UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff.

João Rodrigues dos Santos Júnior

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Março de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Rodrigues dos Santos Júnior

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 15 de Março de 2011.

Conceito:______________

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - UFPA

Resumo

Neste trabalho investigamos a multiplicidade de soluções não-triviais para a seguinte classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff:

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u &= \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{p-2} u, \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N = 1, 2$ ou 3 e M é uma função contínua.

Palavras-chaves: Teoria de gênero, problema não-local, equação de Kirchhoff, crescimento crítico.

Abstract

In this work we investigate the multiplicity of nontrivial solutions for the follow class of nonlocal problems of the Kirchhoff type:

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u &= \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{p-2} u, \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \partial\Omega \end{cases}$$

where $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $N = 1, 2$ or 3 and M is a continuous function.

Key-words: Genus theory, nonlocal problem, Kirchhoff equation, critical growth.

Agradecimentos

Ao Senhor Jesus, pela misericórdia e graça que tem me concedido, pelo amor e proteção. Por confortar meu coração com a promessa de sua volta e perdoar meus pecados a cada dia.

Aos meus pais, Lourdes e Miguel, por dedicarem os melhores dias de suas vidas aos seus filhos e por estarem sempre presentes em todos os momentos de minha existência. Compartilho com vocês esta vitória.

À minha esposa, Jéssica, por ser companheira e amiga, por compartilhar os sonhos, as tristezas e as alegrias.

À minha irmã mais nova, Juliana, cuja existência me motiva a dar o exemplo.

Ao meu orientador e amigo, professor Giovany, pela determinação e disposição em orientar este trabalho, atento a cada seminário. Por me ensinar a fazer um trabalho de pesquisa, por direcionar meus estudos com sua experiência, pela amizade, pela humildade e por ser um matemático e educador comprometido.

Aos professores do PPGME, pelos cursos ministrados e pelas dúvidas tiradas.

Aos meus colegas de estudo, cujos nomes não me atrevo a citar, correndo o risco de esquecer algum. Pela amizade e convivência.

Aos professores Claudianor Alves, João Pablo e Rúbia Nascimento por aceitarem avaliar este trabalho.

À FAPESPA, pelo apoio financeiro.

A todos que contribuiram direta ou indiretamente para a realização desta dissertação, deixo aqui registrados os meus agradecimentos.

Dedicatória

Aos meus pais Miguel e Lourdes e à minha querida esposa Jéssica, com amor.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho usaremos a Teoria de gênero para mostrar um resultado de multiplicidade de soluções não-triviais para a seguinte classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff

$$(P_\alpha)\left\{\begin{array}{rcll} -M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u & = & \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{p-2} u, & \Omega \\ u & = & 0 & , \partial\Omega \end{array}\right.$$

onde $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $M : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua. Observamos que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ quando $N \geq 3$ e $2^* = \infty$ quando $N = 1$ ou $N = 2$.

No que segue, trataremos o problema acima para $N = 3$. Nesse caso teremos $2^* = 6$, os casos $N = 1$ e $N = 2$ resultam de adaptações padrões.

O problema (P_α) é dito não-local devido a presença do termo $M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)$ o qual é o único termo da equação em (P_α) que não está aplicado em algum ponto de Ω. Este fenômeno acarreta algumas dificuldades matemáticas as quais tornam interessante o estudo desta classe de problemas.

Problemas não-locais do tipo Kirchhoff modelam certos fenômenos, como por exemplo, no caso em que

$$M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right) = m_0 + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right),$$

o operador $-\left[m_0 + b\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right]\Delta u$ aparece na equação hiperbólica

$$
(\mathcal{K}) \begin{cases} u_{tt} - \left[m_0 + b \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right) \right] \Delta u = f(x,u) \text{ in } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}
$$

a qual é uma generalização da equação

$$
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0
$$

introduzida por Kirchhoff em 1883, ver [20].

Esta equação é uma extensão da equação clássica da corda vibrante, proposta por D'Alembert, pois descreve a vibração de uma corda elástica levando-se em consideração a mudança no comprimento da mesma durante o movimento. Onde, L é o comprimento da corda, h é a área da secção transversal da corda, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial.

O problema em $(\mathcal{K})$ passou a chamar a atenção dos pesquisadores principalmente após um trabalho pioneiro do matemático francês J.L.Lions [22], apresentado em um simpósio internacional de matemática ocorrido no Rio de Janeiro em 1977. Nesse trabalho de Lions, pela primeira vez, foram utilizados argumentos de análise funcional não-linear para atacar problemas não-locais do tipo Kirchhoff.

O problema (P_α) apresenta algumas características que dificultam o processo de solução do mesmo, entre elas, ressaltamos a falta de compacidade que ocorre no caso em que a não-linearidade tem crescimento crítico. Neste caso, a condição Palais-Smale não é válida. Além disso, como já mencionamos, o fato de estarmos trabalhando com o operador $-M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u$ nos traz algumas dificuldades, pois o mesmo é não-homogêneo e sua presença nos obriga a dividir o estudo do problema nos casos $2 < p < 4$, $p = 4$, $4 < p < 6$ e $p = 6$, o que não ocorre na versão local.

Recentemente, surgiram diversos trabalhos sobre a equação de Kirchhoff usando método variacional, ver por exemplo [1], [2], [4],[8],[9],[11],[12],[14], [17],[18],[24],[26],[27],[28],[29],[30],[33] e [34].

Resultados de multiplicidade para a equação de Kirchhoff com crescimento subcrítico podem ser encontrados em [11],[14],[17],[18] e [33]. Em relação ao problema de Kirchhoff com crescimento crítico, existem somente resultados de existência, como pode ser visto em [1],[12] e suas referências.

Salientamos que nossos resultados são novos e complementam os artigos [1], [11],[14],[17],[18] e [33], visto que apresentamos um resultado de multiplicidade para o problema de Kirchhoff com crescimento crítico.

Nesta dissertação, usaremos um argumento que já aparece em [5], onde o caso local é tratado. Vale apena mencionar que, uma vez que estamos lidando com o caso não-local, tivemos que efetuar novos cálculos e estabelecer algumas estimativas que não aparecem em [5].

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

No capítulo 1, estudaremos a Teoria de Gênero , cuja idéia central é obter valores críticos de um dado funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ como valores minimax de ϕ sobre classes adequadas de subconjuntos $\mathcal{A}$ de X. Veremos que quando um funcional é par e assume máximo negativo sobre determinados subconjuntos simétricos de X, então é comum ocorrer que o funcional ϕ possua muitos pontos críticos. Em verdade, isso é o que afirma um Teorema devido a Clarke [10], o qual provaremos nesse capítulo e que será utilizado na prova de alguns dos nossos principais resultados. Ainda no capítulo 1, faremos uma aplicação do Teorema de Clarke ao problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave. Resultados de multiplicidade para o problema (P) foram obtidos originalmente por Ambrosseti-Rabinowitz em [3], onde os autores utilizaram a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha. No entanto, para provar que o problema (P) possui infinitas soluções utilizaremos as idéias que aparecem em [13], onde se trabalha com um funcional auxiliar apropriado o qual verifica as hipóteses do Teorema de Clarke e cujo conjunto dos pontos críticos está em correspondência biunívoca com o conjunto dos pontos críticos do funcional energia associado ao problema (P).

No capítulo 2, abordaremos o problema subcrítico

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u = \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{p-2} u, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p < 6$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave e M é uma função contínua.

Devido a presença do operador não-local $-M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u$ o problema acima apresenta certos fenômenos que não ocorrem no caso local, tais particularidades nos obrigaram a dividir o estudo do problema subcrítico acima em três casos, a saber, $2 < p < 4$, $p = 4$ e $4 < p < 6$.

No capítulo 3, abordaremos o problema crítico

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx\right)\Delta u = \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^{4} u, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q < 2$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave e M é uma função contínua.

Neste caso, não será mais possível utilizarmos o Teorema de Clarke como no caso subcrítico, pois devido a falta de compacidade o funcional associado ao problema não verifica a condição Palais-Smale. Para contornar essa dificuldade seguimos as idéias de J.G. Azorero e I.P. Alonso [5], os quais provam um Lema de multiplicidade para um funcional auxiliar cujos pontos críticos obtidos são também pontos críticos do funcional associado ao problema.

No apêndice A, estudamos a diferenciabilidade dos funcionais envolvidos.

No Apêndice B, apresentaremos alguns resultados básicos que foram utilizados no decorrer desta dissertação e que são importantes para a plena compreensão da mesma.

Notações

$\langle ., . \rangle$:= par de dualidade

$\int f := \int_\Omega f(x)dx$

$\|.\| := \|.\|_{H_0^1(\Omega)}$

$| \, . \, |_p := \|.\|_{L^p(\Omega)}$

$B(u, \delta)$:= bola aberta de centro u e raio δ

S^{k-1} := esfera unitária de $\mathbb{R}^k$

$intU$:= interior do conjunto U

$| \, \Omega \, |$:= medida de Lebesgue do conjunto Ω

$\gamma(A)$:= gênero de Krasnoselskii do conjunto A

Capítulo 1

Pontos críticos na presença de simetrias

Neste capítulo faremos um estudo da Teoria de gênero e suas principais propriedades, para maiores detalhes recomendamos as referências [13] e [31].

1.1 A teoria de gênero de Krasnoselskii

Definição 1.1.1 *(grupo)*

Um grupo é um conjunto não-vazio S munido de uma operação binária

$$\circ : S \times S \longrightarrow S$$

a qual possui as seguintes propriedades:

(G_1) $\circ$ *é associativa;*

(G_2) S *possui um elemento identidade, isto é,*

$$e \circ a = a \circ e = a, \quad \forall a \in S$$

(G_3) *Para cada $a \in S$ existe um elemento inverso a^{-1}, ou seja,*

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

Exemplo 1.1.1 *O conjunto $Z_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ munido da operação de adição*

$$+: Z_2 \times Z_2 \longrightarrow Z_2,$$

definida por

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$$

é um grupo, no qual $\overline{0}$ *é o elemento identidade.*

Definição 1.1.2 *(grupo topológico)*

Quando o grupo $(G, \circ)$ *está munido de uma topologia que torna contínuas as aplicações*

$$\begin{aligned} \circ : G \times G &\longrightarrow G \\ (a,b) &\longmapsto a \circ b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \zeta : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

dizemos que $(G, \circ)$ *é um grupo topológico.*

Exemplo 1.1.2 $(Z_2, +)$ *munido da topologia discreta* $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{\overline{0}\}, \{\overline{1}\}, Z_2\}$ *é um grupo topológico compacto.*

Definição 1.1.3 *(representação isométrica)*

Sejam X *um espaço de Banach e* $(G, \circ)$ *um grupo topológico compacto. Chamamos de representação isométrica de* G *em* X *ao conjunto*

$$\{T(g) : g \in G\},$$

onde $T(g) : X \longrightarrow X$ *é uma isometria satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $T(g_1 \circ g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2); \quad \forall g_1, g_2 \in G;$

(ii) $T(e) = Id$;

(iii) A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, u) & \longmapsto & \varphi(g, u) = T(g)u \end{array}$$

é continua.

Onde o símbolo $\cdot$ indica a operação de composição de funções.

Observação 1.1.1 *Uma consequência dos ítens (i) e (ii) na definição acima é que $T(g^{-1}) = [T(g)]^{-1}$.*

Exemplo 1.1.3 *Seja X um espaço de Banach. Defina $T(\overline{0}) = Id$ e $T(\overline{1}) = -Id$. O conjunto $\{Id, -Id\}$ é uma representação isométrica de Z_2 em X.*

Definição 1.1.4 *(conjunto invariante)*

Chamamos de órbita de um elemento $u \in X$ ao conjunto

$$O(u) = \{T(g)u : g \in G\}.$$

Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é invariante sob a ação do grupo G, ou que A é G-invariante se

$$T(g)A = A, \quad \forall g \in G.$$

Exemplo 1.1.4 *Os únicos subconjuntos Z_2-invariantes em um espaço de Banach X são os simétricos com relação à origem.*

Proposição 1.1.1 *Se um subconjunto $A \subset X$ é G-invariante então A pode ser escrito como uma união de órbitas.*

Demonstração:

Desde que A é G-invariante, então $T(g)A = A$, para todo $g \in G$. Assim, dado $u \in A$, temos que para cada $g \in G$ existe $v_{g,u} \in A$ tal que

$$u = T(g)v_{g,u} \in O(v_{g,u}).$$

Logo,

$$A = \bigcup_{u \in A} \{u\} \subset \bigcup_{u \in A} O(v_{g,u}) \subset \bigcup_{u \in A} O(u),$$

onde a última inclusão segue da igualdade $v_{g,u} = T(g^{-1})u$. Assim, $A \subset \bigcup\limits_{u \in A} O(u)$. Por outro lado, se $v \in \bigcup\limits_{u \in A} O(u)$ então existe $u \in A$ tal que $v \in O(u)$, isto é, $v = T(g)u$ para algum $g \in G$. Sendo $T(g)(A) = A$, temos que $v \in A$. Portanto $\bigcup\limits_{u \in A} O(u) \subset A$ e consequentemente $A = \bigcup\limits_{u \in A} O(u)$.

■

Definição 1.1.5 *(funcional invariante)*

Dizemos que um funcional

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é invariante sob a ação de um grupo G, ou que ϕ é G-invariante, se ele é constante em cada órbita de X, isto é,

$$\phi \cdot T(g) = \phi, \quad \forall g \in G$$

ou seja,

$$\phi(T(g)u) = \phi(u), \quad \forall g \in G \quad e \quad \forall u \in X$$

ou ainda

$$\phi(O(u)) = \phi(u), \quad \forall u \in X.$$

Exemplo 1.1.5 *Um funcional* $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é* Z_2*-invariante se, e somente se, é par, isto é,* $\Phi(-u) = \Phi(u), \quad \forall u \in X.$

Definição 1.1.6 *(aplicação equivariante) Dados subconjuntos* G*-invariantes* $A_1, A_2 \subset X$*, uma aplicação*

$$R : A_1 \longrightarrow A_2$$

é dita G*-equivariante se*

$$R \cdot T(g) = T(g) \cdot R, \quad \forall g \in G,$$

ou seja

$$R(T(g)u) = T(g)R(u), \quad \forall u \in A_1 \quad e \quad \forall g \in G,$$

ou ainda

$$R(O(u)) = O(R(u)), \quad \forall u \in A_1.$$

Exemplo 1.1.6 *Sejam* $A_1, A_2 \subset X$ *com* $A_1 = -A_1$ *e* $A_2 = -A_2$*. Uma aplicação* $R : A_1 \longrightarrow A_2$ *é* Z_2*-equivariante se, e somente se, é uma aplicação ímpar, isto é,* $R(-u) = -R(u)$*.*

No que segue, vamos denotar por $\mathcal{A}$ a classe de todos os subconjuntos fechados e G-invariantes de X, isto é,

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ é fechado e } \; T(g)A = A, \quad \forall g \in G\}.$$

Definição 1.1.7 *(Teoria de G-índice)*

Uma teoria de G-índice, ou simplesmente um G-índice, é uma aplicação

$$ind : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

que tem as seguintes propriedades:

a) $indA = 0$ *se, e somente se* $A = \emptyset$*;*

b) se $R : A_1 \to A_2$ *é contínua e* G*-equivariante então* $indA_1 \leq indA_2$*;*

c) $ind(A_1 \cup A_2) \leq indA_1 + indA_2$*;*

d) Se $A \in \mathcal{A}$ *é compacto então existe uma vizinhança* $B \in \mathcal{A}$ *do conjunto* A *tal que* $indB = indA$*.*

Observação 1.1.2 *Como consequências imediatas da definição acima, temos que se* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *com* $A_1 \subset A_2$*, então* $indA_1 \leq indA_2$*, além disso, se* $indA_2 < \infty$ *então* $ind\left\{\overline{A_1 \backslash A_2}\right\} \geq indA_1 - indA_2$*. Para deduzir esta última afirmação, basta notar que* $A_1 \subset \overline{A_1 \backslash A_2} \cup A_2$*.*

Exemplo 1.1.7 *Seja* X *um espaço de Banach. Sabemos que* $(Z_2, +)$ *é um grupo topológico compacto e que* $\{Id, -Id\}$ *é uma representação isométrica de* Z_2 *em* X*. Dado* $A \in \mathcal{A}$*, onde*

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \quad \text{é fechado e} \quad A = -A\},$$

defina a aplicação $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *da seguinte maneira:*

$$\gamma(A) = k$$

se k *é o menor inteiro tal que existe uma aplicação ímpar*

$$\phi \in C(A, \mathbb{R}^k \backslash \{0\}),$$

defina $\gamma(A) = \infty$ *se uma tal aplicação não existe e*

$$\gamma(\emptyset) = 0.$$

Proposição 1.1.2 *A aplicação* $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *é uma Teoria de* Z_2 *- índice em* X*.* $\gamma(A)$ *é chamado o gênero de Krasnoselskii do conjunto* A*.*

Demonstração:

$a)$ Da definição de γ, temos que $\gamma(A) = 0$ se, e somente se $A = \emptyset$.

$b)$ Se $\gamma(A_2) = \infty$ não há o que mostrar. Agora, se $\gamma(A_2) = k < \infty$ então existe uma aplicação ímpar e contínua

$$\phi : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k \backslash \{0\}.$$

Assim, a aplicação

$$\phi \circ R : A_1 \longrightarrow \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$$

é impar e contínua, pois é dada pela composição de funções impares e contínuas. Isto nos mostra que

$$\gamma(A_1) \leq k = \gamma(A_2).$$

$c)$ Se $\gamma(A_1) = \infty$ ou $\gamma(A_2) = \infty$ não há o que mostrar. Sendo assim, suponhamos que

$$\gamma(A_1) = k_1 < \infty \ \text{ e } \ \gamma(A_2) = k_2 < \infty.$$

Assim, existem aplicações ímpares e contínuas

$$\phi_j : A_j \longrightarrow \mathbb{R}^{k_j} \backslash \{0\}; j = 1, 2.$$

Sendo $A_j \subset X$ um subconjunto fechado e X um espaço normado, segue-se do Teorema de extensão de Tietze (ver apêndice B) que podemos obter extensões contínuas

$$\tilde{\phi}_j : X \longrightarrow \mathbb{R}^{k_j} \quad , \quad j = 1, 2,$$

e considerando as partes ímpares

$$\begin{array}{rcl} \psi_j : X & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k_j} \\ u & \longmapsto & \psi_j(u) = \dfrac{\tilde{\phi}_j(u) - \tilde{\phi}_j(-u)}{2} \end{array}$$

destas extensões, podemos definir a aplicação

$$\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}^{k_1+k_2}$$

por

$$\psi(u) = (\psi_1(u), \psi_2(u)).$$

Note que

$$\psi(A_1 \cup A_2) \subset \mathbb{R}^{k_1+k_2} \backslash \{0\},$$

pois, sendo ψ_j a parte ímpar de $\tilde{\phi}_j$, com $\tilde{\phi}_j = \phi_j$ sobre A_j, onde ϕ_j é ímpar, então

$$\psi_j(A_j) = \phi_j(A_j) \subset \mathbb{R}^{k_j} \backslash \{0\}.$$

Observe ainda que ψ_j são extensões ímpares e continuas das ϕ_j, pois sobre A_j, $\tilde{\phi}_j$ coincide com ϕ_j e sendo ϕ_j ímpar, $\tilde{\phi}_j$ também será. Logo

$$\tilde{\phi}_j = \psi_j \;\text{ em }\; A_j.$$

Como

$$\psi|_{A_1 \cup A_2} : A_1 \cup A_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{k_1+k_2} \setminus \{0\}$$

é uma aplicação ímpar e continua, concluímos da definição de gênero que

$$\gamma(A_1 \cup A_2) \leq k_1 + k_2 = \gamma(A_1) + \gamma(A_2).$$

d) Seja $A \in \mathcal{A}$ um compacto. Se

$$\gamma(A) = \infty$$

não existe, para k algum, uma aplicação

$$\phi \in C(X, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}),$$

ímpar. De fato, suponha por contradição que exista uma aplicação

$$\phi \in C(X, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}),$$

ímpar, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\phi|_A : A \longrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$$

seria ímpar e contínua, e portanto $\gamma(A) < \infty$, contradizendo nossa hipótese. Logo $\gamma(A) = \infty$, e como $A \subset X$ com X sendo fechado e simétrico, teremos $\gamma(X) = \gamma(A) = \infty$.

Por outro lado, supondo $\gamma(A) = k < \infty$, segue-se que existe uma aplicação ímpar

$$\phi \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}).$$

Do Teorema de Tietze (ver Apêndice B) existe uma extensão ímpar e continua Ψ de ϕ. Visto que $0 \notin \Psi(A) = \phi(A)$ e A é um conjunto compacto, podemos obter $\delta > 0$ tal que $0 \notin \Psi(A_\delta)$, onde

$$A_\delta = \{u \in X : dist(u, A) \leq \delta\},$$

e $\Psi : A_\delta \longrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ é ímpar e contínua. Com efeito, se para cada $\delta > 0$ tivéssemos $0 \in \Psi(A_\delta)$, poderíamos obter uma sequência $(u_n) \subset X$, com $dist(u_n, A) \leq \frac{1}{n}$ e $\Psi(u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que A é compacto e para cada $u \in X$ fixado a aplicação $f(v) = \| u - v \|$ é contínua, então existe $\tilde{v} \in A$ tal que

$$\| u - \tilde{v} \| = dist(u, A).$$

Sendo assim, podemos obter

$$(v_n) \subset A$$

tal que

$$\|u_n - v_n\| = dist(u_n, A) \leq \frac{1}{n}. \tag{1.1}$$

Também da compacidade de A, obtemos

$$(v_{n_j}) \subset A,$$

com

$$v_{n_j} \longrightarrow v \ \text{ em } \ X, \ \ v \in A.$$

Logo, de (1.1),

$$u_{n_j} \longrightarrow v \ \text{ em } \ X, \ \ v \in A.$$

Sendo Ψ contínua, segue que

$$\Psi(u_{n_j}) \longrightarrow \Psi(v),$$

isto é, $\Psi(v) = 0$. O que é um absurdo.

Logo, o conjunto $B = A_\delta$ é uma vizinhança fechada de A a qual é G-invariante pois é simétrica com relação a origem e $\gamma(B) \leq k = \gamma(A)$, por construção.

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} I : A \ &\longrightarrow \ B \\ u \ &\longmapsto \ I(u) = u \end{aligned}$$

é ímpar e contínua, segue de b) que

$$\gamma(A) \leq \gamma(B).$$

Mostranto que $\gamma(B) = \gamma(A) = k$.

■

As propriedades a seguir são características do gênero e não se verificam em qualquer teoria de G-índice.

Proposição 1.1.3 *Seja $F \neq \emptyset$. Temos que*

(i) Se $F \subset X$ é fechado e $F \cap (-F) = \emptyset$ então

$$\gamma(F \cup (-F)) = 1;$$

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$ e existe um homeomorfismo ímpar

$$h : A \to S^{k-1},$$

então $\gamma(A) = k$, em particular

$$\gamma(S^{k-1}) = k;$$

(iii) Se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $0 \notin A$ e $\gamma(A) \geq 2$ então A possui uma infinidade de pontos.

Demonstração:

(i) Definamos

$$\phi : F \cup (-F) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

por

$$\phi(u) = \begin{cases} 1, & se \;\; u \in F \\ -1, & se \;\; u \in -F \end{cases}$$

claramente ϕ é contínua e ímpar, logo

$$\gamma(F \cup (-F)) = 1.$$

(ii) Como

$$h : A \longrightarrow S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$$

é continua e ímpar, temos que

$$\gamma(A) \leq k.$$

Por outro lado, se $\gamma(A) = j < k$ então existe uma aplicação ímpar

$$\phi \in C(A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$$

e portanto uma aplicação ímpar e contínua

$$\varphi = \phi \circ h^{-1} : S^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^j \setminus \{0\}.$$

Do Teorema de Tietze (ver apêndice B), sabemos que existe uma extensão $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^j$ de φ a qual ainda é ímpar e contínua. Sendo assim, definamos a aplicação $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ por $\tilde{\varphi}(x) = (\widehat{\varphi_1}(x), \widehat{\varphi_2}(x), \ldots, \widehat{\varphi_j}(x), 0, \ldots, 0)$. Claramente a aplicação $\tilde{\varphi}$ é ímpar e contínua, pois $\widehat{\varphi}$ é ímpar e contínua. Por outro lado, definindo $\varphi_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ por $\varphi_0(x) = b$, onde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ é tal que $b_i \neq 0$, para algum $j + 1 \leq i \leq k$.

Observe que as aplicações $\tilde{\varphi}$ e φ_0 são homotópicas, pois $H : \mathbb{R}^k \times [0, 1] \to \mathbb{R}^k$ definida por $H(t, x) = (1 - t)\tilde{\varphi}(x) + t\varphi_0(x)$ é contínua, $H(0, x) = \tilde{\varphi}(x)$ e $H(1, x) = \varphi_0(x)$.

Por outro lado, para cada $t \in [0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} H(x,t) &= (1-t)\tilde{\varphi}(x) + t\varphi_0(x) \\ &= (1-t)\tilde{\varphi}(x) + tb \\ &= ((1-t)\widehat{\varphi_1}(x) + tb_1, (1-t)\widehat{\varphi_2}(x) + tb_2, \ldots, (1-t)\widehat{\varphi_j}(x) + tb_j, b_{j+1}, \ldots, b_k) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in S^{k-1}$. Logo, $0 \notin H([0, 1] \times S^{k-1}, \mathbb{R}^k)$.

Portanto, $deg(\tilde{\varphi}, B(0, 1), 0) = deg(\varphi_0, B(0, 1), 0) = 0$ (ver Apêndice B). Mas isto contraria o Teorema de Borsuk (ver Apêndice B).

Note que sendo $b \neq 0$ então $0 \notin \varphi_0(S^{k-1}) = \{b\}$ e além disso, como $\tilde{\varphi}(S^{k-1}) \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, podemos medir o grau de $\tilde{\varphi}$ e φ_0 em relação a S^{k-1} no ponto $0 \in \mathbb{R}^k$.

(iii) Supondo que $A \in \mathcal{A}$ tivesse uma quantidade finita de pontos poderíamos decompô-lo como uma união

$$A = F \cup (-F),$$

com F fechado e $F \cap (-F) = \emptyset$. Daí, por (i),

$$\gamma(A) = 1,$$

o que é um absurdo. Note que

$$F \cap (-F) = \emptyset$$

só é possível em vista de $0 \notin A$.

■

1.2 O Resultado básico de multiplicidade

Definição 1.2.1 *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 num espaço de Banach X. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ϕ se $\phi(u) = c$ para algum ponto crítico $u \in X$. O conjunto de todos os pontos críticos no "nível" c será designado por K_c, isto é,*

$$K_c = \{u \in X : \phi'(u) = 0, \phi(u) = c\}.$$

Também, designamos por ϕ^c o conjunto

$$\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}$$

Definição 1.2.2 *Um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação $v : Y \to X$, localmente lipschitziana, onde $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$, satisfazendo as condições:*

(i) $\|v(u)\| \leq 2\|\phi'(u)\|_{X'}$;

(ii) $\langle \phi'(u), v(u) \rangle \geq \|\phi'(u)\|_{X'}^2$;

para todo $u \in Y$.

Exemplo 1.2.1 *Sejam X um espaço de Hilbert e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional que tem derivada*

$$\phi' : X \to X',$$

localmente lipschitziana. Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ segue-se que, para cada $u \in X$, $\phi'(u)$ é um funcional linear limitado sobre o espaço de Hilbert X, logo do Teorema de representação de Riesz existe um único $v_u \in X$ tal que

$$\langle \phi'(u), h \rangle = (v_u, h), \quad \forall h \in X \quad e \quad \|\phi'(u)\|_{X'} = \|v_u\|.$$

Definimos a aplicação gradiente de ϕ, $\nabla\phi : X \longrightarrow X$, por $\nabla\phi(u) = v_u$. Note que a aplicação gradiente de ϕ quando restrita a Y é claramente um campo pseudo-gradiente para ϕ. De fato,

$$\|\nabla\phi(u)\| = \|\phi'(u)\|_{X'} \leq 2\|\phi'(u)\|_{X'}$$

e

$$\langle \phi'(u), \nabla\phi(u) \rangle = \|v_u\|^2 = \|\phi'(u)\|_{X'}^2.$$

Além disso, como ϕ' é localmente lipschitiziana então para cada $a \in Y$ existem $c > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|\nabla\phi(u) - \nabla\phi(v)\| &= \|\phi'(u) - \phi'(v)\|_{X'} \\ &\leq c\|u - v\|, \quad \forall u, v \in B_R(a). \end{aligned}$$

Proposição 1.2.1 *Seja X um espaço normado. Todo funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ possui um campo pseudo-gradiente.*

Demonstração:

Sendo $\frac{2}{3}\|\phi'(v)\|_{X'} < \|\phi'(v)\|_{X'}$, para todo $v \in Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$, segue da definição de $\|\phi'(v)\|_{X'}$ que para cada $v \in Y$ existe $x_v \in X$ tal que $\|x_v\| = 1$ e

$$\langle \phi'(v), x_v \rangle \ > \frac{2}{3}\|\phi'(v)\|_{X'}.$$

Defina $y_v = \frac{3}{2}\|\phi'(v)\|_{X'} x_v$. Daí, como $\|x_v\| = 1$, obtemos

$$\|y_v\| = \frac{3}{2}\|\phi'(v)\|_{X'} < 2\|\phi'(v)\|_{X'}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \phi'(v), y_v \rangle &= \frac{3}{2} \cdot \|\phi'(v)\|_{X'} \langle \phi'(v), x_v \rangle \\ &> \frac{3}{2} \cdot \|\phi'(v)\|_{X'} \cdot \frac{2}{3}\|\phi'(v)\|_{X'} \\ &= \|\phi'(v)\|^2_{X'}. \end{aligned}$$

Desde que ϕ' é contínua existe uma vizinhança aberta N_v de v em Y tal que

$$\|y_v\| < 2\|\phi'(u)\|_{X'} \ \text{ e } \ \langle \phi'(u), y_v \rangle > \|\phi'(u)\|^2_{X'}, \forall\ u \in N_v.$$

Claramente, a família

$$\mathcal{N} := \{N_v : v \in Y\} = \{N_v\}_{v \in Y}$$

é uma cobertura aberta de Y. Desde que Y é um espaço métrico, e portanto paracompacto (ver Apêndice B), existe uma cobertura aberta

$$\mathcal{M} = \{Nv_i : i \in I\}$$

para Y, localmente finita, que refina $\mathcal{N}$, isto é, para cada $i \in I$ existe $v \in Y$ com

$$Nv_i \subset N_v.$$

Sendo assim

$$\|y_v\| < 2\|\phi'(u)\|_{X'} \tag{1.2}$$

e

$$\langle \phi'(u), y_v \rangle > \|\phi'(u)\|^2_{X'}, \tag{1.3}$$

para todo $u \in Nv_i$.

Para cada $i \in I$, definamos $\rho_i : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \longrightarrow X$ da seguinte forma, dado $u \in Y$, ponhamos $\rho_i(u) = dist(u, X \backslash N_{v_i})$. Escolhendo $v \in Y$, existe Nv_i tal que $v \in Nv_i$ e $Nv_i \subset N_v$, definimos

$$g(u) = \sum_{i \in I} \left(\frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)} y_i \right),$$

onde $y_i = \frac{3}{2}\|\phi'(v_i)\| x_{v_i}$. Observe que

$$\rho_i(u) = \left\{ \begin{array}{c} 0, u \in Y \backslash Nv_i \\ dist(u, Y \backslash Nv_i), u \in Nv_i \end{array} \right. .$$

Assim, como $\mathcal{M}$ é localmente finita, para cada $u \in Y$ existe apenas um número finito n_u de índices, onde $\rho_i(u)$ não se anula. Logo,

$$\begin{aligned} \|g(u)\| &= \left\| \sum_{i \in I} \left\{ \frac{\rho_i(u)}{\sum\limits_{j \in I} \rho_j(u)} y_i \right\} \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\rho_{i_k}(u)}{\sum\limits_{q=1}^{n_u} \rho_{j_q}(u)} \|y_i\|. \end{aligned}$$

De (1.2), temos que

$$\|g(u)\| \;<\; 2\|\phi'(u)\|_{X'} \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\rho_{i_k}(u)}{\sum\limits_{q=1}^{n_u} \rho_{j_q}(u)} = 2\|\phi'(u)\|_{X'}.$$

Por outro lado, de (1.3)

$$
\begin{aligned}
\langle \phi'(u), g(u) \rangle &= \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\rho_{ik}(u)}{\sum_{q=1}^{n_u} \rho_{jq}(u)} \langle \phi'(u), y_i \rangle \\
&\geq \|\phi'(u)\|_{X'}^2 \sum_{k=1}^{n_u} \frac{\rho_{i_k}(u)}{\sum_{q=1}^{n_u} \rho_{j_q}(u)} \\
&= \|\phi'(u)\|_{X'}^2.
\end{aligned}
$$

Para mostrarmos que g é localmente lipschitziana, é suficiente verificar que cada uma das parcelas

$$
\frac{\rho_{i_k}(u)}{\sum_{q=1}^{n_u} \rho_{j_q}(u)} \parallel y_i \parallel
$$

é localmente lipschitziana. Como para cada i, $\parallel y_i \parallel$ é constante, basta mostrarmos que a função

$$
g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}
$$

é localmente lipschitziana e argumentarmos de forma indutiva. De fato,

$$
\begin{aligned}
g(u) - g(v) &= \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \\
&= \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]},
\end{aligned}
$$

somando e subtraindo $\rho_1(v)\rho_2(v)$, obtemos

$$
g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v)[\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} + \frac{\rho_1(v)[\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]}.
$$

Logo, sendo ρ_1 e ρ_2 lipschitzianas, existem constantes positivas k_1 e k_2, tais que

$$
\begin{aligned}
| g(u) - g(v) | &\leq \frac{k_1 \rho_2(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} \parallel u - v \parallel \\
&+ \frac{k_2 \rho_1(v)}{[\rho_1(u) + \rho_2(u)][\rho_1(v) + \rho_2(v)]} \parallel u - v \parallel .
\end{aligned}
$$

Como $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, segue-se que existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$. Por outro lado, sendo ρ_1 e ρ_2 funções contínuas, resulta que existe uma vizinhança V_u de u tal que

$$
\rho_1(v) + \rho_2(v) > a > 0, \quad \forall v \in V_u.
$$

Logo,

$$
| g(u) - g(v) | \leq \frac{1}{a}(k_1 + k_2) \parallel u - v \parallel, \quad \forall u, v \in V_u,
$$

uma vez que $\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(u)+\rho_2(u)} < 1$.

Mostrando que a aplicação g definida acima é localmente lipschitziana e portanto é um campo pseudo-gradiente para ϕ.

■

Corolário 1.2.1 *Sejam X um espaço normado e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par, isto é, $\phi(-u) = \phi(u)$ para todo $u \in X$. Então ϕ possui um campo pseudo-gradiente ímpar.*

Demonstração: Sendo ϕ de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, segue-se da Proposição 1.2.1 que ϕ possui um campo pseudo gradiente $V : Y \to X$. Definamos a aplicação $W : Y \to X$ por $W(u) = \frac{1}{2}(V(u) - V(-u))$. Logo, W é ímpar, localmente lipschitziana e sendo ϕ' ímpar, obtemos

$$
(i) \quad \parallel W(u) \parallel \leq \frac{1}{2}(\parallel V(u) \parallel + \parallel V(-u) \parallel) \leq 2 \parallel \phi'(u) \parallel_{X'}
$$

e

$$(ii) \quad \langle \phi'(u), W(u) \rangle = \frac{1}{2}\langle \phi'(u), V(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle \phi'(-u), V(-u)\rangle \geq \| \phi'(u) \|_{X'} .$$

Mostrando o que queríamos.

■

Lema 1.2.1 *Se $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional par, então*

(i) $\langle \phi'(-u), h\rangle = \langle \phi'(u), -h\rangle$;

(ii) $\|\phi'(-u)\|_{X'} = \|\phi'(u)\|_{X'}$,

quaisquer que sejam $u, h \in X$.

Demonstração:

Observe que se (i) ocorre então (ii) também ocorre, pois se

$$\langle \phi'(-u), h\rangle = \langle \phi'(u), -h\rangle$$

então

$$\begin{aligned} \|\phi'(-u)\|_{X'} &= \sup_{\|h\|=1} |\langle \phi'(-u), h\rangle| \\ &= \sup_{\|h\|=1} |\langle \phi'(u), -h\rangle|, \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \|\phi'(-u)\|_{X'} &= \sup_{\|v\|=1} |\langle \phi'(u), v\rangle| \\ &= \|\phi'(u)\|_{X'}. \end{aligned}$$

Portanto, é suficiente provarmos (i). Para isso, vejamos que

$$\begin{aligned} \langle \phi'(-u), h\rangle &= \frac{\phi(th-u) - \phi(-u)}{t} + o_t(1) \\ &= \frac{\phi(-(-th+u)) - \phi(-u)}{t} + o_t(1), \end{aligned}$$

sendo ϕ par, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \phi'(-u), h \rangle &= \frac{\phi(t(-h)+u) - \phi(u)}{t} + o_t(1) \\ &= \langle \phi'(u), -h \rangle. \end{aligned}$$

Mostrando que (i) ocorre.

$\blacksquare$

Lema 1.2.2 *Seja $W : Y \longrightarrow X$ uma aplicação localmente lipschitziana, onde X e Y são espaços métricos. Dado um conjunto compacto $A \subset Y$ existe $\delta > 0$ tal que W é lipschitziana em*

$$A_\delta = \{u \in Y : dist(u, A) \leq \delta\}.$$

Demonstração: ver [25].

Definição 1.2.3 *(sequência Palais-Smale num nível c) Uma sequência $(u_n) \subset X$ é dita uma sequência Palais-Smale no nível c para um funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, se*

$$\phi(u_n) \to c \quad e \quad \phi'(u_n) \to 0 \quad em \quad X'.$$

Se, dada uma sequência Palais-Smale (u_n) para o funcional ϕ, num nível c qualquer, nós podermos concluir que (u_n) admite subsequência convergente em X, então dizemos que ϕ verifica a condição $(PS)_c$. Se a existência de uma tal subsequência convergente só ocorre para determinados valores $c \in \mathbb{R}$, dizemos que ϕ verifica uma condição $(PS)_c$ local.

Teorema 1.2.1 *(deformação equivariante)*

Seja X um espaço de Banach real e suponha que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional par satisfazendo a condição $(PS)_c$. Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\epsilon} > 0$ e U é uma vizinhança aberta de K_c, então existem $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tais que, para quaisquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$, vale:

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$, *se* $u \notin \phi^{-1}([c - \overline{\epsilon}, c + \overline{\epsilon}])$;

(iii) $\phi(\eta(t, u)) \leq \phi(u)$;

(iv) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{c-\epsilon}$;

(v) $\eta(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo ímpar.*

Demonstração:

Uma vez que ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$, temos que K_c é compacto. Consideremos o conjunto $N_\delta = \{u \in X : \text{dist}(u, K_c) \leq \delta\}$, onde δ foi escolhido de modo que $N_\delta \subset U$. Assim, devem existir constantes $\widehat{\epsilon}, b > 0$, tais que

$$\|\phi'(u)\|_{X'} \geq b, \quad \forall u \in \phi^{c+\widehat{\epsilon}} \setminus \left(\phi^{c-\widehat{\epsilon}} \cup N_{\frac{\delta}{8}}\right). \tag{1.4}$$

Do contrário, obteríamos sequências $(\widehat{\epsilon}_n), (b_n) \subset \mathbb{R}_+$ e $(u_n) \subset \phi^{c+\widehat{\epsilon}_n} \setminus \left(\phi^{c-\widehat{\epsilon}_n} \cup N_{\frac{\delta}{8}}\right)$, tais que $\widehat{\epsilon}_n \to 0$, $b_n \to 0$ e $\|\phi'(u_n)\|_{X'} < b_n$. Da condição $(PS)_c$, concluímos que existe uma subsequência de (u_n) que converge para algum $u \in K_c \setminus N_{\frac{\delta}{8}}$, o que é uma contradição, visto que $K_c \setminus N_{\frac{\delta}{8}}$ é um conjunto vazio.

Uma vez que a desigualdade em (1.4) ainda ocorre para qualquer constante positiva menor do que $\widehat{\epsilon}$, podemos considerar que

$$0 < \widehat{\epsilon} < \min\left\{\overline{\epsilon}, \frac{b\delta}{32}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\right\}. \tag{1.5}$$

Escolhendo qualquer $\epsilon \in (0, \widehat{\epsilon})$, definimos os conjuntos

$$A = \{u \in X : \phi(u) \leq c - \widehat{\epsilon}\} \cup \{u \in X : \phi(u) \geq c + \widehat{\epsilon}\}$$

e

$$B = \{u \in X : c - \epsilon \leq \phi(u) \leq c + \epsilon\}.$$

Observe que $A \cap B = \emptyset$. Definamos agora a aplicação $g : X \to \mathrm{I\!R}$, por

$$g(u) = \frac{\operatorname{dist}(u, A)}{\operatorname{dist}(u, A) + \operatorname{dist}(u, B)},$$

assim $g = 0$ sobre A, $g = 1$ sobre B, $0 \leq g \leq 1$ e g é localmente lipschitziana. Para provar esta última afirmação, vejamos primeiramente que as aplicações

$$f_1(u) = \operatorname{dist}(u, A) \quad \text{e} \quad f_2(u) = \operatorname{dist}(u, B)$$

são lipschitzianas. Mais especificamente, veremos que

$$|f_1(u) - f_1(v)| \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Com efeito, temos que

$$f_1(u) \leq \|u - y\| \leq \|u - v\| + \|v - y\|, \quad \forall y \in A,$$

ou seja,

$$f_1(u) - \|u - v\| \leq \|v - y\|, \quad \forall y \in A,$$

logo

$$f_1(u) - \|u - v\| \leq f_1(v).$$

Donde

$$f_1(u) - f_1(v) \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Sendo assim,

$$f_1(v) - f_1(u) \leq \|v - u\|; \quad \forall u, v \in X,$$

isto é,

$$-\{f_1(u) - f_1(v)\} \leq \|u - v\|, \quad \forall u, v \in X.$$

Mostrando que f_1 é lipschitziana. Da mesma forma vemos que f_2 é lipschitziana. Sendo assim,

$$\begin{aligned} g(u) - g(v) &= \frac{f_1(u)}{f_1(u) + f_2(u)} - \frac{f_1(v)}{f_1(v) + f_2(v)} \\ &= \frac{f_1(u)f_2(v) - f_1(v)f_2(u)}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]}, \end{aligned}$$

somando e subtraindo $f_1(v)f_2(v)$, obtemos

$$g(u) - g(v) = \frac{f_2(v)[f_1(u) - f_1(v)]}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]} + \frac{f_1(v)[f_2(v) - f_2(u)]}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]}.$$

Logo, sendo f_1 e f_2 lipschitzianas, existem constantes positivas k_1 e k_2, tais que

$$\begin{aligned} \mid g(u) - g(v) \mid &\leq \frac{k_1 f_2(v)}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]} \parallel u - v \parallel \\ &+ \frac{k_2 f_1(v)}{[f_1(u) + f_2(u)][f_1(v) + f_2(v)]} \parallel u - v \parallel . \end{aligned}$$

Como $f_1(z) + f_2(z) > 0$, para cada $z \in X$, então fixando arbitrariamente $z \in X$, segue-se que existe $a > 0$ tal que $f_1(z) + f_2(z) > a > 0$. Por outro lado, sendo f_1 e f_2 funções contínuas, resulta que existe uma vizinhança V_z de z tal que

$$f_1(u) + f_2(u) > a > 0, \quad \forall u \in V_z.$$

Logo,

$$\mid g(u) - g(v) \mid \leq \frac{1}{a}(k_1 + k_2) \parallel u - v \parallel, \quad \forall u, v \in V_z,$$

uma vez que $\frac{f_1(v)}{f_1(u)+f_2(u)} \leq 1$.

Mostrando que a aplicação g definida anteriormente é localmente lipschitziana. Procedendo de forma análoga, podemos definir uma função $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $f = 1$ sobre $X \setminus N_{\frac{\delta}{4}}$, $f = 0$ sobre $N_{\frac{\delta}{8}}$, $0 \leq f \leq 1$ e f é localmente lipschitziana. Observemos ainda que sendo o funcional ϕ par, então os conjuntos A, B e N_δ são simétricos com relação a origem de X e as função f e g são pares.

Consideremos a função $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $h(s) = 1$ se $s \in [0,1]$ e $h(s) = \frac{1}{s}$ se $s \geq 1$. Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue-se do Corolário 1.2.1 que existe um campo vetorial pseudo-gradiente $W : Y \to X$, o qual é ímpar. Finalmente, definamos a aplicação $\tilde{W} : X \to \mathbb{R}$, como sendo $\tilde{W}(u) = -f(u)g(u)h(\|W(u)\|)W(u)$ se $u \in Y$ e $\tilde{W}(u) = 0$ se $u \in X \setminus Y$.

Por construção, temos que $0 \leq \|\tilde{W}\| \leq 1$, $\tilde{W}$ é ímpar e $\tilde{W}$ é localmente lipschitziana. Sendo assim, para cada $u \in X$ dado, o problema de Cauchy

$$(*) \begin{cases} \frac{d}{dt}\eta(t,u) = \tilde{W}(\eta(t,u)) \\ \eta(0,u) = u \end{cases}$$

admite uma única solução $\eta(.,u)$ definida em $\mathbb{R}$, (ver [32]). Além disso, a dependência contínua das soluções de $(*)$ com relação ao dados iniciais u nos permite concluir que $\eta \in C([0,1] \times X, X)$.

(i) Sendo η solução de $(*)$, temos que $\eta(0,u) = 0, \quad \forall u \in X$.

(ii) Além disso, como $g(u) = 0$ sobre A e $\overline{\epsilon} > \widehat{\epsilon}$ vem que $\eta(t,u) = u$ é solução de $(*)$, pois

$$\frac{d}{dt}\eta(t,u) = \frac{d}{dt}u = 0 = \tilde{W}(u) = \tilde{W}(\eta(t,u)) \ \text{ e } \ \eta(0,u) = u.$$

Da unicidade da solução, resulta que $\eta(t,u) = u, \quad \forall t \in [0,1]$ e $u \in A$.

(iii) Já vimos que se $\tilde{W}(u) = 0$, então $\eta(t,u) = u$ é solução do problema em $(*)$ e ocorre a igualdade $\phi(\eta(t,u)) = \phi(u)$. Por outro lado, se $\tilde{W}(u) \neq 0$ então $u \in Y$ e

$$\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} = \langle \phi'(\eta(t,u)), \frac{d\eta}{dt} \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle \phi'(\eta(t,u)), \tilde{W}(\eta(t,u))\rangle \\
&= -f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|W(\eta(t,u))\|)\langle \phi'(\eta(t,u)), W(\eta(t,u))\rangle.
\end{aligned}
$$

Sendo W um campo vetorial pseudo-gradiente, segue-se que

$$
\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq -f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|W(\eta(t,u))\|)\|\phi'(\eta(t,u))\|_{X'}^2 \leq 0, \quad (1.6)
$$

logo $\phi(\eta(.,u)))$ é não-crescente e portanto $\phi(\eta(t,u)) \leq \phi(\eta(0,u)) = \phi(u)$ para todo $t \in [0,1]$ e para todo $u \in Y$.

(iv) Para mostrarmos que $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus U) \subset \phi^{c-\epsilon}$, é suficiente provarmos que $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus N_\delta) \subset \phi^{c-\epsilon}$. Observe que, por (iii), se $u \in \phi^{c-\epsilon}$ então $\eta(t,u) \in \phi^{c-\epsilon}$, isto é, $\phi(\eta(t,u)) \leq c - \epsilon$. Sendo assim, resta-nos apenas mostrar que $\eta\left(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus (\phi^{c-\epsilon} \cup N_\delta)\right) \subset \phi^{c-\epsilon}$.

Seja $u \in \eta(1, \phi^{c+\epsilon} \setminus (\phi^{c-\epsilon} \cup N_\delta))$. Sabemos que,

$$
\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq 0. \quad (1.7)
$$

Sendo $g = 0$ sobre $\phi^{c-\widehat{\epsilon}}$ então $\eta(t,u) \notin \phi^{c-\widehat{\epsilon}}$ e de (1.7), obtemos

$$
\phi(\eta(0,u)) - \phi(\eta(t,u)) \leq \epsilon + \widehat{\epsilon} < 2\widehat{\epsilon}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)
$$

Suponha que $u \in \phi^{c+\epsilon} \setminus (\phi^{c-\epsilon} \cup N_\delta)$ e $\eta(s,u) \in \phi^{c+\epsilon} \setminus \left(\phi^{c-\epsilon} \cup N_{\frac{\delta}{2}}\right)$ para $s \in [0,t]$, observe que por (i) e da continuidade de η, isso sempre ocorre para t suficientemente pequeno, assim, de (1.4), $\eta(s,u) \in Y$ e $f(\eta(s,u)) = 1 = g(\eta(s,u))$. Assim,

$$
\begin{aligned}
2\widehat{\epsilon} &\geq \int_t^0 \frac{d\phi(\eta(s,u))}{ds} ds \\
&= \int_0^t h(\|W(\eta(s,u))\|)\langle \phi'(\eta(s,u)), W(\eta(s,u))\rangle ds,
\end{aligned}
$$

sendo W um campo pseudo-gradiente para ϕ, obtemos

$$
2\widehat{\epsilon} \geq \int_0^t h(\|W(\eta(s,u))\|)\|\phi'(\eta(s,u))\|_{X'}^2 ds.
$$

De (1.8), segue-se que

$$\begin{aligned}
2\widehat{\epsilon} &\geq b\int_0^t h(\|W(\eta(s,u))\|)\|\phi'(\eta(s,u))\|_{X'}ds \\
&\geq \frac{b}{2}\int_0^t h(\|W(\eta(s,u))\|)\|W(\eta(s,u))\|ds \\
&\geq \frac{b}{2}\left\|\int_0^t h(\|W(\eta(s,u))\|)W(\eta(s,u))ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\left\|\int_0^t W(\eta(s,u))ds\right\| \\
&= \frac{b}{2}\|\eta(t,u)-u\|,
\end{aligned}$$

de (1.5), temos que

$$\|\eta(t,u)-u\| \leq \frac{4}{\widehat{\epsilon}} < \frac{\delta}{8}.$$

Mostraremos que $\eta(t,u) \in \phi^{c-\epsilon}$ para algum $t \in (0,1)$. De fato, suponha por contradição que $\eta(t,u) \in \phi^{c+\epsilon} \setminus (\phi^{c-\epsilon} \cup N_\delta)$ para todo $t \in (0,1)$. De (1.6), temos que

$$\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq -h(\|W(\eta(t,u))\|)\|\phi'(\eta(t,u))\|_{X'}^2. \tag{1.9}$$

Se para algum $t \in (0,1)$, tivermos $\|W(\eta(t,u))\| \leq 1$ então $h(\|W(\eta(t,u))\|) = 1$, e de (1.4) e (1.9), obtemos

$$\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq -b^2.$$

Por outro lado, se para algum $t \in (0,1)$, tivermos $\|W(\eta(t,u))\| > 1$ então $h(\|W(\eta(t,u))\|) = \frac{1}{\|W(\eta(t,u))\|}$, e da definição de campo pseudo-gradiente e de (1.9), obtemos

$$\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq -\frac{1}{4}.$$

Consequentemente, para todo $t \in (0,1)$, nós temos

$$\frac{d\phi(\eta(t,u))}{dt} \leq -\min\left\{\frac{1}{4}, b^2\right\}. \tag{1.10}$$

Integrando (1.10) e comparando o resultado com (1.8), temos

$$\min\left\{\frac{1}{4}, b^2\right\} \leq 2\hat{\epsilon},$$

o que contradiz (1.5). Logo, existe $t \in (0,1)$ tal que $\eta(t,u) \in \phi^{c-\epsilon}$. Sendo $\phi(\eta(.,u))$ não-crescente, concluímos que $\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon}$.

(v) Por construção, temos que $\eta(t,.)$ é ímpar e as propriedades de semi-grupo das soluções de $(*)$ nos permitem concluir que $\eta(t,.)$ é um homeomorfismo.

■

Apartir de agora, classificaremos os conjuntos compactos e simétricos de X definindo, para cada $j \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$A_j = \{A \subset X : A \ \text{ é compacto, simétrico e } \ \ \gamma(A) \geq j\}.$$

Além disso, dado $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$c_j = c_j(\phi), j = 1, 2, \cdots$$

por

$$c_j = \inf_{A \in A_j} \max_{u \in A} \phi(u),$$

como $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, temos que

$$-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots.$$

Teorema 1.2.2 *(Multiplicidade) Suponha que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é par e satisfaz a condição $(PS)_c$. Se $c_j > -\infty$ para algum $j \geq 1$, então c_j é um valor crítico de ϕ. Mais geralmente, se*

$$c_k = c_j = c > -\infty,$$

para algum $k \geq j$, então

$$\gamma(K_c) \geq k - j + 1.$$

Observação 1.2.1 *Observe que, de fato, a segunda afirmação do Teorema acima é mais geral do que a primeira, uma vez que na pior das hipóteses teremos $k = j$ na segunda afirmação, e portanto $\gamma(K_c) \geq 1$, donde $\gamma(K_c) \neq \emptyset$.*

Demonstração: Observemos que, como ϕ é par, então K_c é simétrico. Com efeito, do Lema 1.2.1,

$$\langle \phi'(-u), h \rangle = \langle \phi'(u), -h \rangle, \quad \forall u, h \in X.$$

Assim, se $u \in K_c$, então

$$\phi'(-u) = 0$$

e

$$\phi(-u) = \phi(u) = c.$$

Isso mostra que

$$-u \in K_c, \quad \forall u \in K_c. \tag{1.11}$$

Logo,

$$-K_c \subset K_c.$$

Por outro lado, de (1.11) também concluímos que $u \in -K_c$ para todo $u \in K_c$. Donde $K_c \subset -K_c$, isso mostra que K_c é simétrico. Além disso, K_c é compacto pois se $(u_n) \subset K_c$ então

$$\phi'(u_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\phi(u_n) = c \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim, da condição $(PS)_c$, existe uma subsequência convergente (u_{n_j}), ou seja,

$$u_{n_j} \longrightarrow u \in X.$$

Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, vem que

$$\phi(u) = c \ \text{ e } \ \phi'(u) = 0,$$

ou seja, $u \in K_c$. Mostrando que K_c é compacto.

Vejamos que se

$$c_k = c_j = c > -\infty,$$

para algum $k \geq j$, então

$$\gamma(K_c) \geq k - j + 1.$$

Seja $N \supset K_c$ uma vizinhança fechada, simétrica (obtida pela definição de Teoria de G-índice) tal que,

$$\gamma(N) = \gamma(K_c).$$

Então, $U = intN$ é uma vizinhança aberta e simétrica de K_c. Assim do Teorema 1.2.1, sabemos que existem $\epsilon \in (0, \overline{\epsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ satisfazendo as propriedades $(i), (ii), (iii), (iv)$ e (v). Da definição de $c_k = c$, podemos tomar $A \in A_k$ tal que

$$\max_A \phi \leq c + \varepsilon.$$

Definamos $B = A \setminus U$. Assim, da definição de G-índice, obtemos

$$
\begin{aligned}
k \leq \gamma(A) &\leq \gamma(B \cup N) \\
&\leq \gamma(B) + \gamma(N) \qquad (1.12)\\
&= \gamma(B) + \gamma(K_c),
\end{aligned}
$$

pois

$$Id : A \longrightarrow B \cup N$$

é contínua e ímpar. Como $B = A \setminus U \subset \phi^{c+\epsilon} \setminus U$, concluímos que

$$C = \eta(1, B) \subset \phi^{c-\epsilon},$$

devido ao Teorema 1.2.1. Por outro lado, sendo $B = A \setminus U = A \cap U^c$ compacto, pois A é compacto e U é aberto, então C também o é, visto que

$$\eta(t, \cdot) : X \longrightarrow X$$

é contínua. Além disso, C é simétrico, pois B é simétrico e $\eta(1, \cdot)$ é ímpar. De fato,

$$-B \;=\; -(A \setminus U),$$

sendo $-Id$ injetiva, A e U simétricos, obtemos

$$
\begin{aligned}
-B &= -A \setminus -U \\
&= A \setminus U = B.
\end{aligned}
$$

Além disso, sendo $\eta(t, .)$ ímpar e B simétrico

$$
\begin{aligned}
-C &= -\eta(1, B) \\
&= \eta(1, -B) \\
&= \eta(1, B) \\
&= C.
\end{aligned}
$$

Já vimos que $\max_C \phi \leq c - \epsilon$. Assim, da definição de $c_j = c$ temos

$$\gamma(C) \leq j - 1,$$

pois se fosse $\gamma(C) \geq j$, teríamos

$$c_j = \inf_{A \in A_j} \max_A \phi \leq \max_C \phi \leq c_j - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Da definição de Teoria de G-índice, obtemos

$$\gamma(B) \leq \gamma(C) \leq j - 1, \tag{1.13}$$

pois

$$\eta(1, \cdot) : B \longrightarrow C$$

é contínua e ímpar. Finalmente, da última desigualdade e de (1.13)

$$\gamma(K_c) \geq k - j + 1.$$

■

Teorema 1.2.3 *(Clarke)*

Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *um funcional par satisfazendo a condição de* $(PS)_c$. *Suponha que,*

(i) ϕ *é limitado inferiormente;*

(ii) *Existe um conjunto compacto, simétrico* $K \in \mathcal{A}$ *tal que*

$$\gamma(K) = k$$

e

$$\max_K \phi < \phi(0).$$

Então, ϕ *possui pelo menos* k *pares distintos de pontos críticos com correspondentes valores críticos menores que* $\phi(0)$.

Demonstração:

Consideremos os números c_j definidos como anteriormente, onde

$$A_j = \{A \subset X : A \quad \text{é compacto, simétrico e} \quad \gamma(A) \geq j\}.$$

Assim,

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots .$$

Por (i) temos que

$$c_1 = \inf_{A \in A_1} \max_A \phi = \inf_X \phi > -\infty.$$

Por outro lado, por (ii)

$$c_k \leq \inf_{A \in A_k} \max_K \phi < \phi(0).$$

Sendo ϕ um funcional par, segue-se do Teorema de Multiplicidade, que cada c_j é um valor crítico de ϕ, mas observe que apenas isso não nos diz que existem pelo menos k pares de pontos críticos para ϕ, pois esses níveis podem coincidir. Se todos os $c_j's$ com $j = 1, 2, \cdots, k$ forem distintos então obtemos pelo menos k pares de pontos críticos distintos para ϕ, uma vez que se u é ponto crítico para ϕ no nível c, então $-u$ também é. Além disso, temos

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \cdots c_k < \phi(0).$$

Por outro lado se $c_i = c_j = c$, para algum $i < j \leq k$, então, do Teorema de Multiplicidade,

$$\gamma(k_c) \geq j - i + 1 \geq 2,$$

e como $0 \notin K_c$, pois $c \leq c_k < \phi(0) = 0$, a proposição 1.1.3, implica que K_c possui uma infinidade de pontos.

■

1.3 Aplicação a um problema com simetria Z_2

Consideremos o problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave. O funcional

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega u^4$$

está bem definido e, argumentando como no Apêndice A, vemos que $\phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e seus pontos críticos são soluções fracas de (P). Além disso, sendo ϕ par, ele é Z_2-invariante. Mostraremos que (P) possui uma infinidade de soluções.

Note que o funcional ϕ não é limitado inferiormente, pois fixando $u \in H_0^1(\Omega)$, com $\|u\| = 1$, obtemos

$$\phi(tu) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla tu|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (tu)^4 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{t^4}{4}\int u^4.$$

Assim quando $t \to \infty$, obtemos $\phi(tu) \to -\infty$. Ora, isso nos impossibilita de aplicar o Teorema 1.2.3 diretamente ao funcional ϕ. No entanto, tiraremos proveito do fato de a não-linearidade ser homogênea, e obteremos um funcional auxiliar que verifica as hipóteses do Teorema 1.2.3 e cujos pontos críticos estão em correspondência biunívoca com os pontos críticos de ϕ.

Consideremos o funcional

$$\psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$\psi(u) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^3 - \int_\Omega u^4 = \|u\|^6 - |u|_4^4$$

Note que ψ está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)(h) = 6\|u\|^4 \int_\Omega \nabla u \nabla h - 4 \int_\Omega u^3 h,$$

$\forall u, h \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto,

$$\nabla\psi(u) = 6\|u\|^4 u - T(u),$$

com

$$T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega),$$

sendo o operador compacto definido pela igualdade

$$(Tu, v) = 4 \int_\Omega u^3 v,$$

onde $(.,.)$ denota o produto interno de $H_0^1(\Omega)$.

O funcional ψ está associado ao problema

$$(P_A) \begin{cases} -6\|u\|^4 \Delta u = 4u^3 & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Mostraremos que ψ é limitado inferiormente. De fato, segue-se das imersões de Sobolev que

$$\psi(u) = \|u\|^6 - |u|_4^4 \geq \|u\|^6 - C_1\|u\|_4^4.$$

Assim, quando $\|u\| \to \infty$, teremos $\psi(u) \to \infty$. Ou seja, ψ é coercivo e portanto limitado inferiormente.

Veremos agora que ψ satisfaz a condição $(PS)_c$. Para isso, seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\psi(u_n) \to c \;\text{ e }\; \psi'(u_n) \to 0.$$

Assim, existe $C_2 > 0$ tal que

$$C_2 \geq \psi(u_n) \geq \|u_n\|^6 - C_1\|u_n\|^4, \tag{1.14}$$

como $\psi'(u_n) \to 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ então

$$\nabla\psi(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$6\|u_n\|^4 u_n - T(u_n) \to 0. \tag{1.15}$$

De (1.14) concluímos que $(\|u_n\|)$ é limitada. Logo, passando a uma subseqüência temos que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

e

$$\|u_n\| \to a \geq 0.$$

Se $a = 0$, então $u_n \to 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Agora, se $a > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n\| > 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí, podemos escrever

$$u_n = \frac{1}{6\|u_n\|^4}\{6\|u_n\|^4 u_n - T(u_n) + T(u_n)\}.$$

De (1.15), segue que

$$u_n \to \frac{1}{6a^4} \cdot T(u) \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega).$$

Mostraremos agora a relação existente entre pontos críticos de ψ e de ϕ.

Proposição 1.3.1 *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico não-nulo de ψ então*

$$v = \frac{2u}{\sqrt{6}\|u\|^2}$$

é ponto crítico não-nulo de ϕ.

Demonstração:

Observe que $u \neq 0$ é ponto crítico de ψ se, e somente se, u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -6\|u\|^4 \Delta u = 4u^3 & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

isto é,

$$6 \parallel u \parallel^4 \int \nabla u \nabla h = 4 \int u^3 h, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

Daí, sendo $v = \frac{2u}{\sqrt{6}\|u\|^2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi'(v)h &= \int \nabla v \nabla h - \int v^3 h \\ &= \frac{2}{\sqrt{6} \parallel u \parallel^2} \int \nabla u \nabla h - \frac{8}{\left(\sqrt{6}\right)^3 \parallel u \parallel^6} \int u^3 h. \end{aligned}$$

De (1.16), segue-se que

$$\begin{aligned} \phi'(v)h &= \frac{2}{\sqrt{6} \parallel u \parallel^2} \int \nabla u \nabla h - \frac{2}{6\sqrt{6} \parallel u \parallel^6} \left(6 \parallel u \parallel^4 \int \nabla u \nabla h\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{6} \parallel u \parallel^2} \int \nabla u \nabla h - \frac{2}{\sqrt{6} \parallel u \parallel^2} \int \nabla u \nabla h \\ &= 0, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Mostrando que v é ponto crítico de ϕ.

■

Teorema 1.3.1 *O problema (P) possui uma infinidade de soluções.*

Demonstração:

Observemos primeiramente que ψ é par

$$\begin{aligned}
\psi(-u) &= \|-u\|^6 - |-u|_4^4 \\
&= \|u\|^6 - |u|_4^4 \\
&= \psi(u) \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Já vimos que

- ψ é limitado inferiormente.
- ψ satisfaz $(PS)_c$.
- $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Agora, veremos que dado $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, existe um conjunto compacto, simétrico $K \in \mathcal{A}$ tal que

$$\gamma(K) = k \ \text{ e } \ \sup_k \psi < 0.$$

De fato, seja X_k o subespaço gerado por k autofunções, as quais pertecem respectivamente aos k primeiros autoespaços do problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right. .$$

Como $\dim X_k = k < \infty$ e

$$X_k \subset L^4(\Omega),$$

existe $a > 0$ tal que

$$a|u|_4 \leq \|u\| \leq \frac{1}{a}|u|_4.$$

Com efeito, sendo $\dim X_k < \infty$ existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1|u|_4 \leq \|u\| \leq C_2|u|_4, \quad \forall u \in X_k,$$

ver [21], tome $a > 0$ tal que

$$a < C_1 \ \text{ e } \ \frac{1}{a} > C_2$$

ou seja

$$0 < a < C_1 \ \text{ e } \ 0 < a < \frac{1}{C_2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \|u\|^6 - |u|_4^4 \\ &\leq \frac{1}{a}|u|_4^6 - |u|_4^4 \\ &= |u|_4^4 \left(\frac{1}{a}|u|_4^2 - 1 \right), \end{aligned}$$

assim, se

$$0 < |u|_4^2 < \frac{a}{2} := \delta^2,$$

obtemos

$$\psi(u) \leq -\frac{1}{2}|u|_4^4 < 0.$$

Portanto definindo o conjunto

$$K = \{u \in X_k : \frac{a\delta}{2} \leq \|u\| \leq a\delta\},$$

temos que $K \in \mathcal{A}$ e $\sup \psi < 0$, pois K é fechado e simétrico e

$$\frac{a\delta}{2} \leq \|u\| \leq a\delta$$

implica

$$\frac{a\delta}{2} \leq \frac{1}{a}|u|_4 \;\text{ e }\; a|u|_4 \leq a\delta,$$

ou seja

$$\frac{a^2}{2}\delta \leq |u|_4 \leq \delta.$$

Donde

$$4\delta^{10} = \frac{a^4}{4}\delta^2 \leq |u|_4^2 \leq \delta^2.$$

Logo, $\psi(u) = -\frac{1}{2}|u|_4^4 < 0$.

Além disso, como X_k é isomorfo a $\mathbb{R}^k$, podemos identificar K com um anel $\tilde{K}$ de $\mathbb{R}^k$ e as inclusões

$$S^{k-1} \subset \tilde{K} \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$$

mostram que

$$\gamma(S^{k-1}) \leq \gamma(\tilde{K}) \leq \gamma(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}),$$

isto é,

$$k \leq \gamma(\tilde{K}) \leq k.$$

Portanto $\gamma(\tilde{K}) = k$ e consequentemente $\gamma(K) = k$, pois se

$$\varphi : \mathbb{R}^k \longrightarrow X_k$$

é um isomorfismo, $A \subset \mathbb{R}^k$ e $B \subset X_k$ são tais que

$$\varphi(A) = B \;\text{ e }\; \gamma(A) = k,$$

então existe uma aplicação ímpar

$$\xi \in C(A, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}),$$

logo

$$\xi \circ \varphi^{-1}|_B \in C(B, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

é impar e

$$\gamma(B) \leq k.$$

Se fosse $\gamma(B) = j < k$ teríamos

$$f \in C(B, \mathbb{R}^j \setminus \{0\}),$$

e ímpar. Daí, existiria

$$f \circ \varphi \in C \quad (A, \mathbb{R}^j \setminus \{0\})$$

ímpar. Donde

$$\gamma(A) \leq j \leq k,$$

o que é um absurdo. Logo $\gamma(B) = k$.

Portanto, do Teorema de Clarke, existem pelo menos k pares distintos de pontos críticos para o funcional ψ. Como $k \in \mathbb{N}$ é arbitrário obtemos uma infinidade de pontos críticos para ψ e consequentemente uma infinidade de pontos críticos para o funcional ϕ. Mostrando que exitem infinitas soluções para o problema (P).

■

Proposição 1.3.2 *O funcional ψ possui no máximo um número finito de pontos críticos em cada subespaço de dimensão* 1.

Demonstração: Seja V um subespaço de dimensão 1 e suponha que ψ admite uma infinidade de pontos críticos

$$u_n = \alpha_n \cdot u,$$

onde $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de termos todos distintos e $u \neq 0$.

Assim

$$6\|\alpha_n u\|^4 \int_\Omega \nabla(\alpha_n u)\nabla h = 4\int_\Omega (\alpha_n u)^3 h, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Daí, para $h = \alpha_n u$, obtemos

$$6\|\alpha_n u\|^4 \|\alpha_n u\|^2 = 4 \mid \alpha_n u \mid_4^4$$

donde

$$6\alpha_n^6 \|u\|^6 = 4\alpha_n^4 |u|_4^4.$$

Assim

$$\alpha_n^6 = \frac{2|u|_4^4}{3\|u\|^6}\alpha_n^4.$$

Podemos supor que os α_n são todos não-nulos uma vez que são distintos. Logo,

$$\alpha_n^2 = C > 0.$$

Portanto, ou (α_n) é constante a partir de um determinado índice, ou (α_n) pode ser decomposto em duas subseqüências constantes. Os dois casos contradizem o fato de (α_n) ser uma sequência de termos todos distintos.

$\blacksquare$

Capítulo 2

O problema subcrítico

2.1 Os principais resultados

Neste capítulo estudaremos o problema

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2\right)\Delta u &= \alpha \mid u \mid^{q-2} u+ \mid u \mid^{p-2} u, \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q < 2 < p < 6$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave e M é uma função contínua.

Uma vez que estamos considerando $N = 3$, segue-se que o número 6 é o expoente crítico no Teorema de imersão de Sobolev, ver [7].

As hipóteses sobre M são as seguintes:

(M_1) existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \forall t \geq 0;$$

(M_2) existe $b > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = b;$$

(M_4)

$$M(t) \geq bt, \forall t \geq 0.$$

Observação 2.1.1 *Da hipótese* (M_2), *existe* $t^* > 0$ *tal que para* $t > t^*$, *teremos* $M(t) > \frac{b}{2}t$ *e portanto, obtemos* $c \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\widehat{M}(t) > c + \frac{b}{4}t^2,$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$. *Por outro lado, a hipótese* (M_4) *implica que*

$$\widehat{M}(t) \geq \frac{b}{2}t^2; \forall t \geq 0.$$

Um típico exemplo de função contínua verificando $(M_1), (M_2)$ *e* (M_4) *é exatamente a função*

$$M(t) = m_0 + bt; \forall t \geq 0,$$

a qual aparece na motivação física.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1.1 *Se* (M_1) *e* (M_2) *ocorrem e* $2 < p < 4$, *então o problema* (P_α) *possui infinitas soluções não-triviais para todo* $\alpha > 0$.

Teorema 2.1.2 *Se* (M_1) *ocorre e* $4 < p < 6$, *então existe* $\alpha^* > 0$ *tal que o problema* (P_α) *possui infinitas soluções não-triviais para todo* $0 < \alpha < \alpha^*$.

Teorema 2.1.3 *Se* (M_4) *ocorre e* $p = 4$, *então* (P_α) *possui infinitas soluções não-triviais quando*

$$b > \frac{1}{S_4^2},$$

onde

$$S_4 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\| u \|^2}{| u |_4^2}.$$

Tais resultados serão provados com o auxílio do Teorema 1.2.3.

Dizemos que $v \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P_α) se para cada $h \in H_0^1(\Omega)$

$$M(\| v \|^2) \int \nabla v \nabla h - \alpha \int | v |^{q-2} vh - \int | v |^{p-2} vh = 0,$$

onde $\| v \|^2 = \int | \nabla v |^2$. Por usar o método variacional, obteremos soluções fracas de (P_α) encontrando pontos críticos do funcional $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int | v |^q - \frac{1}{p} \int | v |^p,$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$, o qual está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ pois M é contínua e satisfaz (M_1) (ver Apêndice A). Note que

$$F'(v)h = M(\| v \|^2) \int \nabla v \nabla h - \alpha \int | v |^{q-2} vh - \int | v |^{p-2} vh,$$

para toda $h \in H_0^1(\Omega)$. Assim, pontos críticos de F são soluções fracas de (P_α).

2.2 O caso $2 < p < 4$

Lema 2.2.1 *O funcional F é limitado inferiormente.*

Demonstração:

De fato, de (M_2) e das imersões de Sobolev, segue-se que existe $t^* > 0$ tal que para $\| v \| > t^*$ obtemos

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int | v |^q - \frac{1}{p} \int | v |^p \\ &> \frac{b}{8} \| v \|^4 - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q - \frac{1}{pS_p^{\frac{p}{2}}} \| v \|^p + \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

sendo $1 < q < 2 < p < 4$, concluímos que F é coercivo e portanto é limitado inferiormente.

∎

Lema 2.2.2 *O funcional F é par.*

Demonstração:

Basta notar que

$$
\begin{aligned}
F(-v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| -v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | -v |^q - \frac{1}{p}\int | -v |^p \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q - \frac{1}{p}\int | v |^p \\
&= F(v), \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

■

Lema 2.2.3 *O funcional F satisfaz a condição Palais-Smale.*

Demonstração:

Seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale para o funcional F, isto é, $F(v_n) \to c$ e $F'(v_n) \to 0$. Sendo F coercivo, (v_n) será limitada, pois do contrário existiria uma subsequência (v_n) com

$$\| v_n \| \longrightarrow \infty,$$

como F é coercivo, teremos $F(v_n) \longrightarrow \infty$ o que é um absurdo. Segue-se da reflexividade de $H_0^1(\Omega)$ (ver Apêndice B) e das imersões compactas de Rellich-Kondrachov (ver [7]), que existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, obtemos

$$
\begin{aligned}
v_n &\rightharpoonup v, \quad em \quad H_0^1(\Omega), && (2.1)\\
v_n &\to v \quad em \quad L^r(\Omega), 1 < r < 6, && (2.2)\\
\| v_n \| &\to a. && (2.3)
\end{aligned}
$$

Logo

$$o_n(1) = F'(v_n)(v_n - v). \tag{2.4}$$

De (2.2), obtemos

$$\int | v_n |^{p-2} v_n(v_n - v) = o_n(1)$$

e

$$\alpha \int | v_n |^{q-2} v_n(v_n - v) = o_n(1),$$

o que implica

$$F'(v_n)(v_n - v) = M(\| v_n \|^2) \int \nabla v_n \nabla(v_n - v) + o_n(1),$$

e portanto, de (2.4) obtemos

$$M(\| v_n \|^2) \int \nabla v_n \nabla(v_n - v) = o_n(1).$$

Segue-se de (2.3), de (M_1) e da continuidade de M que

$$m_0 \leq M(\| v_n \|^2) \leq C,$$

para algum $C \in \mathbb{R}$. Assim

$$\int \nabla v_n \nabla(v_n - v) = o_n(1),$$

isto é,

$$\| v_n \|^2 - \int \nabla v_n \nabla v = o_n(1).$$

De (2.1) e (2.3) concluímos que

$$a = \| v \| .$$

Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, $\| v_n \| \to \| v \|$ e $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, concluímos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Mostrando que F verifica a condição Palais-Smale.

■

Lema 2.2.4 *Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $K \subset H_0^1(\Omega)$ compacto e simétrico tal que*

$$\gamma(K) = k \quad e \quad \sup_{v \in K} F(v) < F(0).$$

Demonstração:

Com efeito, seja $k \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente. Consideremos um subespaço de dimensão k

$$X_k = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$$

de $H_0^1(\Omega)$. Sendo $X_k \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensão finita, existe $C(k) > 0$ tal que

$$-C(k)\|v\|^q \geq -\int |v|^q, \quad \forall v \in X_k.$$

Logo, se $\|v\| \leq 1$ segue da continuidade de M e da desigualdade acima que existe $c > 0$, tal que

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|v\|^2) - \frac{\alpha}{q} \mid v \mid_q^q - \frac{1}{p} \mid v \mid_p^p \\ &\leq c\|v\|^2 - \frac{\alpha}{q} C(k)\|v\|^q. \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$F(v) \leq \|v\|^q \left\{ c\|v\|^{2-q} - \frac{\alpha}{q} C(k) \right\}.$$

Tomando $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\alpha}{q} C(k)$ temos que

$$c' = \frac{\alpha}{q} C(k) - \delta > 0$$

e

$$c\|v\|^{2-q} - \frac{\alpha}{q}C(k) < -\delta,$$

sempre que

$$c\|v\|^{2-q} < c'.$$

O que ocorre quando

$$\|v\| < \left(\frac{c'}{c}\right)^{\frac{1}{2-q}}.$$

Assim tomando $R = \min\left\{1, \left(\frac{c'}{c}\right)^{\frac{1}{2-q}}\right\}$, temos que, para $\|v\| < R$

$$F(v) \leq -\delta R^q < 0.$$

Definindo

$$K = \left\{v \in X_k : \| v \| = \frac{R}{2}\right\},$$

concluímos que K é compacto, pois é um subconjunto fechado e limitado de um espaço de dimensão finita, é simétrico, $\gamma(K) = k$ e

$$\sup_{v \in K} F(v) \leq -\delta R^q < 0 = F(0).$$

■

Teorema 2.2.1 *Se (M_1) e (M_2) ocorrem e $2 < p < 4$, então o problema (P_α) possui infinitas soluções não-triviais para todo $\alpha > 0$.*

Demonstração:

Dos Lemas que provamos acima, concluímos que o funcional F satisfaz as hipóteses do Teorema de Clarke. Logo, F admite pelo menos k pares de pontos críticos com energias negativas. Uma vez que k foi tomado arbitrariamente, concluímos que F possui uma infinidade de pontos críticos com energias negativas, mostrando que o problema (P_α) possui infinitas soluções não-triviais, qualquer que seja $\alpha > 0$.

Observação 2.2.1 *Ressaltamos que se vale apenas a hipótese (M_1) no caso anterior, ainda é possível garantir a existência de infinitas soluções quando o parâmetro α assume valores suficientemente pequenos. Para isso, basta proceder como no caso que se segue.*

■

2.3 O caso $4 < p < 6$

Neste caso, é possível que o funcional F não seja limitado inferiormente, com efeito, se tomarmos $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, como sendo $M(t) = m_0 + bt$, então fixando $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ com $\| v_0 \|= 1$, segue-se que para cada $t > 0$

$$\begin{aligned} F(tv_0) &= \frac{m_0}{2} \| tv_0 \|^2 + \frac{b}{4} \| tv_0 \|^4 - \frac{\alpha}{q} \int | tv_0 |^q - \frac{1}{p} \int | tv_0 |^p \\ &= \frac{m_0}{2} t^2 + \frac{b}{4} t^4 - \frac{\alpha}{q} \int | v_0 |^q \, t^q - \frac{1}{p} \int | v_0 |^p \, t^p. \end{aligned}$$

Sendo $4 < p < 6$, obtemos $F(tv_0) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e portanto não podemos aplicar o Teorema de Clarke diretamente ao funcional F, no entanto, contornaremos esta dificuldade definindo um outro funcional, que verifica as hipóteses do Teorema de Clarke e possui uma certa relação com o funcional F. Para isso, observemos que de (M_1) e das imersões contínuas de Sobolev

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2} \widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int | v |^q - \frac{1}{p} \int | v |^p \\ &\geq \frac{m_0}{2} \| v \|^2 - \frac{\alpha}{q S_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q - \frac{1}{p S_p^{\frac{p}{2}}} \| v \|^p \\ &= g(\| v \|^2), \end{aligned}$$

onde

$$g(t) = \frac{m_0}{2}t - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}}t^{\frac{q}{2}} - \frac{1}{pS_p^{\frac{p}{2}}}t^{\frac{p}{2}}.$$

Vejamos que existe $\alpha^* > 0$ tal que se $0 < \alpha < \alpha^*$, então g assume valores positivos. Com efeito, se

$$0 < t < \left(\frac{p}{2}m_0 S^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p-2}},$$

então

$$\frac{m_0}{2}t - \frac{1}{pS^{\frac{p}{2}}}t^{\frac{p}{2}} > 0.$$

Assim, pondo

$$\bar{t} = \left(m_0 S^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p-2}},$$

temos que

$$g(\bar{t}) = \frac{m_0}{2}\bar{t} - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}}\bar{t}^{\frac{q}{2}} - \frac{1}{pS^{\frac{p}{2}}}\bar{t}^{\frac{p}{2}} > 0$$

sempre que

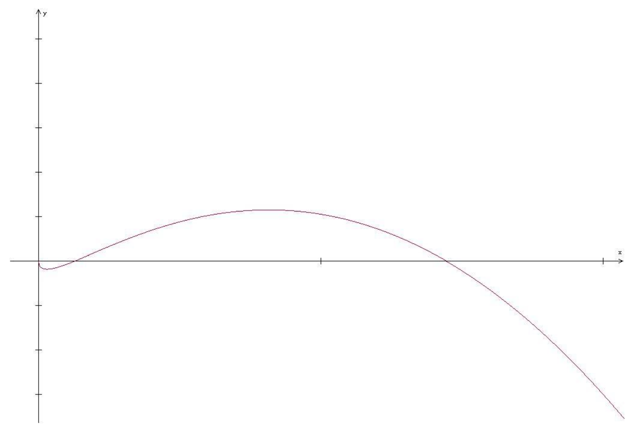
$$\frac{m_0}{2}\bar{t} - \frac{1}{pS^{\frac{p}{2}}}\bar{t}^{\frac{p}{2}} > \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}}\bar{t}^{\frac{q}{2}}$$

mas para que essa última desigualdade ocorra é suficiente tomarmos

$$0 < \alpha < \frac{qS_q^{\frac{q}{2}}}{\bar{t}^{\frac{q}{2}}}\left(\frac{m_0}{2}\bar{t} - \frac{1}{pS^{\frac{p}{2}}}\bar{t}^{\frac{p}{2}}\right) = \alpha^*.$$

Assim, para $0 < \alpha < \alpha^*$ o gráfico de g será da forma

Definamos agora o funcional auxiliar



$$J(v)=\frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2)-\frac{\alpha}{q}\int | v |^q -\frac{\Psi(\| v \|^2)}{p}\int | v |^p,$$

onde $\Psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, é não-crescente e

$$\Psi(t)=\begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \leq A_\alpha \\ 0, & \text{se} \quad t \geq B_\alpha \end{cases}$$

com A_α e B_α sendo as respectivas raízes da aplicação g. Observe que J está bem definido e $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Apêndice A), com

$$\begin{aligned} J'(v)h &= \left[M(\| v \|^2)-\frac{2}{p} | v |_p^p \, \Psi'(\| v \|^2)\right]\int \nabla v \nabla h \\ &- \Psi(\| v \|^2)\int | v |^{p-2} vh - \alpha\int | v |^{q-2} vh. \end{aligned}$$

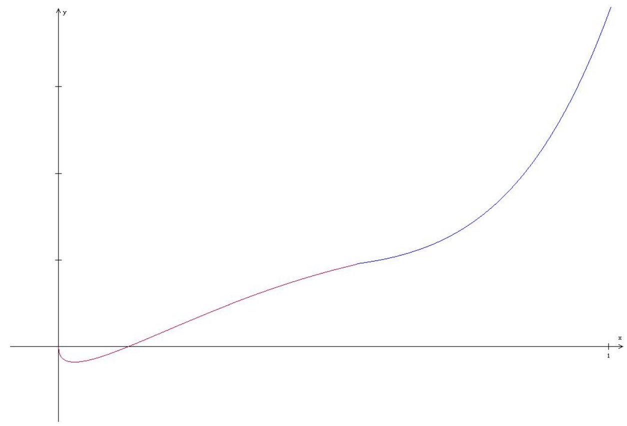
Além disso, de (M_1) e das imersões contínuas de Sobolev

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2)-\frac{\alpha}{q}\int | v |^q -\frac{\Psi(\| v \|^2)}{p}\int | v |^p \\ &\geq \frac{m_0}{2} \| v \|^2 -\frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q -\frac{\Psi(\| v \|^2)}{pS_p^{\frac{p}{2}}} \| v \|^p \\ &= \overline{g}(\| v \|^2), \end{aligned}$$

onde,

$$\overline{g}(t)=\frac{m_0}{2}t-\frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}}t^{\frac{q}{2}}-\frac{\Psi(t)}{pS_p^{\frac{p}{2}}}t^{\frac{p}{2}}.$$

O gráfico de $\overline{g}$ coincide com o gráfico de g quando $t \in [0, A_\alpha]$ e g é positiva no intervalo (A_α, ∞), conforme ilustra a figura abaixo.



Observe que

$$J(v) = F(v), \quad se \quad \| v \| \leq A_\alpha,$$

e

$$J(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q, \quad se \quad \| v \| \geq B_\alpha.$$

Agora, veremos que o funcional auxiliar J verifica as hipóteses do Teorema de Clarke.

Lema 2.3.1 *O funcional J é limitado inferiormente.*

Demonstração:

Sabemos que se $\| v \|^2 \geq B_\alpha$ então

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q \\ &\geq \frac{m_0}{2} \| v \|^2 - \frac{\alpha}{q S_q^{\frac{q}{2}}} \| u \|^q, \end{aligned}$$

sendo $1 < q < 2$, segue-se que J é coercivo e portanto é limitado inferiormente.

$\blacksquare$

Lema 2.3.2 *O funcional J verifica a condição Palais-Smale.*

Demonstração:

Seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $J(v_n) \to c$ e $J'(v_n) \to 0$. Como já vimos, sendo J coercivo, (v_n) será limitada. Daí, a menos de subsequência

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v, \quad em \quad H_0^1(\Omega); & (2.5)\\ v_n &\to v \quad em \quad L^r(\Omega), 1 < r < 6; & (2.6)\\ \| v_n \| &\to a, & (2.7) \end{aligned}$$

logo

$$o_n(1) = J'(v_n)(v_n - v). \tag{2.8}$$

De (2.6),

$$\Psi(\| v_n \|^2) \int | v_n |^{p-2} v_n(v_n - v) = o_n(1)$$

e

$$\alpha \int | v_n |^{q-2} v_n(v_n - v) = o_n(1).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} J'(v_n)(v_n - v) &= \left[M(\| v_n \|^2) - \frac{2}{p} | v_n |_p^p \Psi'(\| v_n \|^2) \right] \int \nabla v_n \nabla (v_n - v) \\ &+ o_n(1), \end{aligned}$$

e portanto, de (2.8) obtemos

$$\left[M(\| v_n \|^2) - \frac{2}{p} | v_n |_p^p \Psi'(\| v_n \|^2) \right] \int \nabla v_n \nabla (v_n - v) = o_n(1).$$

Segue de (M_1), da continuidade de M e do fato de $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ ser não-crescente, que existe $C > 0$ tal que

$$m_0 \leq \left[M(\| v_n \|^2) - \frac{2}{p} \mid v_n \mid_p^p \Psi'(\| v_n \|^2) \right] \leq C$$

e assim

$$\int \nabla v_n \nabla (v_n - v) = o_n(1),$$

isto é

$$\| v_n \|^2 - \int \nabla v_n \nabla v = o_n(1).$$

e portanto

$$a = \| v \| .$$

Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, $\| v_n \| \to \| v \|$ e $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, concluímos que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Mostrando que J verifica a condição Palais-Smale.

■

Lema 2.3.3 *O funcional J é par.*

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} J(-v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| -v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int \mid -v \mid^q - \frac{\Psi(\| -v \|^2)}{p} \int \mid -v \mid^p \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int \mid v \mid^q - \frac{\Psi(\| v \|^2)}{p} \int \mid v \mid^p \\ &= J(v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

■

Lema 2.3.4 *Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $K \subset H_0^1(\Omega)$ compacto e simétrico tal que*

$$\gamma(K) = k \quad e \quad \sup_K J < J(0) = 0.$$

Demonstração:

Consideremos um subespaço de dimensão k

$$X_k = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$$

de $H_0^1(\Omega)$. Sendo $X_k \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensão finita, existe $C(k) > 0$ tal que

$$-C(k)\|v\|^q \geq -\int |v|^q, \quad \forall v \in X_k.$$

tomando $\overline{\rho} > 0$ tal que para $0 <\| v \|= \overline{\rho}$, tenhamos $0 <\| v \|^2< A_\alpha$, temos que

$$J(v) = F(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \mid v \mid_q^q - \frac{1}{p} \mid v \mid_p^p .$$

Daí procedendo exatamente como na prova do Lema 2.2.4 podemos obter $R > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$F(v) < -\delta R^q,$$

para todo $v \in X_k$ com $\| v \|= \frac{R}{2}$. Assim, tomando $a = \min\{\overline{\rho}, \frac{R}{2}\}$, segue-se que

$$J(v) = F(v) < -\delta a^q$$

para todo $v \in X_k$ com $\| v \|= a$.

Definindo

$$K = \left\{ v \in X_k :\| v \|= \frac{a}{2} \right\},$$

concluímos que K é compacto, simétrico, $\gamma(K) = k$ e

$$\sup_{v \in K} J(v) \leq -\delta a^q < 0 = J(0).$$

■

Agora estamos em condições de provar o

Teorema 2.3.1 *Se (M_1) ocorre e $4 < p < 6$, então existe $\alpha^* > 0$ tal que o problema (P_α) possui infinitas soluções não-triviais para todo $0 < \alpha < \alpha^*$.*

Demonstração:

Dos lemas que provamos anteriormente, concluímos que J verifica as hipóteses do Teorema de Clarke e portanto existem, para cada $k \in \mathbb{N}$, pelo menos k pares de pontos críticos com energia negativa para o funcional J, isto é, J possui infinitos pontos críticos com energia negativa.

Portanto, para cada ponto crítico v de J obtido pelo Teorema de Clarke, temos que $\overline{g}(\| v \|^2) \leq J(v) < 0$ e daí, $\| v \|^2 < A_\alpha$ e $J(v) = F(v)$. Mais geralmente, da continuidade de J, concluímos que existe um aberto U contendo v tal que $J(u) < 0$ para todo $u \in U$. Daí, concluímos que $J(u) = F(u) < 0$ para todo $u \in U$.

Ora, isso nos diz que $F'(v) = J'(v) = 0$. Mostrando que cada ponto crítico de J obtido acima é ponto crítico de F e portanto, se ocorre (M_1) e $4 < p < 6$ o problema (P_α) possui infinitas soluções não-triviais quando $0 < \alpha < \alpha^*$.

$\blacksquare$

2.4 O caso $p = 4$

Lema 2.4.1 *O funcional F é limitado inferiormente.*

Demonstração:

De (M_4), temos que

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q - \frac{1}{4}\int | v |^4 \\ &\geq \frac{b}{4} \| v \|^4 - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q - \frac{1}{4S_4^2} \| v \|^4 \\ &= \frac{1}{4}\left(b - \frac{1}{S_4^2}\right) \| v \|^4 - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q, \end{aligned}$$

sendo $b > \frac{1}{S_4^2}$ e $1 < q < 2$, concluímos que F é coercivo e, por ser contínuo, é limitado inferiormente.

$\blacksquare$

Repetindo os mesmos argumentos dos Lemas 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 é possível provar os Lemas abaixo

Lema 2.4.2 *O funcional F é par.*

Lema 2.4.3 *O funcional F verifica a condição Palais-Smale.*

Lema 2.4.4

Dado $k \in \mathbb{N}$ existe $K \subset H_0^1(\Omega)$ compacto e simétrico tal que

$$\gamma(K) = k \quad e \quad \sup_K F < F(0) = 0.$$

Agora estamos em condições de provar o

Teorema 2.4.1 *Se (M_4) ocorre e $p = 4$, então (P_α) possui infinitas soluções não-triviais quando*

$$b > \frac{1}{S_4^2},$$

onde

$$S_4 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\| u \|^2}{| u |_4^2}.$$

Demonstração:

Dos Lemas acima, segue que o funcional F satisfaz as hipóteses do Teorema de Clarke, logo F possui uma infinidade de pontos críticos com energias negativas, mostrando que o problema (P_α) possui infinitas soluções não-triviais quando

$$b > \frac{1}{S_4^2}.$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

O problema crítico

3.1 O principal resultado

Neste capítulo estudaremos o problema

$$(P_\alpha)\begin{cases} -M\left(\int_\Omega \mid \nabla u \mid^2\right)\Delta u &= \alpha \mid u \mid^{q-2} u + \mid u \mid^4 u, \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \partial\Omega \end{cases}$$

onde $1 < q < 2$, $\alpha > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave e M é uma função contínua. Observe que sendo $N = 3$ o número 6 é o expoente crítico da imersão de Sobolev.

As hipóteses satisfeitas por M são as seguintes:

(M_1) existe $m_0 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0, \forall t \geq 0;$$

(M_3) existe $4 < \theta < 6$ tal que

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(t^2) - \frac{1}{\theta}M(t^2)t^2 \geq 0;$$

Observação 3.1.1 *Um típico exemplo de função contínua satisfazendo (M_1) e (M_3) é a função*

$$M(t) = m_0 + bt, \forall t \geq 0,$$

onde $m_0 > 0$ e $b > 0$. Tal função é exatamente aquela que aparece originalmente no trabalho de Kirchhoff [20].

O principal resultado que veremos neste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.1.1 *Se (M_1) e (M_3) ocorrem, então existe $\alpha^* > 0$ tal que o problema (P_α) admite infinitas soluções não-triviais quando $0 < \alpha < \alpha^*$.*

Este Teorema será provado com o auxílio de um Lema de Multiplicidade.

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P_α) se para cada $h \in H_0^1(\Omega)$

$$M(\| u \|^2) \int \nabla u \nabla h - \alpha \int | u |^{q-2} uh - \int | u |^4 uh = 0,$$

onde $\| u \|^2 = \int_\Omega | \nabla u |^2$. Por usar o método variacional, obteremos soluções fracas de (P_α) encontrando pontos críticos do funcional $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| u \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | u |^q - \frac{1}{6}\int | u |^6,$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$. F está bem definido e é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ pois M é contínua e satisfaz (M_1) (ver Apêndice A). Note que

$$F'(u)h = M(\| u \|^2) \int \nabla u \nabla h - \alpha \int | u |^{q-2} uh - \int | u |^4 uh,$$

para toda $h \in H_0^1(\Omega)$. Assim, pontos críticos de F são soluções fracas de (P_α).

Não é possível aplicar o Teorema de Clarke, como fizemos anteriormente, diretamente ao funcional F, pois o mesmo pode não ser limitado inferiormente. Logo, procederemos como no caso $4 < p < 6$, definindo um funcional truncado J que é limitado inferiormente. No entanto, ainda não poderemos aplicar o Teorema de Clarke ao funcional J, como fizemos no caso $4 < p < 6$, uma vez que, neste caso, o funcional truncado verifica apenas uma condição Palais-Smale local. No entanto, argumentando como em [5], obteremos determinados pontos críticos de J os quais também são pontos críticos de F.

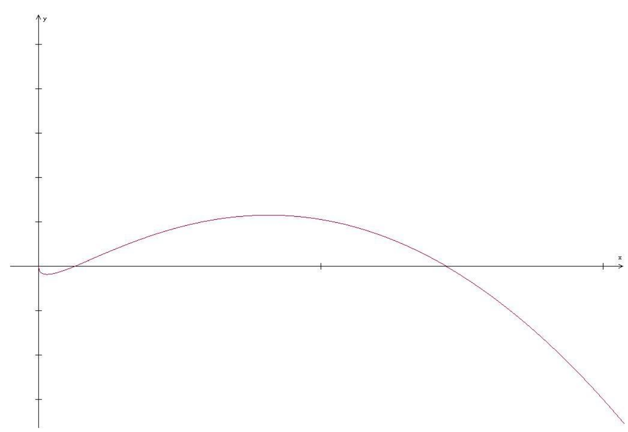
Note que , de (M_1) e das imersões de Sobolev

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| u \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | u |^q - \frac{1}{6}\int | u |^6 \\ &\geq \frac{m_0}{2} \| u \|^2 - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}} \| u \|^q - \frac{1}{6S^3} \| u \|^6 \\ &= g(\| u \|^2), \end{aligned}$$

onde

$$g(t) = \frac{m_0}{2}t - \frac{\alpha}{qS_q^{\frac{q}{2}}}t^{\frac{q}{2}} - \frac{1}{6S^3}t^3.$$

Observação 3.1.2 *Argumentando como no caso $4 < p < 6$, vemos que existe $\alpha^* > 0$ tal que se $0 < \alpha < \alpha^*$, então g assume valores positivos. Assim, para $0 < \alpha < \alpha^*$ o gráfico de g será da forma*



Definamos então o funcional auxiliar

$$J(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q - \frac{\Psi(\| v \|^2)}{6}\int | v |^6,$$

onde $\Psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, é não-crescente e

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \leq A_\alpha \\ 0, & \text{se} \quad t \geq B_\alpha \end{cases}$$

com A_α e B_α sendo as respectivas raízes de g. Observe que J está bem definido e $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (ver Apêndice A), com

$$
\begin{aligned}
J'(v)h &= \left[M(\| v \|^2) - \frac{1}{3} \mid v \mid_6^6 \Psi'(\| v \|^2)\right] \int \nabla v \nabla h \\
&- \Psi(\| v \|^2) \int \mid v \mid^4 vh - \alpha \int \mid v \mid^{q-2} vh.
\end{aligned}
$$

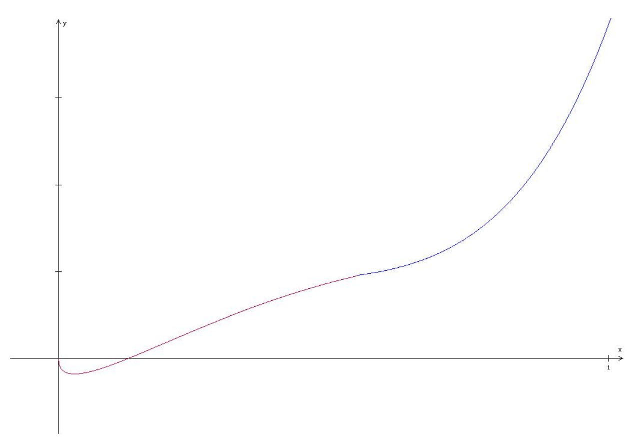
Além disso, de (M_1) e das imersões contínuas de Sobolev

$$
\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \int \mid v \mid^q - \frac{\Psi(\| v \|^2)}{6} \int \mid v \mid^6 \\
&\geq \frac{m_0}{2} \| v \|^2 - \frac{\alpha}{q S_q^{\frac{q}{2}}} \| v \|^q - \frac{\Psi(\| v \|^2)}{6S^3} \| v \|^6 \\
&= \overline{g}(\| v \|^2),
\end{aligned}
$$

onde,

$$
\overline{g}(t) = \frac{m_0}{2} t - \frac{\alpha}{q S_q^{\frac{q}{2}}} t^{\frac{q}{2}} - \frac{\Psi(t)}{6S^3} t^3.
$$

O gráfico de $\overline{g}$ coincide com o gráfico de g quando $t \in [0, A_\alpha]$ e g é positiva em $[A_\alpha, \infty)$. Conforme a figura abaixo.



Observe que

$$J(v) = F(v), \quad se \quad \| v \|^2 \leq A_\alpha,$$

e

$$J(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q}\int | v |^q, \quad se \quad \| v \|^2 \geq B_\alpha.$$

No que segue mostraremos que J verifica uma condição Palais-Smale local.

3.2 A condição Palais-Smale

O próximo Lema é de fundamental importância na obtenção de uma condição Palais-Smale local para o funcional truncado J.

Lema 3.2.1 *Seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência Palais-Smale limitada para o funcional F. Se*

$$c < C_1 \left(m_0 S\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{C_2^{\frac{6}{6-q}}}{C_1^{\frac{6}{6-q}}} C_q \alpha^{\frac{6}{6-q}},$$

onde $C_1 = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6}$, $C_2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right) | \Omega |^{\frac{6-q}{6}}$ e $C_q = \left(\frac{q}{6}\right)^{\frac{6}{6-q}} - \left(\frac{q}{6}\right)^{\frac{q}{6-q}}$ são constantes positivas. Então existem uma subsequência $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$v_n \to v \quad em \quad H_0^1(\Omega).$$

Demonstração: Seja (v_n) uma sequência Palais-Smale para F, limitada, isto é

$$F(v_n) \longrightarrow c \ \text{ e } \ F'(v_n) \longrightarrow 0 \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Segue-se, da reflexividade de $H_0^1(\Omega)$, das imersões de Rellich-Kondrachov e do Lema 2.0.4(ver Apêndice B) que, a menos de susequência, vale

$$v_n \rightharpoonup v \;\text{ fracamente em }\; H_0^1(\Omega) \tag{3.1}$$

$$v_n \to v \;\text{ em }\; L^r(\Omega),\;\; 1 \leq r < 6 \tag{3.2}$$

$$v_n(x) \to v(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega \tag{3.3}$$

$$| v_n(x) | \leq h(x) \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega, h \in L^2(\Omega) \tag{3.4}$$

$$\| v_n \| \to a, \;\text{ em }\; \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Por outro lado, do Lema de concentração e compacidade de Lions (ver Apêndice B), temos que existem duas famílias $(\mu_j)_{j\in\Lambda}$ e $(\nu_j)_{j\in\Lambda}$ de números reais não-negativos e uma família $(x_j)_{j\in\Lambda}$ de pontos do $\mathbb{R}^N$, onde Λ é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que

$$| \nabla v_n |^2 \rightharpoonup \tilde{\mu} \geq | \nabla v |^2 + \mu \tag{3.6}$$

$$| v_n |^6 \rightharpoonup \tilde{\nu} = | v |^6 + \nu, \tag{3.7}$$

onde,

$$\mu = \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \delta_{x_j} \;\text{ e }\; \nu = \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \delta_{x_j}.$$

Fixemos $k \in \Lambda$ e consideremos a aplicação $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1, \; \forall x \in \mathbb{R}^3$, $| \nabla\phi | \leq 2$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(0,1) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash B(0,2). \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$, defina

$$\varphi_\epsilon(x) = \phi\left(\frac{x - x_k}{\epsilon}\right)$$

assim $\varphi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq \varphi_\epsilon(x) \leq 1, \; \forall x \in \mathbb{R}^3$, $| \nabla\varphi_\epsilon | \leq \frac{2}{\epsilon}$ e

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(x_k,\epsilon) \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \backslash B(x_k, 2\epsilon). \end{cases}$$

Observe que a sequência $(\varphi_\epsilon v_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned}
\| \varphi_\epsilon v_n \|^2 &= \int | \nabla(\varphi_\epsilon v_n) |^2 \\
&= \int | \nabla\varphi_\epsilon v_n + \varphi_\epsilon \nabla v_n |^2 \\
&\leq 4\int | \nabla\varphi_\epsilon v_n |^2 + 4\int | \varphi_\epsilon \nabla v_n |^2 \\
&\leq 4\int | \nabla\varphi_\epsilon |^2 | v_n |^2 + 4 \| v_n \|^2 .
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{3}{2}$ e 3 temos

$$\| \varphi_\epsilon v_n \|^2 \leq 4 \mid \nabla\varphi_\epsilon |_3^2 | v_n |_6^2 + 4 \| v_n \|^2$$

e da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, obtemos

$$\| \varphi_\epsilon v_n \|^2 \leq C(\epsilon) \| v_n \|^2 .$$

Desde que (v_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que $(\varphi_\epsilon v_n)$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$.

Sendo (v_n) uma sequência Palais-Smale

$$F'(v_n)(\varphi_\epsilon v_n) = o_n(1),$$

ou seja,

$$M(\| v_n \|^2) \int \nabla v_n \nabla(\varphi_\epsilon v_n) - \int | v_n |^4 v_n(\varphi_\epsilon v_n) - \alpha \int | v_n |^{q-2} v_n(\varphi_\epsilon v_n) = o_n(1),$$

logo

$$M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla\varphi_\epsilon = \int | v_n |^6 \varphi_\epsilon + \alpha \int | v_n |^q \varphi_\epsilon - M(\| v_n \|^2) \int | \nabla v_n |^2 \varphi_\epsilon + o_n(1).$$

Do Lema de concentração e compacidade de Lions (ver Apêndice B) e da hipótese (M_1), segue-se que

$$
\begin{aligned}
M(\| v_n \|^2)\int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon &\leq \int | v |^6 \varphi_\epsilon + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \delta_{x_j}(\varphi_\epsilon) + \alpha \int | v_n |^q \varphi_\epsilon \\
&- m_0 \int | \nabla v |^2 \varphi_\epsilon - m_0 \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \delta_{x_j}(\varphi_\epsilon) + o_n(1),
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
M(\| v_n \|^2)\int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon &\leq \int | v |^6 \varphi_\epsilon + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \varphi_\epsilon(x_j) + \alpha \int | v_n |^q \varphi_\epsilon \\
&- m_0 \int | \nabla v |^2 \varphi_\epsilon - m_0 \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \varphi_\epsilon(x_j) + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\alpha \int | v_n |^q \varphi_\epsilon = \alpha \int | v |^q \varphi_\epsilon + o_n(1).
$$

De fato, do Lema (2.0.4) (ver Apêndice B), temos que

$$
| v_n(x) |^q \varphi_\epsilon \longrightarrow | v(x) | \varphi_\epsilon \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega
$$

e

$$
| v_n(x) |^q \varphi_\epsilon = | v_n(x) |^q \varphi_\epsilon \leq g^q \varphi_\epsilon \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega,
$$

com $g^q \varphi_\epsilon \in L^1(\Omega)$. Assim, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice B), obtemos

$$
\alpha \int | v_n |^q \varphi_\epsilon = \alpha \int | v |^q \varphi_\epsilon + o_n(1).
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
M(\| v_n \|^2)\int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon &\leq \int | v |^6 \varphi_\epsilon + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \varphi_\epsilon(x_j) + \alpha \int | v |^q \varphi_\epsilon \\
&- m_0 \int | \nabla v |^2 \varphi_\epsilon - m_0 \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \varphi_\epsilon(x_j) + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Passando ao limite superior de $n \to \infty$, teremos

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon &\leq \int | v |^6 \varphi_\epsilon + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \varphi_\epsilon(x_j) + \alpha \int | v |^q \varphi_\epsilon \\ &- m_0 \int | \nabla v |^2 \varphi_\epsilon - m_0 \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \varphi_\epsilon(x_j).\end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$\int | v |^6 \varphi_\epsilon = o_\epsilon(1), \quad \alpha \int | v |^q \varphi_\epsilon = o_\epsilon(1) \ \ e \ \ m_0 \int | \nabla v |^2 \varphi_\epsilon = o_\epsilon(1). \tag{3.8}$$

Para isso, basta notar que, quando $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned}| v(x) |^6 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ | v(x) |^q \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ m_0 | \nabla v(x) |^2 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}| v(x) |^6 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\leq | v(x) |^6, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ | v(x) |^q \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\leq | v(x) |^q, \quad \text{q.t.p. em } \Omega, \\ m_0 | \nabla v(x) |^2 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) &\leq m_0 | \nabla v(x) |^2, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.\end{aligned}$$

Assim, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver apêndice B), concluímos as convergências em (3.8). Portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon\right] \leq \lim_{\epsilon\to 0}\left[\sum_{j\in\Lambda} \nu_j \varphi_\epsilon(x_j) - m_0 \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \varphi_\epsilon(x_j)\right]. \tag{3.9}$$

Mostraremos agora que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon\right] = 0.$$

De fato, uma vez que para cada $n \in \mathbb{N}$, $| \nabla v_n | \in L^2(\Omega)$ e $| v_n \nabla \varphi_\epsilon | \in L^2(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Holder que

$$\begin{aligned} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon &\leq \left| M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \right| \\ &\leq M(\| v_n \|^2) \int | v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon | \\ &\leq M(\| v_n \|^2) \| v_n \| \left(\int | v_n |^2 | \nabla \varphi_\epsilon |^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

sendo (v_n) limitada, M contínua e $supp(\varphi_\epsilon) \subset B(x_k, 2\epsilon)$, existe $C > 0$ tal que

$$M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \leq C \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} | v_n |^2 | \nabla \varphi_\epsilon |^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

Pondo $f_n(x) = | v_n(x) |^2 | \nabla \varphi_\epsilon(x) |^2$, segue-se de (3.3) e (3.4) que

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{e} \quad | f_n(x) | \leq h(x)^2 \, | \nabla \varphi_\epsilon(x) |^2 \in L^1(\Omega), \quad \text{q.t.p. em} \quad B(x_k, 2\epsilon),$$

onde $f(x) = | v(x) |^2 | \nabla \varphi_\epsilon(x) |^2$. Assim, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice B)

$$\lim_{n \to \infty} \int_{B(x_k,2\epsilon)} | v_n |^2 | \nabla \varphi_\epsilon |^2 = \int_{B(x_k,2\epsilon)} | v |^2 | \nabla \varphi_\epsilon |^2 . \tag{3.11}$$

Logo, de (3.10) e (3.11) concluímos que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \leq C \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} | v |^2 | \nabla \varphi_\epsilon |^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Uma vez que $| v |^2 \in L^3(\Omega)$ e $| \nabla \varphi_\epsilon |^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, teremos novamente da desigualdade de Holder que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \leq C \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} | v |^6 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} | \nabla \varphi_\epsilon |^3 \right)^{\frac{2}{3}} . \tag{3.12}$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial \varphi_\epsilon(x)}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\left(\frac{x - x_k}{\epsilon}\right).$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{x-x_k}{\epsilon}$, obtemos

$$\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} \mid \nabla \varphi_\epsilon \mid^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\int_{B(0,2)} \mid \nabla \phi \mid^3\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Substituindo esta última igualdade em (3.12), obtemos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \leq C\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} \mid v \mid^6\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{B(0,2)} \mid \nabla \phi \mid^3\right)^{\frac{2}{3}},$$

ou seja,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon \leq C\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} \mid v \mid^6\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Finalmente, definindo $f_\epsilon(x) = \mid v(x) \mid^6 \chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x)$, temos que

$$f_\epsilon(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

quando $\epsilon \to 0$ e

$$\mid f_\epsilon(x) \mid \leq \mid v(x) \mid^6 \in L^1(\Omega).$$

Portanto, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice B)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{B(x_k,2\epsilon)} \mid v \mid^6\right)^{\frac{1}{3}} = 0,$$

e consequentemente

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} M(\| v_n \|^2) \int v_n \nabla v_n \nabla \varphi_\epsilon\right] = 0.$$

Daí, de (3.9), obtemos

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{j \in \Lambda} \nu_j \varphi_\epsilon(x_j) - m_0 \sum_{j \in \Lambda} \mu_j \varphi_\epsilon(x_j) \right),$$

ou seja,

$$0 \leq \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{B(x_k, 2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\nu - m_0 \int_{B(x_k, 2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\mu \right).$$

Agora, veremos que

$$\int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\nu = \int_{\{x_k\}} d\nu + o_\epsilon(1) \text{ e } m_0 \int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\mu = m_0 \int_{\{x_k\}} d\mu + o_\epsilon(1).$$

Com efeito, temos que

$$\int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\nu = \int \varphi_\epsilon \chi_{B(x_k,2\epsilon)} d\nu \;\; e \;\; m_0 \int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\mu = m_0 \int \varphi_\epsilon \chi_{B(x_k,2\epsilon)} d\mu,$$

onde,

$$\varphi_\epsilon(x) \chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) \longrightarrow \chi_{\{x_k\}}(x) \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \Omega$$

quando $\epsilon \to 0$, e

$$\mid \varphi_\epsilon(x) \chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) \mid \leq 1 \;\; \text{q.t.p. em} \;\; \Omega.$$

Sendo Ω um domínio limitado, concluímos que $1 \in L^1(\nu)$ e $1 \in L^1(\mu)$. Logo, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice B), resulta que

$$\int \varphi_\epsilon \chi_{B(x_k,2\epsilon)} d\nu = \int \chi_{\{x_k\}} d\nu + o_\epsilon(1) \;\; e \;\; \int \varphi_\epsilon \chi_{B(x_k,2\epsilon)} d\mu = \int \chi_{\{x_k\}} d\mu + o_\epsilon(1),$$

isto é,

$$\int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\nu = \int_{\{x_k\}} d\nu + o_\epsilon(1) \;\; e \;\; m_0 \int_{B(x_k,2\epsilon)} \varphi_\epsilon d\mu = m_0 \int_{\{x_k\}} d\mu + o_\epsilon(1).$$

Sendo assim, obtemos

$$0 \leq \int_{\{x_k\}} d\nu - m_0 \int_{\{x_k\}} d\mu.$$

Logo,

$$m_0 \int_{\{x_k\}} d\mu \leq \int_{\{x_k\}} d\nu,$$

e portanto, vale

$$m_0\mu(\{x_k\}) \leq \nu(\{x_k\}). \tag{3.13}$$

Por outro lado, temos

$$\nu(\{x_k\}) = \sum_{i\in\Lambda} \nu_i \delta_{x_i}(\{x_k\}) = \nu_k$$

e

$$\mu(\{x_k\}) = \sum_{i\in\Lambda} \mu_i \delta_{x_i}(\{x_k\}) = \mu_k.$$

Ou seja,

$$\nu(\{x_k\}) = \nu_k \ \text{ e } \ \mu(\{x_k\}) = \mu_k.$$

Do Lema concentração e compacidade de Lions (ver Apêndice B), segue-se que

$$\mu_j \geq S\nu_j^{\frac{1}{3}}, \forall j \in \Lambda. \tag{3.14}$$

Assim, comparando as desigualdades em (3.13) e (3.14), concluímos que

$$\nu_k \geq m_0\mu_k \geq S\nu_k^{\frac{1}{3}} m_0,$$

e portanto, supondo que $\nu_k = \nu(\{x_k\}) > 0$, obtemos

$$\nu_k^{\frac{2}{3}} \geq S m_0.$$

Sendo assim

$$\nu_k \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.15}$$

Logo, a desigualdade em (3.15) ocorre para todo índice $k \in \Lambda$ tal que ν_k e μ_k são positivos.

Argumentaremos agora com o intuito de mostrar que o conjunto de índices Λ é vazio, isto é, os números ν_j e μ_j são todos nulos. De fato, suponhamos por contradição que exista uma infinidade de índices $k \in \Lambda$ para os quais ν_k e μ_k sejam positivos. Assim, de (3.15), a sequência (ν_k) não convergirá para zero e portanto a série

$$\sum_{k\in\Lambda} \nu_k^{\frac{1}{3}}$$

divergirá, contradizendo o Lema de concentração e compacidade de Lions (ver Apêndice B). Desta forma, concluímos que Λ é vazio ou finito.

Vejamos que Λ é vazio. Se Λ fosse não-vazio existiria $k_0 \in \Lambda$ tal que

$$\nu_{k_0} \geq (m_0 S)^{\frac{3}{2}} \geq C_1 (m_0 S)^{\frac{3}{2}},$$

onde $0 < C_1 = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{6} < 1$. Observe que

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &= F(v_n) - \frac{1}{\theta} F'(v_n) v_n \\
&= \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v_n \|^2) - \frac{1}{\theta} M(\| v_n \|^2) \| v_n \|^2 - \alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right) \int | v_n |^q + C_1 \int | v_n |^6
\end{aligned}$$

de (M_3) e da definição de φ_ϵ, obtemos

$$c + o_n(1) \geq -\alpha \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right) \int | v_n |^q + C_1 \int | v_n |^6 \varphi_\epsilon.$$

Logo, de (3.7) resulta que

$$\begin{aligned}
c + o_n(1) &\geq -\alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)\int \mid v \mid^q + C_1 \int \mid v \mid^6 \varphi_\epsilon + C_1 \sum_{k\in\Lambda} \nu_k \delta_{x_k}(\varphi_\epsilon) \\
&\geq -\alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)\int \mid v \mid^q + C_1 \int \mid v \mid^6 \varphi_\epsilon + C_1 (m_0 S)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Como

$$\mid v(x) \mid^6 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) \longrightarrow \mid v(x) \mid^6 \quad \text{q.t.p. em} \ \ \Omega,$$

quando $\epsilon \to \infty$, e

$$\mid v(x) \mid^6 \varphi_\epsilon(x)\chi_{B(x_k,2\epsilon)}(x) \mid \leq \mid v(x) \mid^6 \quad \text{q.t.p. em} \ \ \Omega,$$

segue-se, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$c \geq -\alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)\int \mid v \mid^q + C_1 \int \mid v \mid^6 + C_1 (m_0 S)^{\frac{3}{2}}.$$

Aplicando a desigualdade de Holder para

$$\mid v \mid^q \in L^{\frac{6}{q}}(\Omega) \ \ \text{e} \ \ 1 \in L^{\frac{6}{6-q}}(\Omega),$$

teremos

$$\begin{aligned}
c &\geq C_1(m_0 S)^{\frac{3}{2}} - \alpha\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right) \mid \Omega \mid^{\frac{6-q}{6}} \left(\int \mid v \mid^6\right)^{\frac{q}{6}} + C_1 \int \mid v \mid^6 \\
&= C_1(m_0 S)^{\frac{3}{2}} - \alpha C_2 \left(\int \mid v \mid^6\right)^{\frac{q}{6}} + C_1 \int \mid v \mid^6,
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right) \mid \Omega \mid^{\frac{6-q}{6}}$. Portanto, vale

$$c \geq C_1(m_0 S)^{\frac{3}{2}} - \alpha C_2 \left(\int \mid v \mid^6\right)^{\frac{q}{6}} + C_1 \int \mid v \mid^6 . \tag{3.16}$$

Consideremos agora a aplicação diferenciável

$$f(t) = C_1 t^6 - \alpha C_2 t^q, t \geq 0.$$

Temos que

$$f'(\bar{t}) = 6C_1 t^5 - qC_2 \alpha t^{q-1} = 0,$$

quando

$$\bar{t} = \left(\frac{qC_2\alpha}{6C_1} \right)^{\frac{1}{6-q}}.$$

Além disso, é fácil ver que $\bar{t}$ é ponto de mínimo global para f e que

$$f(\bar{t}) = -\frac{C_2^{\frac{6}{6-q}}}{C_1^{\frac{6}{6-q}}} C_q \alpha^{\frac{6}{6-q}},$$

onde

$$C_q = \left(\frac{q}{6} \right)^{\frac{6}{6-q}} - \left(\frac{q}{6} \right)^{\frac{q}{6-q}}.$$

Note que $C_q > 0$, pois $1 < q < 2$. Sendo assim, teremos

$$f(t) \geq f(\bar{t}), \forall t \geq 0,$$

isto é,

$$C_1 t^6 - \alpha C_2 t^q \geq -\frac{C_2^{\frac{6}{6-q}}}{C_1^{\frac{6}{6-q}}} C_q \alpha^{\frac{6}{6-q}}; \quad \forall t \geq 0,$$

em particular, pondo $t = \left(\int \mid v \mid^6 \right)^{\frac{1}{6}}$, segue-se de (3.16), que

$$c \geq C_1 (m_0 S)^{\frac{3}{2}} - \frac{C_2^{\frac{6}{6-q}}}{C_1^{\frac{6}{6-q}}} C_q \alpha^{\frac{6}{6-q}},$$

o que contradiz nossa hipótese inicial. Portanto $\nu_k = 0, \forall k \in \Lambda$, isto é, Λ é vazio.

Sendo assim, do Lema de concentração e compacidade de Lions (ver Apêndice B), concluímos que

$$\int |\ v_n\ |^6 \varphi \to \int |\ v\ |^6 \varphi, \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^3),$$

e portanto

$$\int |\ v_n\ |^6 \to \int |\ v\ |^6 .$$

Desde que (v_n) é uma sequência Palais-Smale limitada, $v_n \to v$ em $L^6(\Omega)$ e $v_n \to v$ em $L^q(\Omega)$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} M(\|\ v_n\ \|^2) \|\ v_n\ \|^2 = \alpha \int |\ v\ |^q + \int |\ v\ |^6 .$$

Por outro lado, como $v_n \rightharpoonup v$ e $\|\ v_n\ \| \to a$, temos que

$$M(a^2) \int \nabla v \nabla h = \alpha \int |\ v\ |^{q-2} vh + \int |\ v\ |^4 vh, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

e portanto

$$M(a^2) \|\ v\ \|^2 = \alpha \int |\ v\ |^q + \int |\ v\ |^6 .$$

De onde segue que

$$M(\|v_n\|^2)\|v_n\|^2 \to M(a^2)\|v\|^2.$$

Desde que $M(\|v_n\|^2) \to M(a^2)$, concluímos que $\|\ v_n\ \|^2 \to \|\ v\ \|^2$.

Uma vez que $v_n \rightharpoonup v$, $\|\ v_n\ \| \to \|\ v\ \|$ e $H_0^1(\Omega)$ é uniformemente convexo, segue-se que $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$.

■

Para encerrar esta seção provaremos um Lema que nos permite concluir que os pontos críticos que obteremos para o funcional auxiliar J são também pontos críticos do funcional F.

Lema 3.2.2 *(i) Se $J(v) < 0$ então $\| v \|^2 < A_\alpha$ e*

$$F(u) = J(u),$$

para todo u em uma vizinhança de v;

(ii) existe $\alpha^{**} > 0$ tal que se $0 < \alpha < \alpha^{**}$ então J verifica a condição Palais-Smale para $c < 0$.

Demonstração:

(i) Se $J(v) < 0$ então

$$\overline{g}(\| v \|^2) \leq J(v) < 0.$$

Daí, $\| v \|^2 < A_\alpha$. Seja $r > 0$ tal que $\| v \|^2 < r < A_\alpha$ e consideremos o aberto

$$B_r = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \| u \|^2 < r \right\}.$$

Claramente $\| u \|^2 < A_\alpha$, para todo $u \in B_r$ e portanto

$$J(u) = F(u), \quad \forall u \in B_r.$$

(ii) Sendo J coercivo, se (v_n) é uma sequência Palais-Smale para J, então (v_n) é limitada. Por outro lado, como

$$J'(v_n) \to c < 0,$$

segue-se que para n grande teremos $J(v_n) < 0$ e, de (i), obtemos $J(v_n) = F(v_n)$ e $J'(v_n) = F'(v_n)$, isto é, (v_n) também é uma sequência Palais-Smale para F. Ora, sendo (v_n) limitada, segue do Lema 3.2.1 que existe $\alpha^{**} > 0$ suficientemente pequeno tal que para $0 < \alpha < \alpha^{**}$, (v_n) admite subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$, pois teremos

$$c < 0 < C_1(m_0 S)^{\frac{3}{2}} - \frac{C_2^{\frac{6}{6-q}}}{C_1^{\frac{6}{6-q}}} C_q \alpha^{\frac{6}{6-q}}.$$

Mostrando que J verifica a condição Palais-Smale em qualquer nível c negativo.

■

3.3 Uma sequência minimax de valores críticos

Nesta seção construiremos uma sequência minimax apropriada de valores críticos para o funcional J.

Lema 3.3.1 *Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$\gamma(J^{-\epsilon}) \geq k,$$

onde $J^{-\epsilon} = \{u \in H_0^1(\Omega) : J(u) \leq -\epsilon\}$.

Demonstração: Consideremos um subespaço de dimensão k

$$X_k = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$$

de $H_0^1(\Omega)$. Sendo $X_k \subset H_0^1(\Omega)$ de dimensão finita, existe $C(k) > 0$ tal que

$$-C(k)\|v\|^q \geq -\int |v|^q, \quad \forall v \in X_k.$$

tomando $\overline{\rho} > 0$ tal que para $0 <\| v \|= \overline{\rho}$, tenhamos $0 <\| v \|^2< A_\alpha$, temos que

$$J(v) = F(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2) - \frac{\alpha}{q} \mid v \mid_q^q - \frac{1}{6} \mid v \mid_6^6 .$$

Daí procedendo exatamente como na prova do Lema 2.2.4 podemos obter $R > 0$ e $\delta > 0$ tais que

$$F(v) < -\delta R^q,$$

para todo $v \in X_k$ com $\| v \|= \frac{R}{2}$. Assim, tomando $a = \min\{\overline{\rho}, \frac{R}{2}\}$, segue-se que

$$J(v) = F(v) < -\delta a^q = -\epsilon,$$

para todo $v \in X_k$ com $\| v \| = a$.

Definindo

$$K = \{v \in X_k : \| v \| = a^q\},$$

concluímos que $K \subset J^{-\epsilon}$ é compacto, simétrico e $\gamma(K) \geq k$. Logo,

$$\gamma(J^{-\epsilon}) \geq \gamma(K),$$

note que $J^{-\epsilon}$ é simétrico, pois J é *par* e $J^{-\epsilon}$ é fechado, pois J é contínuo.

■

Definamos agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, os conjuntos

$$\Gamma_k = \Big\{C \subset H_0^1(\Omega) : C \text{ é fechado}, C = -C \text{ e } \gamma(C) \geq k\Big\},$$

$$K_c = \Big\{v \in H_0^1(\Omega) : J'(v) = 0 \text{ e } J(v) = c\Big\}.$$

e

$$c_k = \inf_{C \in \Gamma_k} \sup_{v \in C} J(v).$$

Lema 3.3.2 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, os níveis c_k são números reais negativos.*

Demonstração: Do Lema 3.3.1, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\gamma(J^{-\epsilon}) \geq k.$$

Observemos que 0 não está em $J^{-\epsilon}$, pois $J(0) = 0 > -\epsilon$, $J^{-\epsilon} = J^{-1}\{(-\infty, -\epsilon]\}$ é fechado, pois J é contínuo, e $J^{-\epsilon} = -J^{-\epsilon}$, pois J é par. Sendo assim, $J^{-\epsilon} \in \Gamma_k$.

Por outro lado,

$$\sup_{v \in J^{-\epsilon}} J(v) \leq -\epsilon$$

e portanto

$$c_k = \inf_{C \in \Gamma_k} \sup_{v \in C} J(u) \leq \sup_{v \in J^{-\epsilon}} J(v) \leq -\epsilon < 0.$$

Além disso, da limitação inferior de J obtemos

$$-\infty < c_k, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

O próximo Lema nos diz que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e α suficientemente pequeno, o conjunto dos pontos críticos de J no nível c_k é não-vazio.

Lema 3.3.3 *(de Multiplicidade)*

Suponha que $0 < \alpha < \alpha_1^*$, *com*

$$\alpha_1^* = \min\{\alpha^*, \alpha^{**}\},$$

onde α^* *é obtido na Observação 3.1.2 e* α^{**} *é obtido no Lema 3.2.2.*

Assim, se

$$c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r},$$

então

$$\gamma(K_c) \geq r + 1.$$

Demonstração:

Supondo que

$$c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r} < 0,$$

temos que K_c será compacto. Com efeito, se $(v_n) \subset K_c$ então

$$J'(v_n) = 0 \ \text{ e } \ J(v_n) = c, \forall n \in \mathbb{N}$$

e daí $J'(v_n) \longrightarrow 0$ e $J(u_n) \longrightarrow c$, isto é, (v_n) é uma sequência Palais-Smale para o funcional J. Sendo $c < 0$ concluímos que existem uma subsequência (v_n) e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, segue-se que $v \in K_c$, mostrando que K_c é compacto.

Claramente $K_c = -K_c$ pois J é par.

Suponhamos por contradição que

$$\gamma(K_c) \leq r.$$

Sendo K_c compacto, segue-se da definição de índice, que existe U fechado e simétrico, com

$$K_c \subset U \quad e \quad \gamma(U) = \gamma(K_c) \leq r,$$

note que podemos tomar $U \subset J^0$, pois $K_c \subset J^0$ e J é contínuo. Assim, do Teorema 1.2.1, obteremos um homeomorfismo

$$\eta(1, .) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

tal que

$$\eta(1, J^{c+\delta} \setminus U) \subset J^{c-\delta},$$

para algum $\delta > 0$ com $0 < \delta < -c$. Assim $J^{c+\delta} \subset J^0$. Da definição de $c_{k+r} = c$ podemos obter $A \in \Gamma_{k+r}$ tal que

$$\sup_{v \in A} J(v) < c + \delta,$$

isto é, $A \subset J^{c+\delta}$ e portanto

$$\eta(1, A \setminus U) \subset \eta(1, J^{c+\delta} \setminus U) \subset J^{c-\delta}. \tag{3.17}$$

Porém, sendo $\gamma(U)$ finito, teremos

$$\gamma(\overline{A \setminus U}) \geq \gamma(\overline{A \setminus U}) \geq \gamma(A) - \gamma(U),$$

donde

$$\gamma(\overline{A \setminus U}) \geq (k + r) - r = k$$

e portanto

$$\gamma(\eta(1, \overline{A \setminus U})) \geq \gamma(\overline{A \setminus U}) \geq k.$$

Como $\eta(1, \overline{A \setminus U})$ é fechado, simétrico e

$$\gamma(\eta(1, \overline{A \setminus U})) \geq k,$$

concluímos que $\gamma(\eta(1, \overline{A \setminus U})) \in \Gamma_k$. Mas isso contradiz a inclusão em (3.17), uma vez que

$$\gamma(\eta(1, \overline{A \setminus U})) \in \Gamma_k$$

nos dá

$$\sup_{v \in \eta(1, \overline{A \setminus U})} J(v) \geq c_k = c.$$

Portanto $\gamma(K_c) \geq r + 1$.

■

Finalmente estamos em condições de provar o

Teorema 3.3.1 *Se (M_1) e (M_3) ocorrem, então existe $\alpha^* > 0$ tal que o problema (P_α) admite infinitas soluções não-triviais quando $0 < \alpha < \alpha^*$.*

Demonstração: Suponha que as constantes

$$-\infty < c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq \cdots < 0$$

sejam todas distintas. Então, sendo cada c_k valor crítico negativo de J, concluímos que J admite infinitos pontos críticos com energia negativa e, portanto, do Lema 3.2.2, ítem (i), concluímos que F admite infinitos pontos críticos com energia negativa. Por outro lado, se exitirem duas constantes minimax c_k e c_{k+r} tais que $c_k = c_{k+r}$, então teremos

$$c = c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+r}.$$

Logo, do Lema 3.3.3,

$$\gamma(K_c) \geq r + 1 \geq 2.$$

Uma vez que 0 não está em K_c, K_c é fechado, simétrico e $\gamma(K_c) \geq 2$, segue-se do Lema 1.1.3 que K_c é infinito. Sendo assim, em todo caso, F admite infinitos pontos críticos com energia negativa e, portanto, o problema (P_α) possui uma infinidade de soluções não-triviais quando $0 < \alpha < \alpha_1^*$.

■

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Definição 1.0.1 *Seja* $\varphi : A \to \mathbb{R}$ *onde* A *é um subconjunto aberto de um espaço normado* X*. Dizemos que* φ *possui uma derivada de Gateaux* $f \in X'$ *em* $u \in A$ *se, para qualquer* $h \in X$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u + th) - \varphi(u) - f(th) \right] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u *é denotada por* $\varphi'(u)$.

Definição 1.0.2 *Seja* $\varphi : A \to \mathbb{R}$ *onde* A *é um subconjunto aberto de um espaço normado* X*. Dizemos que* φ *possui uma derivada de Fréchet* $f \in X'$ *em* $u \in A$ *se*

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{1}{\| h \|} \mid \varphi(u + h) - \varphi(u) - f(h) \mid = 0.$$

Definição 1.0.3 *Dizemos que o funcional* $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$ *se a derivada de Fréchet de* φ *existe e é contínua em* A.

Observe que todo funcional Frechét-diferenciável é também Gateaux-diferenciável, porém a recíproca não é verdadeira. No entanto, temos a

Proposição 1.0.1 *Seja* $\varphi : A \to \mathbb{R}$ *onde* A *é um subconjunto aberto de um espaço normado* X*. Se* φ *possui derivada de Gateaux contínua em* A*, então* $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Sejam $v \in A$ e $\varphi'(v)$ a derivada de Gateaux de φ em v. Do Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} \mid \varphi(v+h) - \varphi(v) - \varphi'(v)(h) \mid &= \mid \varphi'(v+\theta h)(h) - \varphi'(v)(h) \mid \\ &\leq \parallel \varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u) \parallel_{X'} \parallel h \parallel . \quad \text{(A.1)} \end{aligned}$$

Como φ possui derivada de Gateaux contínua em A, então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\parallel h \parallel < \delta$ temos

$$\parallel \varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u) \parallel_{X'} < \epsilon.$$

Segue então de (A.1) que

$$\mid \varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h) \mid < \epsilon \parallel h \parallel$$

de onde concluímos que φ possui uma derivada de Frechet e esta é contínua.

■

Mostraremos agora, que os funcionais

$$F(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\parallel v \parallel^2) - \frac{\alpha}{q}\int \mid v \mid^q - \frac{1}{p}\int \mid v \mid^p,$$

e

$$J(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\parallel v \parallel^2) - \frac{\alpha}{q}\int \mid v \mid^q - \frac{\Psi(\parallel v \parallel^2)}{p}\int \mid v \mid^p,$$

com $2 < p \leq 6$ e $\Psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, é não-crescente e

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \leq A_\alpha \\ 0, & \text{se} \quad t \geq B_\alpha, \end{cases}$$

são de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Para mostrar que $F, J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, consideremos os funcionais F_1, F_2, F_3 e J_1 definidos por

$$F_1(v) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| v \|^2), \;\; F_2(v) = \frac{\alpha}{q}\int | v |^q, \; F_3(v) = \frac{1}{p}\int | u |^p \;\; e \;\; J_1(v) = \frac{1}{p}\Psi(\| v \|^2)\int | v |^p .$$

Observemos primeiramente que $F = F_1 - F_2 - F_3$ e $J = F_1 - F_2 - J_1$ estão bem definidos. De fato, se $v \in H_0^1(\Omega)$ então $\| v \| < \infty$ e, além disso, sendo $2 < p \leq 6$ e $1 < q < 2$, segue-se das imersões de Sobolev que $v \in L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Logo,

$$F_1(v) < \infty, \;\; F_2(v) < \infty, \;\; F_3(v) < \infty \;\; e \;\; J_1(v) < \infty,$$

pois as funções $\widehat{M}$ e Ψ assumem apenas valores reais e portanto finitos.

Proposição 1.0.2 *O funcional* $F = F_1 - F_2 - F_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração:

É suficiente provar que as derivadas de Gateaux de F_1, F_2 e F_3 existem e são contínuas.

- $F_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

De fato, sejam $v, h \in H_0^1(\Omega)$, definamos as funções $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(s) = \widehat{M}(s) \;\; \text{e} \;\; f(r) = \| v + rth \|^2 .$$

Assim, para cada $r \in \mathbb{R}$

$$G(r) = g(f(r)) = \widehat{M}(\| v + rth \|^2),$$

logo

$$G(1) = \widehat{M}(\| v + th \|^2)$$

e

$$G(0) = \widehat{M}(\| v \|^2).$$

Daí

$$\frac{1}{t}\left[F_1(u+th) - F_1(u)\right] \;=\; \frac{1}{2t}\left[G(1) - G(0)\right]. \tag{A.2}$$

Desde que a norma em $H_0^1(\Omega)$ é proveniente de um produto interno, segue-se que a aplicação $\varphi(v) = \| v \|^2 = \int | \nabla v |^2$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\varphi'(v)h = 2\int \nabla v \nabla h.$$

Logo, $f(r) = \varphi(v + rth)$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$, com

$$f'(r) = \varphi'(v + rth)th = 2t\int \nabla(v + rth)\nabla h.$$

Sendo g e f diferenciáveis, temos que G é diferenciável e portanto, do Teorema do Valor Médio, resulta que existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\begin{aligned} G(1) - G(0) &= G'(\theta) \\ &= [g(f(\theta))]' \\ &= g'(f(\theta))f'(\theta) \\ &= 2tM(\| v + \theta th \|^2)\int \nabla(v + \theta th)\nabla h. \end{aligned}$$

Substituindo em $(A.2)$ obtemos

$$\frac{1}{t}\left[F_1(u+th) - F_1(u)\right] = M(\| v + \theta th \|^2)\int \nabla(v + \theta th)\nabla h.$$

Uma vez que a aplicação ξ definida por

$$\xi(v) = \int \nabla v \nabla h$$

é um funcional linear contínuo sobre $H_0^1(\Omega)$, segue-se que, quando $t \longrightarrow 0$

$$\int \nabla(v+\theta th)\nabla h \longrightarrow \int \nabla v \nabla h,$$

além disso como M é contínua

$$M(\| v+\theta th \|^2) \longrightarrow M(\| v \|^2).$$

Logo

$$M(\| v+\theta th \|^2)\int \nabla(v+\theta th)\nabla h \longrightarrow M(\| v \|^2)\int \nabla v \nabla h,$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[F_1(u+th)-F_1(u)\right] = M(\| v \|^2)\int \nabla v\nabla h.$$

Mostrando que a derivada de Gateaux de F_1 existe e é dada por

$$F_1'(v)h = M(\| v \|^2)\int \nabla v\nabla h.$$

Vejamos que a derivada é contínua. Para isso, sejam $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$. Então,

$$| F_1'(v_n)h - F_1'(v)h |=| M(\| v_n \|^2)\int \nabla v_n\nabla h - M(\| v \|^2)\int \nabla v\nabla h | \, .$$

Somando e subtraindo o termo $M(\| v_n \|^2)\int \nabla v\nabla h$, obtemos

$$\begin{aligned} | F_1'(v_n)h - F_1'(v)h | \;&\leq\; M(\| v_n \|^2)\,| \int \nabla v_n\nabla h - \int \nabla v\nabla h | \\ &+\; | \int \nabla v\nabla h || M(\| v_n \|^2) - M(\| v \|^2) | \, . \end{aligned}$$

Sendo $(\| v_n \|)$ limitada, M contínua e da desigualdade de Holder

$$| F_1'(v_n)h - F_1'(v)h | \;\leq\; N\int | \nabla v_n - \nabla v || \nabla h |$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \| v \| \| h \| | M(\| v_n \|^2) - M(\| v \|^2) | \\
&\leq \quad N \| v_n - v \| \| h \| \\
&+ \quad \| v \| \| h \| | M(\| v_n \|^2) - M(\| v \|^2) | \, .
\end{aligned}
$$

Tomando $h \in H_0^1(\Omega)$ com $\| h \| \leq 1$, teremos

$$
\| F_1'(v_n) - F_1'(v) \| \leq N \| v_n - v \| + \| v \| | M(\| v_n \|^2) - M(\| v \|^2) | \, .
$$

Como $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$ e M é contínua, então, passando ao limite de $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$
\| F_1'(v_n) - F_1'(v) \| \longrightarrow 0.
$$

Mostrando que $F_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

- $F_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

Sejam $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $v, h \in H_0^1(\Omega)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$
f(s) = \frac{\alpha}{q} \mid v + stv \mid^q \, .
$$

Temos que:

$$
f'(s) = \alpha t \mid v + sth \mid^{q-2} (v + sth)h,
$$

$$
f(1) = \frac{\alpha}{q} \mid v + th \mid^q
$$

e

$$
f(0) = \frac{\alpha}{q} \mid v \mid^q \, .
$$

Sendo f diferenciável em $(0,1)$, então pelo o Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\theta),$$

ou seja,

$$\frac{\alpha}{q} \mid v + th \mid^q - \frac{\alpha}{q} \mid v \mid^q = \alpha t \mid v + \theta th \mid^{q-2} (v + \theta th)h.$$

Assim,

$$\frac{\alpha}{qt} [\mid v + th \mid^q - \mid v \mid^q] = \alpha \mid v + \theta th \mid^{q-2} (v + \theta th)h.$$

Observemos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha}{qt} [\mid v(x) + th(x) \mid^q - \mid v(x) \mid^q] = \alpha \mid v(x) \mid^{q-2} v(x)h(x), \quad q.t.p. \ \ em \ \ \Omega$$

e

$$\frac{\alpha}{qt} [\mid v(x) + th(x) \mid^q - \mid v(x) \mid^q] \leq \frac{\alpha}{qt} (\mid v(x) \mid + \mid h(x) \mid)^{q-1} \mid h(x) \mid, \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\alpha}{qt} [\mid v + th \mid^q - \mid v \mid^q] = \alpha \mid v \mid^{q-2} vh,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [F_2(v + th) - F_2(v)] &= \lim_{t \to 0} \frac{\alpha}{qt} \int [\mid v + th \mid^q - \mid v \mid^q] \\ &= \alpha \int \mid v \mid^{q-2} vh, \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de F_2 em v com

$$F_2'(v)h = \alpha \int \mid v \mid^{q-2} vh \ , \ \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Para ver que a derivada de F_2 é contínua, sejam $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \mid F_2'(v_n)h - F_2'(v_n)h \mid &= \mid \alpha \int \mid v_n \mid^{q-2} v_n h - \alpha \int \mid v \mid^{q-2} vh \mid \\ &= \alpha \mid \int (\mid v_n \mid^{q-2} v_n - \mid v \mid^{q-2} v)h \mid \\ &\leq \alpha \int \Big| \mid v_n \mid^{q-2} v_n - \mid v \mid^{q-2} v \Big| \mid h \mid . \end{aligned}$$

Como $|| v_n |^{q-2} v_n - | v |^{q-2} v| \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ e $h \in L^q(\Omega)$, com $\frac{q-1}{q} + \frac{1}{q} = 1$, segue-se da desigualdade de Holder que

$$\mid F_2'(v_n)h - F_2'(v_n)h \mid \leq \alpha \Big| \mid v_n \mid^{q-2} v_n - \mid v \mid^{q-2} v \Big|_{\frac{q}{q-1}} \mid h \mid_q .$$

Das imersões de Sobolev, temos

$$\mid F_2'(v_n)h - F_2'(v)h \mid \leq \alpha C \Big| \mid v_n \mid^{q-2} v_n - \mid v \mid^{q-2} v \Big|_{\frac{q}{q-1}} \parallel h \parallel$$

e tomando $h \in H_0^1(\Omega)$ com $\parallel h \parallel \leq 1$, teremos

$$\parallel F_2'(v_n) - F_2'(v) \parallel^{\frac{q}{q-1}} \leq (\alpha C)^{\frac{q}{q-1}} \int \Big| \mid v_n \mid^{q-2} v_n - \mid v \mid^{q-2} v \Big|^{\frac{q}{q-1}}$$

Uma vez que $v_n \longrightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$, segue-se das imersões contínuas de Sobolev que $v_n \longrightarrow v$ em $L^q(\Omega)$, e de um resultado da Teoria da medida medida, existe $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$v_n(x) \longrightarrow v(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$$

e

$$\mid v_n(x) \mid \leq u(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega.$$

Sendo assim, teremos

$$\Big| \mid v_n(x) \mid^{q-2} v_n(x) - \mid v(x) \mid^{q-2} v(x) \Big| \longrightarrow 0 \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega$$

e

$$\left|| v_n(x) |^{q-2} v_n(x) - | v(x) |^{q-2} v(x)\right|^{\frac{q}{q-1}} \leq (| v_n(x) |^{q-1} + | v(x) |^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}$$
$$\leq C(| u(x) |^q + | v(x) |^q).$$

Do Teorema da convergência de dominada de Lebesgue, resulta que

$$\int \left|| v_n |^{q-2} v_n - | v |^{q-2} v\right|^{\frac{q}{q-1}} \longrightarrow 0,$$

e consequentemente

$$\| F_2'(v_n) - F_2'(v) \| \longrightarrow 0.$$

Mostrando que $F_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

- $F_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Repetindo os mesmos argumentos utilizados para mostrar que $F_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, mostra-se que $F_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$F_3'(v)h = \int | v |^{p-2} vh.$$

Logo, $F = F_1 - F_2 - F_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$F'(v)h = F_1'(v)h - F_2'(v)h - F_3'(v)h,$$

isto é,

$$F'(v)h = M(\| v \|^2) \int \nabla v \nabla h - \alpha \int | v |^{q-2} vh - \int | v |^{p-2} vh.$$

$\blacksquare$

Proposição 1.0.3 *O funcional $J = F_1 - F_2 - J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração:

É suficiente provar que a derivada de Gateaux de J_1 existe e é contínua, pois, Como já vimos, $F_1, F_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

- $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$

Definamos o funcional

$$J_2(v) = \Psi(\| v \|^2).$$

Assim

$$J_1(v) = J_2(v)F_3(v),$$

onde $F_3(v) = \frac{1}{p}\int | v |^p$. Já vimos que $F_3 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, e, repetindo os mesmos argumentos utilizados para mostrar que $F_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, é possível mostrar que $J_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$J_2'(v)h = 2\Psi'(\| v \|^2)\int \nabla v \nabla h.$$

Logo, $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$J_1'(v)h = F_3(v)J_2'(v)h + J_2(v)F_3'(v)h,$$

ou seja,

$$J_1'(v)h = \frac{2}{p}\int | v |^p \;\; \Psi'(\| v \|^2)\int \nabla v \nabla h + \Psi(\| v \|^2) \;\int | v |^{p-2} vh,$$

e Portanto $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$J'(v)h = F_1'(v)h - F_2'(v)h - J_1'(v)h,$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
J'(v)h &= M(\| v \|^2)\int \nabla v \nabla h - \alpha \int | v |^{q-2} vh \\
&- \frac{2}{p}\int | v |^p \;\; \Psi'(\| v \|^2)\int \nabla v\nabla h - \Psi(\| v \|^2) \;\int | v |^{p-2} vh,
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
J'(v)h &= \left[M(\| v \|^2) - \frac{2}{p} | v |_p^p \, \Psi'(\| v \|^2)\right]\int \nabla v\nabla h \\
&- \Psi(\| v \|^2)\int | v |^{p-2} vh - \alpha\int | v |^{q-2} vh.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Apêndice B

Resultados Importantes

Definição 2.0.4 *Sejam X um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de X tal que:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$;

(ii) se $A_1, A_2 \in \tau$ *então* $A_1 \cap A_2 \in \tau$;

(iii) se $\{A_\jmath\}_{\jmath \in \Lambda} \in \tau$ *então* $\bigcup\limits_{\jmath \in \Lambda} A_\jmath \in \tau$, *onde Λ é um conjunto de índices.*

Dizemos que τ é uma topologia para X e que os conjuntos de τ são abertos da topologia. Além disso, o par (X, τ) é chamado de espaço topológico. Por simplicidade, escreveremos apenas X quando estivermos nos referindo ao espaço topológico (X, τ).

Definição 2.0.5 *Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é fechado se seu complementar $X \backslash A$ é aberto.*

Definição 2.0.6 *Dizemos que um espaço topológico X é T_1 se para cada dois pontos $x, y \in X$ distintos, existe um aberto contendo x e que não contém y.*

Definição 2.0.7 *Dizemos que um espaço topológico X é T_4 se para cada par de fechados F e G disjuntos, existem abertos disjuntos U e V contendo F e G, respectivamente. Se X é T_1 e T_4 dizemos que X é um espaço normal.*

Proposição 2.0.4 *Todo espaço topológico metrizável é normal.*

Demonstração: ver [15].

Teorema 2.0.2 *(de extensão de Tietze)*

Sejam $C \subset X$ um subespaço fechado de um espaço topológico X normal e

$$f : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função contínua. Então existe uma extensão

$$\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

de f que ainda é contínua.

Demonstração: ver [15].

Definição 2.0.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são k vezes diferenciáveis em Ω, tal que estas funções e todas as suas derivadas de ordem k podem ser extendidas continuamente para $\overline{\Omega}$.*

Seja $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Recorde que $f'(x) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e portanto, pode ser representado por uma matrix $n \times n$.

Seja S o conjunto de todos os pontos críticos de f e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$.

Definimos o grau topológico de Brower da aplicação f em relação a Ω no ponto b como sendo o número inteiro

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0 & , se \ f^{-1}(b) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) & , se \ f^{-1}(b) \neq \emptyset \end{cases} ,$$

onde sgn é a função sinal, definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

e J_f representa a matrix jacobiana de f.

Observação 2.0.1 *É possível estender a definição de grau para funções que são apenas contínuas em $\overline{\Omega}$.*

Teorema 2.0.3 *(Continuidade): Sejam $f \in C(; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f na topologia de $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que, para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.4 *(Invariância do grau por Homotopia): Seja* $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1]; \mathbb{R}^N)$ *tal que* $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$*. Então,* $d(H(.,t), \Omega, b)$ *é independente de* t*.*

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.5 *: O grau é constante, com relação a* b *em cada componente conexa de* $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$*.*

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.6 *(Aditividade): Seja* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *com* Ω_1*,* Ω_2 *abertos, disjuntos e limitados e seja* $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$*. Se* $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$*, então temos que*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.7 *(Normalização): Seja* I *a projeção canônica de* $\overline{\Omega}$ *em* $\mathbb{R}^N$*, isto é,* $I : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *é dada por* $I(x) = x$*. Então,*

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 \text{ se } b \in \Omega \\ 0 \text{ se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.8 *(Existência de Solução): Sejam* $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin f(\partial\Omega)$*. Se* $d(f, \Omega, b) \neq 0$*, então existe* $x_0 \in$ *tal que* $f(x_0) = b$*.*

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.9 *(Dependência na Fronteira): Suponhamos que* $f = g$ *em* $\partial\Omega$ *e* $f, g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$*. Então, tem-se que*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

para todo $b \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$*.*

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.10 *(de Borsuk) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto limitado simétrico com $0 \in \Omega$ e*

$$\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$$

é uma aplicação impar então deg$(\varphi, \Omega, 0)$ é um número impar.

Demonstração: ver [19].

Teorema 2.0.11 $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: ver [7].

Definição 2.0.9 *Dizemos que uma família de subconjuntos $(c_\lambda)_{\lambda \in L}$ de um espaço métrico M é localmente finita quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas uma quantidade finita de conjuntos c_λ.*

Definição 2.0.10 *Dadas duas coberturas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ de um espaço métrico M, dizemos que $\mathcal{C}$ é mais fina do que $\mathcal{C}'$, ou que $\mathcal{C}$ refina $\mathcal{C}'$, quando para todo $C \in \mathcal{C}$ existe algum $C' \in \mathcal{C}'$ tal que $C \subset C'$.*

Definição 2.0.11 *Um espaço métrico M se chama paracompacto quando toda cobertura aberta de M pode ser refinada por uma cobertura localmente finita.*

Proposição 2.0.5 *Todo espaço métrico M é paracompacto.*

Demonstração: ver [15].

Teorema 2.0.12 *(da Convergência Dominada de Lebesgue)*

Seja (f_n) uma seqüência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração: ver [6].

Lema 2.0.4 *Sejam* (f_n) *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tal que* $f_n \to f$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então existe uma subseqüência* $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ *tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω.

(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: ver [6].

Teorema 2.0.13 *(Desigualdade de Hölder)*

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$ *e* $(1/p) + (1/q) = 1$. *Então* $fq \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega fgdx \leq ||f||_p||g||_q$$

Demonstração: ver [6].

Teorema 2.0.14 *Se* X *é um espaço normado de dimensão finita, então todas as normas em* X *são equivalentes.*

Demonstração: ver [21].

Teorema 2.0.15 *Seja* X *um espaço normado de dimensão finita. Então para todo* $M \subset X$ *temos que* M *compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração: ver [21].

Lema 2.0.5 *(de Concentração e Compacidade)*

Seja (v_n) *uma sequência limitada em* $H_0^1(\Omega)$ *tal que*

(i) $v_n \rightharpoonup v$ *fracamente em* $H_0^1(\Omega)$;

(ii) $|\nabla v_n|^2 \rightharpoonup d\mu$ *fracamente no sentido das medidas;*

(iii) $|v_n|^{2*} \rightharpoonup d\nu$ *fracamente no sentido das medidas;*

onde μ e ν são medidas limitadas e não-negativas do $\mathbb{R}^N$. Então existem duas famílias $(\mu_j)_{j\in\Lambda}$ e $(\nu_j)_{j\in\Lambda}$ de números reais não-negativos e uma família $(x_j)_{j\in\Lambda}$ de pontos do $\mathbb{R}^N$, onde Λ é um conjunto de índices no máximo enumerável, tais que

$$d\nu = | v |^{2^*} + \sum_{j\in\Lambda} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$d\mu \geq | \nabla v |^2 + \sum_{j\in\Lambda} \mu_j \delta_{x_j},$$

$$\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{\mu_j}{S}, \ \forall j \in \Lambda$$

e

$$\sum_{j\in\Lambda} \nu_j^{\frac{2}{2^*}} < \infty.$$

Demonstração: ver [23].

Bibliografia

[1] C. O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and G.M. Figueiredo, *D*ifferential Equations Applications, On a class of nolocal elliptic problems with critical growth, 3(2010)409-417.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and T.F Ma, *P*ositive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type, Comput. Math. Appl., 49(2005)85-93.

[3] A. Ambrosetti and P. H Rabinowitz, *D*ual variational methods in critical point theory and apllications, *J.* Functional Analysis, vol 14(1973)349-381.

[4] G. Anelo, *A* uniqueness result for a nonlocal equation of Kirchhoff type and some related open problem, J. Math. Anal. Appl. 373(2011)248-251.

[5] J. G. Azorero & I. P. Alonso, *M*ultiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term, Trans. Amer. Math. Soc. , vol 323 n. 2(1991)877-895.

[6] R.G. Bartle, *T*he Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley Classics Library (1995).

[7] H. Brezis , *A*nálisis funcional, Teoría y aplicaciones, Version española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial, S.A. Madrid, 1984.

[8] C. Chen, Y. Kuo and T. Wu, *T*he Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions, Journal of Differential Equations, doi:10.1016/j.jde.2010.11.017.

[9] B.T. Cheng and X. Wu, *E*xistence results of positive solutions, Appl. Math. Lett. 16(2003)243-248.

[10] D.C. Clarke, A variant of the Lusternik-Schnirelman theory, Indiana Univ. Math. J., 22(1972)65-74.

[11] F.J.S.A. Corrêa and G.M. Figueiredo, On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus, Applied Mathematics Letters, 22(2009)819-822.

[12] F.J.S.A. Corrêa and G.M. Figueiredo, Bull. Aust. Math. Soc., On an elliptic aquation of p-Kirchhoff type via variational methods, 2(2006)263-277.

[13] D. G. Costa, Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais, Escola Latino-Americana de Matemática, 1986.

[14] G. Dai and D. Liu, Infinitely many positive solutions for a $p(x)$-Kirchhoff-type equation, J. Math. Anal. Appl., 359(2009)704-710.

[15] Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1965.

[16] W. Fulton and J. Harris, Representation Theory, A First Course, Springer Graduate Texts in Mathematics, 129.

[17] X. He and W. Zou, Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems, Nonlinear Analysis, 70(2009)1407-1414.

[18] J. Jin and X. Wu, Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl., 369(2010)564-574.

[19] Kavian O., Introduction à la théorie des points critiques et applicatons aux problemes elliptiques, Springer, Heidelberg (1983).

[20] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[21] E. Kreysig, Introductory functional analysis with applications, John Wiley & sons, 1976.

[22] J.L. Lions, On some questions in boundary value problems of mathematical physics, International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284-346.

[23] P.L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case,* Rev. Mat. Iberoamericana (1985), 145-201.

[24] D.C. Liu, *On a p-Kirchhoff equation via fountaim and dual fountaim theorem,* Nonlinear Anal., 72(2010)302-308.

[25] L. Lusternik and L. Schnirelmann, *Topological Methods in the Calculus of Variations,* Hermann. Paris, 1934.

[26] T.F. Ma and J.E. Muñoz Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem,* Appl. Math. Lett. 16(2003)243-248.

[27] A.M. Mao and Z.T. Zhang, *Sign changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P.S. condition,* Nonlinear Anal., 70(2009)1275-1287.

[28] R.G. Nascimento, *Problemas elípticos não-locais do tipo p-Kirchhoff,* Doct. dissertation, Unicamp, 2008.

[29] K. Perera and Z. Zhang, *Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index,* J. Differential Equations, 221(2006)246-255.

[30] K. Perera and Z. Zhang, *Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant of descent flow,* J. Math. Anal. Appl., 317(2006)456-463.

[31] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, Conference board the mathematical sciences, 1984.

[32] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias,* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro(1979).

[33] J. Sun and C. Tang, *Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations,* Nonlinear Analysis 74(2011)1212-1222.

[34] Y.Yang and J.H. Zhang, *Nontrivial solutions of a class os nonlocal problems via local linking theory,* Appl. Math. lett., 23(2010)377-380.