UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÂO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pedro Paulo Santos da Silva

Soluções Estacionárias dos Sistemas Piezoelétricos

BELÉM

2010

Pedro Paulo Santos da Silva

Soluções Estacionárias dos Sistemas Piezoelétricos

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM

2010

Silva, Pedro Paulo Santos da

Soluções Estacionárias dos Sistemas Piezoelétricos / (Pedro Paulo Santos da Silva); orientador, Mauro de Lima Santos. - 2010.

85 f. il. 28cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2010.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações estacionárias. I. Santos, Mauro de Lima, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Titulo.

CDD22.ed. 515.353

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pedro Paulo Santos da Silva

Soluções Estacionárias dos Sistemas Piezoelétricos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 29 de Janeiro de 2010.

Conceito:______________

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
Faculdade de Matemática - PPGME/UFPA

____

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Faculdade de Matemática - PPGME/UFPA

____

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa Rocha
Faculdade de Matemática - PPGME/UFPA

____

Prof. Dr. Jaime Edilberto Muñoz Rivera
Departamento de Matemática - LNCC/UFRJ

Dedicatória

À

meu pai ("in memorian"),minha mãe, meus filhos, meus irmãos e sobrinhos

Agradecimentos

A Deus, por me dar forças nos momentos difíceis, de dúvidas e de aflições.

A minha mãe, pelo exemplo maior de amor à vida e pela paciência, confiança e dedicação.

Aos meus filhos.

A todos os meus familiares, pelo apoio e incentivo, principalmente a minha irmã Márcia.

Ao prof. Mauro de Lima Santos, pela orientação competente e amiga.

Aos professores Ducival, Marcus Rocha, Paulo Marques e Rúbia, pelo incentivo na primeira fase de formação.

Aos amigos do curso de mestrado, que de uma forma ou de outra me ajudaram a concluir esta dissertação, em especial a Elifaleth pelo LATEX, ao Marcos Freitas pela amizade, apoio e consideração e a Isilda pelo apoio, incentivo e por compartilhar momentos de estudo que fortaleceram nossa amizade e enriqueceram nossa formação.

Aos funcionários do Instituto, que sempre me atenderam da melhor forma possível.

Aos amigos da bola "impeachment futebol clube", que mesmo sem saber ajudaram a atravessar os momentos de stress e cansaço.

A todos os grandes amigos do IEEP, pela força, carinho e respeito com que me trataram nos momentos iniciais desta caminhada

A SEDUC pela minha liberação em regime de tempo integral.

A FAPESPA pela importante ajuda financeira.

A coordenação do programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, em especial ao prof. Marcus Rocha pelo empenho em concretizar o convênio UFPa./IFPa. que tornou possível a realização desse curso de mestrado.

A DPPG do IFPa. pelo empenho na assinatura do convênio que proporcionou a realização desse curso de mestrado e pela confiança que tiveram ao selecionar meu nome para o programa.

A Direção do IFPa./Campus Abaetetuba, pelo total apoio que recebi, e em especial ao Eurico pelo cumprimento de todos os acordos.

A todos que de uma forma ou de outra incentivaram e colaboraram com esta dissertação.

Resumo

Estudou-se a existência e unicidade de soluções estacionárias dos sistemas piezoelétricos em um domínio Ω limitado aberto de $\mathbb{R}^3$ com fronteira regular Γ, onde um corpo sofre um deslocamento piezoelétrico $\mathbf{u}(x)$ sujeito a um potencial elétrico $\varphi(x)$ com $\mathbf{u}$ e φ dados formalmente pela equação estacionária

$$\begin{cases} -div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi) &= \mathbf{f},\ em\ \Omega \\ -div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi) &= 0,\ em\ \Omega \end{cases},$$

utilizou-se princípios e leis do eletromagnetismo para caracterizar as propriedades dos materiais piezoelétricos e as equações de Maxwell para descrever matemáticamente o problema da piezoeletricidade. Trabalhou-se dentro de um quadro de pequenas deformações com duas variáveis: o deslocamento mecânico $\mathbf{u}(x)$ e o potencial elétrico $\varphi(x)$. Utilizou-se estrutura funcional de um espaço de Hilbert. Associou-se a equação estacionária a uma formulação variacional e aplicou-se o teorema de Lax-Milgram para demostrar que o problema variacional tem solução única $(\mathbf{u},\varphi)$.

Palavras-chave: Piezoeletricidade, Polarização, Elasticidade, Estrutura Funcional, Análise Variacional

Abstract

Was studied the existence and uniqueness of stationary solutions of piezoelectric systems in a domain Ω limited open $\mathbb{R}^3$ with regular boundary Γ, where a body has a piezoelectric displacement $\mathbf{u}(x)$ subject an electric potential $\varphi(x)$ with $\mathbf{u}$ and φ formally given by the stationary equation

$$\left\{\begin{array}{rcl} -div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi) & = & \mathbf{f},\ in\,\Omega \\ -div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi) & = & 0,\ in\,\Omega \end{array}\right. ,$$

Used the principles and laws of electromagnetism to characterize the properties of piezoelectric material and Maxwell's equations to describe mathematically the problem of piezoelectricity. Worked in a framework of small deformations with two variables: the mechanical displacement $\mathbf{u}(x)$ and the electric potential $\varphi(x)$. used the functional structure of a Hilbert space. Joined the equation to a stationary variational formulation and applied the theorem of Lax-Milgram to demonstrate that the variational problem has a unique solution $(\mathbf{u},\varphi)$.

Keywords: Piezoelectricity, Polarization, Elasticity, Functional Structure, Variational Analisis

Conteúdo

Introdução

Estudamos as soluções estacionárias dos sistemas piezoelétricos e tomamos como referências principais a tese de doutoramento de Houari Mechkour [36], onde nos concentramos mais especificamente no capítulo que trata da homogeneização da equação da piezoeletricidade e utilizamos também como suporte o artigo de Bernadete Miara e Mauro de Lima Santos [38] que estuda o decaimento de energia em um sistema piezoelétrico.

Para melhorar a compreensão a apresentação foi estruturada em capítulos. No Capítulo 1 fazemos um breve histórico do fenômeno da piezoeletricidade e introduzimos as principais propriedades apresentadas pelos materiais piezoelétricos e enfatizamos a polarização elétrica e as propriedades elásticas.

No Capítulo 2 descrevemos o modelo matemático da piezoeletricidade para pequenas deformações. Para isso revisamos leis e princípios fundamentais do eletromagnetismo e os teoremas de Stokes e da divergência. Apresentamos uma formulação diferencial das equações de Maxwell que servem de suporte para as hipóteses sobre o comportamento dos materiais piezoelétricos. Desta forma estabelecemos as propriedades físicas necessárias para a elaboração do problema da piezoeletricidade.

No Capítulo 3 descrevemos o problema da piezoeletricidade. Adotamos o deslocamento mecânico e o potencial elétrico como variáveis piezoelétricas, pois resultam de um acoplamento eletro-mecânico. Definimos os espaços vetoriais adequados para estabelecer a estrutura funcional do problema e delimitar sua estrutura física. Em seguida mostramos uma formulação variacional para o problema da piezoeletricidade e a utilizamos para demonstramos a existência e unicidade de solução.

No apêndice apresentamos resultados experimentais para a determinação do coeficiente de amortecimento de uma onda mecânica via ressonância piezoelétrica num cristal de sal de Rochelle. Apresentamos ainda as definições, propriedades, leis e teoremas mais relevantes do cálculo variacional, tais como o método variacional de Euler-Lagrange, o teorema de Rabionowitz e o princípio variacional de Ekeland, que são usados frequentemente para determinar a existência de pontos críticos.

Capítulo 1

Propriedades dos Materiais Piezoelétricos

Neste capítulo fazemos uma abordagem histórica à cerca das principais descobertas científicas envolvendo fenômenos piezoelétricos e que ajudaram de uma forma ou de outra a desenvolver uma teoria sobre o comportamento piezoelétricos dos meios materiais. Faremos também uma síntese das principais propriedades que regem o comportamento dos materiais piezoelétricos.

1.1 Um Breve Histórico

A Turmalina é uma pedra preciosa que é capaz de atrair pequenos fragmentos de cinza quando é aquecida na brasa. Essa propriedade elétrica associada à temperatura serviu de estímulo para que viessem a ser feitos estudos mais detalhados sobre o comportamento do cristal. Deve-se a Charles de Coulomb e a Henri Becquerel a proposição que além de eletricidade condicionada à temperatura o cristal apresentava também eletricidade dependente da pressão. Esta proposição foi demonstrada em 1880 pelos irmãos Pierre e Jacques Curie, que conseguiram provar através de experimentos que uma tensão elétrica surgia na superfície do cristal tão logo ele fosse exposto a uma pressão mecânica externa. Pouco tempo depois eles também encontraram as mesmas propriedades em outros cristais, como o Quartzo e Topázio. Os Curie deram o nome de "Eletricidade Polar" para a sua descoberta. Porém, esta designação deu logo lugar ao nome "piezoeletricidade".

Em 1881 Gabriel Lippmann propôs a existência de um "Efeito Piezoeletrico invertido", ou seja, o aparecimento de uma deformação no cristal produzida pela aplicação de um campo elétrico externo. Os irmãos Curie também estudaram a proposição de Lippmann e conseguiram obter exito na tentativa de comprová-la através de experimentos. Paul Langevin foi o primeiro a se utilizar de forma prática das propriedades piezoelétricas dos cristais de quartzo ao construir em 1916 o primeiro sonar para a marinha Francesa.

Durante as últimas décadas um grande número de trabalhos foram publicados dando forte enfase ao estudo das propriedades piezoelétricas dos cristais, a maioria deles trata das propriedades eletro-mecânicas, isto é, aquelas que resultam de processos de polarização ou deformação da estrutura cristalina, propriedades estas de grande interesse para físicos, químicos e engenheiros como por exemplo J. Valasek [51,52], Hans Mueller [40,41,42,43], H. V. Jaffe [25,26], e W. G. Cady [07] entre outros.

Em 1º de setembro de 1939 a Alemanha invadiu a Polônia e deu início aos conflitos que acabaram por desencadear a segunda guerra mundial. Este fato provocou um intenso período de estudos a cerca das propriedades físicas dos materiais, entre eles os cristais piezoelétricos, não só pelos interesses que eles despertavam na sua utilização como conversores de sinais mecânicos em sinais elétricos e vice-versa, mas principalmente em virtude dessas características possibilitarem a construção de transdutores como o do sonar. Desse modo destacamos os trabalhos de R. D. Schulvas e M. V. Posnov [48], que foram os primeiros a medir o tempo de relaxação em um cristal de sal de Rochelle utilizando para isso o método da ponte de capacitância.

Um marco importante foi o trabalho de F. C. Isely [23] que estudou as relações entre as propriedades piezoelétricas e as mudanças mecânicas que ocorrem longitudinalmente em uma das dimensões de cristal quando um stress mecânico externo (pressão) é exercido em uma das suas faces. Porém, deve-se aos trabalhos de Hans Müeller [40, 41, 42 e 43] os maiores avanços nesta área. Müeller detectou um comportamento dielétrico anômalo nos cristais de sal de Rochelle ao utilizar uma ponte de capacitância acoplada a um osciloscópio [40]. Deve-se também a Müeller a detecção de curvas de histerese nos cristais de sal de Rochelle [41]. Além das propriedades dielétricas ele também mediu propriedades piroelétricas, ópticas e eletro-ópticas e baseou o resultado de suas análises nas suposições que todas as propriedades dependem do campo elétrico interno e que o ponto de Curie varia com a temperatura [42].

Considerando ainda os trabalhos de Müeller verificamos que ele confirmou o efeito piroelétrico descoberto por Valasek [52] e relatou o efeito Kerr [42],e também a dependência do índice de refração dos cristais de de sal de Rochelle com a temperatura [43].

Ainda dentro desse contexto destacamos os trabalhos de W. P. Mason [33, 34 e 35], da Bell Telephone Laboratories, que mediu as constantes elásticas, elétricas e piezoelétricas em cristais de sal de Rochelle utilizando métodos dinâmicos[33]. Nesses métodos o cristal é usado como um dielétrico em um circuito ressonante do tipo RLC.

Utilizando a teoria da interação proposta por Hans Mueller [41], W. J. Price efetuou medidas de atenuação de ondas ultrasônicas na direção cristalográfica X através da aplicação de um campo elétrico externo D.C.[46].

O fenômeno de ressonância piezoelétrica tem servido de base para a realização de trabalhos recentes, como por exemplo: M. Hidaka, T. Nakayama, J. F. Scott e J. S. Storey realizaram estudos sobre anomalias estruturais do $BaMn_4$ utilizando técnicas de voltagem fixada via ressonância piezoelétrica [21] destacamos também o trabalho de M. Hidaka, A. Noda, S. Yasmashita, K. Imanaga e T. Omura que estudaram transições de fase estrutural no $BaMn_4$ utilizando técnicas de ressonância [22].

1.2 Propriedades Piezoelétricas

Uma característica importante dos materiais piezoelétricos é a presença de uma polarização espontânea no intervalo de temperatura compreendido entre seus dois pontos de Curie (estado de mínima energia livre do material). Essa polarização expontânea faz os dipolos elétricos executarem pequenas translações em torno do seu centro de massa que tendem a alinhá-los em uma mesma direção. Essa movimentação dos dipolos elétricos induz alterações no arranjo estrutural dos átomos do cristal e provocam o aparecimento de esforços e tensões que produzem deformações espontâneas internas. Desse modo um sólido manifesta propriedades piezoelétricas quando é submetido a uma tensão externa e se registra o aparecimento de uma polarização elétrica interna, ou então quando a aplicação de um campo elétrico externo o deforma internamente. No primeiro caso temos o efeito piezoelétrico direto e no segundo caso o efeito piezoelétrico inverso

1.3 Polarização Piezoelétrica

O fenômeno da polarização elétrica ocorre quando o centro de carga positiva de um átomo, molécula ou elemento da estrutura cristalina está ligeiramente afastada do centro de carga negativa. Alguns sólidos, notavelmente certos tipos cristais possuem polarização elétrica permanente, enquanto que outras espécies de cristais, especialmente os cristais piezoelétricos, só se tornam eletricamente polarizados quando são submetidos a ação de um stress externo.

O fenômeno da piezoeletricidade é observada apenas nos sólidos, os quais geralmente adquirem algum tipo de polarização quando são submetidos a alguma forma de stress externo, por exemplo, dobrando, torcendo ou comprimindo esse sólido. Se um material piezoelétrico for submetido a um stress mecânico, um campo elétrico surge transversalmente à direção desse stress; reciprocamente, se o material for submetido a ação de um campo elétrico, surge um stress mecânico interno que altera suas dimensões.

O efeito da piezoeletricidade (do Grego piézin - prensar, apertar) refere-se à interação entre a pressão mecânica e tensão elétrica em sólidos. Este fenômeno é produzido pelo surgimento de cargas elétricas provocado por deformações na superfície de determinados materiais.

Alguns cristais sob tensão exibem o efeito piezoelétrico, isto é, uma polarização $\mathbf{P}$, proporcional a tensão $\mathbf{T}$ é produzida. No efeito de conversão, um campo elétrico $\mathbf{E}$ aplicado produz uma distorção do cristal, representada por uma tensão $\mathbf{T}_1$ proporcional ao campo aplicado. Para um corpo elástico, a mudança em suas dimensões é proporcional à tensão. Neste caso a constante de proporcionalidade é o coeficiente de elasticidade $\mathbf{Y}$(módulo de Young). Então, a polarização induzida pode ser escrita como:

$$P = dY. \tag{1.1}$$

A força $\mathbf{F}$ necessária para manter a tensão constante quando o cristal está sujeito a ação de um campo elétrico é:

$$F = -dYE. \tag{1.2}$$

A tensão em um corpo elástico deformado é a mudança fracionária nas dimensões do corpo em várias dimensões, o stress é a pressão interna em várias direções. O efeito da polarização responsável pela piezoeletricidade surge portanto de pequenos deslocamentos de íons na estrutura cristalina. Esse efeito não é encontrado em cristais com centro de simetria. O efeito direto pode ser bastante forte e um potencial do tipo:

$$U = \frac{dY}{K}. \tag{1.3}$$

é gerado quando o cristal é comprimido, sendo K a constante dielétrica.

1.4 Propriedades Elásticas

Os cristais ordinários em geral sofrem alterações na organização de sua estrutura interna quando são submetidos a uma tensão externa. Porém, se a magnitude desta tensão está abaixo do limite elástico do cristal a deformação é reversível, isto é, a estrutura interna retorna a sua forma original a partir do instante em que a tensão externa é removida. Neste caso as propriedades elásticas do cristal obedecem a lei de Hooke generalizada.

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{cases}, \tag{1.4}$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensão externa, ε_{ij} é o tensor de deformação, S_{ijkl} são os tensores de conformação do cristal e C_{ijkl} são tensores que representam o inverso dos tensores de conformação ou módulo de Young, sendo:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{S_{ijkl}}, \tag{1.5}$$

Condições de simetria entre S_{ijkl} e C_{ijkl} nos dois primeiros e nos dois últimos sufixos permitem que se faça a substituição da notação tensorial pela matricial, de acordo com os esquemas que podemos encontrar com facilidade em livros textos de física dos cristais [44]. Dessa forma a representação da lei de Hooke pode ser então escrita através da seguinte notação matricial:

$$\begin{cases} \varepsilon_{i} = S_{ij}\sigma_{j} \\ \sigma_{i} = C_{ij}\varepsilon_{j} \end{cases}, \tag{1.6}$$

sendo:

$$C_{ij} = \frac{1}{S_{ij}}. \tag{1.7}$$

As propriedades elásticas dos cristais devem portanto relacionar as constantes C_{ijkl} e S_{ijkl}.

Nos cristais piezoelétricos os efeitos elásticos não ocorrem de forma isolada, pois estão sempre acoplados a uma polarização elétrica. Uma vez que uma tensão externa constante não pode ser produzida por processos mecânicos sem alterar as condições limites para uma vibração, é mais conveniente produzí-la pela aplicação de um campo externo E_0 fixo em uma direção cristalográfica. Porem, conforme foi mostrado por Müeller [42] o campo elétrico E_0 altera o tensor de conformação de S_{44} para S_{44^E}, onde:

$$\frac{1}{S_{44^E}} = C_{44} - \frac{f_{14^2}}{X_1 + 3.B.P_0}. \tag{1.8}$$

sendo P_0 a polarização induzida no cristal devido a aplicação do campo elétrico externo E_0. Temos ainda que f_{14} é uma constante piezoelétrica para uma tensão na direção y_z e X_1 é a susceptibilidade recíproca.

As freqüências ressonantes e anti-ressonantes para todas as vibrações na placa de um cristal excitado pelo campo elétrico na direção cristalográfica [010] devem depender do tensor de conformação S_{44} [43]. Portanto, qualquer que seja a freqüência ressonante f, esta dependência vai ser da forma:

$$f = (\alpha + \beta.S_{44})^{-\frac{1}{2}}, \tag{1.9}$$

uma vez que

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}} + \frac{\sigma}{(T - T_C)}, \tag{1.10}$$

e também

$$f = \alpha + \beta.\left[\frac{1}{C_{44}} + \frac{\sigma}{(T - T_C)}\right], \tag{1.11}$$

logo

$$f = \alpha + \frac{\beta}{C_{44}} + \frac{\beta\sigma}{(T - T_C)}. \tag{1.12}$$

portanto, a freqüência ressonante pode ser escrita como:

$$f = a + \frac{b}{(T - T_C)}. \tag{1.13}$$

onde as constantes a=α+$\dfrac{b}{(T-T_C)}$ e b=$\beta.\sigma$ dependem do modo de vibração, das dimensões do cristal, do formato da placa do cristal e dos tensores de conformação S_{ik} que se mantem independentes da temperatura, sendo que T_C representa o ponto de Curie do material que constitui o cristal.

Müeller [42] também demonstra em seus trabalhos que para as situações em que os eletrodos conectados aos cristais são colocados em contato elétrico direto com as amostras do cristal, isto é, colados através de tinta eletrocondutora, o tensor de conformação S_{44} deve ser trocado pelo tensor de conformação reversível S_{44^0}, onde:

$$S_{44^0} = -\frac{\partial.y_z}{\partial.Y_z}, \tag{1.14}$$

sendo que os valores de y_z e Y_z representam as coordenadas da curva tensão-deformação no plano (b,c) de um cristal de sal de Rochelle que estão acima do ponto de Curie.

A constante S_{44} foi calculada por Müeller a partir da freqüência ressonante em uma placa de cristal com 1cm de comprimento [33], no qual foram produzidas vibrações longitudinais na direção da diagonal ao plano formado pelos eixos b e c utilizando a equação

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.15}$$

onde a densidade calculada do cristal foi ρ=$1,77(u)$ e o modulo de Young $\mathbf{Y}$ para esta direção é dado por

$$\frac{1}{\mathbf{Y}} = S = \frac{1}{4}\left(S_{22} + S_{33} + 2.S_{33} + S_{44^*}\right), \tag{1.16}$$

no caso S_{44^*} foi substituido por S_{44} pois os eletrodos estavam fixados no cristal. Os valores encontrados foram:

$$\begin{cases} S = 3,16x10^{-12}(u), \\ C_{44} = 11,6x10^{10}(u). \end{cases}$$

como a freqüência ressonante do cristal medida eletricamente coincide com a ressonância mecânica natural do cristal, Mason [33] associou os eixos a com o eixo X, b com o Y e c com o Z, e estabeleceu as seguintes equações elásticas para um cristal de sal de Rochelle:

$$
\begin{cases}
-\chi_x = S_{11}X_x + S_{12}Y_y + S_{13}Z_z, & -\gamma_z = S_{44}Y_z; \\
-\gamma_y = S_{12}X_x + S_{22}Y_y + S_{23}Z_z, & -\xi_x = S_{55}Z_x; \\
-\xi_z = S_{13}X_x + S_{23}Y_y + S_{33}Z_z, & -\chi_y = S_{66}X_y.
\end{cases} \tag{1.17}
$$

onde:

1) S_{11}, S_{12}, etc. são os tensores de conformação;

2) $-\chi_x$, $-\gamma_y$, $-\xi_z$, etc. as deformações;

3) X_x, Y_y, Z_z, etc. as tensões.

As relações podem ser escritas em função do inverso do tensor de conformação na seguinte forma:

$$
\begin{cases}
-X_x = C_{11}\chi_x + C_{12}\gamma_y + C_{13}\xi_z, & -\gamma_z = C_{44}Y_z; \\
-Y_y = C_{12}\chi_x + C_{22}\gamma_y + C_{23}\xi_z, & -\xi_x = C_{55}Z_x; \\
-Z_z = C_{13}\chi_x + C_{23}\gamma_y + C_{33}\xi_z, & -\chi_y = C_{66}X_y.
\end{cases} \tag{1.18}
$$

onde:

$$
\sigma.C_{11} = \begin{bmatrix} S_{22} & S_{23} \\ S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} (u) \tag{1.19}
$$

$$
\sigma.C_{23} = \begin{bmatrix} S_{13} & S_{23} \\ S_{11} & S_{12} \end{bmatrix} \tag{1.20}
$$

$$
C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \tag{1.21}
$$

$$
\sigma = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{1.22}
$$

Capítulo 2

Modelo Matemático da Piezoeletricidade

Neste capítulo revisamos algumas noções e princípios fundamentais do eletromagnetismo sobre os quais construimos as hipóteses preliminares à cerca das propriedades de maios materiaisonde ocorrem os fenômenos relacionados com a piezoeletricidade linear. As leis de Biot-Savart, Faraday, Ampère, e Gauss são descritas para facilitar o entendimento e a interpretação correta dos fenômenos eletromagnéticos e para fazermos a descrição matemática do problema da piezoeletricidade.

2.1 Princípios Fundamentais do Eletromagnetismo

Abordamos os princípios que quantificam a indução eletromagnética, isto é, o efeito da produção de corrente elétrica em um circuito elétrico quando este fica submetido a ação de um campo magnético variável ou sob a ação de um circuito elétrico em movimento em relação a um campo magnético constante. Em ambos os casos a interação eletromagnetica é vista através de leis que medem a intensidade dessas interações e que são derivadas da união de diversos princípios.

2.2 Princípio da Conservação da Energia.

Se o circuito é aberto e não há fluxo de corrente, não há dissipação de energia pelo efeito Joule. Não há força de reação à variação do campo magnético e o movimento do magneto ou do circuito não realiza trabalho (força nula x movimento = zero). Se ao contrário, existir corrente circulando no circuito (com dissipação de energia), a variação do campo magnético resultará numa resistência que demandará a realização de trabalho.

2.3 Lei de Biot-Savart.

Descreve o vetor indução magnética **B** em termos de magnitude e direção de uma corrente elétrica, da distância da fonte de corrente elétrica e da permeabilidade magnética do meio. Pode ser usada para derivar a lei de Ampère e vice-versa. Em particular, se definimos um elemento infinitesimal de corrente idl, então o elemento infinitesimal de campo magnético é:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{idl \times \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}. \tag{2.1}$$

Onde:

μ é a permeabilidade magnética do meio;

i é a corrente elétrica, medida em Ampères;

dl é o vetor diferencial de comprimento do elemento de corrente;

$\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário que dá a direção e o sentido do vetor que liga o elemento de corrente até o ponto onde se quer calcular o campo;

$\mathbf{r}$ é o vetor que liga o elemento de corrente até o ponto onde se quer calcular o campo.

2.4 Lei da Indução de Faraday.

A corrente elétrica induzida por um campo magnético em um circuito fechado, é proporcional ao número de linhas de fluxo que atravessa a área envolvida do circuito na unidade de tempo. Desse modo temos que:

$$\oint_C \mathbf{E}.dS = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}. \tag{2.2}$$

Onde:

$\mathbf{E}$ é o campo elétrico induzido;

dS é um elemento infinitesimal do circuito;

$\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}$ é a variação do fluxo magnético.

2.5 Lei de Faraday-Lenz.

A força eletromotriz induzida num circuito elétrico é igual à variação do fluxo magnético conectado ao circuito. Um campo elétrico constante não dá origem ao fenômeno da indução. A lei é de natureza relativística e o seu efeito é o resultado do movimento do circuito em relação ao campo magnético.

A contribuição fundamental de Heinrich Lenz foi a determinação da direção da força eletromotriz (o sinal negativo na fórmula). A corrente induzida no circuito elétrico é de fato gerada por um campo magnético, desse modo o sentido da corrente é oposto ao da variação do campo magnético que a gera. Se o campo magnético conectado ao circuito está diminuindo, o campo magnético gerado pela corrente induzida irá na mesma direção do campo original (se opõe a diminuição), se, pelo contrário, o campo magnético conectado está aumentando, o campo magnético gerado irá em direção oposta ao original (se opõe ao aumento).

2.6 Lei de Ampère.

É a lei que relaciona o campo magnético sobre um laço com a corrente elétrica que passa através do laço. é o equivalente magnético da lei de Gauss. Foi modificada por James Clerk Maxwell e passou a ser chamada de lei de Ampère-Maxwell. Calcula o campo magnético resultante em um ponto devido a qualquer distribuição de corrente elétrica através da lei de Biot-Savart.

$$\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \mu_0 \overrightarrow{\mathbf{J}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{E}}}{\partial t}. \tag{2.3}$$

2.7 Lei de Gauss.

Estabelece a relação entre fluxo elétrico que passa através de uma superfície fechada e a quantidade de carga elétrica que existe dentro do volume limitado por esta superfície. É escrita na seguinte forma integral:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}.d\Gamma = \frac{Q_\Gamma}{\varepsilon_0}, \tag{2.4}$$

pode ser escrita também na forma diferencial

$$\nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.5}$$

sendo:

$\mathbf{E}$ o campo elétrico;

Γ a superfície;

Q_Γ a carga elétrica envolvida por Γ;

ρ a densidade volumétrica de carga;

ε_0 a permissividade elétrica do vácuo.

2.8 Teorema de Stokes.

Seja S uma superfície no espaço com fronteira dada por uma curva C. Então a circulação de um vetor de um campo vetorial F ao longo de C é igual ao integral sobre S da componente normal de rot(F).

$$\int\int_S \nabla \times F dS = \oint_C F.dr. \tag{2.6}$$

onde $\int\int_S$ é a integral de superfície numa superfície S e $\oint_C$ é a integral de linha no caminho C.

2.9 Teorema da Divergência (Lei de Gauss):

Dado um campo vetorial A de classe $C^1(D)$, que contem uma superfície fechada S delimitando um volume V em D aberto e sendo orientada pela norma exterior unitária, tem-se pelo teorema de Gauss:

$$\int\int\int_V \nabla.\mathbf{A} dV = \int\oint_S \mathbf{A}.dS. \tag{2.7}$$

Demonstração: ver [49]

2.10 Hipóteses Preliminares Sobre as Propriedades dos Materiais Piezoelétricos.

Consideramos as seguintes definições:

Definição 2.1 *: Meios materiais homogêneos apresentam as mesmas propriedades físicas em todos os seus pontos. Isto é, apresentam a mesma temperatura, densidade, etc..*

Definição 2.2 *: Meios materiais isotrópicos apresentam propriedades físicas que independem da direção em que são observadas. Em caso contrário eles são chamados de meios anisotrópicos.*

Definição 2.3 *: Meios materiais dispersivos são aqueles nos quais uma onda se propaga através deles com velocidade de fase dependente da sua frequência.*

Definição 2.4 : *Os meios materiais lineares são aqueles que apresentam uma dimensão predominante em relação às outras e sobre a qual as propriedades físicas se manifestam com maior intensidade.*

Definição 2.5 : *Meios materiais birrefringentes possuem diferentes índices de refração para diferentes direções de polarização que podem ser produzidos pela anisotropia dos materiais, pela ação de stress, de campo elétrico, de campo magnético, etc..*

Com base nestas definições vamos considerar que o meio material piezoelétrico objeto de nossos estudos é homogêneo, isotrópico, dispersivo, linear e birrefringente.

2.11 Descrição Matemática do Problema da Piezoeletricidade.

A lei de Ampère na sua forma integral pode ser escrita como:

$$\oint \mathbf{B}.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_{\mathbf{E}}}{\partial t} + \mu_0 i. \tag{2.8}$$

sendo que $\Phi_E = \int \mathbf{E}.dS$ e $i = \int \mathbf{J}.dS$, segue-se que:

$$\oint \mathbf{B}.dl = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E}.dS + \mu_0 \int \mathbf{J}.dS. \tag{2.9}$$

o teorema de Stokes fornece-nos uma relação entre uma integral de circuitação e uma integral de superfície aberta como a seguir:

$$\oint \mathbf{B}.dl = \int (\nabla \times \mathbf{B}).dS,$$

igualando os dois lados direitos das equações acima temos que,

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}).dS = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E}.dS + \mu_0 \int \mathbf{J}.dS,$$

ou ainda

$$\int (\nabla \times \mathbf{B}).dS - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E}.dS - \mu_0 \int \mathbf{J}.dS = 0,$$

o que implica

$$\int \left(\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J}\right) dS{=}0.$$

para que esta igualdade seja verdadeira para qualquer superfície é necessário que seu integrando seja nulo, isto é:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J}{=}0.$$

então

$$\nabla \times \mathbf{B}{=}\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}{=}0.$$

ou seja

$$rot\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}. \tag{2.10}$$

Esta equação representa a lei de Ampére na forma diferencial. Dela, concluimos que campos elétricos variáveis no tempo, assim como correntes elétricas, produzem campos magnéticos. Estes campos magnéticos são, como esperado, do tipo rotacional.

Se essa distribuição apresentar certo grau de simetria, é possível aplicar a lei de Ampère para determinar o campo marnético com um esforço menor. Destas equações podemos concluir que:

a) Os campos elétricos criados por cargas elétricas são divergentes ou convergentes;

b) Os campos magnéticos são rotacionais, isto é, não existem monopólos magnéticos;

c) Campos magnéticos variáveis no tempo geram campos elétricos rotacionais;

d) Campos elétricos variáveis no tempo geram campos magnéticos rotacionais;

e) Correntes elétricas ou cargas em movimento geram campos magnéticos.

Como estamos trabalhando com materiais lineares os campos **D** e **H** são relacionados a **E** e **B** por:

$$\begin{cases} \mathbf{D} &= \quad \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \quad \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \end{cases} \tag{2.11}$$

onde **P** é o vetor de polarização elétrica e **M** é o vetor de magnetização ou de imantação, ε_0 é a permissividade elétrica absoluta (constante dielétrica) que desiguina a permissividade do vácuo, μ_0 é a permissividade magnética absoluta (permeabilidade magnética).

Esta descrição pode ser estendida para lidar também com materiais não lineares, fazendo ε e μ dependendo da intensidade do campo. Em meios isotrópicos e não dispersivos, ε e μ são escalares independentes do tempo e desse modo:

$$\begin{cases} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \tag{2.12}$$

a equação (2.10) passa a ser escrita na seguinte forma:

$$rot\frac{B}{\mu_0} = \frac{\partial \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{2.13}$$

ou seja:

$$rot\mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J} \tag{2.14}$$

Observação 2.1 *:*

1- Em um meio uniforme homogêneo ε e μ são constantes independentes da posição e, portanto, podem ser trocadas pelas derivadas espaciais.

2- $\boldsymbol{E}$ e μ podem ser tensores de segunda ordem $(Matrizes\ 3\times 3)$ descrevendo materiais birrefringentes (anisotrópicos).

3- Todo material real exibe alguma dispersão pela qual ε e/ou μ dependem da frequência.

Fazendo uso do teorema de Stokes e derivando a lei de Faraday na sua forma diferncial.

$$\oint_C \mathbf{E}dl = -\frac{\partial \Phi_{\mathbf{B}}}{\partial t}, \tag{2.15}$$

como $\Phi_{\mathbf{B}}=\int_S \mathbf{B}dS$ temos que

$$\oint_C \mathbf{E}dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}dS. \tag{2.16}$$

Sabemos também que o teorema de Stokes relaciona uma integral de caminho com a integral de superfície aberta delimitada por este caminho.

$$\oint_C \mathbf{E}dl = \int_S (\nabla \times \mathbf{E})dS \tag{2.17}$$

comparando os lados direitos das duas últimas equações temos que

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} dS,$$

ou seja

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} dS = 0,$$

de onde vem

$$\int_S \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS = 0.$$

como a integração é válida para qualquer superfície, então a integral será sempre nula quando o integrando for nulo. Deste modo

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

ou seja:

$$rot\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \tag{2.18}$$

Esta equação representa a lei de Faraday na sua forma diferencial. Desta equação concluimos que campos magnéticos variáveis no tempo geram campos elétricos do tipo rotacionais. Estes campos elétricos diferem daqueles gerados por cargas elétricas estáticas, os quais são sempre divergentes. Isto explica o fato da integral do campo elétrico em um caminho fechado ser diferente de zero. Em resumo, podemos dizer que os campos rotacionais tem integral de circuitação não nula.

Para os materiais piezoelétricos que satisfazem as condições estabelecidas vamos então considerar um dominio Ω simplesmente conexo de $\mathbf{R}^3$ de fronteira regular $\Gamma = \partial\Omega$, cuja interação eletromagnética é traduzida pelas equações de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{rcl} rot\mathbf{H} & = & \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J} \subset \Omega, \\ rot\mathbf{E} & = & -\partial_t \mathbf{B} \subset \Omega. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

onde $\mathbf{E}$ é a intensidade de campo elétrico (Volt/metro), $\mathbf{H}$ é a intensidade de campo magnético (Ampère/metro), $\mathbf{D}$ desiguina a indução elétrica (Coulomb/metro) ou deslocamento elétrico, $\mathbf{B}$ e a indução magnética (Tesla) e $\mathbf{J}$ representa o vetor corrente(Ampère/metro quadrado). Esses campos vetoriais são ligados pelas leis do comportamento eletromagnético.

Para completar a descrição desta interação eletromagnética nos introduzimos outra equação de equilíbrio, dita equação de Maxwell-Gauss ou equação de conservação da carga. Podemos reescrever a lei de Gauss para a eletrostática em função de uma densidade de carga volumétrica como a seguir:

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} dS = q, \tag{2.20}$$

onde $q = \int_V \rho dV$, logo

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} dS = \int_V \rho dV, \tag{2.21}$$

sendo ρ é a densidade de carga volumétrica e V é o volume no interior da superfície gaussiana. Usando o teorema de Gauss, podemos então relacionar uma integral de superfície com uma integral de volume, Desse modo, temos que

$$\varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} dS = \varepsilon_0 \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV,$$

comparando os dois lados direitos das duas integrais acima encontramos

$$\int_V (\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) dV = 0,$$

como esta igualdade é verdadeira para qualquer volume, então o integrando da equação deve ser nulo, isto é

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} - \rho = 0.$$

logo

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho.$$

lembrando que $D = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ e que $q = \rho V$ representa a densidade volumétrica de carga elétrica no interior do material, então

$$\nabla \mathbf{D} = q.$$

portanto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ou seja

$$-div\mathbf{D} = q. \tag{2.22}$$

esta equação corresponde a lei de Gauss na sua forma diferencial. Isto significa que, se o divergente do campo elétrico é não nulo, então devem existir campos elétricos resultantes na região de carga total não nula. Esta equação é válida dentro de um meio não imantado. Porém no que se segue, o material considerado em nossos estudos é um isolante e portanto $q = 0$. Então, nesse caso

$$-div\mathbf{D} = 0. \tag{2.23}$$

A última equação de Maxwell se ajusta as equações precedentes e traduz a lei de conservação do fluxo magnético. Considerando que a lei de Gauss para a magnetostática é igual a

$$\oint_S \mathbf{B}{\cdot}dS = 0. \tag{2.24}$$

usando o teorema de Gauss como no caso anterior temos que

$$\oint_S \mathbf{B}{\cdot}dS{=}\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B})dV.$$

portanto, encontramos a seguinte equação para a magnetostática

$$\nabla \cdot \mathbf{B}{=}0.$$

ou seja

$$div\mathbf{B} = 0. \tag{2.25}$$

desta equação tiramos as seguintes conclusões:

1- Os campos magnéticos são divergentes;

2- Não existem monopólos magnéticos.

A equação de conservação da carga elétrica q é definida por

$$\frac{\partial q}{\partial t} + div\mathbf{J} = 0. \tag{2.26}$$

Lembrando que simples conectividade do dominio ocorre quando não existem abertos (grupos de elementos) vazios.

As condições de contorno são determinadas a partir das equações de Maxwell escritas sob a forma de integrais. Para uma abordagem matemática a hipótese de simples conectividade do dominio Ω e a regularidade da fronteira Γ permitem a partir da equação (2.25) deduzir que a lei de conservação (2.25) implica na existência de um vetor $\mathbf{A}$, chamado potencial magnético vetorial, tal que

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}. \tag{2.27}$$

Esta última equação combinada com a segunda equação de Maxwell-Faraday do sistema (2.11) implica que a soma de vetores $\mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ admite um rotacional nulo, deriva, portanto, de um potencial escalar ϕ, onde substituindo (2.27) e (2.11) temos

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{\partial(rot\mathbf{A})}{\partial t},$$

ou seja

$$rot\left(\mathbf{E} + \frac{\partial(rot\mathbf{A})}{\partial t}\right){=}0.$$

A soma de vetores $\mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ admite um rotacional nulo

Proposição 2.1 : *Um rotacional nulo se origina de um potencial escalar φ.*

Demonstração: De fato, se por definição

$$\nabla\varphi{=}\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\varphi,$$

ou seja

$$\nabla\varphi{=}\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k,$$

temos também que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & = & 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} & = & 0. \end{array}\right. \leftrightarrow \varphi \text{ é um escalar,}$$

então

$$\nabla\varphi{=}0,$$

logo

$$\mathbf{E}+\nabla\varphi+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=0,$$

portanto

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{2.28}$$

Em geral o material piezoelétrico é um meio contínuo e eletricamente neutro, isto é, não apresenta cargas elétricas no seu interior ($q=0$) sendo por isso classificado como um isolante. Em muitas aplicações podemos nos limitar à aproximação quasi-estática, que assume que a transformação é termodinamicamente adiabática, isto é, não há troca de calor e portanto não há efeito joule, logo a corrente elétrica no seu interior é nula ($\mathbf{J}=0$). isto nos conduz à:

$$\begin{cases} \mathrm{q} &= 0 \\ \mathbf{J} &= 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Supondo que só o efeito de interação eletro-mecânica é importante, podemos desprezar a interação magnética, ou seja

$$\begin{cases} \mathbf{M} &= 0 \\ \mathbf{A} &= 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

esta última hipótese foi confirmada experimentalmente [50].

Precisamos agora daquelas condições em que podemos trabalhar com a aproximação quasi-eletrostática (2.19). Para simplificar a análise suporemos que o corpo é uma placa de comprimento L e consideramos agora que uma oscilação eletromagnética possui um modo próprio de vibração induzido pela sua deformação, cujo comprimento de onda é λ e a velocidade de fase ν. O período de oscilação T é dado por $T=\frac{\lambda}{\nu}$ e denotaremos ainda por x a variável de espaço e por t a variável de tempo. Faremos também as seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{cases} \zeta &= \frac{x}{L} \\ \tau &= \frac{2\pi t}{T} \end{cases},$$

da segunda equação do sistema (2.19) obtemos

$$rot_{\zeta}\mathbf{E}=-\frac{2\pi L}{T}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}. \tag{2.31}$$

Demonstração:

Aparenta ser necessário fazer a consideração que a onda eletromagnética sofre pequenos deslocamentos Δx a cada intervalo de tempo Δt. Desse modo a área atingida pela onda cresce de S para ΔS a cada instante e seu raio de ação muda de x para Δx. isto provoca uma mudança na segunda equação do sistema (2.19) de

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

para

$$rot(\mathbf{E}+\Delta\mathbf{E}){=}-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ou seja,

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}-\Delta rot\mathbf{E}$$

logo,

$$rot\mathbf{E}{=}-\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+\Delta\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

considerando todo o comprimento L da placa teremos

$$rot\mathbf{E}{=}-L\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

substituindo t por $\frac{\tau T}{2\pi}$ fica

$$rot\mathbf{E}{=}-L\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \frac{\tau T}{2\pi}},$$

ou seja

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{2\pi}{T}L\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau},$$

lembrando ainda que $T{=}\frac{\lambda}{\nu}$ temos

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{2\pi}{\frac{\lambda}{\nu}}L\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau T},$$

ou seja

$$rot\mathbf{E}{=}-\frac{2\pi\nu}{\lambda}L\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau},$$

substituindo $L{=}\dfrac{x}{\zeta}$ obtemos

$$rot\mathbf{E}{=}{-}\frac{2\pi\nu}{\lambda}\frac{x}{\zeta}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau},$$

ou seja

$$\zeta rot\mathbf{E}{=}{-}\frac{2\pi\nu}{\lambda}x\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}.$$

de onde se conclui que

$$rot_{\zeta}\mathbf{E}{=}{-}\frac{2\pi L}{T}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}.$$

ζ é a taxa de progressão da onda através da placa e a cada instante provoca um acréscimo (variação) $\zeta\mathbf{E}$ na intensidade do campo

Conclui-se, portanto, um critério para a aproximação quasi-eletrostática: "*Se o comprimento de onda da oscilação é muito grande comparado com o comprimento da placa podemos fazer a aproximação eletromagnética e ignorar* **A**". Isto seria equivalente a efetuar inicialmente a hipótese de simplificação sobre $\Delta\varphi$

$$|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}| \ll |\Delta\varphi| \tag{2.32}$$

esta hipótese é baseada na experimentação, portanto a equação (2.28) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{E} = -\Delta\varphi \tag{2.33}$$

desse modo nossas incógnitas são reduzidas ao deslocamento **u** e ao potencial φ.

Lembramos que a entalpia de um sistema é definida atraves da expressão $H{=}U + PV$, onde: H é a entalpia;

U é a energia interna;

P é a pressão do sistema;

V é o volume do sistema;

Nos processos isobáricos, isto é, aqueles que ocorrem mantendo-se a pressão constante a variação da entalpia é dada por

$$\Delta H = \Delta U + P\Delta V \tag{2.34}$$

ou então por

$$\Delta H = \Delta U + W \tag{2.35}$$

onde W representa o trabalho realizado Pelo ou sobre o sistema.

Definiremos agora a entalpia elétrica H de um sistema piezoelétrico por

$$H(\epsilon, E_i) = U - E.D \tag{2.36}$$

onde ϵ é a parte linear do tensor de deformação ($2\epsilon_{ij}(u){=}\partial_i u_j + \partial_j u_i$), $E{=}(E_i)$, com U sendo a energia interna.

Diferenciando em relação ao tempo obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}{=}\frac{\partial(U - E.D)}{\partial t},$$

ou seja

$$\frac{\partial H}{\partial t}{=}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial(E.D)}{\partial t},$$

logo

$$\frac{\partial H}{\partial t}{=}\frac{\partial U}{\partial t} - \left(E.\frac{\partial D}{\partial t} + D.\frac{\partial E}{\partial t}\right),$$

desse modo

$$\frac{\partial H}{\partial t}{=}\frac{\partial U}{\partial t} - E.\frac{\partial D}{\partial t} - D.\frac{\partial E}{\partial t},$$

portanto

$$\frac{\partial H}{\partial t} = T_{ij}\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - D_i\frac{\partial E_i}{\partial t}. \tag{2.37}$$

com $D{=}(D_i)$ e $T{=}(T_{ij})$ é o tensor de deformação.

Uma vez que $H{=}H(\epsilon, E_i)$, vamos também diferenciar a equação em relação ao tempo, nesse caso obteremos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}{=}\frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial E_i}\frac{\partial E_i}{\partial t},$$

depois de identificar os termos obtidos com os termos da equação (2.37), deduzimos que

$$\left(T_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}\right)\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - \left(D_i + \frac{\partial H}{\partial E_i}\right)\frac{\partial E_i}{\partial t}{=}0,$$

tomando a solução trivial $(0,0)$, segue que

$$\left(T_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}\right)\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}{=}0,$$

sabemos também que T_{ij} e T_{ji} são componentes de um tensor covariante, logo

$$\begin{cases} T_{ij} & = & \dfrac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} & (A) \\ T_{ji} & = & \dfrac{\partial H}{\partial \epsilon_{ji}} & (B) \end{cases},$$

somando (A) e (B) temos

$$T_{ij} + T_{ji}{=}\frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ji}},$$

como T_{ij} e T_{ji} são simétricos, fica

$$2T_{ij}{=}\frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}},$$

portanto

$$T_{ij}{=}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}\right),$$

de modo análogo

$$D_i + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}_i}{=}0,$$

então

$$D_i{=}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}_i}{=}0,$$

dessa forma

$$\begin{cases} T_{ij} & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}} + \dfrac{\partial H}{\partial \epsilon_{ij}}\right) \\ D_i & = & -\dfrac{\partial H}{\partial E_i} \end{cases}, \tag{2.38}$$

como nos interessam os resultados aplicáveis aos modelos lineares das estruturas piezoelétricas, consideramos apenas a parte quadrática da entalpia, que é definida por

$$H(\epsilon, E_i) = \frac{1}{2}C_{ijkl}E_k\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}d_{ij}E_iE_j. \tag{2.39}$$

Deduzimos de (2.38) e (2.39) a segunda lei do comportamento que exprime o tensor de deformação T e o vetor deslocamento elétrico D em função do tensor linear de deformação ϵ=(ϵ_{ij}), o gradiente do potencial elétrico ou campo elétrico E, para um sistema de equações constituídas em uma forma matricial compacta utilizando a notação de Voigt [12]

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_{ij} & = & C_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{kij}E_k \\ D_i & = & e_{ikl}\epsilon_{kl} + d_{ij}E_j \end{array}\right. , \tag{2.40}$$

deduzimos da relação (2.39) que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 H}{\partial T_{ij}\partial T_{kl}} & = & \dfrac{\partial^2 H}{\partial T_{kl}\partial T_{ij}}, \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial E_k\partial E_i} & = & \dfrac{\partial^2 H}{\partial E_i\partial E_k} \end{array}\right. , \tag{2.41}$$

isso implica que

$$\left\{\begin{array}{c} C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} \\ d_{ij} = d_{ji} \\ e_{kij} = e_{kij}, e_{kij} = -e_{jik} \end{array}\right. , \tag{2.42}$$

desse modo:

1- C_{ijkl} são coeficientes de elasticidade em um campo elétrico nulo.

2- os termos de e_{kij} são coeficientes piezoelétricos de campo elétrico ou deformação nulos.

3- os termos d_{ij} são os coeficientes de permissividade com deformação nula.

Observação 2.2 *: As hipóteses físicas introduzidas pela piezoeletricidade consistem em desprezar os efeitos magnéticos e os efeitos térmicos e a considerar unicamente a interação eletro-mecânica. Portanto, para o estudo da piezoeletricidade linear, nos restringiremos apenas a polarização elétrica e a elasticidade linear remanescente no âmbito das pequenas deformações.*

Capítulo 3

Descrição do Problema da Piezoeletricidade

Apresentamos a seguir uma descrição do problema da piezoeletricidade e para simplificar nos concentramos unicamente no caso estacionário.

3.1 Quadro Físico.

Partimos da suposição que as variações de temperatura e de campo magnético são desprezíveis, estas hipóteses são bastante razoáveis uma vez que consideramos os materiais piezoelétricos utilizados habitualmente como as cerâmicas, os polímeros e os piezo-compósitos e verificamos que os fenômenos piezoelétricos resultam basicamente de acoplamentos eletro-mecânicos.

Com base nessas observações trabalhamos dentro de um quadro de piezoeletricidade em pequenas deformações para a qual formulamos o problema em duas incógnitas: O deslocamento mecânico $\mathbf{u}(x)$ e o potencial elétrico $\varphi(x)$. Portanto consideramos o potencial elétrico como sendo a nossa incógnita elétrica em vez de utilizar seu gradiente [04], isto se justifica pelas condições de contorno/fronteira que serão impostas posteriormente sobre o potencial elétrico.

3.2 Definição dos Espaços.

Começamos Revisando as definições e propriedades dos espaços vetoriais que nos serão úteis e que também servirão de base para a construção e solução do problema.

Definição 3.1 $L^2(\Omega)$ *é o espaço das funções mensuráveis de quadrado integrável em* Ω *munido de produto escalar:*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx. \tag{3.1}$$

com a norma

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f\rangle}, \tag{3.2}$$

$L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Definição 3.2 $H^1(\Omega)$ *é o espaço de Sobolev definido por:*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tal que}, \forall i \in \{1, ..., d\}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

onde $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ é a derivada parcial fraca de v.

Proposição 3.1 *Munido do produto escalar*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \tag{3.3}$$

e da norma induzida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: ver [06]

Teorema 3.1 *(Teorema do Traço)*

Seja Ω um aberto limitado e regular, definimos a aplicação traço γ_0 como:

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \to L^2(\Gamma) \cap C(\Gamma)$$

$$v \to \gamma_0(v) = v|_\Gamma$$

esta aplicação γ_0 prolonga-se por continuidade a uma aplicação linear contínua de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Gamma)$. Em particular, existe uma constante $C > 0$ tal que, para toda a função $v \in H^1(\Omega)$, tem-se

$$\|v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{3.5}$$

Demonstração ver [37]

Definição 3.3 *Seja Ω um aberto limitado e regular. O espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ é definido como um subespaço de $H^1(\Omega)$ constituído pelas funções que se anulam sobre Γ no sentido do teorema do traço. Munido do produto escalar*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \tag{3.6}$$

de $H^1(\Omega)$, o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Definição 3.4 $(H^1(\Omega))^3$=$H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

Definição 3.5 *Denotaremos por $D(\Omega)$ o espaço das funções de classe C^∞ de suporte compacto em Ω.*

1- $D(\Omega)$ É denso em $L^2(\Omega)$;

2- $D'(\Omega)$ É denotado como o dual topológico de $D(\Omega)$;

3- $D'(\Omega)$ Representa o espaço das distribuições de (Ω).

Teorema 3.2 *O espaço $D(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: ver [37]

Lema 3.1 *(Desigualdade de Poincaré)*

Para toda $u \in H_0^1(a, b)$ tem-se que

$$\int_a^b \|u(x)\|^2 dx \leq C \int_a^b \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx \tag{3.7}$$

onde C é uma constante positiva e C=$(med(a, b)) > 0$

Demonstração:

Se $u \in H_0^1(a,b)$ temos que $u(a)$=$u(b)$=0 logo,

$$u(x) = \int_a^b \frac{du}{dx}(x)dx$$

tomando o módulo e extendendo a todo o intervalo (a,b), daí temos

$$|u(x)| \leq \int_a^x \left|\frac{du}{dx}\right| dx \leq \int_a^b \left|\frac{du}{dx}\right| dx \ \Rightarrow (1)$$

aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$|u(x)| \leq \int_a^b \left|1.\frac{du}{dx}\right| dx \leq \left|\langle 1, \frac{du}{dx}\rangle_{L^2(a,b)}\right|$$

$$(1) \Rightarrow \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left\{\int_a^b |\frac{du}{dx}|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

daí obtemos

$$|u(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^b \left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx$$

integrando em (a,b) encontramos

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \left\{(b-a) \int_a^b \left|\frac{du}{dx}\right|^2 dx\right\} \int_a^b dx$$

ou seja

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_a^b \left|\frac{du}{dx}\right| dx$$

tomando C=$(b-a)^2$, encontramos

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq C \int_a^b \left|\frac{du}{dx}\right| dx$$

em geral: se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é aberto, limitado regular e $u \in H_0^1(\Omega)$ então

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C \int_a^b |\nabla u|^2 dx$$

Lema 3.2 *Em $H_0^1(\Omega)$ as normas $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes.*

Demonstração:

note que toda u se anula em a e b, logo de $u \in H_0^1(a,b) \subset H^1(a,b)$ temos

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx$$

usando a desigualdade de Poincaré temos

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} \leq C\int_a^b |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx + \int_a^b |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx = (C+1)\int_a^b |\frac{du}{dx}(x)|^2 dx$$

fazendo $(C+1)$=$\widetilde{C}$ fica

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \widetilde{C}\left|\frac{du}{dx}\right|^2_{L^2(a,b)}$$

é imediato que

$$\int_a^b \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx \leq \int_a^b |u(x)|^2 dx + \int_a^b \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx = \|u\|^2_{H^1(a,b)}$$

portanto

$$\left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2_{L^2(a,b)} \leq |u(x)|^2_{H^1(a,b)} \leq \widetilde{C}\left|\frac{du}{dx}\right|^2_{L^2(a,b)} \quad \forall u \in H^1_0(a,b)$$

em geral, se $u \in H^1_0(\Omega)$ temos

$$C_1|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \leq |u|_{H^1(\Omega)} \leq C_2|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

Definição 3.6 *O traço (de acordo com o teorema 3.1) é uma aplicação linear e contínua de* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to C$ *mas não é injetiva nem sobrejetiva. Por isso torna-se necessário então introduzir o espaço* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$*:*

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{g \in L^2(\Gamma) : \exists v \in H^1(\Omega) \ tal \ que \ g = v|_\Gamma\}$$

munido da seguinte norma

$$\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ v|_\Gamma = u|_\Gamma}} \|v\|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \tag{3.9}$$

com as seguintes propriedades:

1) A aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *é linear e contínua uma vez que*

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \overset{def}{=} \inf_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ v|_\Gamma = u|_\Gamma}} \|v\|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \tag{3.10}$$

2) Existe um operador prolongamento $P : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ *linear, contínuo e injetivo tal que:*

$$(P(g)) = \left\{g, \ \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right\} \tag{3.11}$$

3) A injeção $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é linear e contínua, isto é, $\exists C > 0$ tal que:

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \; \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{3.12}$$

4) $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

5) $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é o dual topológico de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, isto é:

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))' \tag{3.13}$$

6) $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ está equipado com a norma do dual que se representa por:

$$\forall \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \|\sigma\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \equiv \frac{\sup|\sigma(g)|}{\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}} = 1 \tag{3.14}$$

Teorema 3.3 *(Teorema de Green)*

Seja C uma curva simples fechada derivável e "D" a região do plano delimitada por C. Sejam P e Q duas funções reais de variável real com derivadas parciais contínuas numa região contendo "D", então:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \tag{3.15}$$

Este teorema é utilizado para relacionar a integral de linha ao longo de uma curva fechada no plano e a integral dupla sobre a região plana "D" limitada por essa curva. É um caso particular do teorema de Stokes.

Demonstração: ver [49]

Definição 3.7 *Seja U um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma \in C^1$ e η o vetor normal exterior sobre Γ. Se u, v são funções $C^2(\overline{U})$, então:*

$$\begin{cases} (1) \int_U \triangle u dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} dS; \\ (2) \int_U \triangle u \triangle v dx = -\int_U u \triangle v dx + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} u dS; \\ (3) \int_U (u\triangle v - v\triangle u) dx = -\int_\Gamma (\frac{\partial v \partial \eta}{u} - \frac{\partial u}{\partial \eta} v) dS. \end{cases} \tag{3.16}$$

a este conjunto de igualdades vetoriais envolvendo integrais denominamos fórmulas de Green

Teorema 3.4 *Para toda função $u \in H_\Psi(\Omega)$ a expressão $A\nabla un$ está bem definida como elemento do espaço $H_{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e:*

$$\int_\Omega A\nabla u.\nabla v dx = -\int_\Omega div(A\nabla u)v dx + \langle A\nabla u.n, v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \tag{3.17}$$

$$\forall u \in H_\Psi(\Omega) \text{ e } \forall v \in H^1(\Omega)$$

Teorema 3.5 *Seja Ω um aberto limitado e regular, se u e v são funções de $H^1(\Omega)$, elas verificam:*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(xv(x))dx + \int_\Gamma u(x)v(x)n_i(x)dS \tag{3.18}$$

onde n=$(n_i)_{1\leq i\leq d}$ é a normal unitária exterior de Γ

Teoria de Lax-Milgram:

É uma teoria abstrata utilizada para obter a existência e unicidade de solução de um problema variacional definido em um espaço de Hilbert.

Denotamos por $\mathbf{H}$ um espaço de Hilbert real munido de produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e que possui norma $\|\cdot\|$. Desiguinamos por formulação variacional o seguinte problema:

$$(1)\begin{cases} \textit{procurar } u \in \mathbf{H} \textit{ tal que } a(u,v) = L(v) \\ \qquad \textit{para toda } v \in \mathbf{H} \end{cases}$$

As hipóteses sobre a e L são:

1) $L(\cdot)$ é uma forma linear contínua sobre $\mathbf{H}$, isto é, $v \to L(v)$ é linear de $\mathbf{H}$ em $\mathbb{R}$ e existe $C > 0$ tal que:

$$|L(v)| \leq C\|v\|_{\mathbf{H}} \text{ para todo } v \in \mathbf{H}$$

2) $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear sobre $\mathbf{H}$, isto é:

a) $w \to a(w,v)$é uma forma linear de $\mathbf{H}$ em $\mathbb{R}$ para todo $v \in \mathbf{H}$

b) $v \to a(w,v)$ é uma forma linear de $\mathbf{H}$ em $\mathbb{R}$ para todo $w \in \mathbf{H}$

3) $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, isto é, existe $C > 0$ tal que:

$$|a(w,v)| \leq C\|w\|_{\mathbf{H}}\|v\|_{\mathbf{H}} \text{ para todo } w, v \in \mathbf{H}$$

4) $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2_{\mathbf{H}} \text{ para todo } v \in \mathbf{H}$$

Teorema 3.6 *(Teorema de Lax-Milgram)*

Seja $\boldsymbol{H}$ um espaço de Hilbert real, $L(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{H} \to \mathbb{R}$ uma forma linear contínua sobre $\boldsymbol{H}$, $a((\cdot,\cdot),(\cdot,\cdot)) : \times\boldsymbol{H} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua coerciva sobre $\boldsymbol{H}$. Nestas condições a formulação variacional (1) admite uma única solução e essa solução depende continuamente da forma linear $L(\cdot,\cdot)$.

3.3 Estrutura Funcional

Vamos considerar o espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ dotado com o produto interno

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e sua correspondente norma

$$|u|^2 = \int_\Omega (u(x))^2 dx$$

desse modo o espaço $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$ será denotado por $\mathbf{L^2}(\Omega)$ munido do produto interno

$$(L^2(\Omega))^3 \to \langle u,v\rangle_{(L^2(\Omega))^3} = \sum_{j=1}^{3} \langle u_i, v_j\rangle \tag{3.19}$$

e da norma

$$|u|^2_{(L^2(\Omega))^3} = \sum_{j=1}^{3} |u|^2_{(L^2(\Omega))^3} \tag{3.20}$$

Vamos também considerar o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ definido como

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial(x_j)} \in L^2(\Omega) \right\}$$

munido do produto interno

$$H^1(\Omega) \to \langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle \tag{3.21}$$

ou seja

$$H^1(\Omega) \to \langle u,v\rangle = \langle u,v\rangle + \sum_{j=1}^{3} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle \tag{3.22}$$

Vamos definir também o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ como um subespaço de $H^1(\Omega)$ de forma que $H_0^1(\Omega)$=$C_0^\infty(\Omega)$, ou seja, $H_0^1(\Omega)$ é um fechado de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia forte de $H^1(\Omega)$ munido do produto interno

$$H_0^1(\Omega) \rightarrow \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \langle \nabla u, \nabla v\rangle \tag{3.23}$$

da desigualdade de Poincaré

$$|u|_{L^2}(\Omega) \leq C(\Omega)|\nabla u|_{L^2(\Omega)} \tag{3.24}$$

obtemos

$$(H^1(\Omega))^3 \rightarrow \langle u, v\rangle_{(H^1(\Omega))^3} = \sum_{j=1}^{3}\langle u_j, v_j\rangle + \sum_{j=1}^{3}\langle \nabla u_j, \nabla v_j\rangle \tag{3.25}$$

e

$$(H_0^1(\Omega))^3 \rightarrow \langle u, v\rangle_{(H_0^1(\Omega))^3} = \sum_{j=1}^{3}\langle \nabla u_j, \nabla v_j\rangle \tag{3.26}$$

considerando ainda o espaço $H^2(\Omega)$, vamos denotar os seguintes espaços vetoriais de Sobolev

1) $(H^1(\Omega))^3$=$\mathbf{H}^1(\Omega)$,

2) $(H^2(\Omega))^3$=$\mathbf{H}^2(\Omega)$,

3) $(H_0^1(\Omega))^3$=$\mathbf{H}_0^1(\Omega)$,

4) $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$=$\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, em $\mathbf{H}^1(\Omega)$ vamos considerar o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^{3}\langle u_j, v_j\rangle_{H^1(\Omega)} \tag{3.27}$$

com a norma

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^{3}\|u_j\|_{H^1(\Omega)}^2 \tag{3.28}$$

em $\mathbf{H}^2(\Omega)$ vamos considerar o produtos interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathbf{H}^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{3}\langle u_j, v_j\rangle_{H^2(\Omega)} \tag{3.29}$$

com a norma

$$\|u\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{3}\|u_j\|_{H^2(\Omega)}^2 \tag{3.30}$$

3.4 Estrutura Física

Seja $x{=}(x_1, x_2, x_3)$ um ponto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ e seja Ω o domínio (conjunto limitado aberto de $\mathbb{R}^3$ com fronteira regular Γ. Seja Q o domínio $\Omega\times]0,T[$, $0 < T < +\infty$, e $\Sigma{=}\Gamma\times]0,T[$ sua fronteira. Consideremos um corpo piezoelétrico cuja configuração inicial de referência é $\overline{\Omega}$, caracterizado pela densidade de massa $\tau > 0$, pela presença de uma densidade volumétrica de força $\mathbf{f}$ em Ω, e livre de cargas elétricas no seu interior e sobre a fronteira ($q{=}0$). Este corpo sofre um deslocamento piezoelétrico $\mathbf{u}(x){=}(u_1(x)) :\to \mathbb{R}^3$ e um potencial elétrico $\varphi(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, dados formalmente pela seguinte equação estacionária.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi) & = & \mathbf{f},\ em\ \Omega \\ -div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi) & = & 0,\ em\ \Omega \end{array}\right. \tag{3.31}$$

com as condições de contorno homogêneas

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{u} & = & 0,\ em\ \Sigma \\ \varphi & = & 0,\ em\ \Sigma \end{array}\right. \tag{3.32}$$

sendo ($\mathbf{T}{=}\mathbf{T}_{ij}$) o tensor de stress e ($\mathbf{D} = \mathbf{D}_i$) o deslocamento elétrico, ambos relacionados ao deslocamento elástico ($\mathbf{u}$) e ao potencial elétrico (φ) através da seguinte lei constitutiva clássica [24]:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u},\varphi) & = & C_{ijkl}\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u}) + e_{kij}\partial_k\varphi,\ em\ \Omega \\ \mathbf{D}_i(\mathbf{u},\varphi) & = & -e_{ikl}\mathbf{S}_{kl}(u) + d_{ij}\partial_j\varphi,\ em\ \Omega \end{array}\right. \tag{3.33}$$

tanto o tensor de stress ($\mathbf{T}_{ij}$) quanto o deslocamento elétrico $\mathbf{D}_i$ se relacionam com o tensor deformação linearizado ($\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u})$) e com o gradiente do potencial elétrico $[(\partial_i\varphi),(\partial_j\varphi)]$, caracterizando desse modo o acoplamento eletro-mecânico (deformação/polarização)

Vamos considerar ainda as seguintes notações:

a) $(div\mathbf{T})_i{=}\partial_k\mathbf{T}_{ki}$,

b) $div\mathbf{D}{=}\partial_k\mathbf{D}_k$,

c) $\partial_k\mathbf{u}_l{=}\dfrac{\partial\mathbf{u}_l}{\partial(\mathbf{u}_k)}$,

sendo $\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u}){=}\frac{1}{2}(\partial_k\mathbf{u}_l + \partial_l\mathbf{u}_k)$ as componentes do tensor de deformação elástica linearizado.

As características do material consistem de três tensores assim denominados:

1- Tensor elasticidade de quarta ordem (C_{ijkl}), simétrico, isto é,

$$C_{jkli}=C_{jikl}=C_{klij}=C_{ijkl}$$

é positivo definido, então existe uma constante positiva $\alpha_c > 0$ tal que:

$$C_{ijkl}X_{ij}X_{kl} \geq \alpha_c X_{ij}X_{ij}, \; \forall \; X_{ij}X_{ji} \in \mathbb{R}$$

2- O tensor acoplado de terceira ordem (e_{ijk}) é parcialmente simétrico, isto é,

$$e_{ijk}=e_{ikj}$$

3- O tensor dielétrico de segunda ordem (d_{ij}) é simétrico, isto é,

$$d_{ij}=d_{ji}$$

é positivo definido, então existe uma constante α_d tal que:

$$d_{ij}X_iX_j \geq \alpha_d X_iX_i, \; \forall \; X_i \in \mathbb{R}$$

Observação 3.1 *: Neste trabalho os coeficientes dos três tensores são considerados constantes e para efeito de simplicidade a densidade de massa τ é tomada como sendo unitária.*

3.5 Formulação Variacional do Problema.

Lema 3.3 *: Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Lipschitziana Γ e $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ e $\varphi \in H^1(\Omega)$. Para todas as funções teste $\boldsymbol{v}=(v_i) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e $\psi \in H_0^1(\Omega)$ temos:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\displaystyle\int_\Omega div\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\varphi)\boldsymbol{v}dx & = & \displaystyle\int_\Omega (C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi))dx \\ -\displaystyle\int_\Omega div \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u},\varphi)\psi dx & = & \displaystyle\int (-e(\boldsymbol{u},\psi) + d(\varphi,\psi)dx \end{array} \right. \tag{3.34}$$

Vamos agora considerar as funções testes $\boldsymbol{v}=(v_i) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando a primeira equação do sistema (3.31) pelas componentes de $\boldsymbol{v}=(v_i)$ temos

$$-div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)=\mathbf{f}, \; em \; \Omega \; \times v_i$$

onde

$$-div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)v_i{=}\mathbf{f}v_i$$

integrando sobre Ω obtemos

$$-\int_\Omega div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)v_i dx{=}\int_\Omega \mathbf{f}v_i dx$$

aplicando o Teorema de Green ao primeiro termo da equação temos que

$$-\int_\Omega div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)v_i dx{=}\int_\Omega \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u},\varphi)\partial_i v_j dx-\int_{\Gamma_1^M}\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u},\varphi)v_j\eta_i d\Gamma$$

aplicando as condições de contorno temos que

$$\int_{\Gamma_1^M}\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u},\varphi)v_j\eta_i d\Gamma{=}0$$

logo

$$-\int_\Omega div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)v_i dx{=}\int_\Omega \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{u},\varphi)\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{v})dx$$

usando (3.33) fica

$$-\int_\Omega div\mathbf{T}(\mathbf{u},\varphi)v_i dx{=}\int_\Omega [C_{ijkl}\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u})+e_{kij}\partial_k\varphi]\mathbf{S}_{ij}(\boldsymbol{v})dx{=}\int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx$$

portanto

$$\int_\Omega [C_{ijkl}\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u})+e_{kij}\partial_k\varphi]\mathbf{S}_{ij}(\boldsymbol{v})dx{=}\int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx$$

levando em conta a observação (3.1) fica

$$\int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v})+e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx=\int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx \tag{3.35}$$

Do mesmo modo, seja $\psi\in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando a segunda equação do problema (3.31) por ψ temos

$$-div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi){=}0,\ em\ \Omega\ \times\psi$$

onde

$$-div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi)\psi{=}0$$

integrando sobre Ω obtemos

$$-\int_\Omega div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi)\psi{=}0$$

aplicando o Teorema de Green e levando em conta as condições de contorno conduz a:

$$-\int_{\Omega} div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi)\psi dx{=}\int_{\Omega}\mathbf{D}_i(\mathbf{u},\varphi)\partial_i\psi dx-\int_{\Gamma}\mathbf{D}_i(\mathbf{u},\varphi)\psi\eta_i d\Gamma{=}0$$

mas pelas condições de contorno

$$\int_{\Gamma}\mathbf{D}_i(\mathbf{u},\varphi)\psi\eta_i d\Gamma{=}0$$

logo

$$-\int_{\Omega} div\mathbf{D}(\mathbf{u},\varphi)\psi dx{=}\int_{\Omega}\mathbf{D}_i(\mathbf{u},\varphi)\partial_i\psi dx$$

usando (3.33) obtemos

$$\int_{\Omega}[-e_{ikl}\mathbf{S}_{kl}(\mathbf{u})+d_{ij}\partial_j\varphi]\partial_i\psi dx{=}0$$

levando em conta a observação (3.1) fica

$$\int_{\Omega}[-e(\mathbf{u},\psi)+d(\varphi,\psi)dx=0 \tag{3.36}$$

Adicionando as duas equações (3.35) e (3.36) obtemos o primeiro problema variacional (P_1)

$$\begin{cases} \textit{encontrar } (\mathbf{u},\varphi)\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \textit{ tal que,} \\ a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi))=L(\boldsymbol{v},\psi),\forall(\boldsymbol{v},\psi)\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi))=\int_{\Omega}[C(\mathbf{u},\boldsymbol{v})+e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx+\int_{\Omega}[-e(\mathbf{u},\psi)+d(\varphi,\psi)]dx \\ L(\boldsymbol{v},\psi)=\int_{\Omega}\mathbf{f}_i v_i dx \end{cases}$$

Subtraindo as duas equações (3.35) e (3.36) obtemos um segundo problema variacional (P_2)

$$\begin{cases} \textit{encontrar } (\mathbf{u},\varphi)\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \textit{ tal que,} \\ a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi))=L(\boldsymbol{v},\psi),\forall(\boldsymbol{v},\psi)\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi))=\int_{\Omega}[C(\mathbf{u},\boldsymbol{v})+e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx-\int_{\Omega}[-e(\mathbf{u},\psi)+d(\varphi,\psi)]dx \\ L(\boldsymbol{v},\psi)=\int_{\Omega}\mathbf{f}_i v_i dx \end{cases}$$

3.6 Existência e Unicidade de Solução.

Para verificar a existência e unicidade de solução para o problema vamos nos apoiar nas definições, lemas, proposições e teoremas do movimento rígido.

Definição 3.8 *Vamos considerar os seguintes espaços:*

$$(H_0^1(\Omega))^3 = \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)=\{v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega), v = 0 \; sobre \; \Gamma\}$$

$$H_0^1(\Omega)=\{\psi \in (H^1(\Omega)), \psi = 0 \; sobre \; \Gamma\}$$

sendo o espaço $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ munido com a seguinte norma:

$$\|v\|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)\|_{(L^2(\Omega))^3}, \forall v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \tag{3.37}$$

Definição 3.9 *(Desigualdade de Poincaré e Korn)*

(i) (Lema do movimento rígido)

$$Se \; v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) \; e \; \boldsymbol{S}_{ij}(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)) = 0, \; então \; v = 0$$

(ii) (Desigualdade de Poincaré)

Seja Ω um aberto limitado, então para cada função $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$, existe uma constante C estritamente positiva tal que:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq C\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.38}$$

(iii) (Primeira desigualdade de Korn)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira Γ Lipschitziana, então temos:

$$\forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega), \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{3.39}$$

(iv) (Segunda desigualdade de Korn)

seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira Γ Lipschitziana, então temos

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \leq C \int_\Omega [\sum_{i=1}^n u_i u_i + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{S}_{i,j}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{S}_{i,j}(\boldsymbol{u})]dx \tag{3.40}$$

com $\boldsymbol{u}=(u_i)_{1\leq i\leq n}$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{S}_{i,j}(\boldsymbol{u}))$, sendo que $\boldsymbol{S}_{i,j}(\boldsymbol{u})$ é o tensor de deformação linear

(v) seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado de fronteira Γ Lipschitziana de classe C^2, então existe uma constante C estritamente positiva tal que

$$\|v\|_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^n \|\boldsymbol{S}_{ij}(\boldsymbol{H}_0^1(\Omega))\|_{(L^2)^3(\Omega)}, \forall v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \tag{3.41}$$

Lema 3.4 *: Se $\overline{\varphi}$ é um elemento de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, e existe um acréscimo $\widehat{\varphi}$ de $\overline{\varphi}$ em $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$, isto é, uma função $\widehat{\varphi} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ tal que $\widehat{\varphi}|_{\Gamma}$=$\overline{\varphi}$.*

Desse modo temos então que:

$$\overline{\varphi} = \varphi - \widehat{\varphi}, \tag{3.42}$$

que conduz a seguinte proposição

Proposição 3.2 *: A solução $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ do problema variacional P_1 é dada por $\overline{\varphi}$=φ-$\widehat{\varphi}$ com $(\boldsymbol{u}, \overline{\varphi})$ solução do seguinte problema variacional:*

$$\begin{cases} \text{encontrar } (\boldsymbol{u}, \varphi) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tal que,} \\ a_1((\boldsymbol{u}, \varphi), (\boldsymbol{v}, \psi)) = \overline{L}(\boldsymbol{v}, \psi), \forall (\boldsymbol{v}, \psi) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.43}$$

onde de acordo com (P_1) $a_1((\boldsymbol{u}, \varphi), (\mathbf{v}, \psi))$ é definido por:

$$a_1((\boldsymbol{u}, \varphi), (\boldsymbol{v}, \psi)) = \int_{\Omega} [C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v}, \varphi)]dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx$$

logo

$$\overline{L}_1(\boldsymbol{v}, \psi) = \int_{\Omega} [C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v}, \varphi)]dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx$$

ou seja

$$\overline{L}_1(\boldsymbol{v}, \psi) = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_i v_i dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx \tag{3.44}$$

Proposição 3.3 *: Existem constantes $C_k > 0$ e $C_k(\Omega) > 0$ tal que para $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)$ temos que:*

1) A única solução $\boldsymbol{u}$=$(u_i) \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ do problema

$$\int_{\Omega} [C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v}, \varphi)]dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_i v_i dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx$$

ou seja

$$\int_{\Omega} [C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v}, \varphi)]dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_i v_i dx \text{ para todo } v \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$$

satisfaz

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \leq C_k \int_{(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{3} (|u_i(x)|^2 + |\boldsymbol{S}_{ij}(\boldsymbol{u})(x)|^2)dx \tag{3.45}$$

2) A única solução $\boldsymbol{u}$=$(u_i) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ do problema

$$\int_{\Omega} [C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v}, \varphi)]dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_i v_i dx + \int_{\Omega} [-e(\boldsymbol{u}, \psi) + d(\varphi, \psi)]dx$$

ou seja

$$\int_\Omega [C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx = \int_\Omega \boldsymbol{f}_i v_i dx \text{ para todo } v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

satisfaz

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \leq C_k(\Omega)\int_{(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{3} |\boldsymbol{S}_{ij}(\boldsymbol{u}))|^2 \tag{3.46}$$

a prova dessas desigualdades pode ser encontrada em [45]

Observação 3.2 *: Por causa da coercibilidade de (C_{ijkl}) e (d_{ij}), temos que $\int_\Omega C(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})dx$ e $\int_\Omega d(\psi,\psi)dx$ são normas equivalentes para as clássicas normas sobre $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, isto é, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3, C_4 tais que*

$$C_1\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega C(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})dx \leq C_2\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)} \tag{3.47}$$

e

$$C_3\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega d(\psi,\psi)dx \leq C_4\|\psi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.48}$$

Teorema 3.7 *(i) Assumimos que o domínio Ω tem uma fronteira Γ Lipschitziana. Para uma densidade volumétrica de força $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ e $g = 0$, $\forall g \in L^2(\Omega)$ o problema estacionário (3.31) tem uma única solução fraca $(\boldsymbol{u},\varphi) \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, a qual satisfaz a seguinte identidade*

$$\begin{cases} \int_\Omega [C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx = \int_\Omega \boldsymbol{f}_i v_i dx \ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega [-e(\boldsymbol{u},\psi) + d(\varphi,\psi)dx = 0 \ \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.49}$$

(ii) Seja Γ de classe C^2. Para uma densidade volumétrica de força $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ e $g = 0$, $\forall g \in L^2(\Omega)$ existe uma única solução forte $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ do problema variacional

$$\begin{cases} \int_\Omega [C(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx = \int_\Omega \boldsymbol{f}_i v_i dx \ \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega [-e(\boldsymbol{u},\psi) + d(\varphi,\psi)dx = 0 \ \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.50}$$

Do problema (3.31) e do lema (3.3) obtivemos os dois seguintes problemas variacionais:
(i)P_1

$$\begin{cases} \textit{encontrar } (\mathbf{u},\varphi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \textit{ tal que,} \\ a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = L(\boldsymbol{v},\psi), \forall(\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = \int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx + \int_\Omega [-e(\mathbf{u},\psi) + (\varphi,\psi)]dx \\ L(\boldsymbol{v},\psi) = \int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx \end{cases}$$

(ii)P_2

$$\begin{cases} encontrar\ (\mathbf{u},\varphi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\ tal\ que, \\ a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = L(\boldsymbol{v},\psi), \forall (\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = \int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx - \int_\Omega [-e(\mathbf{u},\psi) + d(\varphi,\psi)]dx \\ L(\boldsymbol{v},\psi) = \int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx \end{cases}$$

supomos agora que os problemas P_1 e P_2 tem cada um uma única solução e que ambas as soluções coincidem. Para isso, vamos considerar que $(\mathbf{u},\varphi)$ seja a solução de P_1 e P_2.

Proposição 3.4 : *Os dois problemas variacionais P_1 e P_2 são equivalentes.*

Demonstração:

Seja $(\mathbf{u},\varphi)$ uma solução de P_1. Uma vez que para todo $\psi \in H_0^1$, $-\psi \in H_0^1$ temos

$$a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi)) = L(\boldsymbol{v},\psi), \forall (\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

ou para todo $(\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ temos

$$a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi)) = a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi))$$

deste modo $(\mathbf{u},\varphi)$ é também solução de P_2.

Do mesmo modo mostramos que toda solução de P_2 é também solução de P_1. Seja então $(\mathbf{u},\varphi)$ uma solução de P_2. Uma vez que para todo $\psi \in H_0^1$, $-\psi \in H_0^1$ temos

$$a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi)) = L(\boldsymbol{v},\psi), \forall (\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

ou para todo $(\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ temos

$$a_2((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi)) = a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},-\psi))$$

portanto $(\mathbf{u},\varphi)$ é também solução de P_1

Desde que ambos os problemas são equivalentes, nos só temos que mostrar a existência e unicidade da solução do problema P_1.

Tomando

(i) $L(\boldsymbol{v},\varphi)=\int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx$,

(ii) $a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = \int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx + \int_\Omega [-e(\mathbf{u},\psi) + (\varphi,\psi)]dx$temos

$$L(\boldsymbol{v},\psi) : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$(\boldsymbol{v},\psi) \mapsto L(\boldsymbol{v},\psi) = \int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx,\ \mathbf{f} \in L^2(\Omega)$$

é linear:

$$(L(\beta(\boldsymbol{v},\psi) + \alpha(\boldsymbol{v},\psi))=\beta L(\boldsymbol{v},\psi) + \alpha L(\boldsymbol{v},\psi)$$

é contínua, isto é:

$$|L(\boldsymbol{v},\psi)| = |\int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx| \leq \int_\Omega |\mathbf{f}_i||v_i| dx$$

aplicando Cauchy-Schwartz

$$|L(\boldsymbol{v},\psi)| \leq |\mathbf{f}_i|_{L^2(\Omega)} |v_i|_{L^2(\Omega)} \leq C|\mathbf{f}_i|_{L^2(\Omega)} |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)}$$

fazendo $C|\mathbf{f}_i|_{L^2(\Omega)}=\widetilde{C}$

$$|L(\boldsymbol{v},\psi)| \leq C\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

temos também que

$$a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) \mapsto a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi)) = \int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx + \int_\Omega [-e(\mathbf{u},\psi) + (\varphi,\psi)]dx$$

é bilinear e contínua

$$|a_1((\mathbf{u},\varphi),(\boldsymbol{v},\psi))| \leq C\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

e coerciva, logo

$$a_1((\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{u},\varphi)) = \int_\Omega |\nabla(\mathbf{u},\varphi)|^2 dx = \|(\mathbf{u},\varphi)\|^2_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

ou seja

$$\exists C > 0 : a_1((\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{u},\varphi)) > C\|(\mathbf{u},\varphi)\|^2_{\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}$$

logo, do teorema [3.6] (Teorema de Lax-Milgram) segue-se que existe uma única função $(\mathbf{u},\varphi) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$ tal que

$$a_1((\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{u},\varphi)) = \int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx;\ \forall(\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$$

portanto

$$\int_\Omega [C(\mathbf{u},\boldsymbol{v}) + e(\boldsymbol{v},\varphi)]dx + \int_\Omega [-e(\mathbf{u},\psi) + (\varphi,\psi)]dx = \int_\Omega \mathbf{f}_i v_i dx;\ \forall(\boldsymbol{v},\psi) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$$

verificamos então que:

i) A forma linear $L(\mathbf{v},\psi)$ é contínua sobre $\mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$;

ii) A forma bilinear $a_1((\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{v},\psi))$ é contínua e coerciva sobre $\mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$

Então, usando o teorema [3.6] (Teorema de Lax-Milgram) segue-se que o problema variacional P_1 tem uma única solução fraca $(\mathbf{u},\varphi) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$.

Usando as mesmas idéias do teorema anterior podemos mostrar que o problema P_1 tem uma única solução forte $(\mathbf{u},\varphi)$, com $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Conclusões e Comentários Finais.

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções estacionárias dos sistemas piezoelétricos. Apresentamos o problema piezoelétrico estacionário que consiste de um domínio Ω limitado aberto de $\mathbb{R}^3$ com fronteira regular Γ, de tal sorte que um corpo sofre deslocamento piezoelétrico $\mathbf{u}(x)$ sujeito a um potencial elétrico $\varphi(x)$.

Tratamos o problema de um modo multidisciplinar pois precisamos utilizar os princípios e leis do eletromagnetismo para poder caracterizar a polarização elétrica nos materiais piezoelétricos. Um outro aspecto importante foi a utilização das equações de Maxwell em sua forma diferencial para descrevermos o problema da piezoeletricidade matemáticamente. Consideramos também que os materiais piezoelétricos sofrem deformações reversíveis pois estão submetidos a tensões com magnitude abaixo do seu limite elástico e portanto esses cristais obedecem a lei de Hooke generalizada no âmbito das pequenas deformações. Desse modo os efeitos elásticos estão sempre acoplados a uma polarização elétrica.

Utilizamos a estrutura funcional de um espaço de Hilbert como um componente essencial para estabelecer a estrutura física do problema e associar a equação estacionária do sistema piezoelétrico a uma formulação variacional. Do ponto de vista prático utilizamos um método variacional que possibilitou a determinação de condições que satisfazem o clássico teorema de Lax-Milgram, demonstrando desse modo que o problema variacional tem solução única $(\mathbf{u}, \varphi)$.

Bibliografia

[1] Adams, R. A.: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Agmon, R. A.: *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 1959.

[3] Alves, C. A., Moreira, S. G. C.:*Geração de Harmônicos e/ou Subharmônicos através do Sistema de 3 Eletrodos em Cristais de ADP e Sal de rochelle*, UFPa...., Bélem, 19....

[4] Banks, H. T.,Smith, R. C., Wang Y.:*Smart Material Structures: Modeling, Estimation and Control*,Masson, Wiley, 1996.

[5] Bartle, Robert G.: *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[6] Brézis, Haïm: *Análisis Funcional*, Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[7] Cady, W. G.: *Some Electromechanical properties of Rochelle Salt Crystals*, The American Physical Society. Sup. p. 278-279, 1929.

[8] Ciarlet, P. G.: *A Justification of the Von Karman equations*, Arch. Rat. Mech. Anal.73, pp.349-389, 1980.

[9] Ciarlet, P. G.: *Mathematical Elasticity, Vol.I: Three-Dimensional Elasticity. Series "Studies in Mathematical and its Applications*, North Holland, Amsterdam, 1998.

[10] Costa, S. S. I.: *Sistema Eliptico Fortemente Indefinido*, Universidade Federal da Paraiba, João Pessoa, 2001.

[11] De Aguiar, Flávio M., Azevedo, A. e Rezende, S.:*Modern Spin-wave Nonlinear Dynamics*, Brasilian Journal of Phisics, v.22, p.301-309, 1992.

[12] Dieulesaint, E., Royer, D.:*Ondes Élastiques dans les solides: Application au traitement su signal*, Massan.

[13] Ekeland, I., Temam, R.:*Analyse convexe et problémes variationnels*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1974.

[14] Ekeland,I.:*On the variational principle*, J. Math, Anal. Appl 47, pp. 324-353, 1974.

[15] Evans, Laurence C.:*Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[16] Faria, P. C. R. P.: *Derivada de forma em optimização estrutural*, Universidade de Lisbôa, 2006.

[17] Farias, L. F. O.: *Equações elipticas semilineares con dependência do gradiente por passo da montanha*, 2004.

[18] Fowler, R. H.: *Proc. Royal Society*, Reino Unido, v.A149, pp.1, 1935.

[19] Franken P. A., Hill, A. E.,Peters, C. W., Weinreich G.: *Generation of Optical Harmonics*, Physical Review Letters,v.7, n.4, p.118-119, 1961.

[20] Gilbarg, David e Trundiger Neil S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 3º edition, New York, 2001.

[21] Hidaka, M.,Nakayama, T., Scott, J. F., Storey, J. S.: *Piezoelectric Resonance Study of Structural Anomalies in* $BaMnF_4$, Physica, v.133B, p.1-9, 1985.

[22] Hidaka, M., Noda, A., Yamashita, S., Imanaga, K., Maki, K.,Ohmura, T.:*Piezoelectric Resonance Stydy of Structural Phase Transition in* $BaMnF_4$, Phase Transition, v.28, p.107-123, 1990.

[23] Isely, Frank C.: *The Relation Between the Mecanical and Piezoelectrical Properties of a Rochelle Salt Crystal*, Physical Review, v.24, n.05, p.569-574, 1924.

[24] Ikeda, Takuro: *Fundamentals of Piezoelectricity*, New York, Oxford University Press, 1990.

[25] Jaffe, Hans Von R.:*Polymorphism os Rochelle Salt*, Physical Review, v.51, p.43-47,1937.

[26] Jaffe, Hans Von R.: *Crystalline Transitions and Dielectric Constant*,American Physical Society, p.917, 1938.

[27] Kreyszig, Erwin: *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.

[28] Kurtschatow, J., Kobeko, P., Zeits, F.: *Physik*, Moscou, v.66, pp.192, 1930.

[29] Lima, Elon L.: *Análise Real*, vol 2 , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio deJaneiro, 2004.

[30] Lima, Elon L.: *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 1997.

[31] Lima, Elon L.: *Curso de Análise*, Vol 1, (10ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 2002.

[32] Lions, J. L.:*Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*,Dunod Gauthiers Villars, Paris, 1969.

[33] Mason, W. P.: *Dynamic Measuremant of the Elastic, Electric and Piezoelectric Constants of Rochelle salt*,Physical Review,v.55, p.775-789, 1939.

[34] Mason, W. P.: *The Location of Hysteresis Phenomena in Rochelle salt Crystals*, Physical Review, v.58, p.744-756, 1940.

[35] Mason, W. P.: *The Elastic, Piezoelectric and Dielectric Constants of Potassium Dihydrogen Phosphate and Ammonium Dihydrogen Phospate*, Physical Review, V.69, n.5 e 6, p.173-194, 1946.

[36] Mechkour, H.,*Homogénéisation et Simulation numérique de Structures Piézoélectriques Perforées et Laminées*, Université de Marne-la-Vallée, 2004.

[37] Medeiros, L. A. e Milla Miranda, M.: *Espaços de Sobolev e as equações diferenciais parciais*, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993.

[38] Miara, B. e Santos, M. L.: *Energy decay in piezoelectric systems*, Applicable Analysis, vol. 86, 2009.

[39] Moreira, Alves, Alcantara, Costa.: *Acoustic Harmonic and Subharmonic Generation in ADP and Rochelle Salt Crystals Using 3 electrodes System.*

[40] Mueller, H.: *Properties of Rochelle Salt 1*, Physical Review, v.47, p.175-191, 1935.

[41] Mueller, H.: *Properties of Rochelle Salt 2*, Physical Review, v.57, p.829-839, 1940.

[42] Mueller, H.: *Properties of Rochelle Salt 3*, Physical Review, v.58, p.565-573, 1940.

[43] Mueller, H.: *Properties of Rochelle Salt 4*, Physical Review, v.58, p.805-811, 1940.

[44] Nye, J. F.:*Physical Properties of Crystals*,New York, Oxford University Press, 1985.

[45] Oleinik O. A., Shamaev G. A, Yosifian G. A.:*Mathematical problems in elasticity and homogenization*,North Holland, Amsterdam, 1983.

[46] Price, W. J.: *Ultrasonic Measurement on Rochelle Salt Crystals*, Physical Review, v.75, n.6, p.946-952, 1949.

[47] Santos, M. D.: *Existência de Solução Para um Problema de Ressonância via Espaço com Peso*, 1999.

[48] Schulwas, Sorokin, R. D., Posnov, M. V.: *The time of Relaxation in Crystals os Rochelle salt*, Physical Review, v.47, p.166-174, 1935.

[49] Spiegel, Murray, R.: *Analise vetorial*, Mcgrawn Hill do Brasil.volume 4, São Paulo, 1980.

[50] Tiersten, H. F.:*Linear Piezoelectric Plate Vibrations*,New York, Plenum Press, 1969.

[51] Valasek, Joseph: *Properties of Rochelle Salt Related to the Piezoelectric Effects*, Physical Review, v.20, n.6, p.639-664, 1922.

[52] Valasek, Joseph: *Dielectric Anomalies in Rochelle Salt*, Physical Review, v.24, n.5, p.560-568, 1924.

Apêndice A

O Problema de Ponto de Sela

Podemos verificar a existência de valores extremos e de ponto de sela nos problemas piezoelétricos estacionários através dos seguintes métodos: o método variacional de Euler-Lagrange, o teorema de Rabionowitz ou ainda o teorema variacional de Ekeland.

1.1 O Método Variacional de Euler-Lagrange.

O cálculo variacional descreve o método de Euler-Lagrange para a obtenção de pontos criticos de um funcional.

$$\pounds : \mathbf{M} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbf{M}$ pode ser um conjunto de números, funções, curvas, superfícies, volumes, munido de alguma topologia.

Uma teoria geral que permite solucionar problemas gerais foi desenvolvida por Euler e Lagrange. Para uma classe especial de funcionais, a primeira condição necessária que a função minimação tem que satisfazer é conhecida como equação de Euler-Lagrange para funcionais.

$$\pounds'(u)=0,$$

onde $\pounds'$ é a derivada de Frechet de $\pounds$.

O "Método Direto"do Cálculo das Variações introduz Equações Diferenciais Parciais (EDPs) no cálculo das variações e consiste basicamente na determinação de zeros de uma equação do tipo Euler-Lagrange

$$\pounds' u = 0 \tag{A.1}$$

onde $£' : X \to X$ é uma aplicação entre espaços de Banach, $£ : X \to \mathbb{R}$é um funcional diferenciável no sentido de Frechet. A equação (A.1) é equivalente a:

$$\langle £'(u), \nu \rangle = 0 \ \forall \nu \in X \tag{A.2}$$

um ponto crítico de $£$ é solução de (A.2) e o valor de $£$ em u é um valor crítico de $£$.

Para se obter os valores críticos do funcional utilizamos a teoria dos pontos críticos, sintetizado pelo seguinte teorema

Teorema A.1 *: Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $£ : X \to \mathbb{R}$ é um funcional satisfazendo as condições:*

1- $£$ é fracamente semicontínua inferiormente;

2- $£$ é coerciva, isto é, $£(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$

então $£$ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que$£(u_0)$=$\inf_X £$

Teorema A.2 *: Seja E um espaço de Banach real tal que E=$V \bigoplus X$, onde V é de dimensão finita. Suponha $£ \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisfazendo a condiçao de Palais-Smale(PS)e:*

1- Existe uma vizinhança limitada, D de 0 em V e uma constante α tal que $£|_{\partial D} \leq \alpha$ $£$ é fracamente semicontínua inferiormente;

2- Existe uma constante $\beta > 0$ tal que $£|_X \geq \beta$. Então $£$ possui um valor crítico $C \geq \beta$. Além disso C pode ser caracterizado como:

$$C = \inf_{S \in \Gamma} \max_{u \in S} £(u)$$

onde

$$\Gamma = \{S = h(\overline{D})|_h \in C(\overline{D}, E) \ e \ h = id, \ na \ \partial D\}$$

■

1.2 Teorema de Rabionowitz.

Teorema A.3 *(Teorema do ponto de sela): Seja X=$V \bigoplus W$ um espaço de Banach, de modo que $dimX < \infty$, e seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que:*

$$a = \max_{\partial D} \phi < \inf_{W} \phi \equiv b,$$

então

$$C = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} \phi(h(u))$$

é um valor crítico de ϕ com $C \geq b$, onde

$$\Gamma = \{h \in C(\overline{D}, X); h(u) = u, \ \forall u \in \partial D\}$$

Preliminares:Definido o operador linear

$$Lu = u - \lambda_K S(u),$$

segue que

$$\phi(u) = \tfrac{1}{2}(Lu, u)_{H^1(\mathbb{R}^n)} - \int_{\mathbb{R}^n} G(x, u)dx,$$

agora, vamos fixar a seguinte decomposição ortogonal de $X = H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$X = X_- \bigoplus X_0 \bigoplus X_+$$

onde

$$X_0 = N_{\lambda_K},$$

$$X_- = N_{\lambda_1} \bigoplus N_{\lambda_2} \bigoplus ... \bigoplus N_{\lambda_{K-1}},$$

$$X_+ = N_{\lambda_{K+1}} \bigoplus N_{\lambda_{K+2}} \bigoplus ...$$

assim obtemos os seguintes resultados

Proposição A.1 *: Se $u \in X_0$, então $(L(u), u)_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0$*

Proposição A.2 *: Se $u \in X_-$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(L(u), u)_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq -\alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido negativo em X_-*

Proposição A.3 *: Se $u \in X_+$, então existe $\alpha > 0$ tal que $(L(u), u)_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha \|u\|^2$, ou seja, L é definido negativo em X_+*

Teorema A.4 *:Por [47] Supõem-se válidas as condições (1) e ($g\overline{2}$). Então,*

(a) $\phi(u) \to -\infty$ quando $\|u\| \to +\infty; u \in X_-$,

(b) $\phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty; u \in X_0 \bigoplus X_+$.

Mostraremos no que segue, que ϕ satisfaz a condição (PS), isto é, dada uma sequência $((u_n \subset H^1(\mathbb{R}^n))$ com

$$|\phi(u_n)| \leq C \; e \; \phi(u_n) \to \infty$$

Temos que (u_n) *possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração: De fato, sendo

$$\phi(u_n) = \frac{1}{2}(Lu_n, u_n)_{(H^1 \mathbb{R}^n)} - \int_{\mathbb{R}^n} G(x, u_n) dx,$$

então

$$\left| \phi'(u_n)v \right| = \left| (Lu_n, v)) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u_n) v dx \right| \tag{A.3}$$

Além disso,

$$|\phi'(u_n)v| \leq \|\phi'(u_n)\| \|v\|$$

de onde temos

$$|\phi'(u_n)v| \leq \|v\| \; \forall v \in H_1 \mathbb{R}^n,$$

para n suficientemente grande, pois

$$\phi'(u_n) \to 0 \Leftrightarrow \|\phi'(u_n)\| \to 0$$

Logo

$$\|\phi'(u_n)\| \leq 1.$$

Agora, nosso próximo passo é mostrar que

$$u_n = P_0 u_n + P_- u_n + P_+ u_n$$

é limitada. Observe que

(i) se $v = P_+ u_n$, substituindo em (A.3) segue

$$|\phi'(u_n) P_+ u_n| = |(Lu_n, P_+ u_n)) - \int_{\mathbb{R}^n} g(x, u_n) P_+ u_n dx|$$

note que

$$(Lu_n, P_+ u_n) = (L(P_- u_n) + L(P_0 u_n) + L(P_+ u_n), (P_+ u_n)) = (L(P_+ u_n), P_+ u_n)$$

daí, usando o fato de L ser positivo definido em X_+ temos

$$(Lu_n, P_+ u_n) = (L(P_+ u_n), P_+ u_n) \geq \alpha \|P_+ u_n\|^2$$

Além disso,

$$\|P_+u_n\| \geq |\phi'(u_n)P_+u_n| \geq |(Lu_n, P_+u_n)| - |\int_{\mathbb{R}^n} g(x,u_n)P_+u_n dx|$$

o que implica,

$$\|P_+u_n\| \geq \alpha\|P_+u_n\|^2 - \|P_+u_n\|_{1,Z}$$

Teorema A.5 *: Se $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então vale a imersão contínua*

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, hdx)$$

para $p \in [1, 2^*]$ se $N \geq 3$.

do teorema (4.4) temos

$$\|P_+u_n\| \geq \alpha\|P_+u_n\|^2 - C\|P_+u_n\|$$

portanto $\|P_+u_n\|$ é limitada

(ii) Usando raciocinio semelhante, considerando $v{=}P_-u_n$ em (A.3) podemos concluir que $\|P_0u_n\|$ é limitada. veja que pela ortogonalidade das projeções temos

$$\|u_n\|^2{=}\|P_0u_n\|^2 + \|P_-u_n\|^2 + \|P_+u_n\|^2,$$

mostrando que (u_n) é limitada. sabemos que

$$\phi'(u)v{=}\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla u\nabla(v) + uv)dx - \psi'(u)v;\ u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

onde

$$\psi(u){=}\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\lambda_k}{2}u^2h + G(x,u))dx$$

logo

$$(\nabla\phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^n)}{=}(u,v)_{H^1(\mathbb{R}^n)} - (\nabla\psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

assim,

$$(\nabla\phi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^n)}{=}(u - \nabla\psi(u), v)_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

e consequentemente,

$$\nabla\phi(u){=}u - \nabla\psi(u)$$

considerando $T(u) = \psi(u)$ temos

$$\nabla\phi(u)=u - T(u)$$

portanto

$$\nabla\phi(u_n)=u_n - T(u_n)$$

o que implica,

$$u_n=\nabla\phi(u_n) + T(u_n)$$

Agora, sendo $T : H^1(\mathbb{R}^n) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ compacto, existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que:

$$T : (u_{n_j}) \to u \; quando \; u_j \to \infty$$

e usando o fato de que

$$\phi'(u_n) \to 0 \Leftrightarrow \|\phi'(u_n)\| \to 0 \Leftrightarrow \nabla\phi(u_n) \to 0 \Leftrightarrow \nabla\phi(u_n) \to 0$$

passando ao limite em

$$u_n=\nabla\phi(u_n) + T(u_n)$$

encontramos

$$u_{n_j} \to u \; quando \; u_j \to \infty$$

mostrando que ϕ satisfaz a condição (PS).

Finalmente, temos que $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale e usando a proposição podemos aplicar o teorema do ponto de sela com

$$V=X_-, \; W=X_0 \bigoplus X_+$$

e garantir a existência de um ponto crítico para ϕ, isto é, uma solução fraca do problema (P_1)

1.3 Princípio Variacional de Ekeland.

Este princípio geral é utilizado para obter múltiplos resultados variacionais. O princípio variacional proposto por Ekeland parte da suposição que f é uma função real, semicontínua inferiormente, definida no espaço métrico (M, d) e tal que $f(x) \geq \beta$ para todo $x \in M$. O princípio consiste na construção de sucessões minimizantes com algum controle, mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$ construir sucessões verificando:

$$\inf_{x \in M} \{f(x) + \varepsilon\} \geq (x_\varepsilon)$$

e

$$f(y) \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon d(x_\varepsilon, y)$$

O significado geométrico do princípio de Ekeland pode entender-se dizendo que para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar x_ε no qual o valor do funcional está próximo do ínfimo a menos de ε e o grafo de f está acima do cone de abertura ε.

Teorema A.6 *: Seja M espaço métrico completo e seja*

$$\phi : M \to (-\infty, +\infty)$$

uma função propria tal que,

i) $\phi(y) \geq \beta$,

ii) ϕ *inferiormente semicontínua,*

dado $\varepsilon > 0$ *e* $u \in M$ *tal que,*

$$\phi(u) \leq \inf_M \varphi + \varepsilon,$$

então existe $v \in M$ *tal que:*

1. $\phi(u) \geq \phi(v)$,
2. $d(u, v \leq 1)$,
3. *Se* $v \neq w \in M$ *então* $\phi(w) \geq \phi(v) - \varepsilon d(v, w)$

Demonstração:

Fixo $\varepsilon > 0$, definimos a seguinte relação de ordem sobre M, dizemos que

$$w \leq v \text{ se e somente se } \phi(w) + \varepsilon d(w, v) \leq \phi(v)$$

consideremos $u_0{=}u$ e por recorrência definimos a sucessão $\{u_n\}$, como segue: para $n \in \mathbb{N}$ tomamos:

$$S_n{=}\{w \in M : w \leq u_n\},$$

escolhendo $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{Sn} + \tfrac{1}{n+1},$$

obtemos que $u_{n+1} \leq u_n$ e $S_{n+1} \subset S_n$. A semicontinuidade inferior de ϕ implica que S_n é um fechado. Agora, se $w \in S_{n+1}$, teremos $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ e então:

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq \phi(u_{n+1}) - \phi(w) \leq \inf_{S_n} \phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \phi {=} \frac{1}{n+1}$$

quer dizer, chamando

$$diametro(S_{n+1}){=}\delta_{n+1},$$

temos que

$$(\delta_{n+1}) \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)},$$

portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{n+1}{=}0.$$

Como M é completo,

$$\bigcap_{u=1}^{\infty} S_n{=}\{v\} \; para \; algum \; v \in M$$

em particular, $v \in S_0$, logo $v \leq u_0{=}u$, quer dizer,

$$\phi(v) \leq \phi(u) + \varepsilon d(u, v) \leq \phi(u)$$

e:

$$d(u, v) \leq \frac{\phi(u) - \phi(v)}{\varepsilon} \leq \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} \inf \phi & + \varepsilon - & \inf \phi \\ M & & M \end{pmatrix} {=} 1$$

então, $d(u, v) \leq 1$

Para obter (A.3) suporemos que $w \leq v$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, $w \leq u_n$, quer dizer,

$$w \in \bigcap_{n+1}^{\infty} S_n$$

e assim w=v

Portanto concluimos que se $w \neq v$ então $\phi(w) \geq \phi(v) - \varepsilon d(v,w)$

Corolário A.1 *: Seja χ um espaço de Banach e $\varphi : \chi \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e inferiormente cotada em χ. Então para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $u \in \chi$ tal que:*

$$\varphi(u) \leq \inf_{\chi} \phi + \varepsilon$$

existe $v \in \chi$ verificando:

1) $\varphi(v) \leq \varphi(u)$

2) $\|u - v\|_{\chi} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

3) $\|\varphi'(v)\|_{\chi'} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

Demonstração*:*

No teorema (4.6) tomando M=χ, ϕ=φ, $\varepsilon > 0$, $\lambda = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ e $d = \| \cdot \|$. Obtemos que $v \in \chi$ tal que:

$$\varphi(v) \leq \varphi(u)$$

$$\|u - v\|_{\chi} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

e para todo $w \neq v$

$$\varphi(w) \geq \varphi(v) - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u - v\|$$

tomando em particular

$$w = v + th \text{ com } t > 0 \text{ e } h \in \chi, \ \|h\| = 1$$

então

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{\frac{1}{2}} t$$

que implica

$$-\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \langle \varphi'(v), h \rangle \text{ para todo } h \in \chi, \ \|h\| = 1$$

logo

$$\|\varphi'(v)\|_{\chi'} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

Corolário A.2 : *Se χ e ψ são como no corolário (4.1), então, para toda sucessão minimizante de φ, $\{u_k\} \subset \chi$ tal que:*

1) $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$

2) $\|u_k - v_k\|_\chi \to 0 \;\; k \to \infty$

3) $\|\varphi'(v_k)\|_{\chi'} \to 0 \;\; k \to \infty$

Demonstração*:*

Se $\varphi(u_k) \to c = \inf_\chi \varphi$ *consideremos* $\varepsilon_k = \varphi(u_k) - c$ *se é positivo,* $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$ *se* $\varphi(u_k) = c$ *para* ε_k *tomamos a correspondente* v_k *que dá o corolário (4.1).*

1.4 Resolução de Problema de Ponto de Sela.

Aplicamos o lema da deformação para produzirmos teoremas relevantes na busca por pontos críticos

Teorema A.7 : *Seja X espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, limitado inferiormente, $v \in X$ e $\varepsilon, \delta > 0$. se*

$$\varphi(v) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$$

Então existe $u \in X$ tal que,

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq \inf_\chi \varphi + 2\varepsilon \\ \|\varphi'(u)\| < \dfrac{8\varepsilon}{\delta} \\ \|u - v\| < 2\delta. \end{cases}$$

Demonstração:

Tomemos $S = \{v\}$ e $c = \inf_\chi \varphi + \varepsilon$. Suponhamos, por absurdo, a tese falsa, isto é, que para todo $u \in \varphi^{-1}([c, c+\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$ tenhamos

$$\|\varphi'(u)\| \leq \frac{8\varepsilon}{\delta}$$

(note que estamos nas hipóteses do Lema da deformação)

$$\eta(1, v) \in \varphi^{c-\varepsilon}$$

contradição, pois $c = \inf_\chi \varphi$

Definição A.1 *Seja H Banach, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se qualquer seqüência $u_n \subset H$ tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0$$

possui uma subseqüência convergente.

Corolário A.3 *: Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitado inferiormente satisfazendo $(PS)_c$, com $c{=}\inf_X \varphi$, então toda seqüência minimizante para φ (ou seja v_n tal que $\varphi(v_n) \to c$) contem uma subseqüência convergente. Em particular existe $u \in X$ tal que $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi$:*

Demonstração*:*

Seja v uma seqüência minimizante. Fixado n, sejam

$$E_n{=}\max \frac{1}{n}, \varphi(v_n) - c, \delta_n{=}\sqrt{E_n}$$

Pelo teorema (4.7) existe $u_n \in X$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(u_n) \leq c + 2E_n \\ \|\varphi'(u_n)\| < \dfrac{8E_n}{\sqrt{E_n}} \qquad (A.4) \\ \|u_n - v_n\| < 2\sqrt{E_n}. \end{cases}$$

Como φ satisfaz $(PS)_c$, existe uma subseqüência $u_{n_k} \to u$ com $\varphi'(u){=}0$. Por (A.4), $v_{n_k} \to u$ e $\varphi'(u){=}c$

Teorema A.8 *(Brézis-Niremberg): Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\liminf_{\|u\|\to\infty}(u) \in \mathbb{R}$ então para todo $\varepsilon, \delta > 0$, e $R > 2\delta$, existe $u \in X$ tal que,*

$$\begin{cases} (A) c - 2\varphi \leq \varphi(u) \leq c + 2\varepsilon \\ (B) \|u\| > R - 2\delta \qquad (A.5) \\ (C) \|\varphi'(u)\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}. \end{cases}$$

Demonstração:

Suponhamos a tese falsa, isto é, para todo $u \in X$ que satisfaz (A) e (B), $\|\varphi'(u)\| < \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$.

ponhamos $S{=}X \setminus B(0, R)$, Pela definição de C, $\varphi^{c+\varepsilon} \cap S$ é limitado pois existe $(a_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(a_n) \overset{an\to\infty}{\longrightarrow} c$$

e $\varphi^{c-\varepsilon} \subset B(0, r)$ para r suficientemente grande pois caso contrário

$$\liminf \varphi \leq c - \varepsilon$$

Pelo item (iv) do lema da deformação dado

$$u \in \varphi^{c+\varepsilon} \cap S, \|\eta(1,u) - u\| \leq \delta$$

e do item (ii), $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \delta^{c-\varepsilon}$. Assim,

$$\|u\| \leq \|u - \eta(1,u)\| + \|\eta(1,u)\| < \delta + r$$

ou seja

$$\delta^{c+\varepsilon} \subset B(0, r+\delta)$$

que é uma contradição pois $\varphi^{c+\varepsilon} \cap S$ é ilimitado.

Corolário A.4 *: Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitado inferiormente. Se toda seqüência $(u_n) \subset X$ tal que $\varphi(u_n) \to c)$ e $\varphi'(u_n) \to c)$ é limitado, então $\varphi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$*

Demonstração*:*

Se a tese é falsa, existe uma seqüência $\|a_n\| \to \infty$ com $\varphi(a_n) < \infty$. Logo

$$c = \liminf_{\|u\| \to \infty} \varphi(u) \in \mathbb{R}$$

Pelo teorema anterior, existe uma seqüência (u_n) tal que

$$\varphi(u_n) \to c, \quad \varphi'(u_n) \to 0, \quad \|u_n\| \to \infty$$

Contradição, logo a tese é verdadeira.

No que se refere a soluções estacionárias dos problemas piezoelétricos, uma solução fraca do problema variacional P_1 também é solução do seguinte problema de ponto de sela

$$\begin{cases} \textit{encontrar } (\mathbf{u}, \varphi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \textit{ tal que} \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}, \varphi) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \mathbf{S}(\boldsymbol{v}, \psi). \end{cases} \tag{4.6}$$

onde

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, v) = \frac{1}{2} S_2((\boldsymbol{v}, \psi), (\boldsymbol{v}, \psi)) - \chi(\boldsymbol{v}, \psi), \ \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

usando as mesmas idéias que Ekeland-Teman [14] as seguintes conclusões se seguem

$$\begin{cases} fixando\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)\ a \text{ aplicação} \\ \psi \in H_0^1(\Omega) \to \mathbf{S}(\boldsymbol{v}, \psi) \text{ é } estritamente\ coerciva\ e \text{ semi-contínua } inferiormente. \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} fixando\ \psi \in H_0^1(\Omega)\ a \text{ aplicação} \\ \boldsymbol{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbf{S}(\boldsymbol{v}, \psi) \text{ é } estritamente\ convexa\ e \text{ semi-contínua } inferiormente. \end{cases} \tag{4.8}$$

caracterizando portanto que o funcional $\mathbf{S}(\cdot, \cdot)$ tem um ponto de sela sobre $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Apêndice B

Coeficiente de amortecimento de uma onda mecânica via ressonância piezoelétrica num cristal de Sal de Rochelle

Apresentamos o artigo "Coeficiente de amortecimento de uma onda mecânica via ressonância piezoelétrica num cristal de Sal de Rochelle"de autoria de Pedro Paulo Santos da Silva, Sanclayton G. C. Moreira e Petrus A. Alcantara Júnior (Departamento de Física, Universidade Federal do Pará).

RESUMO

Foi medido o coeficiente de amortecimento da onda mecânica que se propaga num cristal de Sal de Rochelle à temperatura ambiente, na fase ferroelétrica, usando uma configuração de 3 eletrodos. Apresentamos os resultados obtidos na faixa de freqüência de 100KHz a 400KHz aplicando um campo elétrico AC na direção [010].

1-INTRODUÇÃO

Uma das contribuições mais relevantes da ressonância piezoelétrica em cristais está na construção de transdutores, os quais tem uma vasta aplicação em setores como a ecografia e geração de imagens utilizando ondas ultrasônicas. Portanto, é importante, para fins de aplicação tecnológica, determinar a capacidade que um transdutor piezoelétrico possui de converter sinais elétricos em ondas mecânicas.

Em geral, quando uma onda se propaga através de um cristal ela interage com a rede transferindo parte de sua energia para os átomos que compõe a estrutura cristalina, de modo que as freqüências naturais de vibração são afetadas. O cristal utilizado neste trabalho para a determinação do coeficiente de amortecimanto da onda mecânica via ressonância piezoelétrica foi o Sal de Rochelle ($NaKC_4H_4O_6.4H_2O$). Medindo-se a amplitude ressonante em diversos pontos ao longo de uma das dimensões do cristal, para uma freqüência fixa quando se mantém a temperatura constante, obteve-se uma curva que representa o decaimento da amplitude com a distância. A análise gráfica dos resultados conduzem a um decaimento exponencial e o ajuste da curva permitiu a determinação do coeficiente de amortecimento da onda mecânica que se propaga através do cristal. A fixação da temperatura em 295K permitiu a observação do efeito de amortecimento quando o cristal encontra-se em sua fase ferroelétrica.

2- EXPERIMENTOS

2.1- PREPARAÇÃO DA AMOSTRA

a) Inicialmente o cristal foi cortado na forma aproximada de um paralelepípedo retângulo com dimensões K=2,2mm; L=5,7mm e M=11,8mm, para isso utilizou-se uma máquina de cortar cristais desenvolvida em nosso laboratório. Essa máquina possui como instrumento cortante um disco delgado de aço que executa movimento giratório com o auxílio de um sistema de polias acopladas a um motor. Para facilitar o corte utilizou-se uma mistura de óleo mineral lubrificante com pó de esmeril carburundum n^{o}1000 colocado sobre o fio do disco. A fixação do cristal para o corte foi feita em uma superfície plana de metal usando uma cola facilmente removível com acetona ou óleo de banana. Após o corte, os desbastes das dimensões foram feitos usando lixa de aço e polidores de cristais, também de aço, com sulcos retificados com precisão, cujas bordas formam um ângulo de 90^o para assegurar um perfeito paralelismo entre as faces opostas da amostra. Após este procedimento as dimensões finais da amostra eram A=1,8mm; B=4,9mm e C=11,1mm, obtendo-se assim uma placa com área maior perpendicular ao eixo [010]que é o eixo de maior piezoeletricidade do Sal de Rochelle.

b) A preparação do cristal para receber estímulos elétricos externos e obter respostas e estes estímulos foi feita usando um sistema de três eletrodos. Este sistema foi construído basicamente da seguinte forma:

1) Primeiramente pintamos duas regiões nas extremidades de maior área do cristal com tinta eletrocondutora, de tal modo que entre elas se formou uma região de descontinuidade

(fig.1-a).

2) Em cada uma das regiões adaptamos um fio fino e flexível de cobre colado ao cristal com a própria tinta, que servem para conduzir os sinais externos ao cristal (entrada) e detectar as respostas (saída), por simplicidade chamaremos de eletrodo 1 à região que recebe o sinal externo e de eletrodo 2 para a região onde são recebidos os sinais de resposta (fig..1-b).

3) A superfície oposta à face do cristal que contem os eletrodos 1 e 2 foi completamente pintada com a mesma tinta e um fio de cobre idêntico aos outros dois foi colado a essa região, com o auxílio da tinta eletrocondutora. Essa região será chamada de eletrodo 3 e sua finalidade é produzir o aterramento do sistema.

2.2- MONTAGEM EXPERIMENTAL

Após a preparação da amostra o sistema foi acondicionado no interior de um cilíndro metálico de cobre, com os eletrodos 1, 2 e 3 conectados aos terminais de dois cabos coaxiais. Um termopar de Cu-Constantan serviu para a leitura da temperatura do cristal no interior do cilíndro, o qual foi hermeticamente fechado para reduzir a influência de ruídos externos.

A montagem experimental foi composta de um amplificador sensível à fase (Lock-in), dois criostatos, um deles contendo o cilíndro blindado com a amostra e um micro computador com uma interface apropriada para controlar a experiência. A amostra foi estimulada pelo oscilador interno do amplificador de tal modo que um sinal AC aplicado ao eletrodo 1 produziu uma resposta no eletrodo 2 lida em direct channel, para leitura somente de magnitude. O registro desse sinal e análise gráfica de magnitude x freqüência foi feita no micro computador (fig.2).

A determinação do coeficiente de amortecimento da onda mecânica que se propaga através do cristal consistiu de duas etapas distintas:

1) Na primeira etapa obtivemos os espectros de ressonância (fig.3) através da estimulação do eletrodo 1 pelo oscilador interno do amplificador com um sinal de entrada com amplitude fixa de 1V e varredura em freqüência no intervalo entre 100KHz e 400KHz. Nessa etapa a amostra foi mantida na temperatura constante de 295K, garantindo resultados, tanto no aspecto quantitativo quanto no qualitativo, na fase ferroelétrica ($255K < T < 297K$).

2) Na segunda etapa a análise dos espectros de ressonância permitiu que amplitudes

do sinal de saída fossem tabelados para as freqüências de 100KHz, 200KHz, 300KHz e 380KHz, sendo que, para cada uma das medidas obtidas, levou-se em conta a distância entre os eletrodos 1 e 2. Em seguida esses valores foram traçados em curvas de amplitude versus distância entre os eletrodos, representados nas figuras 4; 5; 6 e 7, a leitura da temperatura da amostra foi feita com o termopar Cu-Constantan.

3- RESULTADOS

A ressonância piezoelétrica foi observada pela aplicação de um campo elétrico AC na direção [010] que provoca vibração mecânica no cristal. A varredura em freqüência permitiu observar as ressonâncias de maior amplitude (fig.3)

No Sal de Rochelle os efeitos mecânicos não ocorrem de forma isolada, pois estão sempre acoplados a uma polarização elétrica. As freqüências ressonantes e anti-ressonantes para todas as vibrações na placa do cristal excitado pelo campo elétrico alternado na direção [010] dependem do modo de vibração, das dimensões e do formato da placa do cristal. Essa dependência é da forma

$$f = [a + \tfrac{b}{T-T_c}]^{-\frac{1}{2}}$$

onde a e b são constantes que dependem do modo de vibração e T_c é o ponto de Curie do cristal.

A medida dos sinais de saída estão representados pelos pontos cheios nas figuras 4; 5; 6 e 7 e as curvas de ajuste foram feitas através de uma função exponencial do tipo:

$$y = y_0 + A.\exp[-\lambda(x - x_0)]$$

onde λ representa o coeficiente de amortecimento da curva; A é a amplitude do sinal inicial e y_0 uma constante de ajuste do sinal de fundo

4-CONCLUSÃO

Como o campo elétrico aplicado no eletrodo 1 é alternado, o cristal vibra e ressona em determinadas freqüênciasque dependem:

(i) das dimensões do cristal;

(ii) dos íons que compõe o cristal;

(iii) da distribuição desses íons na célula primitiva.

O conjunto de ressonâncias obtidas são portanto característicos da fase em que o cristal se encontra, sofrendo alterações qualitativas somente no momento em que o cristal experimenta uma transição de fase. Dessa forma o procedimento usado permite a obtenção dos espectros de ressonância do cristal através da varredura em freqüência, pré-fixando os valores inicial e final no Lock-in e fixando a temperatura ($\approx 295K$), permitindo também o acompanhamento do amortecimento da onda mecânica que se propaga transversalmente à direção de vibração do campo elétrico AC aplicado na fase ferroelétrica. Os resultados obtidos possibilitam a determinação do coeficiente de amortecimento da onda mecânica via ressonância piezoelétrica, sendo que, para atingir esse objetivo, levou-se em conta a variação da distância entre os eletrodos 1 e 2 em cada medida.

5- REFERÊNCIAS

W. P.Mason [33,34 e 35]; H. Müeller [40, 41,42 e 43] e Hidaka [21 e 22]

Apêndice C

Figuras, Gráficos e Tabelas

Figuras I: Sistema de três eletrodos

Figuras II: Esquemas Utilizados

Gráficos I: Espectros de Ressonância

Gráficos II: Coeficiente de Amortecimento

Gráficos III: Coeficiente de Amortecimento

TABELA I: Freqüência e Magnitude

Apêndice D

Definições e Teoremas Básicos

As definições e Teoremas básicos usados no trabalho estão aqui enunciados.

Definição D.1 *(Ver [30]): Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição D.2 *(Ver [6]): Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto escalar (u, v) e que é completo com a norma $(u, u)^{\frac{1}{2}}$.*

Definição D.3 *(Ver [6]): Chama-se Base Hilbertiana a toda sequência (e_n) de elementos de H tais que:*

i) $|e_n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $(e_n, e_m) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \neq n$*;*

ii) O espaço vetorial gerado pelos vetores (e_n) é denso em H.

Definição D.4 *(Ver [6]): Seja $(E_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de subespaços fechados de H. Diz-se que H é uma soma Hilbertiana dos (E_n) e se escreve $H = \bigoplus_n E_n$ se:*

i) Os subspaços E_n são ortogonais dois a dois, isto é,

$$(u, v) = 0, \ \forall u \in E_m, \ \forall v \in E_n, \ m \neq n;$$

ii) O espaço vetorial gerado pelos (E_n) é denso em H.

Teorema D.1 *(Ver [6]): Suponhamos que H é uma soma Hilbertiana dos $(E_n)_{n \geq 1}$. Seja $u \in H$ e seja $u_n = P_{E_n} u$, onde P_{E_n} é a projeção de u sobre E_n. Então, verificamos que* *a)* $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *isto é,* $u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k}$;

b) $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ *(Desigualdade de Bessel-Parseval).*

Reciprocamente, dada uma sequência (u_n) *em* H *tal que* $u_n \in E_n$, $\forall n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, *então a série* $\sum_n u_n$ *é convergente e* $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *verifica* $u_n = P_{E_n} u$.

Observação D.1 *(Ver [6]): Resulta do teorema anterior que se* (e_n) *é uma base Hilbertiana, então todo* $u \in H$ *pode ser escrito da seguinte forma*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \ \text{com} \ |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Inversamente, dada uma sequência $(\alpha_n) \in l^2$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *converge para um elemento denotado por* u *verificando*

$$(u, e_n) = \alpha_n \quad e \quad |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

Teorema D.2 *(Ver [6]): Existe uma base Hilbertiana* $(e_n)_{n\geq 1}$ *em* $L^2(\Omega)$ *e uma sequência* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *de números reais com* $\lambda_n > 0$ *e* $\lambda_n \to \infty$ *tais que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$$

e

$$-\Delta e_n = \lambda e_n \quad em \quad \Omega.$$

Diz-se que os (λ_n) *são os valores próprios de* $-\Delta$ *e que as* (e_n) *são as funções próprias associadas.*

Observação D.2 *(Ver [6]): Nas hipóteses do teorema acima, se demonstra que* $e_n \in L^{\infty}(\Omega)$. *Por outro lado, se* Ω *é de classe* C^{∞}, *então* $e_n \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Teorema D.3 *(Ver [6]): Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Definição D.5 *(Ver [6]): Se diz que uma forma bilinear* $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ *é:*

i) contínua se existe uma constante C *tal que* $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \forall\, u, v \in H$.

ii) coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ *tal que* $a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall\, v \in H$.

Teorema D.4 *(Ver [6])(Teorema de Lax-Milgran): Seja V um espaço de Hilbert e $a(\cdot,\cdot)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva . Então, para todo $\varphi \in V'$, existe um único $u \in V$ tal que $a(u,v) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$.*

Definição D.6 *(Ver [6])(Base de Schauder): Diz-se que $(e_n)_{n\geq 1}$ é uma base de Schauder do espaço de Banach E, se para todo $u \in E$, existir uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ em $\mathbb{R}$, única, tal que $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.*

Teorema D.5 *(Ver [27]): Seja E um espaço de Banach. Então E é reflexivo se, e somente se E' é reflexivo.*

Vamos agora recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ que foram utilizados neste trabalho.

Teorema D.6 *(Ver [29])(Teorema de Weiertrass): Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema D.7 *(Ver [29])(Teorema da Aplicação Inversa): Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ de classe C^k $(k \geq 1)$ definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Se $x \in \Omega$ é tal que $f'(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(x,\delta) \subset \Omega$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(x)$.*

Teorema D.8 *(Ver [29])(Teorema da função implícita): Dada a função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^k(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0,y_0) = c$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0 : \delta) \subset \mathbb{R}^N$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:*

1) $B \times \overline{J} \subset U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, $\forall\ (x,y) \in B \times \overline{J}$;

2) para todo $x \in B$ existe um único $y = \varepsilon(x)$ e J tal que $f(x,y) = f(x,\varepsilon(x)) = c$.

A função $\varepsilon : B \to J$, assim definida é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varepsilon(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varepsilon(x))}.$$

Teorema D.9 *(Ver [29])(Teorema de Borel Lebesgue): Seja* $K \subset \mathbb{R}^N$ *um compacto. Toda cobertura aberta de* $K \subset \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *admite uma subcobertura finita*

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i}.$$

Teorema D.10 *(Ver [29])(Teorema do Valor Médio): Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *diferenciável no aberto* $U \subset \mathbb{R}^N$*. Se o segmento de reta* $[a, a+v]$ *estiver contido em* U *e existir* $M > 0$ *tal que* $|grad\ f(a+tv)| \leq M$ *para* $t \in [0,1]$ *então,*

$$|f(a+v) - f(a)| \leq M|v|.$$

Teorema D.11 *(Teorema de Sard): Seja* $U \subset \mathbb{R}^M$ *e seja* $f \in C^k(U, \mathbb{R}^N)$*. Se*

$$K > max\{0, M-N\},$$

então o conjunto dos valores singulares de f *tem medida 0 em* $\mathbb{R}^N$*.*

Teorema D.12 *(Ver [31])(Teorema da extensão de Tietze): Dada uma função real contínua* $f : X \to \mathbb{R}$*, definida num subconjunto fechado* $X \subset \mathbb{R}^N$*, existe uma função* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $F|_X = f$*.*

Teorema D.13 *(Ver [20])(Teorema da Divergência): Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio cuja fronteira* $(\partial\Omega)$ *é uma união finita de curvas suaves . Seja* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\overline{\Omega}$*. Então,*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla.F dxdy = \int_{\partial\Omega} F.\eta dS,$$

onde η *é a normal externa unitária à* $\partial\Omega$*.*

Teorema D.14 *(Ver [20])(As identidades de Green): Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds, \tag{D.1}$$

e

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\nabla v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds, \tag{D.2}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ *é a derivada direcional na direção da normal unitária externa* $\hat{n}$*.*

Agora apresentaremos alguns resultados sobre Teoria da medida e Espaços de Sobolev que foram utilizados neste trabalho.

Teorema D.15 *(Ver [5])(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções integráveis em* Ω*, convergente quase sempre para uma função* f *mensurável. Se existir uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *quase em toda parte (q.t.p.) para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e tem-se*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Lema D.1 *(Ver [5])(Lema de Fatou): Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que:*

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$*,* $f_n(x) \geq 0$ *q.t.p. em* Ω*;*

ii) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$*.*

para cada $x \in \Omega$ *tem-se que* $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$*. Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int f \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n.$$

Teorema D.16 *(Ver [6]): Seja* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$*, e* $f \in L^P(\Omega)$*, onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $1 \leq p \leq \infty$*, tais que* $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$*. Então, existe uma subsequência* (f_{nk}) *tal que:*

i) $f_{nk}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

ii) $|f_{nk}(x)| \leq h(x)$*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, q.t.p. em* Ω*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Teorema D.17 *(Ver [5])(Desigualdade de Hölder): Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, onde* $p \geq 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema D.18 *(Ver [15])(Desigualdade de Young): Seja* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}(a, b > 0). \tag{D.3}$$

onde $a, b > 0$*. A igualdade só ocorre se, e somente se,* $a^p = b^q$*.*

Teorema D.19 *(Ver [15])(Desigualdade de Young com* ϵ*): Seja* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad (a, b > 0,\ \epsilon > 0) \tag{D.4}$$

onde $a, b > 0$*,* $\epsilon > 0$*, para* $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$*.*

Teorema D.20 *: Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^N$. *Então,*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y) \geq \begin{cases} C_p|x-y| & , se\ p \geq 2 \\ C_p\dfrac{|x-y|^p}{1+|x|^p+|y|^p} & , se\ 1 < p < 2 \end{cases}$$

onde C_p *é uma constante positiva.*

Definição D.7 *(Ver [6])(Convergência Forte): Seja* X *um espaço vetorial normado e* $(x_n) \subset X$. *Dizemos que* x_n *converge forte em* X *se existe* $x \in X$ *com* $\|x_n - x\| \to 0$, *quando* $n \to +\infty$. *Neste caso,* x *é o limite de* x_n *em* X.

Definição D.8 *(Ver [6])(Convergência fraca): Seja* X *um espaço vetorial normado e* $(x_n) \subset X$. *Dizemos que* x_n *converge fraco em* X, *se existe* $x \in X$ *verificando:*

$$f(x_n) \to f(x) \ \ em \ \ \mathbb{R}, \ \forall f \in X'.$$

Neste caso, x *é chamado limite fraco de* x_n *em* X, *e denotamos* $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema D.21 *(Ver [6]): Seja* (x_n) *uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe* $x \in X$ *tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \ \ em \ \ X.$$

Então,

a) O limite fraco x *de* (x_n) *é único;*

b) Toda subsequência $(x_{nj}) \subset (x_n)$ *converge para* x;

c) A sequência (x_n) *é limitada.*

Teorema D.22 *(Ver [6]): Seja* (x_n) *uma sequência em* X. *Então,*

a) Se $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$;

b) Se $x_n \rightharpoonup x$, *então* $\|x_n\|$ *é limitado e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

c) Se $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* X', *então* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Teorema D.23 *(Ver [6]): Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e seja* (x_n) *uma sequência limitada. Então, existe* $(x_{nj}) \subset (x_n)$ *que converge fracamente em* X, *isto é, existe* $x \in X$ *tal que*

$$x_{nj} \rightharpoonup x \ \ em \ \ X.$$

Definição D.9 *(Ver [6])(Convergência fraca - $\star$): Dizemos que $(f_n) \subset X'$ converge fraco-$\star$, se existir $f \in X'$ tal que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad em \quad \mathbb{R}, \forall x \in X.$$

Notação: $\quad f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X'.

Teorema D.24 *(Ver [6]): Seja $(f_n) \subset X'$. Então:*

i) Se $f_n \to f$ em X', então $f_n \rightharpoonup f$ em X';

ii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em X', então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X';

iii) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X', então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;

iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \rightharpoonup x$, então $f_n(x_n) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$.

Definição D.10 *(Ver [1])(Imersão contínua): Dizemos que o espaço normado $(X, \| \ \|_x)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \| \ \|_y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

i) X for subespaço vetorial de Y;

ii) A aplicação identidade

$$\begin{array}{rccl} i: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \ \forall x \in X$.

Teorema D.25 *(Ver [1])(Imersões de Sobolev): As seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \quad ; \quad \quad 1 \leq s < \infty \quad \quad para \quad N=1 \quad ou \ N = 2 \end{cases}$$

Definição D.11 *(Ver [27])(Operador Linear Compacto): Sejam X e Y espaços métricos. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição D.12 *(Ver [1])(Imersão compacta): Dizemos que o espaço normado X está imerso compactamente no espaço Y e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{array}{rcl} i: X & \to & Y \\ x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é um operador linear compacto.

Teorema D.26 *(Ver [1])(Imersão compacta de Rellich-Kondrachov): Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, as seguintes imersões são compactas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \;\; ; \;\; 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad \textit{para} \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \;\; ; \qquad 1 \leq s < \infty \qquad \textit{para} \quad N=1 \quad \textit{ou } N = 2 \end{cases}$$

Teorema D.27 *(Ver [15])(Desigualdade de Sobolev): Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$. Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq N$. Então,temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$. A constante C depende de $p, q, N e \Omega$.

Teorema D.28 *(Ver [37]): Considere dois subconjuntos K e F do $\mathbb{R}^N$ disjuntos, sendo K compacto e F fechado. Então, existe uma função teste φ no $\mathbb{R}^N$ tal que*

$$\varphi(x) = 1 \textit{ em } K,\; \varphi(x) = 0 \textit{ em } F,\; e\; 0 \leq \varphi(x) \leq 1.$$

Teorema D.29 *(Ver [1]): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $(N \geq 2)$ e $1 < p < +\infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$, se $kp < N$ (se $kp = N$, podemos tomar $1 \leq q < +\infty$); Além disso, se Ω é limitado essa imersão é compacta quando $q < \frac{Np}{N-kp}$.

(ii) $W^{k,p} \hookrightarrow C^{m,\lambda}$, se $kp > N$, onde k é um inteiro verificando $m < k - \frac{N}{p} \leq m + 1$ e λ é um real satisfazendo $0 < \lambda \leq k - m - \frac{N}{p} = \lambda_0$, se $\lambda_0 < 1$, e $0 < \lambda < 1$, se $\lambda_0 = 1$.

Teorema D.30 *(Ver [6]) : Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Verifica-se que:*

(i) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, então $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [p, +\infty)$,

(iii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

com injeções contínuas.

Teorema D.31 *(Ver [2]): Suponha que* $h \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *e que* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *seja solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x) & ,\Omega \\ \quad u = 0 & ,\partial\Omega \end{cases}. \tag{D.5}$$

Então, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *e existe um* $C > 0$ *(independente de u) tal que*

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||f||_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema D.32 *(Ver [20]): Seja* $0 < \alpha \leq 1$ *e suponha que* $u \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ *seja uma solução fraca de (D.5) com* $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. *Então* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

Teorema D.33 *(Ver [15])(Princípio de Máximo forte): Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $c \leq 0$ *em Om. Suponha também que* Ω *é conexo.*

i) Se

$$Lu \leq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u atinge um máximo não-negativo em um ponto interior do conjunto $\overline{\Omega}$, *então u é constante em* Ω;

ii) Analogamente, se

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u atinge um mínimo não-negativo em um ponto interior do conjunto $\overline{\Omega}$, *então u é constante em* Ω.

Teorema D.34 *(Ver [6]): O problema*

$$\begin{cases} -\Delta v &= & v^q & ,\Omega \\ \quad v &> & 0 & ,\Omega \\ \quad v &= & 0 & ,\partial\Omega \end{cases},$$

possui uma única solução positiva.

Apêndice E

Lista de Símbolos

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int_\Omega f$: denota $\int_\Omega f(x)dx$,

$|f|_s = |f|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$|f|_{s(B_r(x))} = |f|_{L^s(B_r(x))} = \left(\int_{B_r(x)} |f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$\|f\| = \|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$\langle u, v\rangle$ *ou* $((u, v))$: produto interno no $\mathbb{R}^N$,

$< f, v >$: par de dualidade, ou seja, $f(v)$.