UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belém-PA
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO E OBSERVABILIDADE DE ONDAS ACOPLADAS

Anderson de Jesus Araújo Ramos
Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA
2011

Ramos, Anderson de Jesus Araújo

Métodos Numéricos para Análise de Propagação e Observabilidade de Ondas Acopladas/(Anderson de Jesus Araújo Ramos); orientador, Dilberto da Silva Almeida Júnior. - 2011.

76 f. il. 28 cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2011.

1. Análise Numérica. 2. Diferenças Finitas. I. Almeida Júnior, Dilberto da Silva, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciênciais Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatítica. III. Título.

CDD 22. ed. 518.32

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO E OBSERVABILIDADE DE ONDAS ACOPLADAS

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Banca Examinadora

Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Orientador)

Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera (LNCC/UFRJ)

Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (UFPA)

Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)

Belém-PA

2011

Resumo

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO E OBSERVABILIDADE DE ONDAS ACOPLADAS

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará (PPGME-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

No presente trabalho investigamos as propriedades de observabilidade da fronteira para um esquema numérico espacialmente discretizado aplicado em um sistema hiperbólico de propagação de ondas acopladas. Nossos resultados mais importantes versam sobre uma perda de observabilidade numérica. Paralelamente construímos uma subclasse de soluções numéricas que são observáveis.

Palavras-chave: Análise numérica, diferenças finitas, ondas acopladas, energia e desigualdade de observabilidade.

Belém-Pará

2011

Abstract

NUMERICAL METHODS FOR ANALYSIS OF PROPAGATION AND OBSERVABILITY OF COUPLED WAVES

Anderson de Jesus Araújo Ramos

Advisor: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Abstract of Master's Thesis submitted to the Postgraduate Program in Mathematics and Statistics, Federal University of Pará (UFPA-PPGME) as part of the requirements for obtaining a Master's Degree in Mathematics .

In this study we investigated the properties of observability of the border for a spatially discretized numerical scheme applied to a hyperbolic system of coupled wave propagation. Our most important results deal with a loss of numerical observability. Parallel construct a subclass of numerical solutions that are observable.

Keywords: Numerical analysis, finite difference, coupled waves, energy method; numerical observability .

Belém-Pará

2011

"À minha família."

Os que confiam no SENHOR serão como os montes de Sião,

que nunca se abalam, mas permancem firmes para sempre.

Salmo 125.1

Agradecimentos

Agradeço

- Primeiramente ao meu Senhor Jesus, que sempre tem me dado paciência e forças nas horas mais difíceis de minha vida. E por ter me capacitado para realizar este trabalho.

- À minha família, em especial aos meus pais, Mário Mafra Ramos, pelo exemplo de honestidade, trabalho e dedicação a família, à Maria Odete Araújo Ramos, pelo carinho e icentivo, sem os quais não estaria aqui e aos meus irmãos Andrey, Andressa e André pelos momentos de descontração. ***"Honra a teu pai e a tua mãe, para que se prolonguem os teus dias na terra que o Senhor teu Deus te dá."*** Êx 20.12.

- Aos meus colegas de graduação que sempre me deram força e mostraram confiança no meu trabalho. Em especial: Natália, Suelem, David, Itamar, Raquel, Joice, Jaqueline, Miriam, Hernane, Carlos Vitor, Klaylson, Frank e Vitor.

- Aos meus professores de graduação do Campi de Castanhal, pelos ensinamentos passados e dedicação com que desempenham seus trabalhos. São eles: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida, Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias, Prof. Esp. José Geraldo Gonçalves da Silva, Prof. Msc. Edilberto Oliveira Rozal e Prof. Msc. Marcos Vinicíus Orguen Gouvêa.

- Ao meu orientador Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior, pelo seu profissionalismo e brilhantismo com que conduziu esta orientação, mostrando-se sempre disposto a esclarecer minhas dúvidas. ***"A boca do justo fala da sabedoria; a sua língua fala do que é reto"*** Sl 37:30.

- Aos bons amigos que tive no mestrado: João, Marcel, Walter, Mateus, Liliane, Lucélia, Lindalva e Cristiane.

- A todo corpo docente do PPGME, em especial aos professores: Dr. José Miguel Martins Veloso, Drª. Cristina Lúcia Dias Vaz e Dr. Mauro de Lima Santos.

- Não poderia deixar de agradecer ao Conselho Regional de Engª. Arq. e Agrº (CREA-PA), na pessoa do Dr. Antônio Carlos Albério (Presidente) por ter me liberado para fazer o curso de Verão 2009, onde tudo começou. A ele meus sinceros agradecimentos.

- Ao Prof. Antonio Marcos Damasceno, a quem sou grato, por sua gentileza e compreensão.

- Da mesma forma, à Profª. Leila, que foi bastante receptiva.

- E finalmente a todos que de alguma forma contribuíram para este trabalho. Dentre eles, Prof. Augusto, Profª. Dayziane e Profª. Danuza.

Sumário

Introdução

Controlar oscilações em problemas traduzidos em termos de uma equação diferencial parcial de evolução tem despertado o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Um exemplo seria controlar as vibrações de uma membrana em duas dimensões, onde as vibrações da membrana são regidas pela tradicional equação de onda. Devido a isto, muito se tem estudado a respeito das questões de observabilidade e controlabilidade de EDP's no contexto contínuo, mas quando nos referimos aos ambientes numéricos discretos muito ainda há de ser realizado. Para sistemas acoplados de equação de ondas não temos conhecimento de nenhuma investigação numérica a respeito do problema de observabilidade numérica da fronteira.

Iniciamos este trabalho mostrando um rápido panorama do já se tem feito no estudo de problemas clássicos de vibrações de ondas livres, onde começamos por destacar o problema contínuo no que diz respeito as questões de energia, propriedade conservativa e a propriedade de observabilidade até chegarmos a análise semi-discreta. Esta por sua vez está bem fundamentada como poderemos ver através dos trabalhos de J.A. Infante e E. Zuazua [4]. Por que como poderemos constatar, ao passarmos de um ambiente contínuo para um ambiente numérico, a desigualdade de observabilidade não é satisfeita devido à presença de soluções numéricas espúrias (soluções responsáveis pela perda de observabilidade do sistema) introduzidas no modelo quando o parâmetro de malha h tende a zero.

No capítulo 2, apresentamos o problema objeto de estudo, que constitui de um sistema conservativo de equações diferenciais parciais, acopladas em paralelo com um tipo de acoplamento que se baseia no acoplamento de osciladores harmônicos. Destacamos que o problema é observável e mostramos a técnica usada ao longo deste trabalho para alcançarmos os resultados desejados.

No capítulo 3, estudamos os métodos numéricos em diferenças finitas, começando pela dinâmica semi-discreta do modelo de ondas acopladas onde também estudamos a questão da perda de observabilidade numérica e em seguida introduzimos uma subclasse de soluções onde a desigualdade de observabilidade é válida.

Finalmente no capítulo 4, analisamos algumas propriedades do modelo totalmente discreto em diferenças finitas, mostrando o funcional de energia, sua propriedade conservativa e um importante resultado que nos garante sua positividade. E por último fizemos também a implementação computacional do método constatando assim a sua propriedade conservativa e alguns resultados de estabilização.

Capítulo 1

O Paradigma

Apresentaremos neste capítulo um breve levantamento dos principais resultados já existentes sobre o problema da observabilidade da fronteira da equação de ondas, tanto no contexto teórico quanto no contexto numérico. É muito importante a inserção desses resultados, para que possamos mais adiante utilizarmos das mesmas técnicas para resolvermos o problema objeto de estudo deste trabalho.

1.1 A equação de ondas na dinâmica do contínuo

A fim de motivar os problemas objetos de estudo desta dissertação, analisamos primeiramente as propriedades de observabilidade da equação de propagação de ondas unidimensional dada por:

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{xx} &= 0, \quad em \quad (0,L) \times (0,T) && (1.1) \\ \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 &= 0, \quad 0 < t < T && (1.2) \\ \phi(x,0) = \phi_0(x),\ \phi_t(x,0) &= \phi_1(x), \quad 0 < x < L. && (1.3) \end{aligned}$$

Em $(1.1) - (1.3)$, $\phi = \phi(x,t)$ descreve o deslocamento de uma corda vibrante atuando no intervalo $(0, L)$.

Matematicamente o problema é bem posto no espaço de energia $H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$. Mais precisamente, para quaisquer $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0,L) \times L^2(0,L)$ existe uma única solução

$$\phi \in C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,L)).$$

A energia das soluções é dada por,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \Big[|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2\Big]dx, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.4}$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$E(t) = E(0), \ \forall t \geq 0. \tag{1.5}$$

O problema de observabilidade da fronteira de $(1.1) - (1.3)$ pode ser formulado da seguinte maneira: Dado um $T > 0$, existe $C(T) > 0$ tal que a seguinte desigualdade

$$E(0) \leq C(T)\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2 dt, \tag{1.6}$$

conhecida como desigualdade de observabilidade é válida para todas as soluções de $(1.1) - (1.3)$.

A desigualdade (1.6), quando existe, garante que a energia total das soluções de $(1.1) - (1.3)$ pode ser "observada"ou estimada a partir da energia concentrada na fronteira $x = L$ durante um determinado espaço de tempo. Isto de fato ocorre, pois usando o fato de que a energia é conservada, resulta que

$$E(t) = E(0) \leq C(T)\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2 dt. \tag{1.7}$$

Já a constante $C(T)$ na desigualdade (1.6) será referida como a constante de observabilidade. Temos então um primeiro resultado que pode ser verificado no trabalho de J.A. Infante e E. Zuazua [4] e suas referências.

Teorema 1.1 *Para qualquer $T \geq 2L$, o sistema (1.1)-(1.3) é observável. Em outras palavras, para qualquer $T \geq 2L$, existe $C(T) > 0$ tal que (1.6) é válida para qualquer solução de (1.1)-(1.3).* Caso contrário, se $T < 2L$ o sistema $(1.1) - (1.3)$ não é observável ou equivalentemente

$$\sup_{\phi \text{ solução de } (1.1)-(1.3)} \left[\frac{E(0)}{\int_0^T |\phi_x(L,t)|^2}\right] \to \infty. \tag{1.8}$$

A prova do Teorema (1.1) para $T \geq 2L$ pode ser realizada de várias maneiras diferentes, incluindo Série de Fourier, técnicas multiplicativas (Komornik [17]; Lions [6]) ou as desigualdades de Carleman (Zhang [18]).

Agora vamos explicar como isso pode ser provado através de Séries de Fourier. As soluções de $(1.1) - (1.3)$ para $L = 1$, podem ser escritas na forma,

$$\phi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k cos(k\pi t) + b_k sen(k\pi t)\Big] sen(k\pi x), \tag{1.9}$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier dados por:

$$\phi^0(x) = \sum_{k\geq 1} a_k sen(k\pi x), \qquad \phi^1(x) = \sum_{k\geq 1} b_k sen(k\pi x). \tag{1.10}$$

Daí resulta pela propriedade de ortogonalidade das funções $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$,

$$E(0) = \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1} k^2\pi^2(a_k^2 + b_k^2). \tag{1.11}$$

Por outro lado,

$$\phi_x(1,t) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k k\pi\Big[a_k sen(k\pi t) + b_k cos(k\pi t)\Big]. \tag{1.12}$$

Novamente pela propriedade de ortogonalidade para as funções $sen(k\pi t)$ e $cos(k\pi t)$ em $L^2(0,2)$, segue-se que

$$\int_0^2 |\phi_x(1,t)|^2 dt = \sum_{k\geq 1} k^2\pi^2(a_k^2 + b_k^2). \tag{1.13}$$

As identidades (1.11) e (1.13) mostram que a desigualdade de observabilidade vale quando $T = 2$ e também para qualquer $T > 2$. Na verdade, neste caso particular, temos de fato a identidade

$$E(0) = \frac{1}{4}\int_0^2 |\phi_x(1,t)|^2 dt. \tag{1.14}$$

Por outro lado, para $T < 2$ a desigualdade de observabilidade não se sustenta. Ver Zuazua [1].

1.2 Aproximação por Diferenças Finitas

Analisamos o análogo de (1.1) – (1.3) para semi-discretizações numéricas da equação de ondas. Em particular, essas semi-discretizações ocorrem no nível da variável espacial x sendo o tempo t contínuo.

Vejamos primeiramente a semi-discretização em diferenças finitas para ilustrar o tipo de problema que ocorre e que foi identificado em detalhes no trabalho de Infante e Zuazua [4], considerado o trabalho pioneiro no contexto da análise de observabilidade numérica.

Dado $J \in \mathbb{N}$ e $h = L/(J+1)$ introduzimos a seguinte partição de malha

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j = jh < ... < x_J < x_{J+1} = L$$

com $j = 0, 1, 2, ..., J+1$. Em seguida introduzimos a seguinte semi-discretização em diferenças finitas de (1.1) – (1.3)

$$\phi_j'' - \Delta_h \phi_j = 0, \quad 0 < t < T, \quad j = 1, 2, ..., J \tag{1.15}$$

$$\phi_0(t) = \phi_{J+1}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \tag{1.16}$$

$$\phi_j(0) = \phi_j^0, \ \phi_j'(0) = \phi_j^1, \ \forall \ \ 1 \leq j \leq J+1 \tag{1.17}$$

onde Δ_h é o operador Laplaciano semi-discreto dado por,

$$\Delta_h \phi_j := \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2}.$$

Em (1.15) – (1.17) denotamos por ($'$) e ($''$) a derivação de 1ª e 2ª ordem no tempo. O sistema (1.15) – (1.17) é um sistema de J equações diferenciais lineares com J incógnitas $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J$, uma vez que, $\phi_0 \equiv \phi_{J+1} = 0$.

Obviamente $\phi_j = \phi_j(t)$ é aproximação para $\phi(x_j, t)$ sendo ϕ solução do problema contínuo (1.1) – (1.3), desde que os dados iniciais (ϕ_j^0, ϕ_j^1), para $j = 0, 1, 2, ..., J+1$ sejam aproximações dos dados iniciais de (1.1) – (1.3).

A energia do sistema (1.15) – (1.17) é dada por

$$E_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[|\phi_j{'}|^2 + \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 \right], \ \forall t \geq 0, \tag{1.18}$$

que é a discretização da energia contínua em (1.4). É fácil ver que a energia E_h é conservada ao longo do tempo para toda solução de (1.15) – (1.17),

$$E_h(t) = E_h(0), \ \forall t \geq 0. \tag{1.19}$$

Em seguida temos a versão semi-discreta de (1.6),

$$E_h(0) \leq C(T, h) \int_0^T \left| \frac{\phi_J(t)}{h} \right|^2 dt \tag{1.20}$$

onde usamos o operador de diferenças avançadas para ϕ_x no extremo $x = L$, isto é,

$$\phi_x(L, t) = \frac{\phi_{J+1}(t) - \phi_J(t)}{h}. \tag{1.21}$$

Tendo em conta que, $\phi_{J+1} = 0$ deduzimos que,

$$\phi_x(L, t) = \frac{-\phi_J(t)}{h}, \tag{1.22}$$

o que justifica a desigualdade de observabilidade (1.20).

Podemos notar que para todo $h > 0$ a desigualdade (1.20) realmente é verdadeira. Entretanto, o interesse principal reside na uniformidade da constante $C(T, h)$ com $h \to 0$. Se $C(T, h)$ permanece limitada quando $h \to 0$ dizemos que o sistema semi-discreto $(1.15) - (1.17)$ é uniformemente observável com respeito ao parâmetro de malha h e quando $h \to 0$. Por outro lado, tendo em conta que a observabilidade do sistema contínuo $(1.1) - (1.3)$ vale para $T > 2L$ seria natural que $T > 2L$ também seja uma condição necessária para a observabilidade uniforme do sistema $(1.15) - (1.17)$. Isto de fato é válido, no entanto, tal condição esta longe de ser suficiente e falha para todo $T > 0$, de acordo com os resultados já estabelecidos por Infante e Zuazua [4].

Em geral essas deficiências numéricas afetam as dinâmicas numéricas semi-discretas em Diferenças Finitas ou até mesmo para discretizações particulares em Elementos Finitos. Vejamos um primeiro resultado negativo.

Teorema 1.2 *Para qualquer $T > 0$, temos*

$$\sup_{\phi_j \text{ solução de } (1.15)-(1.17)} \left[\frac{E_h(0)}{\int_0^T |\frac{\phi_J}{h}|^2} \right] \to \infty \quad com \quad h \to 0. \tag{1.23}$$

Este fato se deve ao surgimento de soluções espúrias que o esquema numérico introduz à altas frequências. Isso foi observado primeiramente nos trabalhos de R. Glowinski et al. em ([13],[15],[14]), para o caso clássico de ondas livres em conexão com o problema de controlabilidade exata da fronteira usando implementações numéricas do método HUM(Hilbert Uniqueness Method) (ver J.L. Lions [6]). Nestes trabalhos foram propostos dois métodos para a cura desta patologia numérica: o procedimento de regularização de Tychonoff para minimização de funcionais e a técnica de filtragem para eliminar as componentes de ondas curtas das soluções do sistema semi-discreto. A eficiência dos dois métodos foi exibida nestes trabalhos em diversos experimentos numéricos. No entanto, nenhuma análise numérica mais apurada foi realizada para comprovar as suspeitas levantadas nos trabalhos de R. Glowinski.

Em face ao contexto anterior, entra a principal contribuição realizada no sentido de analisar numericamente a imprecisão dos resultados comprovados por R. Glowinski et al. Isto é realizado no trabalho pioneiro de J.A. Infante e E. Zuazua [4].

Vejamos alguns pontos principais deste trabalho. Por exemplo, para provar o Teorema (1.2) Infante e Zuazua usaram a análise espectral do problema $(1.15)-(1.17)$ e técnicas multiplicativas para se obter a desigualdade de observabilidade para os respectivos autovetores do problema de autovalor associado. Para provar a contrapositiva do Teorema (1.2), isto é, a desigualdade da forma (1.20) que são uniformes com $h \to 0$, os mesmos usaram técnicas multiplicativas devidamente adaptadas para a dinâmica numérica semi-discreta. Como mencionado acima, para que essas desigualdades sejam uniformes com $h \to 0$, deve-se descartar as soluções espúrias introduzidas pelo esquema numérico. Isso é feito considerando as classes adequadas de soluções de (1.15) – (1.17) geradas pela baixa frequência dos autovetores, ou em outras palavras, por um truncamento adequado ao desenvolvimento de soluções de Fourier de (1.15) – (1.17). Assim, essa abordagem é muito próxima da técnica de filtragem acima mencionada. Reportamo-nos aos trabalhos de R. Glowinski para uma discussão completa deste assunto.

Para uma melhor compreensão do tipo de problema numérico que acomete a dinâmica numérica em diferenças finitas quando analisada do ponto de vista da observabilidade, vamos considerar o seguinte problema de autovalores associado às equações (1.15) – (1.16):

$$
\begin{aligned}
-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} &= \lambda\varphi_j, \ j = 1, 2, ..., J && (1.24)\\
\varphi_0 = \varphi_{J+1} &= 0 && (1.25)
\end{aligned}
$$

e denotamos por $\lambda_1(h), \lambda_2(h), ..., \lambda_J(h)$ os J autovalores tais que

$$0 < \lambda_1(h) < \lambda_2(h) < ... < \lambda_J(h). \tag{1.26}$$

Esses autovalores podem ser calculados explicitamente tal como realizado por Isaacson e Keller em [2]. Tem-se então que,

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad k = 1, 2, ..., J. \tag{1.27}$$

Os autovetores $\varphi^k = (\varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, ..., \varphi_{k,J})$ associados aos autovalores $\lambda_k(h)$ também podem ser calculados explicitamente,

$$\varphi_{k,j} = sen\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j, k = 1, 2, ..., J. \tag{1.28}$$

As soluções de (1.15) – (1.17) admitem um desenvolvimento de Fourier sobre a base de autovetores de sistema (1.24) – (1.25). Mais precisamente, cada solução $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J)$ de (1.15) – (1.17) pode ser escrita como

$$\phi(x_j, t) = \sum_{k=1}^{J} \left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k sen(\sqrt{\lambda_k(h)}t)\right]\varphi_{k,j}, \tag{1.29}$$

onde os coeficientes a_k e $b_k \in \mathbb{R}$ podem ser calculados explicitamente em termos dos dados iniciais de $(1.15) - (1.17)$. Antes de entrar na discussão sobre a observabilidade de soluções de $(1.15) - (1.17)$, é interessante analisar a observabilidade da fronteira dos autovetores. O Lema a seguir fornece a resposta.

Lema 1.1 *Para qualquer autovetor $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_J)$ do sistema (1.24)-(1.25) é válida seguinte identidade:*

$$h \sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} \right|^2 = \frac{2L}{4 - \lambda_k(h)h^2} \left| \frac{\varphi_J}{h} \right|^2 \tag{1.30}$$

para todo $\lambda_k(h)$ em (1.27).

Prova: Ver J.A. Infante e E. Zuazua [4].

Esta identidade estabelece uma relação explícita entre a energia total dos autovetores (o lado esquerdo de (1.30) e a energia concentrada no extremo $x = L$, que é representada pela quantidade $|\varphi_J/h|^2$.

Por outro lado, é fácil verificar que

$$\lambda h^2 < 4 \tag{1.31}$$

para todo $h > 0$ e todo o autovalor λ. No entanto, isto não exclui a possibilidade da ocorrência de um "blow-up"da constante no lado direito de (1.30). De fato, pode-se verificar que para o $J-$ésimo autovalor tem-se,

$$\lambda_J(h)h^2 \to 4 \quad com \quad h \to 0.$$

Portanto um "blow-up"ocorre e daí decorre a prova imediatamente o Teorema (1.2). Por outro lado, a fim de obter a contrapositiva do Teorema (1.2), introduzimos uma subclasses de soluções adequadas de $(1.15) - (1.17)$ no seguinte sentido: dado qualquer $0 < \gamma < 4$ introduzimos a classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ de soluções de $(1.15) - (1.17)$ gerada por autovetores de $(1.24) - (1.25)$ associados com autovalores de tal forma que

$$\lambda h^2 \leq \gamma < 4.$$

Mais precisamente define-se a classe de soluções filtradas e que são numericamente observáveis, por:

$$\mathcal{C}_h(\gamma) := \left\{ \phi(x_j, t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k sen(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] sen\left(\frac{k\pi x_j}{L} \right), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

De acordo com o Lema (1.1), a energia de cada autovetor em $\mathcal{C}_h(\gamma)$ pode ser estimada de maneira uniforme em termos da energia concentrada na fronteira. Este é o procedimento numérico conhecido como filtragem das soluções.

O resultado a seguir garante que este é, de fato, o caso de todas as soluções de $(1.15)-(1.17)$ na classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ para o tempo T suficientemente grande, cuja demonstração se encontra no trabalho de Infante e Zuazua [4].

Teorema 1.3 *Suponha que* $0 < \gamma < 4$. *Então existe* $T(\gamma) \geq 2L$ *tal que para todo* $T > T(\gamma)$, *existe* $C = C(T, \gamma)$ *tal que (1.20) é válida para todas as soluções de (1.15)-(1.17) na classe* $\mathcal{C}_h(\gamma)$, *uniformemente quando* $h \to 0$. *Sendo assim,*
a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ *com* $\gamma \nearrow 4$ *e* $T(\gamma) \searrow 2L$ *com* $\gamma \searrow 0$
b) $C(T, \gamma) \searrow \frac{L}{2(T-2L)}$ *com* $\gamma \searrow 0$.

Nota 1.1 O Teorema (1.3) afirma que a desigualdade de observabilidade (1.20) é válida na classe $\mathcal{C}_h(\gamma)$ para T suficientemente grande. Na verdade, $T(\gamma) \to \infty$ com $\gamma \to 4$ e para $\gamma \to 0$ a observabilidade para o tempo $T(\gamma)$ converge para $2L$, que é o tempo de observabilidade para o sistema $(1.1) - (1.3)$. Nota-se que, de acordo com esse resultado, a desigualdade de observabilidade (1.20) é válida para $T > 2L$ para soluções de $(1.15) - (1.17)$ da forma

$$\phi(x_j, t) = \sum_{\lambda_k(h) \leq \nu(h)} \left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k(h)}t) + b_k sen(\sqrt{\lambda_k(h)}t) \right] sen\left(\frac{k\pi x_j}{L} \right) \tag{1.32}$$

com $\nu(h)$ tal que

$$\nu(h)h^2 \to 0 \;\; com \;\; h \to 0. \tag{1.33}$$

Isso permite recuperar a observabilidade do sistema original $(1.1) - (1.3)$ para essa classe de soluções da forma $(1.32) - (1.33)$ da dinâmica numérica em diferenças finitas.

Observa-se também, de acordo com o Teorema (1.3), que a constante $C(T, \gamma)$ converge para $L/2(T-2L)$, que é a constante de observabilidade do sistema contínuo $(1.1) - (1.3)$. Portanto o Teorema (1.3) nos garante que o sistema semi-discreto é uniformemente observável com $h \to 0$ desde que as altas frequências sejam filtradas.

Por último destacamos mais um Lema que é utilizado na demonstração da perda de observabilidade numérica do sistema semi-discreto em diferenças finitas.

Lema 1.2 *Para qualquer autovetor* φ *com autovalor* λ *de* $(1.24)-(1.25)$ *temos a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2=\lambda h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2 \tag{1.34}$$

e se φ_k *e* φ_l *são autovetores associados a autovalores* $\lambda_k\neq\lambda_l$ *segue-se que:*

$$h\sum_{j=0}^{J}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1}-\varphi_{l,j})=0. \tag{1.35}$$

Prova: Ver J.A. Infante e E. Zuazua [4].

No que segue, para uma melhor compreensão do resultado de perda de observabilidade numérica, forneceremos a prova do Teorema (1.2) que consta no trabalho de Infante e Zuazua [4].

1.2.1 Perda de Observabilidade Numérica

Nesta seção descrevemos a demonstração do Teorema (1.2), o qual se encontra no trabalho de Infante e Zuazua [4]. Seja então ϕ uma solução de $(1.15)-(1.17)$ associado ao $J-$ésimo autovetor e dada por,

$$\phi_J(t)=cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\varphi_J.$$

Temos então

$$\int_0^T\left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2dt=\left|\frac{\varphi_{J,J}}{h}\right|^2\int_0^T\left|cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2dt.$$

De (1.30) obtemos,

$$\int_0^T\left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2dt=\frac{(4-\lambda_J(h)h^2)}{2L}h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\int_0^T\left|cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2dt. \tag{1.36}$$

Por outro lado, usando o Lema (1.2),

$$E_h(0)=\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\lambda_J(h)|\varphi_{J,j}|^2+\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2\right]=h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1}-\varphi_{J,j}}{h}\right|^2,$$

e por conseguinte,

$$\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt = \frac{(4-\lambda_J(h)h^2)}{2L} E_h(0) \int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt, \tag{1.37}$$

de onde resulta que,

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{2L}{4-\lambda_J(h)h^2} \frac{1}{\displaystyle\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt}.$$

Como $\displaystyle\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h)}t)\right|^2 dt \to T/2$ com $h \to 0$, temos

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{4L}{T(4-\lambda_J(h)h^2)}. \tag{1.38}$$

e usando o fato de que $h = \frac{L}{J+1}$, obtemos

$$\lambda_J(h)h^2 \quad = \quad 4sen^2\left(\frac{J\pi h}{2L}\right) = 4sen^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L}\right) = 4cos^2\left(\frac{h\pi}{2L}\right) \to 4, \quad com \quad h \to 0.$$

Combinando esses dois últimos temos que

$$\frac{E_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt} \to \infty, \text{ com } h \to 0, \tag{1.39}$$

$\blacksquare$

e portanto segue imediatamente o Teorema (1.2).

Todos esses resultados nos motivaram fortemente a estudar uma possível perda observabilidade numérica para esquemas numéricos semi-discretos em diferenças finitas aplicados às equações de ondas acopladas, em que duas propagações de ondas interagem em um mesmo sistema. Tal propriedade ainda não tinha sido analisada na literatura e nos próximos capítulos passamos a descrevê-la.

Capítulo 2

O Sistema de Ondas Acopladas

Este é o capítulo introdutório de nossas investigações. Basicamente nele destacamos o sistema hiperbólico de ondas acopladas que se constitui no objeto principal de nossas investigações no campo da análise numérica. Destacamos também os principais resultados existentes na literatura matemática e, neste sentido, ressaltamos também que nosso foco principal de pesquisa se concentra nas propriedades de observabilidade numérica dos esquemas mais elementares em diferenças finitas quando aplicados sobre o sistema hiperbólico de ondas acopladas.

2.1 Apresentação do Problema

O sistema hiperbólico de ondas acopladas objeto de nossas investigações matemáticas consiste nas equações:

$$\phi_{tt} - c_1^2\phi_{xx} + \alpha(\phi - \psi) = 0, \quad em \ \ (0,L)\times(0,T) \tag{2.1}$$

$$\psi_{tt} - c_2^2\psi_{xx} + \alpha(\psi - \phi) = 0, \quad em \ \ (0,L)\times(0,T) \tag{2.2}$$

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0, \ \forall t \in (0,T) \tag{2.3}$$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x), \ \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \ \ \psi(x,0) = \psi_0(x), \ \psi_t(x,0) = \psi_1(x), \ \forall x \in (0,L) \tag{2.4}$$

onde $\alpha > 0$ é conhecida como constante de acoplamento e c_1^2, c_2^2 são as velocidades de propagação de ondas associadas aos deslocamentos ϕ e ψ. As questões de existência e unicidade de soluções são asseguradas utilizando por exemplo a Teoria de Semigrupo de Operadores Lineares. O leitor interessado em estudá-las pode consultar as referências ([11], [12]). Assim, destacamos que o sistema (2.1) – (2.4) está bem definido no espaço $(H_0^1(0,L) \times L^2(0,L))^2$. Então, para quaisquer dados iniciais $(\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1) \in (H_0^1(0,L) \times L^2(0,L))^2$ existe uma única solução (ϕ, ψ) $\in C([0,T]; H_0^1(0,L)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(0,L))$.

Sistemas hiperbólicos acoplados do tipo (2.1) – (2.4) tem merecido especial atenção por parte de alguns pesquisadores nos últimos anos. Podemos mencionar dos trabalhos de Najafi et al. ([7],[8],[9],[10]), todos no contexto de estabilização. Outro importante trabalho é devido a Rajaram e Najafi [12], sobre a controlabilidade exata em $\boldsymbol{R}^n$ em que os autores mostram uma desigualdade de observabilidade no caso em que as velocidades de propagações de ondas c_1^2 e c_2^2 são iguais.

No decorrer deste capítulo, primeiramente construímos o funcional de energia associado às equações (2.1) – (2.4) e mostramos o seu caráter conservativo. Em seguida construímos explicitamente as soluções de (2.1) – (2.4) por meio das Séries de Fourier. É precisamente neste ponto do trabalho, que destacamos a técnica por nós utilizada para obtermos a maioria de nossos resultados.

A energia das soluções de (2.1) – (2.4) é dada por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\phi_t|^2 + |\psi_t|^2 + c_1^2|\phi_x|^2 + c_2^2|\psi_x|^2 + \alpha|\phi - \psi|^2 \right] dx, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.5}$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \ \forall t \geq 0. \tag{2.6}$$

Essa propriedade é garantida na seguinte proposição:

Proposição 2.1 (Conservação de Energia) Dado o funcional de energia (2.5) temos que,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \ \forall t \geq 0.$$

Prova: Inicialmente consideremos a equação (2.1), onde multiplicamos por ϕ_t e integramos em $(0,L)$. Segue que,

$$\int_0^L \phi_{tt}\phi_t dx - c_1^2 \int_0^L \phi_{xx}\phi_t dx + \alpha \int_0^L (\phi - \psi)\phi_t dx \quad = \quad 0.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas resulta que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\phi_t|^2 dx + \frac{c_1^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\phi_x|^2 dx + \alpha \int_0^L (\phi - \psi)\phi_t dx \quad = \quad 0.$$

De forma análoga temos para a equação (2.2),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{c_2^2}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \alpha\int_0^L (\psi-\phi)\psi_t dx \quad = \quad 0.$$

Somando as duas equações acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \left[|\phi_t|^2 + |\psi_t|^2 + c_1^2|\phi_x|^2 + c_2^2|\psi_x|^2 + \alpha|\phi-\psi|^2\right]dx = 0,$$

de onde definimos a energia por

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[|\phi_t|^2 + |\psi_t|^2 + c_1^2|\phi_x|^2 + c_2^2|\psi_x|^2 + \alpha|\phi-\psi|^2\right]dx$$

e consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad \forall t \geq 0.$$

■

Vamos construir agora as soluções de (2.1) − (2.4) usando o desacoplamento das equações (2.1) e (2.2). Note que isto pode ser realizado desde que as velocidades de propagações de ondas c_1^2 e c_2^2 seja iguais. De fato, seja $c_1^2 = c_2^2 = c^2$ e efetuamos a soma de (2.1) e (2.2). Este procedimento resulta em,

$$(\phi+\psi)_{tt} - c^2(\phi+\psi)_{xx} = 0. \tag{2.7}$$

Por outro lado, subtraindo as equações (2.1) e (2.2) obtemos,

$$(\phi-\psi)_{tt} - c^2(\phi-\psi)_{xx} + 2\alpha(\phi-\psi) = 0. \tag{2.8}$$

Com isto, podemos notar que a equação (2.7) consiste da soma das duas propagações de ondas ϕ e ψ que ocorrem no sistema (2.1) − (2.4) e, neste sentido, tal equação é basicamente a equação (1.1) cujos resultados sobre observabilidade da fronteira à nível do contínuo e das dinâmicas numéricas semi-discretas são facilmente aplicáveis à equação desacoplada (2.7). Portanto, basicamente, o problema de observabilidade da fronteira para o sistema acoplado (2.1) − (2.4) depende dos resultados de observabilidade para a equação desacoplada (2.8).

Com esta dinâmica de desacoplamento, podemos construir as soluções do sistema (2.1)−(2.4). Temos assim outra proposição.

Proposição 2.2 As soluções do sistema (2.1) – (2.4) são dadas por:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) + d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right] sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.9)$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) - b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) - d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right] sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (2.10)$$

onde a_k, b_k, c_k e d_k são os coeficientes de Fourier e os autovalores são

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{L^2} \text{ e } \mu_k = \lambda_k + 2\alpha. \quad (2.11)$$

Prova: Para a demonstração vamos considerar dois casos distintos, sempre admitindo que as velocidades c_1^2 e c_2^2 são iguais, pois isto permite o desacoplamento das equações (2.1) – (2.2). Em particular consideremos $c_1^2 = c_2^2 = 1$ e temos assim o primeiro caso:

O caso das vibrações de ondas livres

Este é o caso que resulta da soma das equações (2.1) e (2.2). Temos então,

$$\begin{aligned}
\omega_{tt} - \omega_{xx} &= 0, \qquad em \ \ (0,L)\times(0,T) && (2.12)\\
\omega(0,t) = \omega(L,t) &= 0, \qquad \forall t \geq 0 && (2.13)\\
\omega(x,0) = \omega_0(x),\ \omega_t(x,0) &= \omega_1(x),\ \forall x \in (0,L) && (2.14)
\end{aligned}$$

onde $\omega = \phi + \psi$. A solução via Série de Fourier pode ser escrita por

$$\omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k sen(\sqrt{\lambda_k}t)\right] sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (2.15)$$

onde a_k e b_k são os coeficientes de Fourier que podem ser obtidos através das condições iniciais e $\lambda_k = k^2\pi^2/L^2$ são os autovalores em que $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

O caso das vibrações causadas pela ação de uma força restauradora

Este caso resulta da subtração das equações (2.1) e (2.2). Temos portanto,

$$\begin{aligned}
\theta_{tt} - \theta_{xx} + 2\alpha\theta &= 0, \qquad em \ \ (0,L)\times(0,T) && (2.16)\\
\theta(0,t) = \theta(L,t) &= 0, \qquad \forall t \geq 0 && (2.17)\\
\theta(x,0) = \theta_0(x),\ \theta_t(x,0) &= \theta_1(x),\ \forall x \in (0,L) && (2.18)
\end{aligned}$$

onde $\theta = \phi - \psi$, logo a solução dada via Série de Fourier pode ser escrita por

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k cos(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t) + d_k sen(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t)\right] sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{2.19}$$

onde c_k e d_k são os coeficientes de Fourier que podem ser obtidos através das condições iniciais e $\mu_k = \lambda_k + 2\alpha$ são os autovalores em que $k \in \mathbb{Z}_+^*$.

Agora para encontrarmos a solução do sistema acoplado $(2.1)-(2.4)$, basta resolvermos o sistema linear dado por

$$\phi + \psi = \omega$$
$$\phi - \psi = \theta$$

$\blacksquare$

o que nos dá as soluções requeridas.

Esse procedimento usado para a demonstração da proposição anterior será uma constante neste trabalho, sempre assumindo que $c_1^2 = c_2^2 = 1$.

No próximo capítulo passamos a explorar as propriedades da dinâmica numérica semi-discreta em diferenças finitas para o sistema $(2.1)-(2.4)$, e um de nossos principais resultados diz respeito a perda de observabilidade numérica com respeito ao parâmetro de discretização espacial, resultado este que não corresponde a desigualdade de observabilidade para o caso contínuo $(2.1)-(2.4)$ a qual é dada por:

$$\mathcal{E}(0) \leq C\int_0^T [|\phi_x(L,t)|^2 + |\psi_x(L,t)|^2]dt \tag{2.20}$$

para toda solução de $(2.1)-(2.4)$ em $C > 0$. O leitor interessado na demonstração, consulte as referências ([12],[18]).

Capítulo 3

Diferenças Finitas Semi-discretas aplicadas às Ondas Acopladas

Neste capítulo analisamos do ponto de vista numérico das equações semi-discretas em diferenças finitas a propriedade de observabilidade numérica para o sistema de ondas acopladas $(2.1) - (2.4)$. Para tanto, para a maioria dos nossos resultados usamos o procedimento de desacoplamento das equações $(2.1) - (2.2)$ que propomos no capítulo anterior.

O principal resultado deste capítulo versa sobre a perda de observabilidade numérica para a dinâmica semi-discreta em diferenças finitas aplicadas à equação de ondas acopladas. Paralelamente, aplicamos também a técnica de filtragem das soluções numéricas espúrias para obtermos uma classe de soluções que são numericamente observáveis.

3.1 A Dinâmica Numérica Semi-discreta: O Caso Clássico

Para o sistema hiperbólico (2.1) – (2.4), assumimos o seguinte esquema numérico semi-discreto em diferenças finitas,

$$\phi_j'' - c_1^2 \Delta_h \phi_j + \alpha(\phi_j - \psi_j) = 0, \; 0 < t < T, \; j = 1, 2, ..., J \quad (3.1)$$

$$\psi_j'' - c_2^2 \Delta_h \psi_j + \alpha(\psi_j - \phi_j) = 0, \; 0 < t < T, \; j = 1, 2, ..., J \quad (3.2)$$

$$\phi_0 = \phi_{J+1} = \psi_0 = \psi_{J+1} = 0, \;\; 0 < t < T \quad (3.3)$$

$$\phi_j(0) = \phi_j^0, \; \phi_j'(0) = \phi_j^1, \;\; \psi_j(0) = \psi_j^0, \; \psi_j'(0) = \psi_j^1, \; j = 0, 1, ..., J+1 \quad (3.4)$$

em que

$$\Delta_h \phi_j := \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{h^2},$$

corresponde a semi-discretização de três pontos para o operador Laplaciano. Para nossos resultados de perda de observabilidade numérica do modelo (3.1) – (3.4), sempre assumiremos que $c_1^2 = c_2^2 = 1$.

Em (3.1) – (3.4) denotamos $(')$ e $('')$ a derivação de 1ª e 2ª ordem no tempo. O sistema (3.1) – (3.4) é um sistema de $2J$ equações diferenciais lineares nas incógnitas $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J$ e $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_J$, uma vez que, em vista das condições de contorno, $\phi_0 \equiv \phi_{J+1} = 0$ e $\psi_0 \equiv \psi_{J+1} = 0$. Obviamente $\phi_j = \phi_j(t)$ e $\psi_j = \psi_j(t)$ são aproximações para $\phi(x_j, t)$ e $\psi(x_j, t)$ respectivamente, sendo (ϕ, ψ) solução do caso contínuo desde que os dados iniciais (ϕ_j^0, ϕ_j^1) e (ψ_j^0, ψ_j^1), $j = 0, 1, ..., J+1$ sejam aproximações dos dados iniciais do problema contínuo.

A energia do sistema (3.1) – (3.4) é dada por

$$\mathcal{E}_h(t) := \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{J} \left[|\phi_j'|^2 + |\psi_j'|^2 + c_1^2 \left| \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{h} \right|^2 + c_2^2 \left| \frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{h} \right|^2 + \alpha |\phi_j - \psi_j|^2 \right], \; \forall t \geq 0 \quad (3.5)$$

que é a discretização da energia $\mathcal{E}(t)$. Notemos que $\mathcal{E}_h(t)$ se constitui em um funcional definido positivo, tal como $\mathcal{E}(t)$. Além disto, é fácil ver que a energia $\mathcal{E}_h$ é conservada ao longo do tempo para a solução de (3.1) – (3.4), isto é,

$$\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0), \; \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

Nesse sentido, temos a primeira propriedade do esquema numérico (3.1) – (3.4).

Proposição 3.1. *(Conservação de Energia) Para o funcional de energia semi-discreta* (3.5) *temos que*

$$\mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0).$$

Prova: Multiplicamos a equação (3.1) por ϕ_j' e efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$. Procedendo desse modo teremos:

$$h\sum_{j=1}^{J}\phi_j''\phi_j' - \frac{c_1^2 h}{h^2}\sum_{j=1}^{J}(\phi_{j+1}-\phi_j)\phi_j' - \frac{c_1^2 h}{h^2}\sum_{j=1}^{J}(\phi_{j-1}-\phi_j)\phi_j' + \alpha h\sum_{j=1}^{J}(\phi_j-\psi_j)\phi_j' = 0.$$

Agora usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, resultando em,

$$h\sum_{j=0}^{J}\phi_j''\phi_j' - \frac{c_1^2 h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j+1}-\phi_j)\phi_j' - \frac{c_1^2 h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j-\phi_{j+1})\phi_{j+1}' + \alpha h\sum_{j=0}^{J}(\phi_j-\psi_j)\phi_j' = 0.$$

Após algumas simplificações temos que,

$$\frac{d}{dt}\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}|\phi_j'|^2 + \frac{d}{dt}\frac{c_1^2 h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{h}\right|^2 + \alpha h\sum_{j=0}^{J}(\phi_j-\psi_j)\phi_j' = 0.$$

De forma análoga temos para (3.2),

$$\frac{d}{dt}\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}|\psi_j'|^2 + \frac{d}{dt}\frac{c_2^2 h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 + \alpha h\sum_{j=0}^{J}(\psi_j-\phi_j)\psi_j' = 0.$$

Somando as equações acima temos,

$$\frac{d}{dt}\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\phi_j'|^2 + |\psi_j'|^2 + c_1^2\left|\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{h}\right|^2 + c_2^2\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 + \alpha|\phi_j-\psi_j|^2\right] = 0.$$

Em seguida definimos o funcional de energia $\mathcal{E}_h(t)$ como,

$$\mathcal{E}_h(t) := \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\phi_j'|^2 + |\psi_j'|^2 + c_1^2\left|\frac{\phi_{j+1}-\phi_j}{h}\right|^2 + c_2^2\left|\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{h}\right|^2 + \alpha|\phi_j-\psi_j|^2\right].$$

Daí temos,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_h(t) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_h(t) = \mathcal{E}_h(0),$$

$\blacksquare$

o que caracteriza que o sistema semi-discreto sob consideração é conservativo, tal como no caso contínuo.

Podemos notar também que $\mathcal{E}_h(t)$ pode ser decomposta em outras duas energias desde que $c_1^2 = c_2^2 = c^2$. Em particular, assumimos que $c_1^2 = c_2^2 = 1$. Temos então:

$$E_h(t) := \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\phi_j' + \psi_j'|^2 + \left|\frac{(\phi_{j+1}+\psi_{j+1}) - (\phi_j + \psi_j)}{h}\right|^2\right],\ \forall t \geq 0, \tag{3.7}$$

que é a energia do sistema resultante da soma das equações (3.1) e (3.2) e também a energia

$$\widetilde{E}_h(t) := \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\phi_j' - \psi_j'|^2 + \left|\frac{(\phi_{j+1}-\psi_{j+1}) - (\phi_j - \psi_j)}{h}\right|^2 + 2\alpha|\phi_j - \psi_j|^2\right],\ \forall t \geq 0, \tag{3.8}$$

que resulta da diferença entre (3.1) e (3.2).

Estabelecemos agora o objetivo principal deste trabalho: analisar a versão semi-discreta de (2.20), a saber,

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T)\int_0^T \left[\left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 + \left|\frac{\psi_J(t)}{h}\right|^2\right]dt, \tag{3.9}$$

onde usamos o operador de diferenças avançadas para ϕ_x e ψ_x no ponto $x = L$, isto é,

$$\phi_x(L,t) = \frac{\phi_{J+1}(t) - \phi_J(t)}{h}, \quad \psi_x(L,t) = \frac{\psi_{J+1}(t) - \psi_J(t)}{h}.$$

Devido às condições de contorno de Dirichlet homogêneas $\phi_{J+1} = 0$ e $\psi_{J+1} = 0$ deduzimos que,

$$\phi_x(L,t) = \frac{-\phi_J(t)}{h}, \quad \psi_x(L,t) = \frac{-\psi_J(t)}{h}, \forall t \geq 0.$$

Agora, olhando para (2.20) pode-se esperar que, quando $T > 2L$, existe $C(T) > 0$ independente de h tal que (3.9) vale para todas as soluções de (3.1) $-$ (3.4) e para todo $0 < h < L$.

O teorema dado a seguir, um dos primeiros resultados deste trabalho, afirma que isso é falso.

Teorema 3.1 *Para qualquer $T > 0$, temos*

$$\sup_{(\phi_j,\psi_j)\ \textit{solução de}\ (3.1)-(3.4)} \left[\frac{\mathcal{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2 dt} \right] \to \infty \quad \textit{com} \quad h \to 0. \qquad (3.10)$$

Como foi visto na introdução, este fato se deve a introdução de soluções numéricas espúrias próprias do esquema numérico em diferenças finitas.

Para provar o Teorema (3.1) utilizamos o mesmo procedimento usado por Infante e Zuazua [4], que consiste em analisarmos o espectro de $(3.1)-(3.4)$ e usarmos das técnicas multiplicativas para obtermos as identidades de observabilidade para os autovetores do problema de autovalor associado a $(3.1)-(3.4)$ e concluir a respeito da possível perda de observabilidade numérica. Para provar a contrapositiva do Teorema (3.1), isto é, a desigualdade da forma (3.9) que são uniformes quando $h \to 0$, usamos também das técnicas multiplicativas discretas. Como mencionado acima, para que essas desigualdades sejam uniformes com respeito ao parâmetro de malha h, temos que descartar as soluções numéricas espúrias introduzidas pelo esquema numérico sob consideração. Para este propósito, consideremos inicialmente a análise espectral do problema semi-discreto $(3.1) - (3.4)$.

3.1.1 Análise Espectral Semi-discreta

Os autovalores e a solução explícita do problema $(3.1) - (3.4)$ podem ser encontrados utilizando a técnica de desacoplamento, como segue na proposição abaixo.

Proposição 3.2 Seja $\alpha > 0$ um número real e $c_1^2 = c_2^2 = 1$. Temos as seguintes soluções do sistema $(3.1) - (3.4)$:

$$\phi(x_j,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) + d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right]\varphi_{k,j} \qquad (3.11)$$

e

$$\psi(x_j,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) - b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) - d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right]\varphi_{k,j}, \qquad (3.12)$$

onde

$$\lambda_k = \lambda_k(h) = \frac{4}{h^2}sen^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right), \quad \mu_k = \mu_k(h) = \frac{4}{h^2}sen^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + 2\alpha \qquad (3.13)$$

são os autovalores e os autovetores associados são dados pelas sequências de auto-funções,

$$\varphi_{k,j} = sen\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right). \tag{3.14}$$

Prova: Primeiramente efetuamos a soma e a subtração da equações $(3.1)-(3.2)$, resultando em

$$\begin{aligned} \omega_j^{''} - \Delta_h \omega_j = & \quad 0, \quad 0 < t < T,\ j = 1, 2, ..., J & (3.15)\\ \omega_0(t) = \omega_{J+1}(t) = & \quad 0, \quad 0 < t < T & (3.16)\\ \omega_j(0) = \omega_j^0,\ \omega_j^{'}(0) = & \quad \omega_j^1, \quad j = 0, 1, ..., J+1. & (3.17)\end{aligned}$$

onde $\omega_j = \phi_j + \psi_j$. Temos então o seguinte problema de autovalores,

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} &= \lambda\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., J & (3.18)\\ \varphi_0 = \varphi_{J+1} &= 0. & (3.19)\end{aligned}$$

Veja que pela soma das equações obtemos o caso semi-discreto estudado por J.A. Infante e E. Zuazua [4]. Para este caso, já conhecemos os autovalores que são dados por

$$\lambda_k(h) = \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) \tag{3.20}$$

com autovetores dados por,

$$\varphi_{k,j} = sen\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j, k = 1, 2, ..., J.$$

Por outro lado subtraindo as equações em $(3.1) - (3.2)$ teremos:

$$\begin{aligned} \theta_j^{''} - \Delta_h \theta_j + 2\alpha\theta_j = & \quad 0, \quad 0 < t < T,\ j = 1, 2, ..., J & (3.21)\\ \theta_0(t) = \theta_{J+1}(t) = & \quad 0, \quad 0 < t < T & (3.22)\\ \theta_j(0) = \theta_j^0,\ \theta_j^{'}(0) = & \quad \theta_j^1, \quad j = 0, 1, ..., J+1. & (3.23)\end{aligned}$$

onde $\theta_j = \phi_j - \psi_j$. Nesse caso, o problema de autovalores é dado por

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + 2\alpha\varphi_j &= \mu\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., J & (3.24)\\ \varphi_0 = \varphi_{J+1} &= 0. & (3.25)\end{aligned}$$

Vamos denotar também por $\mu_1(h), \mu_2(h), ..., \mu_J(h)$ os J autovetores de (3.24):

$$0 < \mu_1(h) < \mu_2(h) < ... < \mu_J(h).$$

Esses autovalores podem ser calculados explicitamente usando a sequência de auto-funções

$$\varphi_{k,j} = sen\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right), \quad j,k = 1,2,...,J. \tag{3.26}$$

diretamente na equação de (3.24). Obtemos assim,

$$\mu_k(h) = \frac{4}{h^2} sen^2\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) + 2\alpha, \quad k = 1,2,...,J \tag{3.27}$$

ou equivalentemente escrevemos,

$$\mu_k(h) = \lambda_k(h) + 2\alpha, \quad k = 1,2,...,J.$$

Portanto, temos que as soluções de (3.1) – (3.4) admitem um desenvolvimento de Fourier sobre a base de autovetores do problema de autovalor associado. Mais precisamente, cada solução $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_J)$ e $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_J)$ de (3.1) – (3.4) pode ser escrita como,

$$\phi(x_j,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k cos(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) + d_k sen(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t)\right]\varphi_{k,j},$$

$$\psi(x_j,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{J}\left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) - b_k cos(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) - d_k sen(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha}t)\right]\varphi_{k,j}.$$

■

onde $\lambda_k = \lambda_k(h)$ são os autovalores (3.20).

Verifica-se sem muita dificuldade que as soluções as quais se referem a proposição anterior satisfazem pontualmente as equações (3.1) – (3.2) no caso $c_1^2 = c_2^2 = 1$ e, no limite de $h \to 0$, temos que

$$\phi(x_j,t) \to \phi(x,t) \text{ e } \psi(x_j,t) \to \psi(x,t) \tag{3.28}$$

em que $\phi(x,t)$ e $\psi(x,t)$ são as soluções (2.9) e (2.10) do sistema (2.1) – (2.4), respectivamente.

Nosso próximo resultado versa sobre a perda de observabilidade numérica para o sistema (3.21) – (3.23). Esse resultado é fundamental para que possamos demonstrar nosso resultado mais geral que é o Teorema (3.1). De fato, notemos que o sistema parcial que é resultado da soma entre as equações semi-discretas (3.1) – (3.2) é afetado pela perda de observabilidade numérica, pois basta usarmos os resultados da referência [4]. Nesse sentido, se garantirmos que o sistema (3.21) – (3.23) também é afetado por uma perda de observabilidade numérica para seus autovetores, basta portanto considerarmos a soma desses dois resultados sobre perda de observabilidade.

Lema 3.1 *Para quaisquer autovetores $\varphi_{k,j}$, associado ao problema* (3.21) – (3.23) *é válida a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2 = \frac{2L}{4+[2\alpha-\mu_k(h)]h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2$$

com $\mu_k(h)h^2 < 4+2\alpha h^2$.

Esta identidade estabelece uma relação explícita entre a energia total do autovetores e a energia localizada na fronteira, $x = L$, representada pela quantidade $|\varphi_J/h|^2$. Mas, como prevíamos, isso não exclui um "blow-up"na identidade anterior, pois para o $J-$ésimo autovalor temos que,

$$-(\mu_J(h)-2\alpha)h^2 = -\lambda_J(h)h^2 \to -4,\ \ h \to 0,$$

e portanto

$$\frac{2L}{4+[2\alpha-\mu_k(h)]h^2} \to \infty,\ \ h\to 0.$$

Isto prova, como veremos, o Teorema (3.1) em função do procedimento de desacoplamento das equações semi-discretas. Por outro lado a fim de obtermos uma contrapositiva do Teorema (3.1), introduzimos uma subclasse de soluções adequadas de (3.1) – (3.4). Para tanto, podemos notar que as constantes de observabilidade dos autovetores no Lema (1.1) e no Lema (3.1) são dadas respectivamente por,

$$\frac{2L}{4-\lambda_k(h)h^2} \text{ e } \frac{2L}{4+[2\alpha-\mu_k(h)]h^2}.$$

Notemos que -4 é o valor do limite para o qual os valores de $-\lambda_k(h)h^2$ e $[2\alpha-\mu_k(h)]h^2$ convergem quando $h \to 0$. Podemos portanto considerar que dado qualquer $0 < \gamma < 4$ existe uma classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$ de soluções de $(3.1)-(3.4)$ gerada por autovetores associados com autovalores de tal forma que,

$$\lambda_k(h)h^2 \leq \gamma < 4.$$

Mais precisamente,

$$\mathcal{D}_h(\gamma) := \begin{cases} \phi(x_j,t) &= \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{\lambda_k(h)\leq\gamma h^{-2}} \left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) + b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) + d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right]\varphi_{k,j} \\ \\ \psi(x_j,t) &= \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{\lambda_k(h)\leq\gamma h^{-2}} \left[a_k cos(\sqrt{\lambda_k}t) - b_k cos(\sqrt{\mu_k}t) + c_k sen(\sqrt{\lambda_k}t) - d_k sen(\sqrt{\mu_k}t)\right]\varphi_{k,j} \end{cases}$$

com $\lambda_k = \lambda_k(h)$ e $\mu_k = \mu_k(h) = \lambda_k(h) + 2\alpha$.

Procedendo deste modo, iremos concluir que a energia de cada autovetor em $\mathcal{D}_h(\gamma)$ pode ser estimada de maneira uniforme em termos da energia concentrada na fronteira.

O resultado a seguir garante que esta é, de fato, o caso de todas as soluções de $(3.1)-(3.4)$ na classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$, desde que o tempo T seja suficientemente grande.

Teorema 3.2 *Suponha que* $0 < \gamma < 4$. *Então existe* $T(\gamma) \geq 2L$ *tal que para todo* $T > T(\gamma)$ *existe* $C(T,\gamma)$ *tal que a desigualdade*

$$\mathcal{E}_h(0) \leq C(T,\gamma) \int_0^T \left[\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2 + \left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right] dt \tag{3.29}$$

é verdadeira para toda solução de $(3.1)-(3.4)$ *em* $\mathcal{D}_h(\gamma)$ *com* $h \to 0$ *uniformemente. Sendo assim,*

a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ com $\gamma \searrow 0$

b) $C(T,\gamma) \searrow \frac{L}{4(T-2L)}$ com $\gamma \searrow 0$.

Na próxima seção, provamos o Lema (3.1) e em seguida a perda de observabilidade do sistema numérico $(3.21)-(3.23)$. Nessa direção, todos os resultados sobre perda de observabilidade das soluções numéricas do sistema acoplado $(3.1)-(3.4)$ (objeto principal de nossas investigações) esta diretamente relacionado com a perda de observabilidade das soluções numéricas do sistema desacoplado $(3.21)-(3.23)$.

3.1.2 Observabilidade dos Autovetores do Sistema Desacoplado

A energia do sistema $(3.21)-(3.23)$ é dada por

$$\widetilde{E}_h(t) := \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[|\theta_j{}'|^2 + \left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 + 2\alpha|\theta_j|^2\right], \ \forall t \geq 0. \tag{3.30}$$

É fácil ver que a energia $\widetilde{E}_h$ é conservada ao longo do tempo para toda solução de (3.21) – (3.23), isto é,

$$\widetilde{E}_h(t) = \widetilde{E}_h(0), \ \forall t \geq 0. \tag{3.31}$$

Em seguida estabelecemos a versão discreta para a desigualdade de observabilidade, a saber:

$$\widetilde{E}_h(0) \leq C(T,h) \int_0^T \left| \frac{\theta_J(t)}{h} \right|^2 dt. \tag{3.32}$$

De acordo com o Lema (3.1) podemos assegurar uma relação entre a energia dos autovetores associados ao sistema desacoplado (3.21) – (3.23) com sua respectiva medida no contorno $x_{J+1} = L$. Com isto, podemos estabelecer também o resultado de perda de observabilidade neste caso.

Teorema 3.3 *Para qualquer $T > 0$, temos*

$$C(T,h) = \sup_{\theta_j \ \textit{solução de} \ (3.21)-(3.23)} \left[\frac{\widetilde{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left| \frac{\theta_J(t)}{h} \right|^2 dt} \right] \to \infty \quad com \quad h \to 0. \tag{3.33}$$

Notemos que as soluções de (3.21) – (3.23) admitem um desenvolvimento de Fourier sobre a base de autovetores do sistema (3.24). Mais precisamente, cada solução $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_J)$ pode ser escrita como

$$\theta(x_j,t) = \sum_{k=1}^{J} \left[c_k cos\left(\sqrt{\lambda_k(h) + 2\alpha} t\right) + d_k sen\left(\sqrt{\lambda_k(h) + 2\alpha} t\right) \right] \varphi_{k,j}, \tag{3.34}$$

onde os coeficientes c_k e $d_k \in \mathbb{R}$ podem ser calculados explicitamente em termos dos dados iniciais em (3.23). O Teorema (3.3) nos diz que existe uma perda de observabilidade numérica para o problema (3.21) – (3.23). No entanto, podemos obter a sua contrapositiva pela técnica de filtragem das soluções. Isto será demonstrado posteriormente, usando das técnicas multiplicativas, na seguinte classe de soluções numéricas filtradas:

$$\mathcal{H}_h(\gamma) := \left\{ \theta(x_j,t) \ = \sum_{\lambda_k(h) \leq \gamma h^{-2}} \left[c_k cos(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha} t) + d_k sen(\sqrt{\lambda_k + 2\alpha} t) \right] \varphi_{k,j}, \ \ a_k, b_k \ \in \mathbb{R} \right\}$$

com

$$\varphi_{k,j} = sen\left(\frac{k\pi x_j}{L}\right).$$

Procedemos agora com a demonstração do Lema (3.1).

Prova: Consideremos a equação espectral em (3.24),

$$-\frac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2}+2\alpha\varphi_j=\mu\varphi_j,$$

onde multiplicamos por φ_j e efetuamos o somatório para $1\leq j\leq J$. Então,

$$-h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j+1}-\varphi_j)}{h^2}-h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j-1}-\varphi_j)}{h^2}+2\alpha h\sum_{j=1}^{J}|\varphi_j|^2=\mu h\sum_{j=1}^{J}|\varphi_j|^2.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, obtemos

$$-h\sum_{j=0}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j+1}-\varphi_j)}{h^2}-h\sum_{j=0}^{J}\frac{\varphi_{j+1}(\varphi_j-\varphi_{j+1})}{h^2}+2\alpha h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2=\mu h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2,$$

que resulta em,

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2+2\alpha h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2=\mu h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2. \tag{3.35}$$

A partir daqui tomamos φ_j normalizado, isto é,

$$h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2=1.$$

Daí temos

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2+2\alpha=\mu. \tag{3.36}$$

Agora desenvolvemos o termo quadrático na expressão anterior,

$$\frac{1}{h^2}h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_{j+1}|^2-\frac{2}{h^2}h\sum_{j=0}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_j+\frac{1}{h^2}h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2+2\alpha=\mu.$$

$$\frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_j=\frac{1}{h^2}+\alpha-\frac{\mu}{2}\Rightarrow h\sum_{j=0}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_j=1+\alpha h^2-\frac{\mu h^2}{2}. \tag{3.37}$$

Por outro lado, consideremos novamente a equação espectral em (3.24), onde multiplicamos por $\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}$ e efetuando o somatório para $1\leq j\leq J$ resulta em,

$$\begin{aligned}-\quad & h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_{j+1}+\varphi_{j-1}}{h^2}\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}+2h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_j}{h^2}\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}\\ +\quad & 2\alpha h\sum_{j=1}^{J}\varphi_j\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}=\mu h\sum_{j=1}^{J}\varphi_j\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}.\end{aligned}$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas para obtermos,

$$\frac{1}{h^2}-\frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2-\frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_j+2\alpha h\sum_{j=0}^{J}\varphi_j\frac{j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})}{2}=-\frac{\mu h}{2}\sum_{j=0}^{J}\varphi_{j+1}\varphi_{j-1}.$$

Aplicamos a identidade dada por,

$$h\sum_{j=1}^{J}j\varphi_j(\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1})=-h\sum_{j=0}^{J}\varphi_j\varphi_{j+1}$$

e temos que,

$$\frac{1}{h^2}-\frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2-\frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\varphi_j\varphi_{j+1}-\alpha h\sum_{j=0}^{J}\varphi_j\varphi_{j+1}=-\frac{\mu h}{2}\sum_{j=0}^{J}\varphi_j\varphi_{j+1}. \tag{3.38}$$

Considerando a identidade (3.37) na identidade anterior, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}-\frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2-\frac{1}{h^2}-\alpha+\frac{\mu}{2}-\alpha-\alpha^2h^2+\frac{\alpha\mu h^2}{2} &= -\frac{\mu h}{2}\left(1+\alpha h^2-\frac{\mu h^2}{2}\right)\\
\frac{\mu}{2}+\frac{\mu}{2}\left(1+\alpha h^2-\frac{\mu h^2}{2}\right)-2\alpha-\alpha^2h^2+\frac{\alpha\mu h^2}{2} &= \frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2\\
\frac{\mu}{2}\left(\frac{4+2\alpha h^2-\mu h^2}{2}\right)-\alpha\left(\frac{4+2\alpha h^2-\mu h^2}{2}\right) &= \frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2\\
\left(\frac{\mu}{2}-\alpha\right)\left(\frac{4+2\alpha h^2-\mu h^2}{2}\right) &= \frac{L}{2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mu=2\alpha+\frac{2L}{4+2\alpha h^2-\mu h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2,$$

que levado à (3.36) resulta em,

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2=\frac{2L}{4+2\alpha h^2-\mu h^2}\left|\frac{\varphi_J}{h}\right|^2. \tag{3.39}$$

■

Lema 3.2 *Para qualquer autovetor φ com autovalor μ de* (3.24) − (3.25) *temos a seguinte identidade*

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{h}\right|^2+2\alpha h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2=\mu h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2. \tag{3.40}$$

Prova: Consideremos a equação espectral em (3.24),

$$-\frac{\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}}{h^2} + 2\alpha\varphi_j = \mu\varphi_j,$$

onde multiplicamos por φ_j e efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$. Então,

$$-h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j+1} - \varphi_j)}{h^2} - h\sum_{j=1}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j-1} - \varphi_j)}{h^2} + 2\alpha h\sum_{j=1}^{J}|\varphi_j|^2 = \mu h\sum_{j=1}^{J}|\varphi_j|^2.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, obtemos

$$-h\sum_{j=0}^{J}\frac{\varphi_j(\varphi_{j+1} - \varphi_j)}{h^2} - h\sum_{j=0}^{J}\frac{\varphi_{j+1}(\varphi_j - \varphi_{j+1})}{h^2} + 2\alpha h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2 = \mu h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2,$$

que resulta em,

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h}\right|^2 + 2\alpha h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2 = \mu h\sum_{j=0}^{J}|\varphi_j|^2.$$

■

o que conclui a prova.

Para mostrarmos a perda de observabilidade das soluções de (3.21) − (3.23), da qual trata o Teorema (3.3), vamos considerar que $\theta_J(t)$ seja uma solução particular associada ao $J-$ésimo autovetor, isto é,

$$\theta_J(t) = cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha t})\varphi_J. \tag{3.41}$$

Logo,

$$\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt = \left|\frac{\varphi_{J,J}}{h}\right|^2 \int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha t})\right|^2 dt. \tag{3.42}$$

De (3.39) obtemos,

$$\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt = \frac{4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2}{2L} h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h}\right|^2 \int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha t})\right|^2 dt. \tag{3.43}$$

Por outro lado, considerando o funcional de energia (3.30), para $t = 0$ e usando o Lema (3.2), teremos:

$$\widetilde{E}_h(0) = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\left[\mu|\varphi_{J,j}|^2 + \left|\frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h}\right|^2 + 2\alpha|\varphi_{J,j}|^2\right].$$

De onde vem,

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\varphi_{J,j+1} - \varphi_{J,j}}{h}\right|^2 = \widetilde{E}_h(0) - 2\alpha. \tag{3.44}$$

Por conseguinte, substituindo a expressão anterior em (3.43), teremos:

$$\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt = \frac{4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2}{2L}[\widetilde{E}_h(0) - 2\alpha]\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha}t)\right|^2 dt, \tag{3.45}$$

de onde resulta que,

$$\frac{\widetilde{E}_h(0) - 2\alpha}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{2L}{4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2}\frac{1}{\displaystyle\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha}t)\right|^2 dt}. \tag{3.46}$$

Temos então,

$$\frac{\widetilde{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt} \geq \frac{\widetilde{E}_h(0) - 2\alpha}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt} = \frac{2L}{4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2}\frac{1}{\displaystyle\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha}t)\right|^2 dt}. \tag{3.47}$$

Como,

$$\int_0^T \left|cos(\sqrt{\lambda_J(h) + 2\alpha}t)\right|^2 dt \to T/2, \quad \text{com } h \to 0,$$

temos

$$\frac{\widetilde{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt} \geq \frac{4L}{T(4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2)}. \tag{3.48}$$

e, por outro lado, usando o fato de que $h = \frac{L}{J+1}$, resulta que

$$(\mu_J(h) - 2\alpha)h^2 = 4sen^2\left(\frac{J\pi h}{2L}\right) = 4sen^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h\pi}{2L}\right) = 4cos^2\left(\frac{h\pi}{2L}\right) \to 4, \; com\ h \to 0. \tag{3.49}$$

Finalmente, combinando esses dois últimos obtemos,

$$\frac{\widetilde{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\theta_J(t)}{h}\right|^2 dt} \to \infty, \text{ com } h \to 0, \tag{3.50}$$

e portanto segue imediatamente o Teorema (3.3).

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema (3.1), um dos principais resultados de nosso trabalho. Considerando que $\omega_j = \phi_j + \psi_j,\ \theta_j = \phi_j - \psi_j$ e tomando também os resultados em (1.38) e (3.48), teremos:

$$E_h(0) = \frac{4L}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)} \int_0^T \left|\frac{\phi_J(t) + \psi_J(t)}{h}\right|^2 dt \tag{3.51}$$

$$\widetilde{E}_h(0) \geq \frac{4L}{T(4 + [2\alpha - \mu_J(h)]h^2)} \int_0^T \left|\frac{\phi_J(t) - \psi_J(t)}{h}\right|^2 dt. \tag{3.52}$$

Somando as equações acima, e considerando que $\mathcal{E}_h(0) = [E_h(0) + \widetilde{E}_h(0)]/2$ temos

$$\frac{\mathcal{E}_h(0)}{\displaystyle\int_0^T \left|\frac{\phi_J(t)}{h}\right|^2 dt + \int_0^T \left|\frac{\psi_J(t)}{h}\right|^2 dt} \geq \frac{4L}{T(4 - \lambda_J(h)h^2)} \to \infty, \quad \text{com } h \to 0.$$

■

3.1.3 Observabilidade da Fronteira do Sistema de Ondas Acopladas: O Método Multiplicativo.

Esta seção é dedicada a provar o Teorema (3.2) usando das técnicas multiplicativas discretas. Como ao longo deste trabalho temos optado pelo desacoplamento das equações, devemos construir um resultado de observabilidade numérica das soluções filtradas (livre das oscilações numéricas espúrias) para o problema (3.21) – (3.23). Com isto, podemos demonstrar o Teorema (3.2) considerando este resultado que iremos descrever a seguir juntamente com o resultado obtido por Infante e Zuazua [4].

Temos o seguinte resultado preliminar nesta direção:

Lema 3.3 *Para qualquer $h > 0$ e $\theta_j = \theta_j(t)$ solução de* (3.21) − (3.23) *temos*

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'} + \left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 + 2\alpha|\theta_j|^2\right]dt - \frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt + \chi_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt,$$

com

$$\chi_h(t) = h\sum_{j=1}^{J} j\theta_j^{'}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right).$$

Prova: Primeiramente multiplicamos a equação (3.21) por $j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)$, efetuamos o somatório para $1 \le j \le J$ e integramos em $(0, T)$.

$$h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{''}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)dt - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\frac{\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1}}{h^2}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)dt$$
$$+2\alpha h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)dt = 0. \qquad (3.53)$$

Façamos agora as simplificações abaixo:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{1,h} &= h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{''}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)dt\\ &= h\sum_{j=1}^{J} j\theta_j^{'}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)\Big|_0^T - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{'}\left(\frac{\theta_{j+1}^{'}-\theta_{j-1}^{'}}{2}\right)dt.\end{aligned}$$

Tomemos,

$$\chi_h(t) = h\sum_{j=0}^{J} j\theta_j^{'}\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right).$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{1,h} &= \chi_h(t)\Big|_0^T - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{'}\left(\frac{\theta_{j+1}^{'}-\theta_{j-1}^{'}}{2}\right)dt\\ &= \chi_h(t)\Big|_0^T - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'}dt + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j^{'}\theta_{j-1}^{'}dt.\end{aligned}$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas obtemos,

$$\mathcal{I}_{1,h} = \chi_h(t)\Big|_0^T - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\theta_j'\theta_{j+1}'dt + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)\theta_j'\theta_{j+1}'dt.$$

E finalmente,

$$\mathcal{I}_{1,h} = \chi_h(t)\Big|_0^T + \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \theta_j'\theta_{j+1}'dt.$$

De $\mathcal{I}_{2,h}$ temos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,h} &= h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\frac{\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1}}{h^2}\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}dt \\
&= \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\frac{|\theta_{j+1}|^2-|\theta_{j-1}|^2}{h^2}dt - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{h^2}dt \\
&= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j|\theta_{j+1}|^2dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j|\theta_{j-1}|^2dt \\
&- \frac{h}{h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\theta_{j+1}dt + \frac{h}{h^2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\theta_{j-1}dt.
\end{aligned}$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,h} &= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\theta_{j+1}|^2dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)|\theta_j|^2dt + \frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T |\theta_J|^2dt \\
&- \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\theta_j\theta_{j+1}dt + \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)\theta_j\theta_{j+1}dt \\
&= \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\theta_{j+1}|^2dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\theta_j|^2dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j|^2dt \\
&+ \frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T |\theta_J|^2dt + \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \theta_j\theta_{j+1}dt.
\end{aligned}$$

Usamos agora as seguintes identidades,

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\theta_{j+1}|^2dt - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j|\theta_j|^2dt &= -\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j|^2dt. \\
h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j|^2dt &= h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_{j+1}|^2dt.
\end{aligned}$$

Daí segue,

$$\mathcal{I}_{2,h} = -\frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2dt + \frac{h}{h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\theta_j\theta_{j+1}dt - \frac{h}{2h^2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}|^2dt + \frac{(J+1)h}{2h^2}\int_0^T|\theta_J|^2dt.$$

E finalmente,

$$\mathcal{I}_{2,h} = -\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2dt + \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

De $\mathcal{I}_{3,h}$ temos,

$$\mathcal{I}_{3,h} = h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)dt = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\theta_{j+1}dt - \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}\int_0^T j\theta_j\theta_{j-1}dt.$$

Pelas condições de contorno de Dirichlet homogêneas obtemos também,

$$\mathcal{I}_{3,h} = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T j\theta_{j+1}\theta_j dt - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T (j+1)\theta_{j+1}\theta_j dt = -\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \theta_{j+1}\theta_j dt.$$

Após substituírmos $\mathcal{I}_{1,h}$, $\mathcal{I}_{2,h}$ e $\mathcal{I}_{3,h}$ em (3.53) temos

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\theta_j'\theta_{j+1}' + \left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2\right]dt - \alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\theta_j\theta_{j+1}dt + \chi_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt,$$

onde tomamos

$$\chi_h(t) = h\sum_{j=0}^{J} j\theta_j'\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right).$$

Em seguida adicionamos e subtraímos o termo dado por,

$$\alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2dt.$$

Assim:

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\theta_j'\theta_{j+1}' + \left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 + 2\alpha|\theta_j|^2\right]dt - \alpha h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T[|\theta_j|^2 + \theta_j\theta_{j+1}]dt + \chi_h(t)\Big|_0^T = \frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt,$$

ou seja,

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'}+\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2+2\alpha|\theta_j|^2\right]dt-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt+\chi_h(t)\Big|_0^T=\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

■

Lema 3.4 *(Equipartição de energia) Para qualquer* $h>0$ *e* $\theta_j=\theta_j(t)$ *solução de* $(3.21)-(3.23)$ *temos*

$$-\quad h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2dt+h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2+2\alpha|\theta_j|^2\right]dt+Y_h(t)\Big|_0^T=0 \qquad (3.54)$$

com

$$Y_h(t)=h\sum_{j=0}^{J}\theta_j^{'}\theta_j.$$

Prova: Inicialmente multiplicamos a equação (3.21) por θ_j, efetuamos o somatório para $1\leq j\leq J$ e integramos em $(0,T)$.

$$h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\theta_j^{''}\theta_jdt-h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\theta_j\frac{\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1}}{h^2}dt+2\alpha h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2dt=0. \qquad (3.55)$$

Agora façamos as seguintes simplificações. De $\mathcal{I}_{1,h}$ temos,

$$\mathcal{I}_{1,h}=h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T\theta_j^{''}\theta_jdt=h\sum_{j=1}^{J}\theta_j^{'}\theta_j\Big|_0^T-h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2dt.$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas

$$\mathcal{I}_{1,h} \quad = \quad h\sum_{j=0}^{J}\theta_j^{'}\theta_j\Big|_0^T-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2dt.$$

onde tomamos

$$Y_h(t)=h\sum_{j=0}^{J}\theta_j^{'}\theta_j.$$

$$\mathcal{I}_{1,h} \quad = \quad Y_h(t)\Big|_0^T - h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j'|^2 dt.$$

De $\mathcal{I}_{2,h}$ temos

$$\mathcal{I}_{2,h} = h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \theta_j \frac{\theta_{j+1}-2\theta_j+\theta_{j-1}}{h^2}dt = h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \theta_j \frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h^2}dt + h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \theta_j \frac{\theta_{j-1}-\theta_j}{h^2}dt.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, temos

$$\mathcal{I}_{2,h} \quad = \quad -h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 dt.$$

Substituindo as simplificações $\mathcal{I}_{1,h}$, e $\mathcal{I}_{2,h}$ em (3.55) temos

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j'|^2 dt + h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T \left[\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h^2}\right|^2 + 2\alpha|\theta_j|^2\right]dt + Y_h(t)\Big|_0^T = 0 \tag{3.56}$$

onde tomamos

$$Y_h(t) = h\sum_{j=0}^{J}\theta_j'\theta_j.$$

■

∗ **Consequência do Lema** (3.4)

Do Lema (3.4) é imediata a seguinte identidade:

$$h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j'|^2 dt = T\widetilde{E}_h(0) + \frac{1}{2}Y_h(t)\Big|_0^T. \tag{3.57}$$

Prova: Para demonstrarmos a identidade acima basta somarmos

$$2\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j'|^2 dt$$

em ambos os membros de (3.54) e usarmos o fato de o sistema ser conservativo, pois isto nos garante que $\widetilde{E}_h(t) = \widetilde{E}_h(0)$. Com isso temos o resultado.

Lema 3.5 *Para qualquer solução do problema* $(3.21)-(3.23)$ *com autovalor* Λ *suficientemente grande, temos a seguinte desigualdade*

$$h\sum_{j=0}^{J}|\theta_{j+1}'-\theta_j'|^2 \leq \Lambda h^3\sum_{j=0}|\theta_j'|^2.$$

Prova: Consideremos as soluções em séries de Fourier do problema (3.21) – (3.23)

$$\theta(x_j,t)=\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t}\varphi_{k,j}$$

com $\varphi_{k,j}=sen(k\pi x_j)$.

Daí temos

$$\theta(x_j,t) = \sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}} a_k e^{i\mu_k t}\varphi_{k,j} \Rightarrow \theta'(x_j,t)=i\mu_k\theta(x_j,t).$$

Substituindo as soluções em séries de Fourier temos

$$h\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|\theta'_{j+1}-\theta'_j|^2 = h\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}\mu_k^2|\theta(x_{j+1},t)-\theta(x_j,t)|^2.$$

Daí segue-se

$$\begin{aligned}
h\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}\mu_k^2|\theta(x_{j+1},t)-\theta(x_j,t)|^2 &= h\sum_{j=0}^{J}\Big|\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}} a_k\mu_k^2 e^{\mu_k t}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})\Big|^2\\
&= h\sum_{j=0}^{J}\Big[\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|a_k|^2\mu_k^4 e^{2\mu_k t}|\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j}|^2\\
&+ \sum_{|\mu_k|\ne|\mu_l|\le\sqrt{\Lambda}} a_k a_l\mu_k^2\mu_l^2 e^{(\mu_k-\mu_l)t}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1}-\varphi_{l,j})\Big]\\
&= h\sum_{j=0}^{J}\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|a_k|^2\mu_k^4 e^{2\mu_k t}|\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j}|^2\\
&+ \sum_{j=0}^{J}\sum_{|\mu_k|\ne|\mu_l|\le\sqrt{\Lambda}} a_k a_l\mu_k^2\mu_l^2 e^{(\mu_k-\mu_l)t}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1}-\varphi_{l,j}).
\end{aligned}$$

Devido a ortogonalidade de autovetores φ_k e φ_l, para $\mu_k\ne\mu_l$ temos

$$\sum_{|\mu_k|\ne|\mu_l|\le\sqrt{\Lambda}}(\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j})(\varphi_{l,j+1}-\varphi_{l,j})=0.$$

Daí segue-se

$$\begin{aligned}
h\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|\theta'_{j+1}-\theta'_j|^2 &= h\sum_{j=0}^{J}\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|a_k|^2\mu_k^4 e^{2\mu_k t}|\varphi_{k,j+1}-\varphi_{k,j}|^2\\
&= h\sum_{j=0}^{J}\sum_{|\mu_k|\le\sqrt{\Lambda}}|a_k|^2 e^{2\mu_k t}\mu_k^4\lambda_k h^2|\varphi_{k,j}|^2
\end{aligned}$$

onde λ_k é um autovalor associado ao autovetor φ_k.

Daí temos

$$h\sum_{|\mu_k|\leq\sqrt{\Lambda}}|\theta'_{j+1}-\theta'_j|^2 = h\sum_{j=0}^{J}\sum_{k\geq1}|a_k|^2\mu_k^4\lambda_k h^2 e^{2\mu_k t}|\varphi_{k,j}|^2 = h\sum_{j=0}^{J}\sum_{k\geq1}\mu_k^2\lambda_k h^2|a_k\mu_k e^{\mu_k t}\varphi_{k,j}|^2.$$

Agora tomamos Λ suficientemente grande, tal que $\mu_k^2\lambda_k\leq\Lambda$

$$h\sum_{|\mu_k|\leq\sqrt{\Lambda}}|\theta'_{j+1}-\theta'_j|^2\leq\Lambda h^3\sum_{j=0}^{J}|\theta'(x_j,t)|^2.$$

E como temos $\theta'(x_j,t)\equiv{\theta_j}'$, segue-se

$$h\sum_{|\mu_k|\leq\sqrt{\Lambda}}|\theta'_{j+1}-\theta'_j|^2\leq\Lambda h^3\sum_{j=0}^{J}|{\theta_j}'|^2$$

o que conclui a demonstração. ■

Lema 3.6 *Para qualquer $h>0$ e $0\leq t\leq T$ temos a seguinte desigualdade*

$$|Z_h(t)|\leq\sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{\eta^2+|\eta|}{\lambda_1}h\sum_{j=0}^{J}\left[|\theta'_j|^2+\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2\right]}$$

com

$$Z_h(t)=h\sum_{j=1}^{J}\theta'_j\left[j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)-\left(\frac{\Lambda h^2+2\alpha h^2}{8}\right)\theta_j\right].$$

Prova: Tomemos

$$\begin{aligned}
Z_h(t) &= h\sum_{j=1}^{J}\theta'_j\left[j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)-\left(\frac{\Lambda h^2+2\alpha h^2}{8}\right)\theta_j\right]\\
|Z_h(t)| &\leq h\sum_{j=1}^{J}\left|\theta'_j\left[j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)-\left(\frac{\Lambda h^2+2\alpha h^2}{8}\right)\theta_j\right]\right|.
\end{aligned}$$

Aplicando a versão semi-discreta da desigualdade de Hölder temos

$$|Z_h(t)|\leq\left[h\sum_{j=1}^{J}|\theta'_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[h\sum_{j=1}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

com $\eta=-(\Lambda h^2+2\alpha h^2)/8$.

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
h\sum_{j=1}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2 &= h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{4}|\theta_{j+1}-\theta_{j-1}|^2+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right]\\
&= h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{4}|(\theta_{j+1}-\theta_j)+(\theta_j-\theta_{j-1})|^2+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right]\\
&= h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{4}[|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+2(\theta_{j+1}-\theta_j)(\theta_j-\theta_{j-1})+|\theta_j-\theta_{j-1}|^2]\right.\\
&\quad\left.+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right]\\
&\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{4}[2|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+2|\theta_j-\theta_{j-1}|^2]+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right]\\
&= h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{2}[|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+|\theta_j-\theta_{j-1}|^2]+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right].\\
&\leq h\sum_{j=1}^{J}\left[\frac{j^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\frac{j^2}{2}|\theta_j-\theta_{j-1}|^2+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})\theta_j\right]\\
&\leq h\sum_{j=0}^{J}\left[\frac{j^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\frac{(j+1)^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\eta^2|\theta_j|^2+\eta j\theta_j\theta_{j+1}\right.\\
&\quad\left.-\eta(j+1)\theta_j\theta_{j+1}\right]\\
&= h\sum_{j=0}^{J}\left[\frac{j^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\frac{(j+1)^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\eta^2|\theta_j|^2-\eta\theta_j\theta_{j+1}\right]\\
&= h\sum_{j=0}^{J}\left[\frac{j^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\frac{(j+1)^2}{2}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2+\eta^2|\theta_j|^2+|\eta||\theta_j|^2\right.\\
&\quad\left.-|\eta||\theta_j|^2-\eta\theta_j\theta_{j+1}\right].
\end{aligned}$$

E mais, como $h^2j^2 \leq h^2(j+1)^2 \leq h^2(J+1)^2 = L^2$ temos

$$h\sum_{j=1}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2 \leq L^2h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2-|\eta|h\sum_{j=1}^{J}(|\theta_j|^2-\theta_j\theta_{j+1})+(\eta^2+|\eta|)h\sum_{j=1}^{J}|\theta_j|^2.$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas obtemos

$$h\sum_{j=1}^{J}(|\theta_j|^2-\theta_j\theta_{j+1})=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J}|\theta_{j+1}-\theta_j|^2.$$

Daí segue-se

$$h\sum_{j=1}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2 \leq \left(L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}\right)h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2+(\eta^2+|\eta|)h\sum_{j=1}^{J}|\theta_j|^2.$$

E por último aplicamos o Lema (1.2) (versão semi-discreta da desigualdade de Poincaré)

$$h\sum_{j=0}^{J}|\theta_j|^2 \leq \frac{h}{\lambda_1}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 \tag{3.59}$$

para alguma constante $\lambda_1 > 0$.

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2 \quad\leq\quad \left[L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}\right]h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2$$

onde λ_1 é um autovalor do problema (3.18).

Assim temos:

$$h\sum_{j=0}^{J}\left|j\left(\frac{\theta_{j+1}-\theta_{j-1}}{2}\right)+\eta\theta_j\right|^2 \leq \left[L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}\right]h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2 \tag{3.60}$$

Substituindo (3.60) em (3.58) temos

$$|Z_h(t)| \leq \sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}}\left[h\sum_{j=0}^{J}|\theta_j^{'}|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[h\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.61}$$

E por último aplicando a desigualdade de Young em (3.61), obtemos:

$$|Z_h(t)| \leq \sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}}h\sum_{j=0}^{J}\left[|\theta_j^{'}|^2+\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2\right] \tag{3.62}$$

■

o que conclui a demonstração.

Lema 3.7 *Para qualquer $h > 0$, $0 \leq t \leq T$ é válida a seguinte desigualdade*

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt \leq Th^2\widetilde{E}_h(0)-\frac{h^2}{2}Y_h(t)\Big|_0^T$$

com

$$Y_h(t)=\sum_{j=0}^{J}\theta_j^{'}\theta_j.$$

Prova: Primeiramente multiplicamos a equação (3.21) por θ_j, efetuamos o somatório para $1 \leq j \leq J$ e integramos em $(0,T)$.

$$h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T \theta_j^{''}\theta_j dt - h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T(\Delta_h\theta_j)\theta_j dt + 2\alpha h\sum_{j=1}^{J}\int_0^T |\theta_j|^2 dt \;=\; 0$$

Usando as condições de contorno de Dirichlet homogêneas, obtemos

$$\theta_j^{'}\theta_j\Big|_0^T - h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T |\theta_j^{'}|^2 dt - h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left|\frac{\theta_{j+1}+\theta_j}{h}\right|^2 dt + \left(\frac{4}{h^2}+2\alpha\right)h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2 dt \;=\; 0.$$

Tomemos

$$Y_h(t) = \sum_{j=0}^{J}\theta_j^{'}\theta_j.$$

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left|\frac{\theta_{j+1}+\theta_j}{h}\right|^2 dt \;=\; -Y_h(t)\Big|_0^T + h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2 dt - \left(\frac{4}{h^2}+2\alpha\right)h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2 dt.$$

Usamos a identidade abaixo

$$h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2 dt = T\widetilde{E}_h(0) + \frac{1}{2}Y_h(t)\Big|_0^T.$$

construída em (3.57).

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left|\frac{\theta_{j+1}+\theta_j}{h}\right|^2 dt \;=\; -Y_h(t)\Big|_0^T + T\widetilde{E}_h(0) + \frac{1}{2}Y_h(t)\Big|_0^T dt - \left(\frac{4}{h^2}+2\alpha\right)h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2 dt$$

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2 dt \;=\; Th^2\widetilde{E}_h(0) - \frac{h^2}{2}Y_h(t)\Big|_0^T - \left(4+2\alpha h^2\right)h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j|^2 dt.$$

De onde segue-se o resultado,

$$-h\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2 dt \;\leq\; Th^2\widetilde{E}_h(0) - \frac{h^2}{2}Y_h(t)\Big|_0^T.$$

■

Proposição 3.2 *Para* $T>0$ *o sistema* $(3.21)-(3.23)$ *é observável. Isto é, para algum* $T>0$ *existe* $C(T,\gamma)>0$*, tal que*

$$\widetilde{E}_h(0) \leq C(T,\gamma)\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt$$

é verdadeira para toda solução de $(3.21)-(3.23)$.

Prova: Consideremos o Lema (3.3)

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'}+\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2+2\alpha|\theta_j|^2\right]dt-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt+\chi_h(t)\Big|_0^T=\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Após adicionarmos e subtraírmos o termo

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_j^{'}|^2dt$$

temos

$$\int_0^T\widetilde{E}_h(t)dt+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[|\theta_j^{'}|^2-\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'}\right]dt=\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Usamos também a seguinte identidade

$$\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T\left[|\theta_j^{'}|^2-\theta_j^{'}\theta_{j+1}^{'}\right]dt=\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}^{'}-\theta_j^{'}|^2dt.$$

De onde vem

$$\int_0^T\widetilde{E}_h(t)dt+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{h}{4}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}^{'}-\theta_j^{'}|^2dt=\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Aplicando agora o Lema (3.5) obtemos

$$\int_0^T\widetilde{E}_h(t)dt+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{\Lambda h^3}{4}\sum_{j=0}^{J}|\theta_j^{'}|^2\le\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt. \quad (3.63)$$

E mais, como o sistema (3.21) – (3.23) é conservativo temos que $\widetilde{E}_h(t)=\widetilde{E}_h(0)$.

Então reescrevendo (3.63) temos

$$T\widetilde{E}_h(0)+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{\Lambda h^3}{4}\sum_{j=0}^{J}|\theta_j^{'}|^2\le\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

E aplicando a identidade (3.57), obtemos

$$T\widetilde{E}_h(0)+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{\Lambda h^2}{4}T\widetilde{E}_h(0)-\frac{\Lambda h^2}{8}Y_h(t)\Big|_0^T\le\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2$$

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}\right)\widetilde{E}_h(0)+\chi_h(t)\Big|_0^T-\frac{\alpha h}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^T|\theta_{j+1}+\theta_j|^2dt-\frac{\Lambda h^2}{8}Y_h(t)\Big|_0^T\le\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt. \quad (3.64)$$

Em seguida aplicamos o Lema (3.7) com h suficientemente pequeno, de tal forma que ainda se verifique a desigualdade (3.64).

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}\right)\widetilde{E}_h(0)+\chi_h(t)\Big|_0^T+\frac{\alpha Th^2}{2}E_h(0)-\frac{\alpha h^2}{4}Y_h(t)\Big|_0^T-\frac{\Lambda h^2}{8}Y_h(t)\Big|_0^T\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt$$

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}+\frac{\alpha h^2}{2}\right)\widetilde{E}_h(0)+\chi_h(t)\Big|_0^T-\left(\frac{\Lambda h^2}{8}+\frac{\alpha h^2}{4}\right)Y_h(t)\Big|_0^T\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Tomemos

$$Z_h(t)=\chi_h(t)-\left(\frac{\Lambda h^2}{8}+\frac{\alpha h^2}{4}\right)Y_h(t).$$

Daí temos

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}+\frac{\alpha h^2}{2}\right)\widetilde{E}_h(0)+Z_h(t)\Big|_0^T\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Agora aplicando o Lema (3.6) temos

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}+\frac{\alpha h^2}{2}\right)\widetilde{E}_h(0)-\sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}}h\sum_{j=0}^{J}\left[|\theta_j'|^2+\left|\frac{\theta_{j+1}-\theta_j}{h}\right|^2\right]$$
$$\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt. \tag{3.65}$$

Por último adicionamos o termo abaixo, afim de completarmos a energia

$$-2\alpha\sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}}h\sum_{j=0}^{J}|\theta_j|^2.$$

E assim, obtemos

$$T\left(1-\frac{\Lambda h^2}{4}+\frac{\alpha h^2}{2}\right)\widetilde{E}_h(0)-2\sqrt{L^2-\frac{|\eta|h^2}{2}+\frac{(\eta^2+|\eta|)}{\lambda_1}}E_h(0)\leq\frac{L}{2}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt.$$

Por outro lado temos

$$\eta^2+|\eta|\leq|\eta|(|\eta|+1), \tag{3.66}$$

onde

$$\begin{aligned}|\eta| &= \left|-\left(\frac{\Lambda h^2}{8}+\frac{\alpha h^2}{4}\right)\right|\leq\frac{\Lambda h^2+2\alpha h^2}{8},\quad \text{onde } \Lambda h^2\to 4+2\alpha h^2\\ |\eta| &\leq \frac{4+4\alpha h^2}{8}\leq\frac{1+\alpha h^2}{2}\leq\frac{1+\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

De (3.66) e (3.67) temos

$$\eta^2 + |\eta| \leq \frac{(3+\alpha)|\eta|}{2}. \tag{3.68}$$

Daí segue-se

$$\left[T\left(1 - \frac{\Lambda h^2 - 2\alpha h^2}{4}\right) - 2\sqrt{L^2 - \frac{(\frac{\Lambda h^2 + 2\alpha h^2}{8})h^2}{2} + \frac{(3+\alpha)(\frac{\Lambda h^2 + 2\alpha h^2}{8})}{2\lambda_1}}\right]\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt$$

$$\left[T\left(1 - \frac{\Lambda h^2 - 2\alpha h^2}{4}\right) - 2\sqrt{L^2 - \frac{(\Lambda h^2 + 2\alpha h^2)h^2}{16} + \frac{(3+\alpha)(\Lambda h^2 + 2\alpha h^2)}{16\lambda_1}}\right]\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt.$$

Tomemos $\Lambda h^2 = \widetilde{\gamma}$, onde $0 < \widetilde{\gamma} < 4 + 2\alpha h^2$.

$$\left[T\left(1 - \frac{\widetilde{\gamma} - 2\alpha h^2}{4}\right) - 2\sqrt{L^2 - \frac{(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)h^2}{16} + \frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)}{16\lambda_1}}\right]\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt.$$

Agora tomemos $\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{2L^2}$ para h suficientemente pequeno.

De onde segue-se

$$\left[T\left(1 - \frac{\widetilde{\gamma} - 2\alpha h^2}{4}\right) - 2\sqrt{L^2 - \frac{(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)h^2}{16} + \frac{L^2(3+\alpha)(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)}{8\pi^2}}\right]\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt.$$

$$\left[T\left(1 - \frac{\widetilde{\gamma} - 2\alpha h^2}{4}\right) - 2\sqrt{L^2\left[1 + \frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)}{8\pi^2}\right] - \frac{(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)h^2}{16}}\right]\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt.$$

Daí temos

$$\widetilde{E}_h(0) \leq \frac{L}{2T\left(1 - \frac{\widetilde{\gamma} - 2\alpha h^2}{4}\right) - 4\sqrt{L^2\left[1 + \frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)}{8\pi^2}\right] - \frac{(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)h^2}{16}}}\int_0^T \left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2. \tag{3.69}$$

Portanto

$$T > 2\frac{\sqrt{L^2\left[1 + \frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)}{8\pi^2}\right] - \frac{(\widetilde{\gamma} + 2\alpha h^2)h^2}{16}}}{1 - \frac{\widetilde{\gamma} - 2\alpha h^2}{4}}.$$

Agora escrevemos T como função de $\widetilde{\gamma}$ e $C(T,\widetilde{\gamma})$.

$$T(\widetilde{\gamma}) = 2\frac{\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma}+2\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\widetilde{\gamma}+2\alpha h^2)h^2}{16}}}{1-\frac{\widetilde{\gamma}-2\alpha h^2}{4}}.$$

$$C(T,\widetilde{\gamma}) = \frac{L}{2T\left(1-\frac{\widetilde{\gamma}-2\alpha h^2}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\widetilde{\gamma}+2\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\widetilde{\gamma}+2\alpha h^2)h^2}{16}}}.$$

Por outro lado, afim de simplificarmos a notação, podemos escrever $\widetilde{\gamma} = \gamma + 2\alpha h^2$, com $0 < \gamma < 4$. Isto nos permite reescrevermos a equação (3.69) em função de $0 < \gamma < 4$. Com isso,

$$\widetilde{E}_h(0) \le \frac{L}{2T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}}\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2 dt \tag{3.70}$$

com o tempo dado por

$$T(\gamma) = 2\frac{\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}}{1-\frac{\gamma}{4}} \tag{3.71}$$

e a seguinte constante de observabilidade

$$C(T,\gamma) = \frac{L}{2T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}}. \tag{3.72}$$

■

Temos então o seguinte resultado sobre observabilidade numérica das soluções filtradas em

$$\mathcal{H}_h(\gamma) := \left\{\theta(x_j,t) \quad = \sum_{\lambda_k(h)\le\gamma h^{-2}}\left[c_k cos(\sqrt{\lambda_k+2\alpha}t)+d_k sen(\sqrt{\lambda_k+2\alpha}t)\right]\varphi_{k,j}, \quad a_k, b_k \ \in \mathbb{R}\right\}.$$

Teorema 3.4 *Suponha que* $0 < \gamma < 4$. *Então existe* $T(\gamma) \ge 2L$ *tal que para todo* $T > T(\gamma)$ *existe* $C(T,\gamma)$ *tal que* (3.32) *é verdadeira para toda solução em* $\mathcal{H}_h(\gamma)$ *com* $h \to 0$ *uniformemente. Sendo assim,*

a) $T(\gamma) \nearrow \infty$ com $\gamma \nearrow 4$ e $T(\gamma) \searrow 2L$ com $\gamma \searrow 0$

b) $C(T,\gamma) \searrow \frac{L}{2(T-2L)}$ com $\gamma \searrow 0$.

De posse desses resultados, já podemos demonstrar a desigualdade de observabilidade para o caso de ondas acopladas, da qual trata o Teorema (3.2) para as soluções na classe $\mathcal{D}_h(\gamma)$.

Prova do Teorema (3.2)**:** Para o caso das equações de ondas (3.15) temos,

$$\left[2T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}\right]E_h(0)\leq L\int_0^T\left|\frac{\omega_J}{h}\right|^2dt, \tag{3.73}$$

e para a equação de ondas (3.21),

$$\left[2T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}\right]\widetilde{E}_h(0)\leq L\int_0^T\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2dt. \tag{3.74}$$

Daí, somamos (3.73) e (3.74)

$$4T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}E_h(0)$$
$$-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}\widetilde{E}_h(0)\leq L\int_0^T\left[\left|\frac{\omega_J}{h}\right|^2+\left|\frac{\theta_J}{h}\right|^2\right]dt$$

onde $\omega_J=\phi_J+\psi_J$ e $\theta_J=\phi_J-\psi_J$. Logo:

$$4T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}E_h(0)$$
$$-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}\widetilde{E}_h(0)\leq 2L\int_0^T\left[\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2+\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right]dt.$$

Em seguida adicionamos a expressão no lado esquerdo da desigualdade acima

$$-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}\widetilde{E}_h(0)-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}E_h(0).$$

De onde vem:

$$4T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)$$
$$-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)\leq 2L\int_0^T\left[\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2+\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right]dt.$$

$$\left[4T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}\right]\left(E_h(0)+\widetilde{E}_h(0)\right)$$
$$\leq 2L\int_0^T\left[\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2+\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right]dt.$$

Em seguida podemos obter a desigualdade de observabilidade do sistema acoplado através da identidade

$$\mathcal{E}_h(t)=\frac{E_h(t)+\widetilde{E}_h(t)}{2}.$$

E assim, obtemos

$$\mathcal{E}_h(t)\leq\frac{L}{4T\left(1-\frac{\gamma}{4}\right)-4\sqrt{L^2\left(1+\frac{3\gamma}{8\pi^2}\right)-\frac{\gamma h^2}{16}}-4\sqrt{L^2\left[1+\frac{(3+\alpha)(\gamma+4\alpha h^2)}{8\pi^2}\right]-\frac{(\gamma+4\alpha h^2)h^2}{16}}}\int_0^T\left[\left|\frac{\phi_J}{h}\right|^2+\left|\frac{\psi_J}{h}\right|^2\right]dt,$$

o que conclui a demonstração de um dos nossos principais resultados.

Capítulo 4

Métodos Numéricos Totalmente Discretos

Neste capítulo consideramos esquemas numéricos em diferenças finitas aplicados ao problema (2.1) − (2.4) em que tanto a variável espacial quanto a variável temporal são discretizadas, que são os conhecidos esquemas numéricos totalmente discretos em diferenças finitas. Em particular, adotamos o método explícito em diferenças finitas.

Assim, para a devida discretização é suficiente discretizarmos a variável tempo nas equações numéricas semi-discretas (3.1) − (3.2).

Neste capítulo, analisamos algumas das propriedades mais usuais desses esquemas numéricos, tais como a sua estabilidade e convergência. É claro que se tratando de uma abordagem numérica aplicada a um sistema hiperbólico conservativo, devemos garantir que tal propriedade também ocorre no ambiente numérico espaço-tempo. Este é o nosso objetivo nas próximas seções e também simular numericamente alguns aspectos da estabilização de modelos dissipativos de ondas acopladas.

Por outro lado, destacamos que o problema da possível perda de observabilidade numérica neste caso, é um problema a ser considerado futuramente.

4.1 Problema Totalmente Discreto e suas Propriedades

Para nossos propósitos, definimos os parâmetros $\Delta x = \dfrac{L}{J+1}$, $\Delta t = \dfrac{T}{N+1}$ para $J, N \in \mathbb{N}$ e a rede de pontos,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 < x_1 = \Delta x < ... < x_J = J\Delta x < x_{J+1} = L \qquad (4.1) \\ t_0 &= 0 < t_1 = \Delta t < ... < t_N = N\Delta t < t_{N+1} = T \qquad (4.2) \end{aligned}$$

onde $x_j = j\Delta x$ e $t_n = n\Delta t$ para $j = 0, 1, 2, ..., J+1$ e $n = 0, 1, 2, ..., N+1$.

O esquema numérico espaço-tempo em diferenças finitas que assumimos para o problema $(2.1) - (2.4)$ consiste nas seguintes equações numéricas:

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_t \partial_t \phi_j^n - c_1^2 \overline{\partial}_x \partial_x \phi_j^n + \alpha(\phi_j^n - \psi_j^n) &= 0, \ \forall j, \ \ 1 \leq j \leq J \qquad (4.3) \\ \overline{\partial}_t \partial_t \psi_j^n - c_2^2 \overline{\partial}_x \partial_x \psi_j^n + \alpha(\psi_j^n - \phi_j^n) &= 0, \ \forall j, \ \ 1 \leq j \leq J \qquad (4.4) \\ \phi_0^n = \phi_{J+1}^n = 0, \psi_0^n = \psi_{J+1}^n = 0 &= 0, \ \forall n, \ \ 0 \leq n \leq N \qquad (4.5) \\ \phi_j^0 = \phi_0(x_j), \ \frac{\overline{\partial}_t + \partial_t}{2} \phi_j^0 &= \phi_1(x_j), \ \forall j, \ \ 0 \leq j \leq J \qquad (4.6) \\ \psi_j^0 = \psi_0(x_j), \ \frac{\overline{\partial}_t + \partial_t}{2} \psi_j^0 &= \psi_1(x_j), \ \forall j, \ \ 0 \leq j \leq J. \qquad (4.7) \end{aligned}$$

onde os operadores $\overline{\partial}_t \partial_t \phi_j^n$ e $\overline{\partial}_x \partial_x \phi_j^n$ são dados por

$$\overline{\partial}_t \partial_t \phi_j^n = \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \qquad \overline{\partial}_x \partial_x \phi_j^n = \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

e

$$\frac{\overline{\partial}_t + \partial_t}{2} \phi_j^n = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Estas equações numéricas são construídas pelo uso da série de Taylor aplicada nas variáveis espacial e temporal. Todas são consistentes com erro de truncamento da ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Sendo consistentes e estáveis, segue pelo Lema de Lax [5] que tais equações convergem.

A estabilidade numérica para o problema acoplado $(4.3) - (4.7)$ será assegurada levando em consideração o número de ondas, conforme detalharemos na próxima seção.

4.1.1 Considerações sobre Estabilidade Numérica

Os métodos de integração explícitos no tempo são frequentemente usados para se obter soluções numéricas de problemas transientes. Em particular, o critério de estabilidade numérica para diferenças centrais no espaço e tempo depende da frequência máxima $\omega_{\text{máx}}$ associada ao modelo sob consideração [16]. Mais precisamente, temos válido que:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\text{máx}}}. \tag{4.8}$$

Para a estabilidade numérica asssociada com as equações numéricas (4.3) – (4.4), vamos considerar a propagação de ondas harmônicas no respectivo modelo contínuo para obtermos as frequências máximas. Em particular, consideramos soluções para (2.1) – (2.2) na forma,

$$\phi = A_1 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \ \psi = A_2 e^{i(\gamma x + \omega t)}, \tag{4.9}$$

onde γ é o número de ondas, ω é a frequência e A_i $(i = 1, 2)$ são as amplitudes associadas com as propagações ϕ e ψ respectivamente. Pela substituição dessas funções nas equações (2.1) – (2.2) obtemos o seguinte sistema algébrico nas variáveis A_1 e A_2 :

$$\begin{pmatrix} c_1^2\gamma^2 - \omega^2 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & c_2^2\gamma^2 - \omega^2 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Este sistema possui uma solução não-nula desde que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. Obtemos assim a seguinte equação algébrica:

$$c_1^2c_2^2\gamma^4 - (c_1^2 + c_2^2)\omega^2\gamma^2 + (c_1^2 + c_2^2)\alpha\gamma^2 + \omega^4 - 2\alpha\omega^2 = 0. \tag{4.11}$$

Para problemas de propagações de ondas devemos analisar esta equação, conhecida como equação da frequência. Usamos a identidade $\omega = c\gamma$ onde c é uma constante(velocidade). Então obtemos,

$$c_1^2c_2^2\gamma^4 - (c_1^2 + c_2^2)c^2\gamma^4 + (c_1^2 + c_2^2)\alpha\gamma^2 + c^4\gamma^4 - 2\alpha c^2\gamma^2 = 0. \tag{4.12}$$

Analisamos então dois casos particulares: $\gamma \to \infty$ e $\gamma \to 0$. Quando $\gamma \to \infty$,

$$c_1^2c_2^2 - (c_1^2 + c_2^2)c^2 + c^4 = 0. \tag{4.13}$$

Fazendo $c^2 = d$ temos,

$$c_1^2c_2^2 - (c_1^2 + c_2^2)d + d^2 = 0 \tag{4.14}$$

e resulta que $d \in \left\{c_1^2, c_2^2\right\}$. Explicitamente:

$$c^2 = d \in \left\{c_1^2, c_2^2\right\}. \tag{4.15}$$

Neste caso a frequência máxima é determinada pela maior das velocidades c_1^2 ou c_2^2. Desta forma, para comprimentos de ondas próximos de $\Delta x/2$, temos que $\omega_{\text{máx}}$ é determinada por ondas que se propagam na velocidade $c = \text{máx}(c_1^2, c_2^2)$. Assim a condição de estabilidade CFL (Courant-Friedrichs-Levy) é dada por

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \tag{4.16}$$

Por outro lado, fazendo $\gamma \to 0$ em (4.11) obtemos,

$$\omega^4 - 2\alpha\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega \in \left\{0, 0, \pm\sqrt{2\alpha}\right\}. \tag{4.17}$$

Portanto, a frequência para baixo número de ondas determina o critério para estabilidade numérica de acordo com (4.8), ou seja:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{2\alpha}}. \tag{4.18}$$

Contudo, entre as condições dadas em (4.16) e em (4.18), prevalece o clássico critério CFL de acordo com (4.16), já que α é um parâmetro pequeno [3].

Portanto, o esquema numérico (4.3) – (4.7) é consistente e ele é estável se, e somente se, a condição (4.16) é verificada. Isto garante que as soluções numéricas convergem com $\Delta x, \Delta t \to 0$ para as soluções de (2.1) – (2.4) na correspondente norma.

4.1.2 Energia Totalmente Discreta - Conservação de Energia

Nesta seção mostramos que existe uma energia numérica associada com as equações em diferenças finitas (4.3) – (4.7), donde resulta a conservação numérica das soluções numéricas computadas por esse esquema de discretização. Tal propriedade reproduz numericamente o que ocorre no nível do funcional (2.5).

Proposição 4.1 *A energia totalmente discreta E^n do problema* (4.3) – (4.7) *é dada por*

$$\begin{aligned} E^n &:= \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2 + \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t}\right|^2 \\ &+ \frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\right) + \frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\right) \\ &+ \frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n+1}). \end{aligned} \tag{4.19}$$

e satisfaz $E^n = E^0, \ \forall\, n = 1, 2, ..., N.$

Prova: Considerando a equação (4.3) temos

$$\frac{\phi_j^{n+1}-2\phi_j^n+\phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c_1^2\frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha(\phi_j^n-\psi_j^n) = 0.$$

Agora multiplicamos a equação acima por $(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1})/2\Delta t$ e efetuamos o somatório para $1 \le j \le J$, donde

$$\begin{aligned} &\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n+1}-2\phi_j^n+\phi_j^{n-1}}{\Delta t^2}\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2\Delta t}\right) - c_1^2\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{\Delta x^2}\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2\Delta t}\right) \\ &+ \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=1}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Façamos agora as seguintes simplificações

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,n} &= \Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\phi_j^{n+1}-2\phi_j^n+\phi_j^{n-1}}{\Delta t^2}\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2\Delta t}\right) \\ &= \frac{\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}(\phi_j^{n+1}+\phi_j^{n-1})(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) - \frac{2\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}\phi_j^n(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) \\ &= \frac{\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}(|\phi_j^{n+1}|^2-|\phi_j^{n-1}|^2-2\phi_j^n\phi_j^{n+1}+2\phi_j^n\phi_j^{n-1}). \end{aligned}$$

Na expressão anterior, adicionamos e subtraímos o somatório

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}|\phi_j^n|^2$$

para obtermos,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1,n} &= \frac{\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}(|\phi_j^{n+1}|^2-2\phi_j^n\phi_j^{n+1}+|\phi_j^n|^2-|\phi_j^{n-1}|^2+2\phi_j^n\phi_j^{n-1}-|\phi_j^n|^2) \\ &= \frac{\Delta x}{2\Delta t\Delta t^2}\sum_{j=1}^{J}(|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n|^2-|\phi_j^{n-1}-\phi_j^n|^2). \end{aligned}$$

Usamos as condições de contorno de Dirichlet homogêneas (4.5) e obtemos:

$$\mathcal{I}_{1,n} = \frac{\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2. \tag{4.21}$$

Simplificamos $\mathcal{I}_{2,n}$ dado abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,n} &= c_1^2\Delta x\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-2\phi_j^n+\phi_{j-1}^n}{\Delta x^2}\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}}{2\Delta t}\right)\\
&= \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=1}^{J}(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) + \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=1}^{J}(\phi_{j-1}^n-\phi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}).
\end{aligned}$$

Usamos novamente as condições de contorno de Dirichlet homogêneas (4.5) e obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2,n} &= \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) + \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j}^n-\phi_{j+1}^n)(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^{n-1})\\
&= \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j+1}^n\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n\phi_j^{n-1}-\phi_j^n\phi_j^{n+1}+\phi_j^n\phi_j^{n-1})\\
&+ \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta x^2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_{j+1}^n\phi_{j+1}^{n+1}+\phi_{j+1}^n\phi_{j+1}^{n-1})\\
&= -\frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right) + \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right).
\end{aligned}$$

Combinando as simplificações $\mathcal{I}_{1,n}$ e $\mathcal{I}_{2,n}$ temos,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2 - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2\\
&+ \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right) - \frac{c_1^2\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
&+ \frac{\alpha\Delta x}{2\Delta t}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Simplificando Δt segue que,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2 - \frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2\\
&+ \frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\right) - \frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^n-\phi_j^n}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
&+ \frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\phi_j^{n-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

E de forma análoga temos para a equação (4.4),

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t}\right|^2-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n}-\psi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2\\
+&\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\right)-\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n-1}-\psi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
+&\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\psi_j^n-\phi_j^n)(\psi_j^{n+1}-\psi_j^{n-1})=0. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

E por último somamos (4.23) e (4.24) resultando em,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2+\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t}\right|^2-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n}-\psi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2\\
+&\frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\right)-\frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
+&\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\right)-\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n-1}-\psi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
+&\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\psi_j^{n+1})-\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n-1}-\psi_j^{n-1})=0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n+1}-\phi_j^n}{\Delta t}\right|^2+\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t}\right|^2\\
+&\frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\right)+\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\right)\\
+&\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\psi_j^{n+1})\\
-&\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\phi_j^{n}-\phi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2-\frac{\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left|\frac{\psi_j^{n}-\psi_j^{n-1}}{\Delta t}\right|^2\\
-&\frac{c_1^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\phi_{j+1}^{n}-\phi_j^{n}}{\Delta x}\frac{\phi_{j+1}^{n-1}-\phi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)-\frac{c_2^2\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}\left(\frac{\psi_{j+1}^{n}-\psi_j^{n}}{\Delta x}\frac{\psi_{j+1}^{n-1}-\psi_j^{n-1}}{\Delta x}\right)\\
-&\frac{\alpha\Delta x}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n-1}-\psi_j^{n-1})=0, \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

donde temos que

$$E^n - E^{n-1} = 0 \Rightarrow E^n = E^0, \ \forall \ n = 1, 2, ..., N \tag{4.26}$$

para

$$\begin{aligned} E^n \ &:= \ \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} \right|^2 + \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left| \frac{\psi_j^{n+1} - \psi_j^n}{\Delta t} \right|^2 \\ &+ \ \frac{c_1^2 \Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{\Delta x} \right) + \frac{c_2^2 \Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1}}{\Delta x} \frac{\psi_{j+1}^n - \psi_j^n}{\Delta x} \right) \\ &+ \ \frac{\alpha \Delta x}{2} \sum_{j=0}^{J} (\phi_j^n - \psi_j^n)(\phi_j^{n+1} - \psi_j^{n+1}). \end{aligned} \tag{4.27}$$

■

Notemos que as discretizações referentes às componentes potenciais em E^n não são definidas positivas, ao contrário do que ocorre na energia $\mathcal{E}(t)$ em (2.5) referente ao modelo contínuo e para a energia $\mathcal{E}_h(t)$ em (3.5) referente ao caso numérico semi-discreto. Nossa próxima propriedade garante que a energia E^n é, de fato, definida positiva. Para tanto, vamos assumir que $c_1^2 = c_2^2 = 1$.

Temos portanto a seguinte proposição:

Proposição 4.2 *Se $\Delta t \leq \Delta x$ então para toda solução não nula do problema* (4.3) – (4.7) *e para todo $n = 1, 2, ..., N$, temos*

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} \ &\geq \ \left(\frac{1}{32 \Delta x^2} - \frac{\alpha}{4} \right) \sum_{j=0}^{J} |(\phi_j^{n+1} - \phi_j^n) + (\psi_j^{n+1} - \psi_j^n) + (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_{j+1}^n) + (\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_{j+1}^n)|^2 \\ &+ \ \frac{1}{8 \Delta x^2} \sum_{j=0}^{J} [|\phi_j^{n+1} - \phi_{j+1}^n|^2 + |\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^n|^2] + \frac{1}{8 \Delta x^2} \sum_{j=0}^{J} [|\psi_j^{n+1} - \psi_{j+1}^n|^2 + |\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^n|^2] \\ &+ \ \frac{\alpha}{4} \sum_{j=0}^{J} (|\phi_j^n - \psi_j^{n+1}|^2 + |\phi_j^{n+1} - \psi_j^n|^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Prova: Da energia E^n temos que:

$$\begin{aligned} \frac{E^n}{\Delta x} \ &= \ \frac{1}{2 \Delta t^2} \sum_{j=0}^{J} |\phi_j^{n+1} - \phi_j^n|^2 + \frac{1}{2 \Delta t^2} \sum_{j=0}^{J} |\psi_j^{n+1} - \psi_j^n|^2 \\ &+ \ \frac{1}{2 \Delta x^2} \sum_{j=0}^{J} (\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1})(\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) + \frac{1}{2 \Delta x^2} \sum_{j=0}^{J} (\psi_{j+1}^{n+1} - \psi_j^{n+1})(\psi_{j+1}^n - \psi_j^n) \\ &+ \ \frac{\alpha}{2} \sum_{j=0}^{J} (\phi_j^n - \psi_j^n)(\phi_j^{n+1} - \psi_j^{n+1}). \end{aligned}$$

Usando o critério de estabilidade $\Delta t \leq \Delta x$, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} \geq\ & \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n|^2+\frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}|\psi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2\\
+\ & \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1})(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n)+\frac{1}{2\Delta x}\sum_{j=0}^{J}(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1})(\psi_{j+1}^n-\psi_j^n)\\
+\ & \frac{\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\psi_j^{n+1}).
\end{aligned}
$$

Agora faremos as seguites simplificações:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{1,n} &= \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n|^2+\frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^{n+1})(\phi_{j+1}^n-\phi_j^n)\\
&= \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[|\phi_j^{n+1}|^2-2\phi_j^{n+1}\phi_j^n+|\phi_j^n|^2+\phi_{j+1}^{n+1}\phi_{j+1}^n-\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n+\phi_j^{n+1}\phi_j^n\Big]\\
&= \frac{1}{2\Delta x^2}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\Big[2|\phi_j^{n+1}|^2+2|\phi_j^n|^2-2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n-\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n\Big]\\
&= \frac{1}{4\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[|\phi_j^{n+1}|^2-2\phi_j^{n+1}\phi_{j+1}^n+|\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}|^2-2\phi_{j+1}^{n+1}\phi_j^n+|\phi_j^n|^2\Big]\\
&= \frac{1}{4\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2\Big].
\end{aligned}
$$

De forma análoga temos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{2,n} &= \frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}|\psi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2+\frac{1}{2\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^{n+1})(\psi_{j+1}^n-\psi_j^n)\\
&= \frac{1}{4\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}\Big[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2\Big].
\end{aligned}
$$

Mais ainda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{3,n} &= \frac{\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n-\psi_j^n)(\phi_j^{n+1}-\psi_j^{n+1})\\
&= \frac{\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}(\phi_j^n\phi_j^{n+1}-\phi_j^n\psi_j^{n+1}-\psi_j^n\phi_j^{n+1}+\psi_j^n\psi_j^{n+1})\\
&= \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(2\phi_j^n\phi_j^{n+1}-2\phi_j^n\psi_j^{n+1}-2\psi_j^n\phi_j^{n+1}+2\psi_j^n\psi_j^{n+1}).
\end{aligned}$$

Em seguida, com o propósito de obtermos expressões quadráticas, adicionamos e subtraímos alguns termos quadráticos em $\mathcal{T}_{3,n}$. Segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{3,n} &= \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(-|\phi_j^n|^2+2\phi_j^n\phi_j^{n+1}-|\phi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^n|^2-2\phi_j^n\psi_j^{n+1}+|\psi_j^{n+1}|^2)\\
&- \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(-|\phi_j^{n+1}|^2+2\psi_j^n\phi_j^{n+1}-|\psi_j^n|^2+|\psi_j^n|^2-2\psi_j^n\psi_j^{n+1}+|\psi_j^{n+1}|^2)\\
&= \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2-|\psi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2-|\phi_j^{n+1}-\phi_j^n|^2).
\end{aligned}$$

Considerando agora a inclusão do termo dado por,

$$-\frac{\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}|\psi_j^n-\psi_j^{n+1}||\phi_j^n-\phi_j^{n+1}|,$$

obtemos,

$$\mathcal{T}_{3,n} \geq \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)-\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)|^2.$$

Agora considerando as simplificações para $\mathcal{T}_{1,n}$, $\mathcal{T}_{2,n}$ e $\mathcal{T}_{3,n}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{4\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{4\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
&+ \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)-\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)|^2,
\end{aligned}$$

ou, pela reorganização dos somatórios anteriores,

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
&+ \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
&+ \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)-\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)|^2.
\end{aligned}
$$

Em seguida, na expressão anterior, usamos a desigualdade dada por,

$$
x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}, \quad \forall x,y \in \mathbb{R} \tag{4.28}
$$

para obtermos,

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} &\geq \frac{1}{16\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)|^2]+\frac{1}{16\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2]\\
&+ \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
&+ \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)-\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)|^2.
\end{aligned}
$$

Em seguida completamos um quadadrado perfeito adicionando,

$$
\begin{aligned}
&- \left[\frac{\alpha}{2}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)||(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|\right.\\
&+ \left.\frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2\right].
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} \geq\; & \frac{1}{16\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)|^2]+\frac{1}{16\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2]\\
+\; & \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
+\; & \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)\\
-\; & \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2.
\end{aligned}
$$

Usando novamente a desigualdade (4.28) segue que,

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} \geq\; & \frac{1}{32\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2\\
+\; & \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
+\; & \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)\\
-\; & \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2,
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\frac{E^n}{\Delta x} \geq\; & \left(\frac{1}{32\Delta x^2}-\frac{\alpha}{4}\right)\sum_{j=0}^{J}|(\phi_j^{n+1}-\phi_j^n)+(\psi_j^{n+1}-\psi_j^n)+(\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_{j+1}^n)+(\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_{j+1}^n)|^2\\
+\; & \frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\phi_j^{n+1}-\phi_{j+1}^n|^2+|\phi_{j+1}^{n+1}-\phi_j^n|^2]+\frac{1}{8\Delta x^2}\sum_{j=0}^{J}[|\psi_j^{n+1}-\psi_{j+1}^n|^2+|\psi_{j+1}^{n+1}-\psi_j^n|^2]\\
+\; & \frac{\alpha}{4}\sum_{j=0}^{J}(|\phi_j^n-\psi_j^{n+1}|^2+|\phi_j^{n+1}-\psi_j^n|^2)\geq 0.
\end{aligned}
$$

Para conclusão do nosso resultado, devemos assegurar que $1/32\Delta x^2-\alpha/4\geq 0$. Desse modo:

$$
\frac{1}{32\Delta x^2}-\frac{\alpha}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta x^2}\geq 8\alpha.
$$

Pelo critério de estabilidade $\Delta t\leq\Delta x$ dado em (4.16) com $c=1$ temos,

$$\frac{1}{\Delta t^2} \geq \frac{1}{\Delta x^2} \geq 8\alpha \geq \frac{\alpha}{2},$$

e esta última relação também é válida, pois resulta de (4.18), ou seja,

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \Leftrightarrow \frac{1}{\Delta t^2} \geq \frac{\alpha}{2}.$$

■

As duas proposições anteriores são de suma importância para nossas computações numéricas. Primeiramente porque temos que E^n é de fato conservada na ausência de termos dissipativos e também que E^n é positivo, como era de se esperar em relação ao caso contínuo. Na próxima seção, finalizamos nosso trabalho, ilustrando alguns resultados de simulações numéricas usando este esquema numérico espaço-tempo em diferenças finitas.

4.1.3 Simulações Numéricas em Estabilização

Nesta seção apresentamos alguns resultados de simulações computacionais com o uso do esquema numérico (4.3) – (4.7). Nosso objetivo inicial consiste basicamente em verificar que, de fato, a energia E^n é numericamente conservada na ausência de termos dissipativos, o que fornece uma medida de precisão do método usado. Por outro lado, considerando alguns mecanismos de dissipação sob o modelo (2.1) – (2.4), verificamos que a energia numérica possui um decaimento exponencial. Por exemplo, considerando a adição nas equações (2.1) e (2.2) de amortecimentos do tipo $\beta_1\phi_t$ e $\beta_2\psi_t$, respectivamente, conseguimos visualizar que o gráfico de pontos (t_n, E^n) é do tipo exponencial decrescente, como era de se esperar, pois nesta situação o sistema hiperbólico é exponencialmente estável. Por outro lado, para $\beta_1 \neq 0$ e $\beta_2 = 0$ verificamos que E^n é também decrescente, no entanto, ocorre um tipo de decaimento mais lento que o exponencial. Isto é bem característico dos modelos que são polinomialmente estáveis. Ver por exemplo o trabalho de M. L. Santos et al. em [11].

Para as simulações numéricas, realizadas em MATLAB 7.0, utilizamos os seguintes dados: $L = 2\pi$, $T = 3s$ com 128 divisões no espaço e no tempo. Consideramos $c_1^2 = c_2^2 = 1$ e $\alpha = 1$. Para os dados iniciais utilizamos as seguintes funções: $\phi(x,0) = 2\sin(2\pi x/L), \psi(x,0) = 3\sin(3\pi x/L)$, $\phi_t(x,0) = -\sin(2\pi x/L)$ e $\psi_t(x,0) = \sin(2\pi x/L)$. Os primeiros resultados listados a seguir representam o caso conservativo.

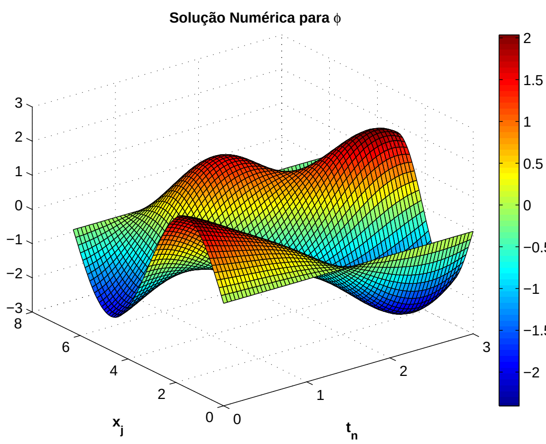

Figura 4.1: Caso conservativo: ϕ_j^n

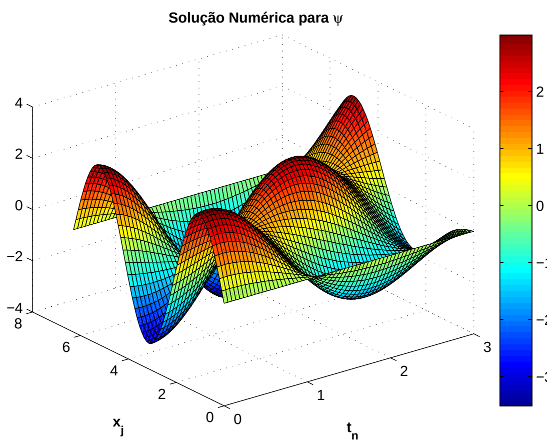

Figura 4.2: Caso conservativo: ψ_j^n

Os casos abaixo são referentes às dissipações do tipo $\beta_1\phi_t$ e $\beta_2\psi_t$.

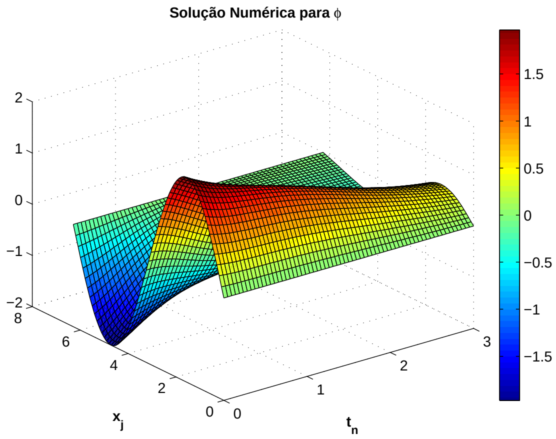

Figura 4.3: $\beta_i = \pi, i = 1, 2$

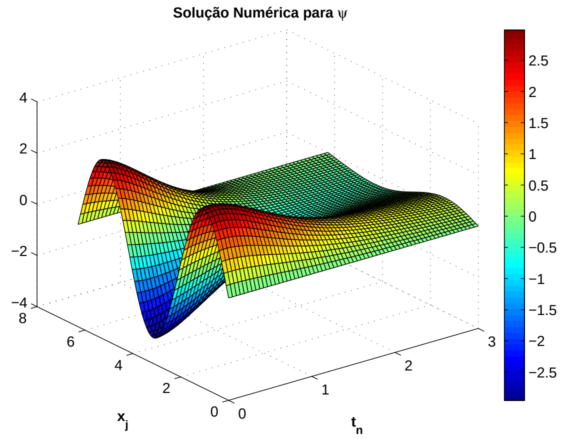

Figura 4.4: $\beta_i = \pi, i = 1, 2$

Para os casos ilustrados anteriormente, temos também as energias pós-processadas.

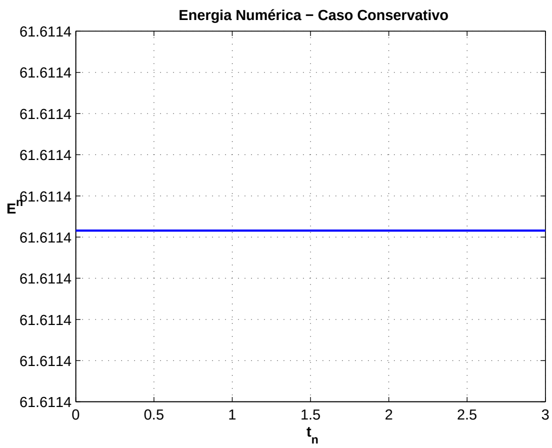

Figura 4.5: $\beta_i = 0, i = 1, 2$

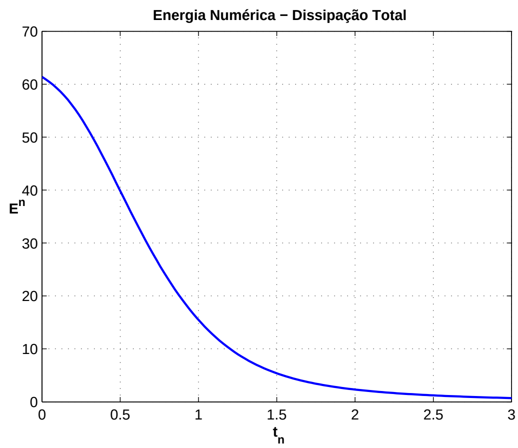

Figura 4.6: $\beta_i = \pi, i = 1, 2$

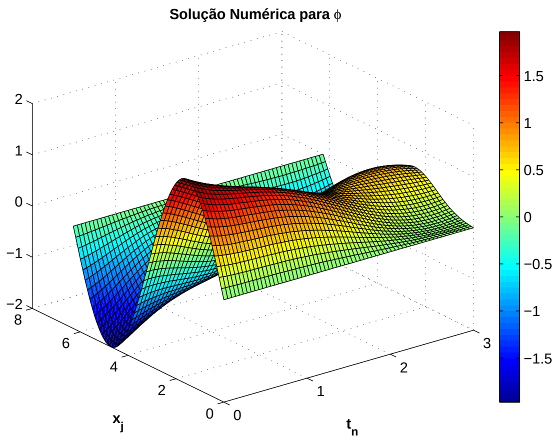

Figura 4.7: $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$

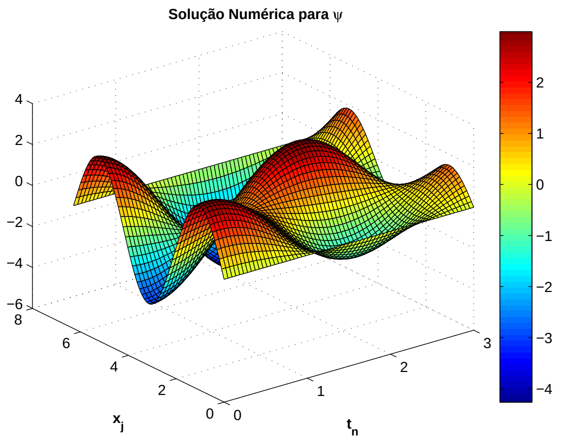

Figura 4.8: $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$

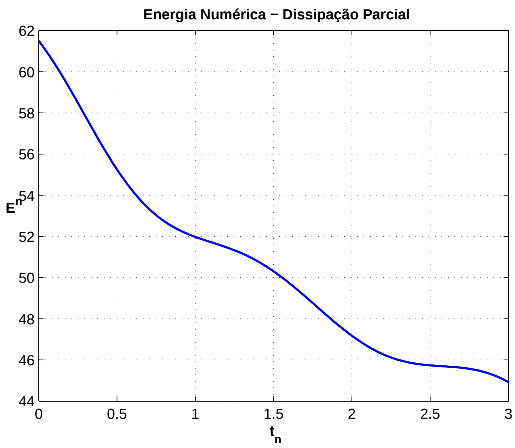

Figura 4.9: $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Iniciamos este trabalho fazendo uma descrição dos resultados matemáticos consolidados na literatura que versam sobre o problema de observabilidade (na fronteira) numérica de esquemas numéricos em diferenças finitas ou em elementos finitos quando aplicados ao problema de observabilidade da fronteira da equação de ondas unidimensional. Assim a principal conclusão a respeito dessas abordagens numéricas diz respeito a perda de observabilidade numérica para os esquemas numéricos semi-discretos mais usuais como é o caso das diferenças finitas e dos elementos finitos clássico, usando as funções de forma lineares. Este tipo de patologia numérica já tinha sido observado experimentalmente e evidenciado nos trabalhos de R. Glowinski, Lions e outros no início dos anos 90. Somente em 1999 com o trabalho de Infante e Zuazua é que se faz uma análise numérica apurada do porquê desta perda de observabilidade numérica e também a caracterização de uma classe de soluções numéricas que são numericamente observáveis. As conclusões por eles tiradas são de grande importância para a análise de observabilidade e controlabilidade de esquema numéricos, principalmente com a relação que eles guardam com o contexto da estabilização de sistemas hiperbólicos com dissipações fracas.

Todo esse contexto possibilitou uma série de novas investigações no campo da análise numérica, principalmente com a análise de métodos numéricos mais eficientes para se reproduzir o problema da observabilidade numérica. Nesta direção, nosso trabalho se baseia nesses resultados e acreditamos que ele seja o único realizado até então sobre sistemas hiperbólicos acoplados de equações de ondas. Realizamos nossas pesquisas sobre o caso particular em que as duas propagações de ondas possuam a mesma velocidade de propagação. Nossas conclusões de um modo bem amplo, é que esquemas numéricos como diferenças finitas não são robustos o suficiente em reproduzir o problema da observabilidade da fronteira. Assim, conseguimos identificar a perda de observabilidade numérica para as equações semi-discreta de ondas acopladas e, paralelamente, conseguimos identificar uma classe de soluções numéricas que são observáveis.

Como continuidade deste trabalho, objetivamos analisar o caso em que as velocidades de propagações de ondas são diferentes. No caso específico que aqui analisamos, podemos também relacionar a observalidade numérica com problemas de estabilização para modelos numéricos fracamente dissipativos, como por exemplo, problema com dissipações pontuais ou localizadas. Outras metodologias numéricas também podem ser investigas, tanto em diferenças finitas como em elementos finitos.

Referências Bibliográficas

[1] E. Zuazua, **Propagation, observation, control and numerical approximation of waves approximated by finite differerence methods**. SIAM Rev. 47, 197 – 243, (2005).

[2] E. Isaacson and H.B. Keller, **Analysis of Numerical Methods**. John Wiley, (1966).

[3] F. Alabau, **Observabilité frontière indirecte de systèmes faiblement couplés**. C. R. Acad. Paris, t. 333 (2001), Série I, 645-650.

[4] J.A. Infante and E. Zuazua, **Boundary Observability for the Space-discretizations of the One-dimensional Wave Equation**. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33. 407 – 438. (1999).

[5] J. D. Smith, **Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, 1984.

[6] J.L. Lions, **Contrôlabilité Exacte, Stabilisation et Perturbations de Systèmes Distribués**. Tome 1. Contrôlabilité Exacte, Masson, Paris, RMA 8. (1988).

[7] M. Najafi and R. Sarhangi, **Boundary Stabilization of Coupled Wave Equations**. Appl. Math. and Comp. Sci., Vol 7, number 3, 479–494, (1997).

[8] M. Najafi, **Study of Exponential Stability of Coupled Wave Systems via Distributed Stabilizer**. Hindawi Publishing Corp., IJMMS 28 : 8 479 – 491. (2001).

[9] M. Najafi, H. Massah, M. Daemi, M. Taeibi-Rahni and H. Khoramishad, **On the MADM Solution of Coupled Wave System with Mixed Boundary Conditions**. Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, pages 68–73, (2006).

[10] M. Najafi and H. Massah, **Analytical and Computational Study of the Stability of Coupled Wave Equations**. Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Istambul, Turkey, pages 78–83, (2006).

[11] M. L. Santos, M.P.C. Rocha and S.C. Gomes, **Polynomial stability of a coupled system of wave equation weakly dissipative**. Applicable Analysis, Vol. 86, 1293-1302, 2007.

[12] R. Rajaram and M. Najafi, **Exact Controllability of Wave Equation in $\mathbb{R}^n$ Coupled in Parallel**. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 356 $7-12$. (2009).

[13] R. Glowinski, C.H. Li and J.L. Lions, **A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation. (I) Dirichlet Controls: Description of the numerical methods**. Jap. J. App. Math. 7. $1-76$. (1990).

[14] R. Glowinski and J.L. Lions, **Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems**. Acta Numerica. $159-333$. (1996).

[15] R. Glowinski, **Ensuring Well-Posedness by Analogy - Stokes Problem and Boundary Control for the Wave Equation**. J. Comput. Phys. 103. $189-221$. (1992).

[16] T. J. R. Hughes, **The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis**. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

[17] V. Komornik, **Exact controllability and stabilization. The multiplier method**. John Wiley, Masson (1994).

[18] X. Zhang, **Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means Calerman inequalities**. SIAM J. Control Optim. 3, 812–834, (2000).