é uma imersão compacta.

Definição 1.8. Um espaço normado é dito **separável** quando possui um subconjunto enumerável e denso nesse espaço.

Definição 1.9. Designaremos por E' o conjunto das funções $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{f é linear e contínua}\}.$$

O conjunto E' é chamado o **dual** de E.

Definição 1.10. Seja E um espaço de Banach com dual E'. A **topologia fraca** $\sigma(E;E')$ é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $u \in E'$. Quando $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em E segundo a topologia fraca denotamos por $u_n \rightharpoonup u$ em E.

Definição 1.11. Seja E um espaço de Banach com dual E'. A **topologia fraca estrela** $\sigma(E';E)$ é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$. Quando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f em E segundo essa topologia denotamos por $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Proposição 1.1. *Seja E um espaço de Banach separável e (f_n) uma sequência limitada em E'. Então, existe uma subsequência (f_{nk}) que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Ver [8], página 76. □

Proposição 1.2. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e (u_n) uma sequência limitada em E'. Então, existe uma subsequência (u_{nk}) que converge na topologia fraca.*

Demonstração. Ver [8], página 76. □

1.2 Os Espaços L^p

Neste capítulo, usaremos termos da Teoria da Medida, como função mensurável, integrável e conjuntos de medida nula. No que segue, denotaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue[4].

[4]Henri Léon Lebesgue (1875-1941) formulou a Teoria da Medida em 1901 e no ano seguinte deu a definição da integral de Lebesgue que generaliza a noção de integral dada por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Definição 1.12. Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach[5]

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{u é mensurável e} \int_\Omega |u(x)|^p < \infty\}$$

com a norma definida por

$$\|u\|_{L^p} := \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx, \right)^{\frac{1}{p}}$$

e quando $p = \infty$, denotamos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \text{u é mensurável e} \exists \text{ C tal que} \, |u(x)| \leq C \text{ q.t.p em } \Omega \right\}$$

com a norma

$$\|u\|_{L^\infty} := \|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = inf\{C; |u(x)| \leq \text{C q.t.p. em } \Omega\}.$$

Quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert* com produto interno

$$(u,v) := \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma induzida

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.4. Seja $1 \leq p \leq \infty$; denotamos por q o expoente conjugado,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e que podemos identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$:

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega).$$

Se $p = 1$ temos $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ e se $p = \infty$ temos $(L^\infty(\Omega))' \supset L^1(\Omega)$. Além disso, $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$. (Ver [8], página 95 a 102.)

[5] Ver [8], Teorema de Fischer-Riesz, página 93. Em 1907, Ernst Sigismund Fischer (1875-1954) e Frigyes Riesz (1880-1956) definiram o espaço L^2. Entre 1910-13 Riesz introduziu os espaços L^p para qualquer expoente $p > 0$ e descobriu a dualidade natural entre os diferentes espaços L^p e L^q com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1.3 Distribuições

Para um tratamento moderno das equações diferenciais parciais é essencial o conceito de distribuição[6]. Nesta seção faremos uma breve introdução ao estudo das distribuições, apresentando as notações e resultados que serão usados posteriormente.

1.3.1 Espaço das Funções Testes

Dado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e representamos por D^α o operador derivação parcial de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_n}^{\alpha_n} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Se $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$, para toda função φ.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denominamos suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto de pontos x pertencentes a Ω onde φ é diferente de zero. Denotamos o suporte de φ por $supp(\varphi)$. Em símbolos, temos que

$$supp(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em} \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula.

Dizemos que uma função φ tem suporte compacto em Ω, se existir $K \subset \Omega$ compacto tal que $supp(\varphi) \subset K$. Por $C_0^\infty(\Omega)$ denotaremos o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados *funções testes* em Ω.

1.3.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ convergente para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Todas funções (φ_ν) possuem suportes contidos em um compacto fixo $K \subset \Omega$;

[6]A noção de distribuição foi introduzida em 1935 por Sergeĭ L'vovich Sobolev (1908-89) sob o nome de "função generalizada"e foi estudada sistematicamente por Laurent-Moïse Schwartz (1915-2002) a partir de 1945, o que lhe valeu a Medalha Fields em 1950 pela elaboração da Teoria das Distribuições.

(ii) $D^{\alpha}\varphi_n \longrightarrow D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^{\infty}(\Omega)$, munido da noção de convergência acima, é denominado **espaço das funções testes** e denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 1.1. *O espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [8], página 109. □

1.3.3 Distribuições sobre Ω

Definição 1.13. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear e contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Explicitamente, é uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi),\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) T é contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi\rangle$ e o espaço vetorial das distribuições sobre Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 1.14. Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Simbolicamente, temos:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty, \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Pode-se mostrar que as funções localmente integráveis definem uma distribuição sobre Ω (ver [16], página 12)

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lema 1.1 (Du Bois-Reymond[7]). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

[7]Este lema foi apresentado por Paul David Gustav Du Bois-Reymond (1831-89) no ano de 1879 e o que hoje chamamos de funções testes foram usadas, provavelmente pela primeira vez, neste trabalho. Deve-se a ele também o nome "equação integral", usado pela primeira vez em 1888.

Demonstração. Ver [17], página 10. □

Usando o lema acima temos que T_u fica univocamente determinada por u q.s. sobre Ω no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ q.s. em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u por ela definida. Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções $L^1_{loc}(\Omega)$ (ver exemplo em [17], página 12).

1.3.4 Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional. O que motivou a definição de derivada fraca e consequentemente a derivada distribucional, foi a fórmula de integração por partes do cálculo. De fato, em dimensão 1, temos a fórmula de integração:

$$\int_a^b u_x \varphi dx = u\varphi\big|_a^b - \int_a^b u\varphi dx,$$

e quando $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$ temos

$$\int_a^b u_x \varphi dx = -\int_a^b u\varphi_x dx,$$

Definição 1.15. Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida como sendo o funcional linear $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Decorre da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{\nu \to \infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{\nu \to \infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

1.4 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como **espaços de Sobolev**[8].

Definição 1.16. Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular Γ. Definimos o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \text{ multi-índice com } |\alpha| \leq m\}$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada de u no sentido das distribuições. Este espaço está munido da seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Além disso, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço uniformemente convexo e reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$ (ver [3], página 60-61.).

Em especial quando $m = 0$, $H^{0,p}(\Omega)$ é identificado com $L^p(\Omega)$ e quando $p = 2$, tem-se que $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável que denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha, \text{ com} |\alpha| \leq m\right\}$$

munido do produto interno

$$((u,v))_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

[8]Chamados assim em honra ao matemático russo Sergeĭ L'vovich Sobolev (1908-89) que publicou estas idéias entre 1935-38. Antes de tornarem-se associados ao nome de Sobolev esses espaços eram às vezes citados sob outros nomes, por exemplo, como espaços de Beppo Levi.

1.4.1 O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Embora o espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, em geral, $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso $W^{m,p}(\Omega)$. Motivado por este fato, define-se o espaço

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$.

Se $1 \leq p < \infty$ e q é o expoente conjugado de p, representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

1.4.2 Traço de uma função de $H^1(\Omega)$

Uma caracterização do espaço $H_0^m(\Omega)$ que é muito útil é dada pelo **Teorema do Traço**. A seguir estudaremos uma versão elementar desse teorema.

Inicialmente observamos que se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular, então

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi_{|_{\overline{\Omega}}};\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

é denso em $H^1(\Omega)$ (ver [16], página 85) e, dessa forma dada $\varphi \in H^1(\Omega)$ existe uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $H^1(\Omega)$.

Consideremos a aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ definida por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\nu|_\Gamma},$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$. A aplicação linear e contínua γ_0 é denominada **função Traço** e o espaço $H_0^1(\Omega)$ é o núcleo de γ_0 (ver [16], página 87.).

De forma mais simples escrevemos $\varphi_{|_\Gamma}$ em vez de $\gamma_0(\varphi)$, assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi_{|_\Gamma} = 0\right\}.$$

A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural.

Observação 1.5. O símbolo ∇ denota o gradiente[9] e é dado por $\nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$.

[9] O símbolo ∇ foi introduzido pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-65) e foi rapidamente assimilado pela comunidade científica. Em 1843, Hamilton descobriu os quatérnios (generalização dos complexos), a primeira álgebra não comutativa a ser estudada.

1.5 Espaços $L^p(0,T;V)$ e Distribuições Vetoriais

Vejamos algumas propriedades básicas para os espaços $L^p(0,T;V)$. Eles são de grande utilidade para o nosso estudo e são usados com grande frequência em Equações Diferenciais Parciais.

Sejam V um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_V$, T um número real positivo e no intervalo $(0,T)$ consideremos a medida de Lebesgue dt. Uma função vetorial $\varphi : (0,T) \longrightarrow V$, é dita *simples* quando assume apenas um número finito de valores não nulos, cada valor não nulo assumido num conjunto mensurável de medida finita. Toda função simples possui uma representação canônica da forma

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}(t) \cdot \varphi_i$$

onde $\varphi_i \in V$ e cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, com $m(E_i) < \infty$, $i = 1,2,\ldots,k$ e dois a dois disjuntos. Aqui, χ_{E_i} representa a função característica do conjunto E_i e estes são dados por

$$E_i = t \in (0,T); \varphi(t) = \varphi_i.$$

Definimos a integral de φ como sendo o vetor de V dado por

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i) \cdot \varphi_i$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow V$ é *Bochner*[10] *integrável* ou simplesmente $\mathfrak{B}$-*integrável* se existir uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que:

(i) $\varphi_n \to u$ em V, quase sempre em $(0,T)$;

(ii) $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|_V \, dt = 0$

Desta forma, a integral de Bochner da função u é, por definição, o vetor de V dado por

$$\int_0^T u(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)dt$$

onde o limite é considerado na norma de V.

[10]Em 1932, Salomon Bochner(1899-1982) publicou uma generalização da integral de Lebesgue que agora é conhecida como integral de Bochner para funções vetoriais.

Definição 1.17. Uma função vetorial $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow V$ é dita *fracamente mensurável* quando a função numérica $t\longmapsto\langle\Phi,u(t)\rangle$ for mensurável, para qualquer funcional $\Phi\in V'$, onde V' é o dual topológico de V. Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples.

Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t\longmapsto\|u(t)\|_V$ é integrável à Lebesgue.

Teorema 1.2 (*S. Bochner*). *Uma função $u:(0,T)\longrightarrow V$ é $\mathfrak{B}$-integrável se, e somente se, é fortemente mensurável e a função $t\longmapsto\|u(t)\|_V$ é integrável.*

Demonstração. Ver [15], página 119. □

Corolário 1.1. *Sejam V e W dois espaços de Banach. Se $u:(0,T)\longrightarrow V$ é $\mathfrak{B}$-integrável e se $T:V\to W$ é um operador liner limitado, então a função vetorial $Tu:(0,T)\longrightarrow W$ definida por $(Tu)(t)=T(u(t))$ é $\mathfrak{B}$-integrável e é válida a relação*

$$\int_0^T T(u(t))dt = T\Big(\int_0^T u(t)dt\Big).$$

Demonstração. Ver [15], página 120. □

Corolário 1.2. *Se $u:(0,T)\longrightarrow V'$ é $\mathfrak{B}$-integrável, então para cada $v\in V$ temos*

$$\Big\langle\int_0^T u(t)dt, v\Big\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle u(t),v\rangle_{V'\times V}dt.$$

Demonstração. Ver [15], página 120. □

Denotaremos por $L^p(0,T;V)$, $1\le p<\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T)\longrightarrow V$, definidas quase sempre em (0,T) com valores em V, fortemente mensuráveis e tais que a função $t\longmapsto\|u(t)\|_V$ está em $L^p(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_V^p\,dt\Big)^{1/p}$$

Quando $p=2$ e $V=H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t),v(t))_H dt.$$

Por $L^\infty(0,T;V)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow V$, definidas quase sempre em (0,T) com valores em V, que são fortemente mensuráveis e tais que $t\longmapsto \|u(t)\|_V\in L^\infty(0,T)$, com a norma em $L^\infty(0,T;V)$ definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)}=\sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u(t)\|_V\,.$$

Quando V é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;V)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;V')$, onde p e q são expoentes conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u,v\rangle_{L^q(0,T;V')\times L^p(0,T;V)}=\int_0^T\langle u(t),v(t)\rangle_{V'\times V}$$

No caso, $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;V)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;V')$.

Sejam $u\in L^p(0,T;V)$, $1\le p<\infty$ e $\varphi\in\mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a função $T_u:\mathcal{D}(0,T)\longrightarrow V$, definida por

$$T_u(\varphi)=\int_0^T u(t)\varphi(t)dt,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em V. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em V e por esta razão é denominada **distribuição vetorial**.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em V é denominado **espaço das distribuições vetoriais** sobre $(0,T)$ com valores em V, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;V)$.

Definição 1.18. Seja $T\in\mathcal{D}'(0,T;V)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em V dada por

$$\langle\frac{d^nT}{dt^n},\varphi\rangle=(-1)^n\langle T,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Para $1\le p\le\infty$, consideremos o espaço de Banach

$$W^{m,p}(0,T;V)=\{u\in L^p(0,T;V);u^{(j)}\in L^p(0,T;V),j=1,\dots,m\},$$

onde u^j representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;V)}=\begin{cases}\Big(\sum_{j=0}^m\Big\|u^{(j)}(t)\Big\|_{L^p(0,T;V)}\Big)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty,\\ \sup\limits_{t\in(0,T)} ess\Big(\sum_{j=0}^m\Big\|u^{(j)}(t)\Big\|_V\Big), & p=\infty.\end{cases}$$

O espaço
$$W_0^{m,p}(0,T;V) = \{u \in W^{m,p}(0,T;V); u(0) = u(T) = 0\},$$
representa o fecho de $\mathcal{D}(0,T;V)$ com norma de $W^{m,p}(0,T;V)$.

Quando $p = 2$ e V é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;V)$ será denotado por $H^m(0,T;V)$, que munido do produto interno
$$((u,v))_{H^m(0,T;V)} = \sum_{j=0}^{n} (u^j, v^j)_{L^p(0,T;V)}$$
é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0,T;V)$ o fecho de $\mathcal{D}(0,T;V)$ em $H^m(0,T;V)$ e por $H^{-m}(0,T;V)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;V)$.

1.6 Resultados Auxiliares

Nesta seção é feita uma lista de resultados avulsos que serão usados nos capítulos posteriores.

1.6.1 Desigualdades Importantes

No estudo moderno de EDP as desigualdades desempenham um papel muito importante. Aqui apresentamos uma coleção elementar, mas fundamental, de desigualdades.

1. **Desigualdade Elementar**

   Para $a, b \in \mathbb{R}$ temos
   $$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$
   Demonstração. $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. □

2. **Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz** [11]

   Seja V um espaço vetorial com produto interno, e sejam $u, v \in V$. Então
   $$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} \cdot (v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

[11]Na maior parte das obras chamada de Cauchy-Schwarz. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) descreveu essa desigualdade para somas em 1821, enquanto uma forma integral da desigualdade foi publicada por Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-89), em 1859, e redescoberta por Herman Amandus Schwarz (1843-1921), em 1885.

Demonstração. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$0 \leq (\alpha.u+v,\alpha.u+v) = \alpha^2(u,u)+2\alpha(u,v)+(v,v).$$

Logo o discriminante deste polinômio do segundo grau não pode ser positivo:

$$4(u,v)^2 - 4(u,u)(v,v) \leq 0.$$

Daí segue a desigualdade. □

3. **Desigualdade de Young** [12]
   Se $1 < p,q < \infty$ tais que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (a,b \geq 0).$$

Demonstração. Ver [8], página 92. □

4. **Desigualdade de Hölder** [13]
   Sejam $u \in L^p$ e $v \in L^q$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \|u\|_p \|v\|_q .$$

Demonstração. Ver [8], página 92. □

5. **Desigualdade de Minkowski** [14]
   Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u,v \in L^p(\Omega)$. Então

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} .$$

Demonstração. Ver [3], página 25. □

[12] O termo desigualdade de Young é usado para nomear duas desigualdades: uma sobre o produto de dois números e outra sobre a convolução de duas funções (ver [3], página 33). Ambas são nomeadas em homenagem a William Henry Young (1863-1942).

[13] Esta é uma generalização da desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz para espaços L^p devida à Otto Ludwig Hölder (1859-1937) que publicou essa desigualdade em 1884.

[14] Hermann Minkowski (1864-1909) desenvolveu uma nova visão do espaço e do tempo, e lançou as bases matemáticas da Teoria da Relatividade. Em uma carta a Hilbert em 5 de janeiro de 1900, Minkowski sugere o tema da famosa palestra de Hilbert em Paris: *O que teria o maior impacto seria uma tentativa de dar uma previsão do futuro, ou seja, um esboço dos problemas com que os matemáticos futuros devem ocupar-se. Desta forma, você talvez possa se certificar de que as pessoas falariam sobre sua palestra durante décadas no futuro.*

6. **Desigualdade de Poincaré** [15]

   Seja Ω um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante C (dependendo somente de Ω) tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \ (1 \leq p < \infty).$$

   Demonstração. Ver [8], página 218. □

   Consequências da Desigualdade de Poincaré

   a) A aplicação $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ define uma norma em $H_0^1(\Omega)$. De posse da desigualdade acima, verifica-se facilmente que esta norma é equivalente a norma usual, induzida por $H^1(\Omega)$. Associado a essa norma temos o produto interno

$$((u,v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

   b) A norma de Sobolev $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$. Isso segue do fato que se $u \in H_0^2(\Omega)$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda da desigualdade de Poincaré.

1.6.2 Outros Resultados Importantes

Proposição 1.3 (Identidade de Green [16]). *Se $u \in H^2(\Omega)$ e $w \in H^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx = -\int_\Omega (\Delta u) w dx + \int_\Gamma w \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração. Ver [16], página 105. □

[15]Pode-se dizer que Jules Henri Poincaré (1854-1912) foi o autor da topologia algébrica e da teoria das funções analíticas de várias variáveis complexas, e também um cientista preocupado com muitos aspectos da matemática, física e filosofia. Em equações diferenciais ele foi um pioneiro no uso da série assintótica, uma das mais poderosas ferramentas da matemática aplicada contemporânea. Frequentemente ele é descrito como o último universalista em matemática.

[16]O primeiro trabalho lidando com condições de contorno geral de uma equação diferencial parcial foi escrito em 1828 por Georg Green (1793-1841), um matemático inglês autodidata. Green publicou um pequeno livro entitulado *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, no qual apresentou suas três identidades, obtidas a partir do Teorema do Divergente; a fórmula ligando as integrais de superfície e volume, agora conhecida como Teorema de Green, e a Função de Green para regiões limitadas. No entanto, estes resultados não se tornaram amplamente conhecidos até ensaio de Green ser republicado na década de 1850 graças aos esforços de William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907).

Proposição 1.4 (Lema de Grönwall [17]). *Sejam $k(t)$ e $z(t)$ funções reais, positivas e definidas em $[0,T]$. Suponhamos ainda que z seja absolutamente contínua e k integrável. Se existe $C > 0$, tal que*

$$z(t) \leq C + \int_0^t k(s)z(s)ds, \ \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$z(t) \leq C \exp^{\int_0^t k(s)ds}, \ \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Ver [16], página 177. □

[17] Thomas Hakon Grönwall (1877-1932) demonstrou esse lema em 1919. Existem duas versões desse lema, que por vezes é também chamado *Desigualdade de Grönwall*, a integral e a diferencial.

CAPÍTULO

2

Existência e Regularidade de Soluções

Neste capítulo estudamos a existência,unicidade e regularidade de soluções fortes para o sistema acoplado de equações de onda com memória, dado por:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds - \alpha(u-v) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

satisfazendo as condições de fronteira

$$u = v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,\infty), \tag{2.3}$$

com as seguintes condições iniciais

$$(u(x,0),v(x,0)) = (u_0(x),v_0(x)), \quad (u_t(x,0),v_t(x,0)) = (u_1(x),v_1(x)) \quad \text{em } \Omega, \tag{2.4}$$

onde Ω é um domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular, u e v denotam os deslocamentos transversais das membranas, α é uma constante positiva e g_i, com $i = 1,2$, são funções positivas e não crescentes satisfazendo as hipóteses (G1) e (G2) dadas a seguir.

Para mostrar a existência das soluções fortes utilizaremos o Método de Faedo-Galerkin que consiste em aproximar o problema (2.1) - (2.4) por problemas análogos, porém em dimensão finita. No que se segue, usaremos as seguintes notações: $((\cdot,\cdot)); \|\cdot\|_1 ; (\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|_2$ para designar o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente. Os símbolos ∇ e Δ denotam o gradiente e o operador de Laplace, respectivamente.

2.1 Hipóteses sobre o núcleo g_i

Nesta seção apresentamos algumas hipóteses necessárias na prova de nosso resultado principal. Assumiremos que

(G1) $g_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ são funções diferenciáveis não cresentes satisfazendo

$$g_i(0) > 0, \quad \beta_i := 1 - \int_0^\infty g_i(s)ds > 0, \ i = 1,2.$$

(G2) Existem funções diferenciáveis ξ_i satisfazendo

$$g_i'(t) \leq -\xi_i(t) g_i(t), \quad t > 0,$$

onde

$$\left| \frac{\xi_i'(t)}{\xi_i(t)} \right| \leq k_i, \quad \xi_i(t) > 0, \quad \xi_i'(t) \leq 0, \quad \forall t > 0, \quad i = 1,2.$$

Note que (G1) é necessária para garantir a hiperbolicidade do sistema (2.1) - (2.4). Existem muitas funções que satisfazem (G1) e (G2), como exemplos de tais funções temos

$$g(t) = a(t+1)^\rho, \ \rho < -1,$$

$$g(t) = ae^{b(t+1)^\nu}, \ 0 < \nu \leq 1,$$

para a e b escolhidos convenientemente. Desde que ξ_i é não crescente então $\xi_i(t) \leq \xi_i(0) = M_i$, $i = 1,2$.

Inicialmente, a fim de simplificar a notação e facilitar nossa análise, definimos o operador binário $\Box$ através da fórmula:

$$(g \Box \nabla u)(t) := \int_0^t g(t-s) \int_\Omega |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dx ds. \tag{2.5}$$

Com esta notação temos a seguinte afirmação

Lema 2.1. *Para $v \in C^1(0,T;H^1(\Omega))$, temos*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^t g(t-s) \nabla v ds \cdot \nabla v_t dx &= -\frac{1}{2} g(t) \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} g' \Box \nabla v \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big[g \Box \nabla v - \Big(\int_0^t g(s) ds \Big) \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \Big]. \end{aligned}$$

Demonstração. Para mostrar a identidade acima é suficiente diferenciar o termo $g\Box\nabla v$. De fato, como

$$(g\Box\nabla v)(t)=\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla v(t)-\nabla v(s)|^2 dxds$$

temos

$$\frac{d}{dt}(g\Box\nabla v)=g'\Box\nabla v+2\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla v(t)\nabla v_t dxds-2\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla v(s)\nabla v_t dxds.$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}\Big[\int_0^t g(s)ds\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx\Big]-g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx=2\int_0^t g(s)ds\int_\Omega \nabla v(t)\nabla v_t dx$$

e como $\displaystyle\int_0^t g(t-s)ds=\int_0^t g(s)ds$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g\Box\nabla v) &= g'\Box\nabla v+\frac{d}{dt}\Big[\int_0^t g(s)ds\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx\Big]\\ &\quad -g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx-2\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla v(s)\nabla v_t dxds.\end{aligned}$$

Reordenando os termos desta equação temos

$$\begin{aligned}2\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla v(s)\nabla v_t dxds &= -g(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx+g'\Box\nabla v\\ &\quad -\frac{d}{dt}(g\Box\nabla v)+\frac{d}{dt}\Big[\int_0^t g(s)ds\int_\Omega |\nabla v(t)|^2\,dx\Big].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla v ds\cdot\nabla v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx+\frac{1}{2}g'\Box\nabla v\\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[g\Box\nabla v-\Big(\int_0^t g(s)ds\Big)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\Big].\end{aligned}$$

O que prova o lema. □

Lema 2.2. *A energia $E(t)$ associada ao sistema (2.1) - (2.4) dada por*

$$\begin{aligned} E(t) := E(t;u,v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} g_1 \square \nabla u + \frac{1}{2} g_2 \square \nabla v + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u-v|^2 dx, \end{aligned}$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t;u,v) &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}g_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u + \frac{1}{2} g_2' \square \nabla v \\ &\leq \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u + \frac{1}{2}g_2' \square \nabla v \leq 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (2.1) por u_t e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx + \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds \cdot u_t dx + \alpha \int_\Omega (u-v)u_t dx = 0.$$

Aplicando a Identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} - \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s) ds \cdot \nabla u_t dx \\ + \alpha \int_\Omega (u-v)u_t dx = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando o Lema 2.1 segue

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds \cdot \nabla u_t dx &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g_1 \square \nabla u - \left(\int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]. \end{aligned}$$

Substituindo a identidade acima em (2.6) resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega |u_t|^2 dx + \left(1 - \int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + g_1 \square \nabla u\right\} + \alpha \int_\Omega (u-v)u_t dx \\ = -\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogamente para a equação (2.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_\Omega |v_t|^2dx+\Big(1-\int_0^t g_2(s)ds\Big)\int_\Omega |\nabla v|^2dx+g_2\,\Box\,\nabla v\Big\}-\alpha\int_\Omega (u-v)v_tdx\\ =-\frac{1}{2}g_2(t)\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}g_2'\,\Box\,\nabla v.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Somando (2.7) e (2.8) encontramos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_\Omega |u_t|^2dx+\Big(1-\int_0^t g_1(s)ds\Big)\int_\Omega |\nabla u|^2dx+\int_\Omega|v_t|^2dx\\ +\Big(1-\int_0^t g_2(s)ds\Big)\int_\Omega|\nabla v|^2dx+g_1\,\Box\,\nabla u+g_2\,\Box\,\nabla v+\alpha\int_\Omega|u-v|^2dx\Big\}\\ =-\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}g_2(t)\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}g_1'\,\Box\,\nabla u+\frac{1}{2}g_2'\,\Box\,\nabla v.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Definindo a energia de primeira ordem associada ao sistema (2.1)-(2.4) por

$$\begin{aligned}E(t) \;:=\; & \frac{1}{2}\int_\Omega|u_t|^2dx+\frac{1}{2}\Big(1-\int_0^t g_1(s)ds\Big)\int_\Omega|\nabla u|^2dx\\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega|v_t|^2dx+\frac{1}{2}\Big(1-\int_0^t g_2(s)ds\Big)\int_\Omega|\nabla v|^2dx\\ &+\frac{1}{2}g_1\,\Box\,\nabla u+\frac{1}{2}g_2\,\Box\,\nabla v+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega|u-v|^2dx,\end{aligned}$$

a equação (2.9) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}g_2(t)\int_\Omega|\nabla v|^2dx+\frac{1}{2}g_1'\,\Box\,\nabla u+\frac{1}{2}g_2'\,\Box\,\nabla v\\ &\le \frac{1}{2}g_1'\,\Box\,\nabla u+\frac{1}{2}g_2'\,\Box\,\nabla v.\end{aligned}$$

Das hipóteses (G1) e (G2) temos que $g_i'(t)\le 0$, assim sendo

$$\frac{d}{dt}E(t)\le 0.$$

Como queríamos mostrar. □

2.2 Existência e Regularidade

Enunciaremos agora o resultado que nos garante a existência, unicidade e regularidade das soluções fortes para o sistema (2.1) - (2.4).

Teorema 2.1. *Sejam* $(u_0,v_0) \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$ *e* $(u_1,v_1) \in (H_0^1(\Omega))^2$*. Então existe uma única solução forte* (u,v) *para o sistema (2.1)-(2.4) satisfazendo*

$$u,v \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W^{2,\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Consideremos $V = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ e seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de V ortonormal completa em $L^2(\Omega)$. Consideremos

$$V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$$

o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores desta base.

Problema Aproximado

O problema aproximado consiste em determinar funções $u^m, v^m \in V_m$ da forma

$$u^m(\cdot,t) = \sum_{j=1}^m h_{j,m}(t)w_j(\cdot), \quad v^m(\cdot,t) = \sum_{j=1}^m f_{j,m}(t)w_j(\cdot),$$

onde as funções u^m e v^m são as soluções do sistema aproximado

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{tt}^m w_j dx + \int_\Omega \nabla u^m\cdot\nabla w_j dx\\ -\int_\Omega\int_0^t g_1(t-s)\nabla u^m(s)ds\cdot\nabla w_j dx &+ \alpha\int_\Omega (u^m - v^m)w_j dx = 0,\end{aligned} \tag{2.10}$$

e

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_{tt}^m w_j dx + \int_\Omega \nabla v^m\cdot\nabla w_j dx\\ -\int_\Omega\int_0^t g_2(t-s)\nabla v^m(s)ds\cdot\nabla w_j dx &- \alpha\int_\Omega (u^m - v^m)w_j dx = 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

com condições iniciais $u^m(\cdot,0) = u_{0,m}, u_t^m(\cdot,0) = u_{1,m}, v^m(\cdot,0) = v_{0,m}$ e $v_t^m(\cdot,0) = v_{1,m}$, onde

$$\begin{aligned}u_{0,m} &= \sum_{j=1}^m \{\int_\Omega u_0 w_j dx\}w_j, \quad u_{1,m} = \sum_{j=1}^m \{\int_\Omega u_1 w_j dx\}w_j,\\ v_{0,m} &= \sum_{j=1}^m \{\int_\Omega v_0 w_j dx\}w_j, \quad v_{1,m} = \sum_{j=1}^m \{\int_\Omega v_1 w_j dx\}w_j.\end{aligned}$$

Notemos que para $(u_0,v_0)\in V^2$ e $(u_1,v_1)\in (H_0^1(\Omega))^2$, temos que $(u_{0,m},v_{0,m}) \to (u_0,v_0)$ em V^2

e $(u_{1,m}, v_{1,m}) \to (u_1, v_1)$ em $(H_0^1(\Omega))^2$.
A existência das soluções aproximadas u^m e v^m no intervalo $[0, t_m)$ é garantida pela teoria padrão das equações diferenciais ordinárias. Nosso próximo passo é mostrar que as soluções aproximadas permanecem limitadas para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Para isso são necessárias algumas estimativas as quais serão desenvolvidas a seguir.

Estimativas a Priori

Multiplicando a equação (2.10) por $h'_{j,m}$ e somando em j, de 1 a m, temos

$$\int_\Omega u_{tt}^m u_t^m dx + \int_\Omega \nabla u^m \cdot \nabla u_t^m dx - \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u^m(s) ds \cdot \nabla u_t^m dx + \alpha \int_\Omega (u^m - v^m) u_t^m dx = 0.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u^m|^2\, dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\nabla u^m(s) ds \cdot \nabla u_t^m dx + \alpha \int_\Omega (u^m - v^m) u_t^m dx = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, multiplicando a equação (2.11) por $f'_{j,m}$ e somando em j, de 1 a m, obtemos

$$\int_\Omega v_{tt}^m v_t^m dx + \int_\Omega \nabla v^m \cdot \nabla v_t^m dx - \int_\Omega \int_0^t g_2(t-s)\nabla v^m(s) ds \cdot \nabla v_t^m dx - \alpha \int_\Omega (u^m - v^m) v_t^m dx = 0,$$

de onde vem que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_t^m|^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v^m|^2\, dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_2(t-s)\nabla v^m(s) ds \cdot \nabla v_t^m dx - \alpha \int_\Omega (u^m - v^m) v_t^m dx = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Somando (2.12)-(2.13) e usando o Lema 2.1, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t; u^m, v^m) &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_\Omega |\nabla u^m|^2 dx - \frac{1}{2}g_2(t)\int_\Omega |\nabla v^m|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}g_1' \,\Box\, \nabla u^m + \frac{1}{2}g_2' \,\Box\, \nabla v^m. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Considerando as hipóteses sobre g_i, de (2.14) segue que

$$\frac{d}{dt}E(t; u^m, v^m) \le 0.$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a t, encontramos

$$E(t;u^m,v^m) \leq E(0;u^m(0),v^m(0)),$$

o que implica

$$\begin{aligned} E(t;u^m,v^m) \;\; \leq \;\; & \frac{1}{2}\int_\Omega |u_{1,m}|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_1(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u_{0,m}|^2 dx \\ & + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_{1,m}|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g_2(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla v_{0,m}|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} g_1 \square \nabla u_{0,m} + \frac{1}{2} g_2 \square \nabla v_{0,m} + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_{0,m}-v_{0,m}|^2 dx. \end{aligned}$$

Da nossa escolha de $u_{0,m}$, $u_{1,m}$, $v_{0,m}$, $v_{1,m}$ e da hipótese (G1), segue que

$$E(t;u^m,v^m) \leq C, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

onde C é uma constante independente de m. Logo,

$$\left| \begin{array}{l} (u^m) \text{ e } (v^m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (u_t^m) \text{ e } (v_t^m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.16}$$

O próximo passo é encontrar uma estimativa para a energia de segunda ordem. Primeiramente, vamos estimar os dados iniciais $u_{tt}^m(0)$ e $v_{tt}^m(0)$ na norma de $L^2(\Omega)$. Fazendo $t \to 0^+$ nas equações (2.10) e (2.11), multiplicando o resultado por $h''_{j,m}(0)$ e $f''_{j,m}(0)$, respectivamente, e somando em j, de 1 a m, obtemos

$$\int_\Omega |u_{tt}^m(0)|^2\, dx = -\int_\Omega \nabla u_{0,m} \cdot \nabla u_{tt}^m(0) dx - \alpha \int_\Omega (u_{0,m}-v_{0,m}) u_{tt}^m(0) dx$$

e

$$\int_\Omega |v_{tt}^m(0)|^2\, dx = -\int_\Omega \nabla v_{0,m} \cdot \nabla v_{tt}^m(0) dx + \alpha \int_\Omega (u_{0,m}-v_{0,m}) v_{tt}^m(0) dx,$$

Usando a Identidade de Green, segue que

$$\int_\Omega |u_{tt}^m(0)|^2\, dx = \int_\Omega \Delta u_{0,m} \cdot u_{tt}^m(0) dx - \alpha \int_\Omega (u_{0,m}-v_{0,m}) u_{tt}^m(0) dx \tag{2.17}$$

e

$$\int_\Omega |v_{tt}^m(0)|^2\, dx = \int_\Omega \Delta v_{0,m} \cdot v_{tt}^m(0) dx + \alpha \int_\Omega (u_{0,m}-v_{0,m}) v_{tt}^m(0) dx. \tag{2.18}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (2.17) e (2.18), adicionando as desigualdades resultantes e pela nossa escolha de $u_{0,m}$ e $v_{0,m}$, obtemos

$$\|u_{tt}^m(0)\|_2 + \|v_{tt}^m(0)\|_2 \leq C, \ \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Diferenciando as equações (2.10) e (2.11) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{ttt}^m w_j dx + \int_\Omega \nabla u_t^m \cdot \nabla w_j dx + g_1(t) \int_\Omega \nabla u_0^m w_j dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_1'(t-s) \nabla u^m(s) ds \cdot \nabla w_j dx + \alpha \int_\Omega (u_t^m - v_t^m) w_j dx = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v_{ttt}^m w_j dx + \int_\Omega \nabla v_t^m \cdot \nabla w_j dx + g_2(t) \int_\Omega \nabla v_0^m w_j dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_2'(t-s) \nabla v^m(s) ds \cdot \nabla w_j dx - \alpha \int_\Omega (u_t^m - v_t^m) w_j dx = 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Multiplicando a equação (2.20) por $h''_{j,m}$ e (2.21) por $f''_{j,m}$ e somando em j, de 1 a m, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{ttt}^m u_{tt}^m dx + \int_\Omega \nabla u_t^m \cdot \nabla u_{tt}^m dx - g_1(t) \int_\Omega \nabla u_0^m \nabla u_{tt}^m dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_1(t-s) \nabla u_t^m(s) ds \cdot \nabla u_{tt}^m dx + \alpha \int_\Omega (u_t^m - v_t^m) u_{tt}^m dx \ = \ 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_\Omega v_{ttt}^m v_{tt}^m dx + \int_\Omega \nabla v_t^m \cdot \nabla v_{tt}^m dx - g_2(t) \int_\Omega \nabla v_0^m \nabla v_{tt}^m dx \\ -&\int_\Omega \int_0^t g_2(t-s) \nabla v_t^m(s) ds \cdot \nabla v_{tt}^m dx - \alpha \int_\Omega (u_t^m - v_t^m) v_{tt}^m dx \ = \ 0. \end{aligned}$$

Somando as equações acima e usando o Lema 2.1, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t; u_t^m, v_t^m) \ = \ & -\frac{1}{2} g_1(t) \int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx - \frac{1}{2} g_2(t) \int_\Omega |\nabla v_t^m|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} g_1' \square \nabla u_t^m + \frac{1}{2} g_2' \square \nabla v_t^m \\ & + g_1(t) \int_\Omega \nabla u_0^m \nabla u_{tt}^m dx + g_2(t) \int_\Omega \nabla v_0^m \nabla v_{tt}^m dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Considerando as hipóteses sobre g_i, de (2.22) segue que

$$\frac{d}{dt} E(t; u_t^m, v_t^m) \leq g_1(t) \int_\Omega \nabla u_0^m \nabla u_{tt}^m dx + g_2(t) \int_\Omega \nabla v_0^m \nabla v_{tt}^m dx.$$

Fazendo uso da Identidade de Green e da desigualdade de Young, e integrando a desigualdade resultante de 0 a t, obtemos

$$E(t;u_t^m,v_t^m) \leq CE(0;u_t^m(0),v_t^m(0)) + \int_0^t \Big(\frac{1}{2}\int_\Omega |u_{tt}^m|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_{tt}^m|^2\,dx\Big)ds. \tag{2.23}$$

Usando o Lema de Grönwall, obtemos

$$E(t;u_t^m,v_t^m) \leq C, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

onde C é uma constante independente de m. Logo,

$$\left|\begin{array}{l} (u_t^m) \text{ e } (v_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (u_{tt}^m) \text{ e } (v_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.25}$$

Das estimativas feitas em (2.16) e (2.25), podemos extrair subsequências $(u^m,v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ que denotaremos da mesma forma, satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} (u^m,v^m) \overset{\star}{\rightharpoonup} (u,v) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (u_t^m,v_t^m) \overset{\star}{\rightharpoonup} (u_t,v_t) \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \\ (u_{tt}^m,v_{tt}^m) \overset{\star}{\rightharpoonup} (u_{tt},v_{tt}) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array}\right. \tag{2.26}$$

Passagem ao Limite

Multiplicando as equações (2.10) e (2.11) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega u_{tt}^m w_j\theta(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla u^m\nabla w_j\theta(t)dxdt \\ -&\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_1(t-s)\nabla u^m(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt + \alpha\int_0^T\int_\Omega (u^m-v^m)w_j\theta(t)dxdt = 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega v_{tt}^m w_j\theta(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla v^m\nabla w_j\theta(t)dxdt \\ -&\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_2(t-s)\nabla v^m(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt - \alpha\int_0^T\int_\Omega (u^m-v^m)w_j\theta(t)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Levando em consideração as convergências de (2.26) podemos passar ao limite quando $m \to \infty$

em (2.27) e (2.28) de modo a obter

$$\int_0^T\int_\Omega u_{tt}w_j\theta(t)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla w_j\theta(t)dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt+\alpha\int_0^T\int_\Omega(u-v)w_j\theta(t)dt=0 \tag{2.29}$$

e

$$\int_0^T\int_\Omega v_{tt}w_j\theta(t)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla v\nabla w_j\theta(t)dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt-\alpha\int_0^T\int_\Omega(u-v)w_j\theta(t)dxdt=0. \tag{2.30}$$

Como as combinações lineares finitas dos $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são densas em $H_0^1(\Omega)$, então de (2.29) e (2.30) temos

$$\int_0^T\int_\Omega u_{tt}w_j\theta(t)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla u\nabla w_j\theta(t)dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt+\alpha\int_0^T(u-v)w_j\theta(t)dt=0 \tag{2.31}$$

e

$$\int_0^T\int_\Omega v_{tt}w_j\theta(t)dxdt+\int_0^T\int_\Omega \nabla v\nabla w_j\theta(t)dxdt$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s)ds\nabla w_j\theta(t)dxdt-\alpha\int_0^T\int_\Omega(u-v)w_j\theta(t)dxdt=0, \tag{2.32}$$

para todo $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$ e para todo $w\in H_0^1(\Omega)$.
De (2.31)-(2.32) e após alguns cálculos obtemos

$$u_{tt}-\Delta u+\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds+\alpha(u-v)=0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.33}$$

e

$$v_{tt}-\Delta v+\int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds-\alpha(u-v)=0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.34}$$

Pela regularidade dos problemas elípticos, temos que

$$u,v\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).$$

Como $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\hookrightarrow H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, vem que

$$u,v\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W^{1,\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))\cap W^{2,\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Os dados iniciais seguem imediatamente a partir das convergências obtidas.

Unicidade

Suponhamos que os pares (u^1,v^1) e (u^2,v^2) são duas soluções do sistema (2.1) - (2.4) com os mesmos dados iniciais. Então, $U=u^1-u^2$ e $V=v^1-v^2$ verifica o seguinte sistema com dados iniciais nulos

$$U_{tt}-\Delta U+\int_0^t g_1(t-s)\Delta U(s)ds+\alpha(U-V)=0 \quad \text{em } \Omega\times(0,T),$$
$$V_{tt}-\Delta V+\int_0^t g_2(t-s)\Delta V(s)ds-\alpha(U-V)=0 \quad \text{em } \Omega\times(0,T),$$
$$U=V=0 \quad \text{sobre } \Gamma\times(0,T),$$
$$(U_0(x),V_0(x))=(U_1(x),V_1(x))=0, \quad \text{em } \Omega.$$

Utilizando argumento analógo ao da primeira estimativa obtemos

$$E(t;U,V)\le 0.$$

De onde segue que

$$U=V=0.$$

Assim concluímos a demonstração do Teorema 2.1. □

Observação 2.1. Vimos no Teorema 2.1 que a solução está definida em um intervalo $[0,T]$. Essa solução, porém, pode ser estendida a todo intervalo $(0,\infty)$, para isso basta repetir o raciocínio feito e usar a Diagonal de Cantor.

CAPÍTULO

3

Comportamento Assintótico

Neste capítulo estudamos o comportamento assintótico da energia do sistema (2.1) - (2.4) quando o tempo tende ao infinito. Mais precisamente, mostramos o decaimento geral da solução associada a este sistema, ou seja, que a energia do sistema satisfaz

$$E(t) \leq Ke^{-\kappa \int_{t_0}^{t} \xi(s)ds}, \ \ \forall\, t \geq t_0,$$

onde $\xi(t) := min\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$ e K, κ são constantes positivas. Para isto, suponha que as hipóteses (G1)-(G2) sobre o nucleo g_i, $i = 1, 2$, são válidas e usando a técnica dos multiplicadores construiremos um funcional $\mathcal{L}(t)$ equivalente ao funcional de energia $E(t)$ que satisfaz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\kappa\, \xi(t)\mathcal{L}(t), \ \ \forall\, t \geq t_0.$$

Do capítulo anterior, Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\frac{1}{2}g_1(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx - \frac{1}{2}g_2(t)\int_{\Omega}|\nabla v|^2dx + \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u + \frac{1}{2}g_2' \square \nabla v \\ &\leq \frac{1}{2}g_1' \square \nabla u + \frac{1}{2}g_2' \square \nabla v \leq 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E(t) := E(t; u, v) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_1(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega}|v_t|^2dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g_2(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla v|^2dx \\ &\quad + \frac{1}{2}g_1 \square \nabla u + \frac{1}{2}g_2 \square \nabla v + \frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}|u - v|^2dx. \end{aligned}$$

3.1 Lemas Técnicos

Os lemas seguintes desempenham um papel importante na construção do funcional $\mathcal{L}(t)$. Para tanto, definimos os seguintes funcionais:

$$I(t) := \xi_1(t)\int_\Omega u_t u dx + \xi_2(t)\int_\Omega v_t v dx \tag{3.1}$$

e

$$\begin{aligned} J(t) \quad := \quad & -\xi_1(t)\int_\Omega u_t \int_0^t g_1(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ & -\xi_2(t)\int_\Omega v_t \int_0^t g_2(t-s)(v(t)-v(s))dsdx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Lema 3.1. *Para $v \in \mathcal{C}^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos*

$$\int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]ds\right)^2 dx \leq (1-\beta)C_p^2(g\Box\nabla v)(t).$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Demonstração. Escrevendo

$$\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]ds = \int_0^t \sqrt{g(t-s)}\sqrt{g(t-s)}[v(s)-v(t)]ds$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]ds \quad & \leq \quad \Big(\int_0^t g(t-s)ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \quad (1-\beta)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado, integrando sobre Ω e aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]ds\right)^2 dx \quad & \leq \quad (1-\beta)\int_\Omega\Big(\int_0^t g(t-s)[v(s)-v(t)]^2 ds\Big)dx \\ & \leq \quad (1-\beta)\cdot C_p^2\cdot g\Box\nabla v. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Consideremos os dados iniciais $\{(u_0,v_0),(u_1,v_1)\} \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$*

e as hipóteses (G1)-(G2), então a solução de (2.1) - (2.4) satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(t) \quad &\leq \quad \left[1+\frac{k_1^2C_p^2}{\beta_1}\right]\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{\beta_1}{4}\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{(1-\beta_1)}{2\beta_1}\xi_1(t)g_1\square\nabla u \\ &\quad + \left[1+\frac{k_2^2C_p^2}{\beta_2}\right]\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx - \frac{\beta_2}{4}\xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{(1-\beta_2)}{2\beta_2}\xi_2(t)g_2\square\nabla v \\ &\quad -\alpha\cdot\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)u\,dx + \alpha\cdot\xi_2(t)\int_\Omega (u-v)v\,dx.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Demonstração. Usando a equação (2.1) e (2.2), vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(t) \quad &= \quad \xi_1(t)\int_\Omega (u_{tt}u+|u_t|^2)dx + \xi_2(t)\int_\Omega (v_{tt}v+|v_t|^2)dx + \xi_1'(t)\int_\Omega u_tu\,dx + \xi_2'(t)\int_\Omega v_tv\,dx \\ &= \quad \xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \xi_1(t)\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)\,ds\,dx \\ &\quad +\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx - \xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \xi_2(t)\int_\Omega \nabla v(t)\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s)\,ds\,dx \\ &\quad -\alpha\cdot\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)u\,dx + \alpha\cdot\xi_2(t)\int_\Omega (u-v)v\,dx \\ &\quad +\xi_1'(t)\int_\Omega u_tu\,dx + \xi_2'(t)\int_\Omega v_tv\,dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Para o terceiro termo do lado direito de (3.4), temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)\,ds\,dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)\,|\nabla u(s)|\,ds\right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)(|\nabla u(s)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)ds\right)^2 dx.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Fazendo uso do Lema 3.1, da desigualdade de Young e do fato de que

$$\int_0^t g_1(s)ds \leq \int_0^\infty g_1(s)ds = 1-\beta_1,$$

para todo $\eta_1 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)dsdx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+\frac{1}{2}(1+\eta_1)\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-s)\,|\nabla u(t)|\,ds\right)^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_1}\Big)\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-s)\,|\nabla u(s)-\nabla u(t)|\,ds\right)^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(1+\eta_1)(1-\beta_1)^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_1}\Big)(1-\beta_1)g_1\,\square\,\nabla u. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Analogamente, para todo $\eta_2 > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v(t) \int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s)dsdx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{2}(1+\eta_2)(1-\beta_2)^2\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
&+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_2}\Big)(1-\beta_2)g_2\,\square\,\nabla v. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Combinando as estimativas (3.5) - (3.7), substituindo em (3.4) e usando

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_t u dx \leq \delta_1 C_p^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{4\delta_1}\int_\Omega |u_t|^2\,dx,\ \ \delta_1 > 0, \\
\int_\Omega v_t v dx \leq \delta_2 C_p^2 \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx + \frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega |v_t|^2\,dx,\ \ \delta_2 > 0,
\end{aligned}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) &\leq \left[1+\frac{1}{4\delta_1}\left|\frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)}\right|\right]\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_1}\Big)(1-\beta_1)\xi_1(t)g_1\,\square\,\nabla u \\
&-\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta_1)(1-\beta_1)^2 - 2\left|\frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)}\right|\delta_1 C_p^2\right]\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+\left[1+\frac{1}{4\delta_2}\left|\frac{\xi_2'(t)}{\xi_2(t)}\right|\right]\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_2}\Big)(1-\beta_2)\xi_2(t)g_2\,\square\,\nabla v \\
&-\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta_2)(1-\beta_2)^2 - 2\left|\frac{\xi_2'(t)}{\xi_2(t)}\right|\delta_2 C_p^2\right]\xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
&-\alpha\cdot\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)udx + \alpha\cdot\xi_2(t)\int_\Omega (u-v)vdx.
\end{aligned}$$

Desde que $\left|\frac{\xi_i'(t)}{\xi_i(t)}\right| \leq k_i$, $i = 1,2$, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(t) \leq & \left[1+\frac{1}{4\delta_1}k_1\right]\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_1}\Big)(1-\beta_1)\xi_1(t)g_1\Box\nabla u \\
& -\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta_1)(1-\beta_1)^2-2k_1\delta_1 C_p^2\right]\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& +\left[1+\frac{1}{4\delta_2}k_2\right]\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{\eta_2}\Big)(1-\beta_2)\xi_2(t)g_2\Box\nabla v \\
& -\frac{1}{2}\left[1-(1+\eta_2)(1-\beta_2)^2-2k_2\delta_2 C_p^2\right]\xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
& -\alpha\cdot\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)u\,dx + \alpha\cdot\xi_2(t)\int_\Omega (u-v)v\,dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\eta_i = \frac{\beta_i}{1-\beta_i}$ e $\delta_i = \frac{\beta_i}{4k_iC_p^2}$, $i = 1,2$, a estimativa (3.3) é estabelecida. $\Box$

Lema 3.3. *Sob as condições do Lema 3.2, o funcional*

$$J_1(t) = -\xi_1(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]\,ds\,dx$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_1(t) \leq & \ \delta\left[1+2(1-\beta_1)^2\right]\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& +(1-\beta_1)\left[2\delta+\frac{1}{2\delta}+\frac{(\alpha+k_1)}{4\delta}C_p^2\right]\xi_1(t)g_1\Box\nabla u \\
& +\left[\delta(1+k_1)-\int_0^t g_1(s)\,ds\right]\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
& +\alpha\delta\cdot\xi_1(t)\int_\Omega |u-v|^2\,dx - \frac{g_1(0)}{4\delta}C_p^2\xi_1(t)g_1'\Box\nabla u,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\delta > 0$ é uma pequena constante.

Demonstração. Diferenciando o funcional $J_1(t)$ com relação ao tempo e usando a equação

(2.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_1(t) &= -\xi_1(t)\int_\Omega u_{tt}\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \\
&\quad -\xi_1(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g_1'(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx-\xi_1(t)\int_0^t g_1(s)ds\int_\Omega |u_t|\,dx \\
&\quad -\xi_1'(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \\
&= \xi_1(t)\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]dsdx \\
&\quad -\xi_1(t)\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]ds\right)dx \\
&\quad +\alpha\cdot\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \qquad (3.9)\\
&\quad -\xi_1(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g_1'(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \\
&\quad -\xi_1'(t)\int_\Omega u_t\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx-\xi_1(t)\int_0^t g_1(s)ds\int_\Omega |u_t|\,dx.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma que (3.4), estimamos os termos do lado direito da equação (3.9). Assim, fazendo uso da desigualdade de Young e do Lema 3.1, para todo $\delta > 0$, obtemos para o primeiro termo

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]dsdx &\le \delta\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&\quad +\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]ds\right|^2 dx \\
&\le \delta\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx+\frac{(1-\beta_1)}{4\delta}g_1\,\square\,\nabla u. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Usando novamente a desigualdade de Young e o Lema 3.1, e considerando o fato de que

$$
\int_0^t g_1(s)ds \le \int_0^\infty g_1(s)ds = 1-\beta_1,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]ds\right)dx \\
\leq\ & \delta\int_\Omega \left|\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s)ds\right|^2 dx+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g_1(t-s)[\nabla u(t)-\nabla u(s)]ds\right|^2 dx \\
\leq\ & \delta\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)(|\nabla u(s)-\nabla u(t)|+|\nabla u(t)|)ds\right)^2 dx \\
& +\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|\,ds\right)^2 dx \\
\leq\ & 2\delta(1-\beta_1)^2\int_\Omega|\nabla u|^2 dx+\left(2\delta+\frac{1}{4\delta}\right)(1-\beta_1)g_1\,\square\,\nabla u. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Para o terceiro termo, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega(u-v)\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \ \leq\ & \delta\int_\Omega|u-v|^2 dx \\
& +\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]ds\right|^2 dx \\
\leq\ & \delta\int_\Omega|u-v|^2 dx+\frac{(1-\beta_1)}{4\delta}C_p^2 g_1\,\square\,\nabla u. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Quanto ao quarto e quinto termos, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_t\int_0^t g_1'(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \ \leq\ & \delta\int_\Omega|u_t|^2 dx+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g_1'(t-s)[u(t)-u(s)]ds\right|^2 dx \\
\leq\ & \delta\int_\Omega|u_t|^2 dx-\frac{g_1(0)}{4\delta}C_p^2 g_1'\,\square\,\nabla u \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u_t\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]dsdx \ \leq\ & \delta\int_\Omega|u_t|^2 dx+\frac{1}{4\delta}\int_\Omega\left|\int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]ds\right|^2 dx \\
\leq\ & \delta\int_\Omega|u_t|^2 dx+\frac{(1-\beta_1)}{4\delta}C_p^2 g_1\,\square\,\nabla u. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Combinando as estimativas (3.10)-(3.14) e substituindo em (3.9), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_1(t) \ \leq \ & \delta\left[1+2(1-\beta_1)^2\right]\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&+(1-\beta_1)\left[2\delta+\frac{1}{2\delta}+\frac{\alpha C_p^2}{4\delta}+\left|\frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)}\right|\frac{C_p^2}{4\delta}\right]\xi_1(t)g_1\square\nabla u \\
&+\left[\delta+\delta\left|\frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)}\right|-\int_0^t g_1(s)ds\right]\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
&+\alpha\delta\cdot\xi_1(t)\int_\Omega |u-v|^2\,dx-\frac{g_1(0)}{4\delta}C_p^2\xi_1(t)g_1'\square\nabla u.
\end{aligned}$$

Desde que $\left|\frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)}\right| \leq k_1$, a estimativa (3.8) é estabelecida. □

Lema 3.4. *Sob as condições do Lema 3.2, o funcional*

$$J_2(t) \ = \ -\xi_2(t)\int_\Omega v_t\int_0^t g_2(t-s)[v(t)-v(s)]dsdx$$

satisfaz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_2(t) \ \leq \ & \delta\left[1+2(1-\beta_2)^2\right]\xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
&+(1-\beta_2)\left[2\delta+\frac{1}{2\delta}+\frac{(\alpha+k_2)}{4\delta}C_p^2\right]\xi_2(t)g_2\square\nabla v \qquad (3.15) \\
&+\left[\delta(1+k_2)-\int_0^t g_2(s)ds\right]\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx \\
&-\alpha\delta\cdot\xi_2(t)\int_\Omega |u-v|^2\,dx-\frac{g_2(0)}{4\delta}C_p^2\xi_2(t)g_2'\square\nabla v,
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$ *é uma pequena constante.*

Demonstração. A prova deste lema é semelhante a prova do Lema 3.3, por este motivo, vamos omiti-la aqui. □

Consideremos então o funcional de Lyapunov definido por

$$\mathcal{L}(t) := N_1E(t)+I(t)+N_2J(t) \qquad (3.16)$$

onde $N_1, N_2 > 0$ são constantes a serem escolhidas adequadamente.

Lema 3.5. *O funcional de Lyapunov satisfaz as seguintes desigualdades*

$$\varepsilon_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \varepsilon_1 E(t), \tag{3.17}$$

com ε_0 *e* ε_1 *constantes positivas.*

Demonstração. Usando as desigualdades de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz e Young, temos

$$|I(t)| \leq \frac{\xi_1(t)}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{\xi_1(t)}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx + \frac{\xi_2(t)}{2}\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{\xi_2(t)}{2}\int_\Omega |v|^2\,dx.$$

Agora, aplicando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$|I(t)| \leq \frac{M_1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{M_1C_p^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{M_2}{2}\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{M_2C_p^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx. \tag{3.18}$$

Novamente usando as desigualdades de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz e Young, temos

$$\begin{aligned} |N_2J(t)| \quad \leq \quad & \frac{N_2\xi_1(t)}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{N_2\xi_1(t)}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_1(t-s)\,|u(t)-u(s)|\,ds\right)^2 dx \\ + \quad & \frac{N_2\xi_2(t)}{2}\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{N_2\xi_2(t)}{2}\int_\Omega\left(\int_0^t g_2(t-s)\,|v(t)-v(s)|\,ds\right)^2 dx. \end{aligned}$$

Fazendo uso do Lema 3.1, segue

$$\begin{aligned} |N_2J(t)| \quad \leq \quad & \frac{N_2M_1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{N_2M_1}{2}(1-\beta_1)C_p^2 g_1\,\square\,\nabla u \\ & + \frac{N_2M_2}{2}\int_\Omega |v_t|^2\,dx + \frac{N_2M_2}{2}(1-\beta_2)C_p^2 g_2\,\square\,\nabla v. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Combinando as estimativas (3.18) e (3.19), obtemos $|I(t)+N_2J(t)| \leq KE(t)$. Daí segue, $N_1E(t)+I(t)+N_2J(t) \leq \Big(N_1+K\Big)E(t)$. Portanto,

$$\mathcal{L}(t) \leq \varepsilon_1 E(t).$$

Tomando N_1 de modo que $N_1 - K > 0$, temos $\Big(N_1-K\Big)E(t) \leq N_1E(t)+I(t)+N_2J(t)$ e assim

$$\varepsilon_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t).$$

□

3.2 Decaimento Geral

Nesta seção mostramos o decaimento geral da solução para o sistema acoplado de equações de onda com memória (2.1)-(2.4). Neste sentido, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Considere os dados iniciais* $\{(u_0,v_0),(u_1,v_1)\} \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$. *Suponha que o núcleo* $g_i, i=1,2$ *satisfaz as hipóteses (G1) e (G2). Então, para cada* $t_0>0$, *existem constantes positivas* K *e* κ *tal que a solução do sistema (2.1) - (2.4) satisfaz*

$$E(t,u,v) \leq Ke^{-\kappa\int_{t_0}^{t}\xi(s)ds}, \ \forall\, t \geq t_0, \tag{3.20}$$

onde $\xi(t) := min\{\xi_1(t),\xi_2(t)\}$.

Demonstração. Desde que, g_i é positiva, contínua e $g_i(0)>0$, com $i=1,2$, então para todo $t \geq t_0 > 0$, temos

$$\int_0^t g_i(s)ds \geq \int_0^{t_0} g_i(s)ds = g_0 > 0, \ \forall\, t \geq t_0. \tag{3.21}$$

Diferenciando o funcional $\mathcal{L}(t)$ com relação ao tempo, usando o Lema 2.2, as estimativas (3.3), (3.8), (3.15) e a condição (3.21), obtemos para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq\; & -\left\{N_2[g_0-\delta(1+k_1)] - \left[1+\frac{k_1^2C_p^2}{\beta_1}\right]\right\}\xi_1(t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx \\
& -\left\{N_2[g_0-\delta(1+k_2)] - \left[1+\frac{k_2^2C_p^2}{\beta_2}\right]\right\}\xi_2(t)\int_\Omega |v_t|^2\,dx \\
& -\left\{\frac{\beta_1}{4} - N_2\delta[1+2(1-\beta_1)^2]\right\}\xi_1(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& -\left\{\frac{\beta_2}{4} - N_2\delta[1+2(1-\beta_2)^2]\right\}\xi_2(t)\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \\
& +\left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_1(0)}{4\delta}C_p^2 M_1\right] g_1' \square \nabla u + \left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_2(0)}{4\delta}C_p^2 M_2\right] g_2' \square \nabla v \\
& +\left\{\frac{(1-\beta_1)}{2\beta_1} + N_2(1-\beta_1)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_1)}{4\delta}C_p^2\right]\right\}\xi_1(t) g_1 \square \nabla u \\
& +\left\{\frac{(1-\beta_2)}{2\beta_2} + N_2(1-\beta_2)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_2)}{4\delta}C_p^2\right]\right\}\xi_2(t) g_2 \square \nabla v \\
& -\alpha\xi_1(t)\int_\Omega (u-v)u\,dx + \alpha\xi_2(t)\int_\Omega (u-v)v\,dx \\
& +\alpha\delta N_2\xi_1(t)\int_\Omega |u-v|^2\,dx + \alpha\delta N_2\xi_2(t)\int_\Omega |u-v|^2\,dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Tomando primeiro $N_2 > 0$ suficientemente grande e $\delta > 0$ tão pequeno, temos que

$$N_2[g_0 - \delta(1+k_1)] - \left[1 + \frac{k_1^2 C_p^2}{\beta_1}\right] > 0, \qquad N_2[g_0 - \delta(1+k_2)] - \left[1 + \frac{k_2^2 C_p^2}{\beta_2}\right] > 0,$$
$$\frac{\beta_1}{4} - N_2\delta[1 + 2(1-\beta_1)^2] > 0, \qquad \frac{\beta_2}{4} - N_2\delta[1 + 2(1-\beta_2)^2] > 0,$$

e então escolhendo $N_1 > N_2$ suficientemente grande tal que (3.17) se mantém válida temos

$$b_1 := \left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_1(0)}{4\delta} C_p^2 M_1\right] - \left\{\frac{(1-\beta_1)}{2\beta_1} + N_2(1-\beta_1)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_1)}{4\delta} C_p^2\right]\right\} > 0,$$
$$b_2 := \left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_2(0)}{4\delta} C_p^2 M_2\right] - \left\{\frac{(1-\beta_2)}{2\beta_2} + N_2(1-\beta_2)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_2)}{4\delta} C_p^2\right]\right\} > 0.$$

Fazendo uso de (G2), obtemos

$$\begin{aligned} &\left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_1(0)}{4\delta} C_p^2 M_1\right] g_1' \Box \nabla u \\ &+ \left\{\frac{(1-\beta_1)}{2\beta_1} + N_2(1-\beta_1)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_1)}{4\delta} C_p^2\right]\right\} \xi_1(t) g_1 \Box \nabla u \le -b_1 \xi_1(t) g_1 \Box \nabla u \end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned} &\left[\frac{N_1}{2} - \frac{N_2 g_2(0)}{4\delta} C_p^2 M_2\right] g_2' \Box \nabla v \\ &+ \left\{\frac{(1-\beta_2)}{2\beta_2} + N_2(1-\beta_2)\left[2\delta + \frac{1}{2\delta} + \frac{(\alpha+k_2)}{4\delta} C_p^2\right]\right\} \xi_2(t) g_1 \Box \nabla v \le -b_2 \xi_2(t) g_2 \Box \nabla v. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando o Lema 3.5 e combinando (3.22)-(3.24) temos, para alguma constante $\lambda > 0$,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \le -\lambda \xi(t) E(t) \le -\frac{\lambda}{\varepsilon_1} \xi(t) \mathcal{L}(t), \ \forall t \ge t_0,$$

onde $\xi(t) := \min\{\xi_1(t), \xi_2(t)\}$.

Integrando desigualdade acima em (t_0, t), encontramos

$$\mathcal{L}(t) \le \mathcal{L}(t_0) e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\int_{t_0}^t \xi(s)ds}, \ \forall t \ge t_0.$$

Da desigualdade acima e do Lema 3.5, temos

$$E(t) \le \frac{1}{\varepsilon_0}\mathcal{L}(t_0) e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\int_{t_0}^t \xi(s)ds} \le \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} E(t_0) e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}\int_{t_0}^t \xi(s)ds} = K e^{-\kappa \int_{t_0}^t \xi(s)ds}, \ \forall t \ge t_0, \tag{3.25}$$

o que completa a prova. $\Box$

Observação 3.1. A estimativa (3.25) é verdadeira para $t \in [0, t_0]$ em virtude da limitação e da continuidade de $E(t)$ e $\xi(t)$.

Observação 3.2. Este resultado generaliza e melhora os resultados de [25]. Note que o nosso resultado é provado, sem impor quaisquer condições sobre $g_1''(t)$ e $g_2''(t)$. Precisamos apenas que g_1 e g_2 sejam diferenciáveis e satisfaçam (G1)-(G2).

Exemplo 3.1. Sejam

$$g_1(t) = a_1(t+1)^{-\rho_1} \quad \text{e} \quad g_2(t) = a_2(t+1)^{-\rho_2},$$

com $a_i, b_i, \rho_i > 0 \ \ (i = 1,2)$. Então é claro que (G1) é válida para $\xi_i(t) = \rho_i(t+1)^{-1} \ \ (i = 1,2)$. Consequentemente, aplicando (3.20), obtemos o seguinte decaimento polinomial:

$$E(t) \leq K(t+1)^{-\kappa\,\rho_0}$$

onde $\rho_0 = \min\,\{\rho_1, \rho_2\}$.

Exemplo 3.2. Se

$$g_1(t) = a_1 e^{-b_1(t+1)^{\rho_1}} \quad \text{e} \quad g_2(t) = a_2 e^{-b_2(t+1)^{\rho_2}},$$

com $a_i, b_i, \rho_i > 0 \ \ (i = 1,2)$. Então para $\xi_i(t) = b_i\,\rho_i(t+1)^{\min\{0,\rho_i-1\}} \ \ (i = 1,2)$ a desigualdade (3.20) nos fornece o decaimento exponencial:

$$E(t) \leq K e^{-\kappa\, b_0 (t+1)^{\min\{1,\rho_1,\rho_2\}}},$$

onde

$$b_0 = \begin{cases} b_1 & \text{se } \rho_1 < \rho_2 \\ b_2 & \text{se } \rho_1 > \rho_2. \\ \min\{b_1, b_2\} & \text{se } \rho_1 = \rho_2 \end{cases} \tag{3.26}$$

Exemplo 3.3. Se

$$g_1(t) = a_1 e^{-b_1[ln(t+1)]^{\rho_1}} \quad \text{e} \quad g_2(t) = a_2 e^{-b_2[ln(t+1)]^{\rho_2}},$$

com $a_i, b_i > 0, \rho_i > 1 \ \ (i = 1,2)$. Então para

$$\xi_i(t) = \frac{b_i\,\rho_i[ln(t+1)]^{\rho_i-1}}{t+1} \quad (i = 1,2)$$

temos pela desigualdade (3.20)

$$E(t) \leq Ke^{-\kappa\, b_0\, [ln(t+1)]^{\min\{\rho_1,\rho_2\}}},$$

onde b_0 é dado como em (3.26).

Exemplo 3.4. Se

$$g_1(t) = \frac{a_1}{(t+2)^{\rho_1 [ln(t+2)]^{b_1}}} \quad \text{e} \quad g_2(t) = \frac{a_2}{(t+2)^{\rho_2 [ln(t+2)]^{b_2}}},$$

onde

$$a_i > 0 \ \text{e} \ \begin{cases} \rho_i > 0 \quad \text{e} \quad b_i \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \rho_i = 1 \quad \text{e} \quad b_i > 1 \end{cases} \qquad (i = 1,2).$$

Então para

$$\xi_i(t) = \frac{b_i\, \rho_i [ln(t+1)]^{\rho_i - 1}}{t+1} \quad (i = 1,2)$$

obtemos de (3.20)

$$E(t) \leq \frac{K}{\left[(t+2)^{\min\{\rho_1,\rho_2\}} [ln(t+2)]^{b_0}\right]^{\kappa}},$$

onde b_0 é dado como em (3.26).

Conclusão

Neste trabalho consideramos um sistema acoplado de equações de onda com memória que descreve a interação entre dois campos escalares. Diante do que foi exposto, concluímos que para certa classe de funções relaxamento e certos dados iniciais, a solução de energia decai com taxa semelhante ao decaimento das funções relaxamento, que não é necessariamente um decaimento da forma polinomial ou exponencial. Portanto, nosso resultado permite uma maior classe de funções relaxamento e melhora o resultado de Santos [25] em que apenas os decaimentos exponencial e polinomial foram considerados. O resultado obtido neste trabalho pode encontrar algumas aplicações potenciais na teoria de viscoelasticidade linear.

Uma sugestão para um possível trabalho futuro seria realizar a análise numérica do problema aqui proposto, utilizando os métodos de elementos finitos e/ou diferenças finitas, e comparar os resultados numéricos obtidos por estes dois métodos com o nosso.

Outra sugestão seria a de aplicar o método utilizado neste trabalho ao seguinte sistema acoplado não-linear de duas equações da onda com condição de memória na fronteira:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - \beta_1 \Delta u + f(u-v) &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty),\\
v_{tt} - \beta_2 \Delta v - f(u-v) &= 0 \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty),\\
u = v &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \times (0,\infty),\\
u + \int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty),\\
v + \int_0^t g_2(t-s)\frac{\partial v}{\partial \nu}(s)ds &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty),\\
(u(x,0),v(x,0)) = (u_0(x),v_0(x)), &\qquad (u_t(x,0),v_t(x,0)) = (u_1(x),v_1(x)) \quad \text{em } \Omega,
\end{aligned}$$

onde é Ω é um domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ com $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ e β_1, β_2 são constantes positivas.

Referências

[1] Aassila, M. *A Note on the Boundary Stabilization of a Compactly Coupled System of Wave Equations*. Applied Mathematics Letters, Vol. 12, No. 3, 1999, p. 19-24.

[2] Aassila, M. *Strong Asymptotic Stability of a Compactly Coupled System of Wave Equations*. Applied Mathematics Letters, Vol. 14, No. 3, 2001, p. 285-290.

[3] Adams, R. A; Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, 2nd ed., 2003.

[4] Alabau, F. *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Vol. 328, No. 11, 1999, p. 1015-1020.

[5] Alabau, F.; Cannarsa, P.; Komornik, V. *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*. Journal of Evolution Equations, Vol. 2, No. 2, 2002, p. 127-150.

[6] Beyrath, A. *Stabilisation indirecte interne par un feedback localement distribué de systèmes d'équations couplées*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Vol. 333, No. 5, 2001, p. 451-456.

[7] Beyrath, A. *Indirect linear locally distributed damping of coupled systems*. Bol. Soc. Paran. Mat., Vol. 22, No. 2, 2004, p. 17-34.

[8] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext Series, Springer, New York, 2010.

[9] Dieudonné, J. *History of Functional Analysis*. Notas de Matemática, No. 77, North-Holland Mathematics Studies, No. 49, North-Holland Publishing Company, 1981.

[10] Komornik, V.; Rao, B. *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations*. Asymptotic Analysis, Vol. 14, 1997, p. 339-359.

[11] Komornik, V.; Loreti,P. *Ingham-type theorems for vector-valued functions and observability of coupled linear systems*. SIAM J. Control Optim, Vol. 37, No. 2, 1999, p. 461-485.

[12] Lions, J.L. *Quelques Mèthodes de resolution de problèmes aux limites non lineaires*. Dunod Gauthiers Villars, Paris, 1969.

[13] Liu, W. *Uniform decay of solutions for a quasilinear system of viscoelastic equations*. Nonlinear Analysis, Vol. 71, No. 5-6, 2009, p. 2257-2267.

[14] Liu, W. *General Decay of Solutions of a Nonlinear System of Viscoelastic Equations*. Acta Appl. Math., Vol. 110, No. 1, 2010, p. 153-165.

[15] Matos, M. P. *Integral de Bochner e Espaços Lp(0,T;X)*. Disponível em: <http://mpmatos.sites.uol.com.br/Analise/medida.pdf>. Acesso em: 16 de Março de 2011.

[16] Medeiros, L. A.; Miranda, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos No. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[17] Medeiros, L.A.; Miranda, M. M. *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/ medeiros/>. Acesso em: 17 de Fevereiro de 2010.

[18] Messaoudi, S. A. *General Decay of Solutions of a Viscoelastic Equation*. J. Math. Anal. Appl., Vol. 341, No. 2, 2008, p. 1457-1467.

[19] Messaoudi, S. A.; Tatar, N-e. *Uniform stabilization of solutions of a nonlinear system of viscoelastic equations*. Applicable Analysis, Vol. 87, No. 3, 2008, p. 247-263.

[20] Miranda, M. M. *Análise Espectral em Espaços de Hilbert*. Textos de Métodos Matemáticos No. 28, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[21] Najafi, M. *Study of exponential stability of coupled wave systems via stabilizer*. Int. J. Math. Math. Sci., Vol. 28, No. 8, 2001, p. 479-491.

[22] Ponce, A. C. *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: <http://perso.uclouvain.be/augusto.ponce/links/15.pdf>. Acesso em: 04 de Abril de 2011.

[23] Raposo, C. A.; Bastos, W. D. *Energy Decay for the Solutions of a Coupled Wave System*. TEMA Tend. Mat. Apl. Comput, Vol. 10, No. 2, 2009, p. 203-209.

[24] Said-Houari, B. *Exponential growth of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms*. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP), Vol. 62, No. 1, 2010, p. 115-133.

[25] Santos, M. L. *Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory*. Electron. J. Diff. Equations, Vol. 2002, No. 38, 2002, p. 1-17.

[26] Soufyane, A. *Uniform stability of displacement coupled second-order equations*. Electron. J. Diff. Equations, Vol. 2001, No. 25, 2001, p. 1-10.

[27] The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>. Acesso em: 30 de Março de 2011.