

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

**Aplicação do método de fibração na resolução
de um problema elíptico**

Marco Antonio de Oliveira Freitas

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marco Antonio de Oliveira Freitas

**Aplicação do método de fibração na resolução
de um problema elíptico**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM

2010

Freitas, Marco Antonio de Oliveira

Aplicação do método de fibração na resolução de um problema elíptico / (Marco Antonio de Oliveira Freitas); orientador, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. - 2010.

92 f. il. 28cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2010.

1.Equações Diferenciais Elípticas. I .Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II.Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título

CDD 22. ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marco Antonio de Oliveira Freitas

Aplicação do método de fibração na resolução de um problema
elíptico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará, como pré-requisito para a ob-
tenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 12 de maio de 2010.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado
Departamento de Matemática - UNB

Prof. Dr. João Valcir da Cunha Farias
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Faculdade de Matemática - UFPA

Dedicatória

*Dedico esta dissertação aos meus pais Darcy e Wilson
(in memoriam).*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo que tem me proporcionado, pela fortaleza, pela prudência, pelo otimismo e principalmente pela vida.

Ao Prof. Dr. Giovany Figueiredo pela atenção e apoio durante todo processo de orientação.

Aos professores Marcelo Furtado, Valcir Farias e Dilberto Júnior por terem aceito gentilmente participar da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Paulo Marques e Rúbia Nascimento por suas valiosas contribuições.

Aos meus amigos Gerson Pinheiro, Roberto Andrade, Daniel Ramoa, João Carlos, Pedro Paulo e Paulo Sérgio pela grande amizade, apoio e incentivo no desenvolvimento deste trabalho.

Aos demais colegas Gelson, Elifaleth e Amanda por todos os momentos de companheirismo nas horas de dificuldades.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará pela oportunidade de realização do curso de Mestrado.

A minha mãe Darcy, a minha tia Estela, a minha irmã Jussara, a minha irmã Lena, a minha filha Jéssica, a minha enteada Carol, a meu sogro Inácio, minha sogra Lúcia e aos demais membros da família que sempre acreditaram na conclusão deste trabalho.

Ao meu irmão Milton que muito contribuiu para o meu crescimento científico e intelectual.

E... Especialmente a minha esposa e amiga Conceição Farias, pela confiança e amor durante todos esses anos.

Resumo

Neste trabalho provamos a existência de, pelo menos, duas soluções positivas do problema elíptico

$$(P) \begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

sobre uma região limitada Ω do \mathbb{R}^N , usando a variedade Nehari e a aplicação de fibração associada com o funcional de Euler-Lagrange do problema. Mostraremos que as informações sobre a aplicação de fibração facilita a demonstração do resultado de existência de solução para o problema (P).

Palavras-chave: Problema Elíptico Semilinear de Valor Limitado. Método Variacional. Variedade de Nehari. Aplicação de Fibrção.

Abstract

In this work we prove the existence of, at least, two positive solutions for the semilinear elliptic boundary-value problem

$$(P) \begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

on a bounded region Ω in \mathbb{R}^N by using the Nehari manifold and the fibering maps associated with the Euler-lagrange functional for the problem. We show how knowledge of the fibering maps for the problem leads to very easy existence proofs.

Key-words: Semilinear elliptic boundary value problem. Variational methods. Nehari manifold. Fibering maps.

Conteúdo

Introdução	1
1 A Aplicação de Fibrção e a variedade de Nehari do funcional	3
1.1 Introdução	3
2 Análise da Aplicação de Fibrção	11
3 Resultado de Existência de Soluções Positivas	29
A Regularidade do funcional J_λ	38
B Resultados Básicos	50
Bibliografia	54

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é estudar a aplicabilidade do Método de Fibrção a um problema elíptico. Esta técnica consiste em associar ao problema elíptico uma função real. O estudo desta função fornece informações sobre as soluções do problema elíptico.

O Método de Fibrção é uma importante ferramenta para resolução de Problemas Diferenciais Elípticos. Ele é um método variacional e é baseado no Método de Nehari que consiste em associar o funcional do problema (P) a uma função que define a variedade de Nehari.

O problema a ser estudado é

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p, & em \ \Omega \\ u > 0, & em \ \Omega \\ u = 0, & sobre \ \partial\Omega \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $0 < q < 1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $\lambda > 0$, $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções regulares que podem mudar de sinal em Ω .

Esta dissertação é resultado do estudo que fizemos sobre o artigo de Kenneth J. Brown e Tsung-Fang Wu [7] e que foi publicado em 2007.

Depois do famoso artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [2], esta classe de problemas, muitas vezes chamada de côncavo e convexo, recebeu a atenção de muitos pesquisadores, como por exemplo [6], [7], [9], [10],[12] e [16]. Neste artigo, os autores estudaram o problema (P) com $a \equiv 1$ e $b \equiv 1$ e mostraram resultados de existência e não existência, dependendo do parâmetro λ , usando o método de sub-super solução.

O problema (P) foi recentemente estudado em [9], [12] e [16], usando o

Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [2] e a variedade de Nehari. Em [6] e [10] foi mostrado que a variedade de Nehari do funcional associado ao problema (P) está relacionada com a aplicação de fibração do problema.

Um outro fato, não menos importante, sobre o problema (P) é que o mesmo modela problemas na Física Matemática e dinâmica de população, conforme pode ser visto em [8].

Para uma melhor compreensão, este texto está escrito com a seguinte estruturação:

No Capítulo 1 definiremos a aplicação de fibração associada ao funcional do problema (P) e suas relações com a variedade de Nehari. No Capítulo 2 analisaremos e faremos uma completa descrição da aplicação de fibração. Finalmente, no Capítulo 3, mostraremos a existência de duas soluções positivas para o problema (P).

No corpo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

■ : fim de uma demonstração,

\rightarrow : convergência forte,

\rightharpoonup : convergência fraca.

Capítulo 1

A Aplicação de Fibração e a variedade de Nehari do funcional

1.1 Introdução

Como mencionado na introdução, neste capítulo definiremos o funcional J_λ e a variedade de Nehari $M_\lambda(\Omega)$, os quais são associados de maneira natural ao problema (P).

Mostraremos que o comportamento de J_λ , quando restrito à variedade de Nehari, é melhor que quando J_λ está definido em todo o espaço. Por exemplo, mostraremos que J_λ pode não ser limitado em $W_0^{1,2}(\Omega)$, entretanto é limitado em $M_\lambda(\Omega)$.

Definiremos a aplicação fibração, o qual foi introduzida por Drabek e Pohoazev em [10] e que também foi estudada em [6]. Veremos que essas aplicações estão relacionadas com a variedade de Nehari $M_\lambda(\Omega)$.

Neste texto usaremos o espaço de função $W_0^{1,2}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A norma em $L^p(\Omega)$ será denotada por

$$|u|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O Funcional de Euler-Lagrange associado a (P) é dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx,$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Note que J_λ está bem definido e é de classe C^1 [Ver Apêndice A].

Observe que J_λ pode não ser limitado inferiormente em $W_0^{1,2}(\Omega)$. De fato, no caso em que $\int_\Omega a(x)|u|^{q+1} > 0$ e $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1} > 0$, para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi > 0$ em Ω . Daí, considerando $t > 0$, temos:

$$J_\lambda(t\varphi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla t\varphi|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|t\varphi|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|t\varphi|^{p+1} dx,$$

ou ainda,

$$J_\lambda(t\varphi) = \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx,$$

isto é,

$$J_\lambda(t\varphi) = \frac{t^2}{2} \|\varphi\|^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx.$$

Colocando t^{p+1} em evidência, temos:

$$J_\lambda(t\varphi) = t^{p+1} \left[\frac{1}{2t^{p-1}} \|\varphi\|^2 - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_\Omega a(x)|\varphi|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|\varphi|^{p+1} dx \right].$$

Recorde que $0 < q < 1 < p$ e assim $J_\lambda(t\varphi) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, J_λ não é limitado inferiormente.

Note que $J'_\lambda(u)\varphi = \int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi - \lambda a(x)|u|^{q-1}u\varphi - b(x)|u|^{p-1}u\varphi] dx$.

A variedade de Nehari associada a J_λ é dada por:

$$M_\lambda(\Omega) = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\} : J'_\lambda(u)u = 0\}$$

Mostraremos que sobre M_λ , o funcional J_λ tem um comportamento melhor. Por exemplo, para todo $u \in M_\lambda(\Omega)$ temos que

$$J_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \left(\frac{1}{q+1} \right) J'_\lambda(u)u$$

e assim,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} \\ &\quad - \frac{1}{q+1} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} \right) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} - \frac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |\nabla u|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} + \frac{1}{q+1} \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} \end{aligned}$$

Logo,

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega b(x)|u|^{p+1}.$$

De maneira análoga,

$$J_\lambda(u) = J_\lambda(u) - \left(\frac{1}{p+1} \right) J'_\lambda(u)u$$

implica,

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}.$$

Portanto, para todo $u \in M_\lambda(\Omega)$, temos

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} \quad (1.1)$$

ou ainda

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}. \quad (1.2)$$

Teorema 1.1 J_λ é limitado inferiormente em $M_\lambda(\Omega)$.

Demonstração: Para $u \in M_\lambda$, temos:

$$J_\lambda(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1}.$$

Vamos demonstrar que J_λ é limitado inferiormente, mostrando que J_λ é coercivo.

Observe que,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} &\leq \left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |a(x)||u|^{q+1} \\
&\leq \int_{\overline{\Omega}} |a(x)||u|^{q+1} \\
&\leq \max_{\overline{\Omega}} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1} \\
&\leq c \int_{\Omega} |u|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Então, multiplicando a expressão acima por -1, temos que

$$-\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \geq -c \int_{\Omega} |u|^{q+1}.$$

Portanto,

$$J_{\lambda}(u) \geq c_1 \|u\|^2 - c_2 c \int_{\Omega} |u|^{q+1}$$

onde $c_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)$ e $c_2 = \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)$ e da imersão contínua $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ temos que existe $c_3 > 0$ tal que

$$|u|_{q+1} \leq c_3 \|u\|.$$

Daí,

$$J_{\lambda}(u) \geq c_1 \|u\|^2 - c_4 \|u\|^{q+1}$$

e assim,

$$J_{\lambda}(u) \geq \|u\|^{q+1} (c_1 \|u\|^{1-q} - c_4)$$

de onde concluímos,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J_{\lambda}(u) = +\infty$$

mostrando que J_{λ} é coercivo e, portanto, limitado inferiormente [Ver Apêndice B].

■

A variedade de Nehari está vinculada ao comportamento de funções da forma $\phi_u : t \rightarrow J_\lambda(tu)(t > 0)$. Tais aplicações são conhecidas como aplicações de fibração, foram introduzidas por Drabek e Pohozaev em [10] e são também discutidas em Brown e Zhang [6]. Se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, temos

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a|u|^{q+1} - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b|u|^{p+1}, \quad (1.3)$$

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda t^q \int_{\Omega} a|u|^{q+1} - t^p \int_{\Omega} b|u|^{p+1} \quad (1.4)$$

e

$$\phi''_u(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda q t^{q-1} \int_{\Omega} a|u|^{q+1} - p t^{p-1} \int_{\Omega} b|u|^{p+1}. \quad (1.5)$$

Note que $u \in M_\lambda(\Omega)$ se, e somente se, $\phi'_u(1) = 0$ e, mais geral, que $\phi'_u(t) = 0$ se, e somente se, $tu \in M_\lambda(\Omega)$.

Podemos resumir o que foi dito acima através das seguintes afirmações:

- (1) $\phi'_u(1) = 0 \Leftrightarrow u \in M_\lambda(\Omega)$;
- (2) $\phi'_u(t) = 0 \Leftrightarrow tu \in M_\lambda(\Omega)$.

De fato, note que $\phi'_u(1) = 0$ é equivalente a

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} = 0,$$

ou seja

$$J'_\lambda(u)u = 0$$

o que é equivalente a

$$u \in M_\lambda(\Omega).$$

A afirmação (2) decorre de $\phi'_u(t) = 0$ ser equivalente a

$$t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0.$$

Multiplicando a expressão acima por t , temos que:

$$t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

ou seja,

$$J'_\lambda(tu)tu = 0$$

isto é,

$$tu \in M_\lambda(\Omega).$$

Então, é natural subdividir $M_\lambda(\Omega)$ em subconjuntos tal que para cada u fixada, 1 é ponto de mínimo local, máximo local ou ponto de inflexão da função ϕ_u . Assim, definimos:

$$M_\lambda^+(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) > 0\},$$

$$M_\lambda^-(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) < 0\},$$

$$M_\lambda^0(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi_u''(1) = 0\},$$

Note que, se $u \in M_\lambda(\Omega)$, então

$$\phi_u''(1) = (1 - q) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (p - q) \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx \quad (1.6)$$

e

$$\phi_u''(1) = (1 - p) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda(q - p) \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx \quad (1.7)$$

De fato, como $\phi_u'(1) = 0$, temos

$$\phi_u''(1) = \phi_u''(1) - q \cdot \phi_u'(1). \quad (1.8)$$

Agora, recorde que

$$\phi_u'(t) = t \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Daí,

$$\phi_u'(1) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx \quad (1.9)$$

e também, temos, por (1.5), que

$$\phi_u''(1) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) e (1.9) em (1.8), temos

$$\begin{aligned} \phi_u''(1) &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx - p \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx \\ &\quad - q \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \lambda q \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx + q \int_\Omega b(x)|u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

e assim,

$$\phi_u''(1) = (1 - q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q) \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Similarmente, podemos provar que

$$\phi_u''(1) = (1 - p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda(q - p) \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Resumidamente, temos

$$\phi_u''(1) = (1 - q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q) \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \quad (1.11)$$

e

$$\phi_u''(1) = (1 - p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda(q - p) \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx. \quad (1.12)$$

Além disso, como provado em Binding, Drabek e Huang em [4] ou em Brown e Zhang [6], temos o seguinte lema.

Lema 1.1 *Suponha que u_0 é um máximo ou mínimo local de J_λ em $M_\lambda(\Omega)$. Então, se $u_0 \notin M_\lambda^0(\Omega)$, u_0 é um ponto crítico de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Demonstração: Se u_0 é um mínimo ou máximo local de J_λ em $M_\lambda(\Omega)$, então do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [Ver Apêndice B], existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\lambda(u_0) = \mu \cdot \delta'(u_0) \quad (1.13)$$

onde

$$\delta(u_0) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx = J'_\lambda(u_0) u_0 = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = \lambda \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx + \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx. \quad (1.14)$$

Mas,

$$\delta'(u_0)(u_0) = 2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda(q + 1) \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - (p + 1) \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \delta'(u_0)(u_0) &= 2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx \\ &\quad - p \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx - \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Substituindo (1.14) em (1.15), temos:

$$\delta'(u_0)(u_0) = 2 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - p \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx,$$

ou ainda,

$$\delta'(u_0)(u_0) = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda q \int_{\Omega} a(x) |u_0|^{q+1} dx - p \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx = \phi''_{u_0}(1).$$

De (1.13), temos: $J'_\lambda(u_0)(u_0) = \mu \cdot \delta'(u_0)(u_0) = 0$. Desde que $u_0 \notin M_\lambda^0(\Omega)$, segue que $\phi''_{u_0}(1) \neq 0$ e isso implica que $\delta'(u_0)(u_0) \neq 0$ e portanto, $\mu = 0$. Assim, temos que $J'_\lambda(u_0) = 0$. Daí, concluímos que u_0 é um ponto crítico de J_λ . ■

Capítulo 2

Análise da Aplicação de Fibração

Neste capítulo daremos uma descrição completa da aplicação de fibração ϕ_u . Como veremos, o comportamento de ϕ_u é determinado pelos sinais de

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx.$$

Para isso, vamos considerar a função

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (2.1)$$

Note que, para $t > 0$, $tu \in M_{\lambda}(\Omega)$ se, e somente se, t é uma solução de

$$m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx. \quad (2.2)$$

De fato, substituindo (2.2) em (2.1), temos que

$$t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0.$$

Multiplicando a expressão acima por t^{q+1} , temos

$$t^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0,$$

o que equivale,

$$J'_{\lambda}(tu)tu = 0$$

isto é,

$$tu \in M_{\lambda}(\Omega).$$

Além disso, por um cálculo direto temos

$$m'_u(t) = (1 - q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p - q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx. \quad (2.3)$$

Note que m_u é uma função estritamente crescente para $t \geq 0$, quando $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$. De fato, observe que, desde que para $t = 0$, temos que $m_u(0) = 0$ e para $t > 0$, recordando que $0 < q < 1 < p$, temos que $m'_u(t) > 0$ e portanto, m_u é crescente como mostrado na figura 2.1 .

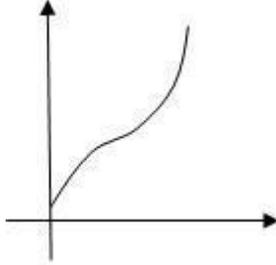


Figura 2.1: Possível forma de m_u .

Para o caso $\int_{\Omega} b(x)|u|^{q+1} dx > 0$, temos que m_u é crescente para valores pequenos de t e decrescente para valores grandes de t . Assim m_u tem um ponto de máximo global.

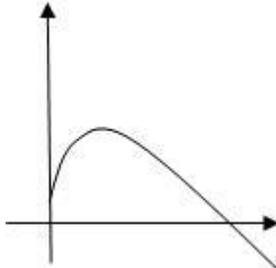


Figura 2.2: Possível forma de m_u .

Uma outra observação importante é que se $tu \in M_{\lambda}(\Omega)$, então segue de (1.11) e (2.3) que $\phi''_{tu}(1) = t^{q+2} \cdot m'_u(t)$ e assim $tu \in M_{\lambda}^+(\Omega)$ se $m'_u(t) > 0$. Da mesma forma, $tu \in M_{\lambda}^-(\Omega)$ se $m'_u(t) < 0$.

Agora, descreveremos a natureza da aplicação de fibração para todos os sinais

possíveis de

$$\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \text{ e } \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx.$$

$$1^0 \text{ caso: } \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0 \text{ e } \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0.$$

Recorde que

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Daí,

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Como

$$\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0, \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq 0 \text{ e } t > 0$$

temos que $\phi'_u(t) > 0$, isto é, ϕ_u é crescente e o seu gráfico tem a forma mostrada na figura 2.3. Como $\phi_u(t) > 0$, então $tu \notin M_{\lambda}(\Omega)$. Observe também que, $\phi_u(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ e $\phi_u(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim, podemos concluir que tu não é solução do problema, qualquer que seja $t > 0$, portanto nenhum múltiplo de u está em $M_{\lambda}(\Omega)$.

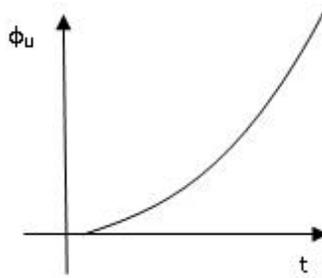


Figura 2.3: Possível forma da aplicação fibração

2º caso: $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx \leq 0$ e $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$.

Recorde de (2.1) que

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

e daí,

$$m'_u(t) = (1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

isto é, sendo $t > 0$ e recordando que $0 < q < 1 < p$ então, $m'_u(t) > 0$ e portanto, temos que m_u é uma função crescente e seu gráfico tem a forma mostrada na figura 2.1.

Observe que

$$m_u(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0$$

e

$$m_u(t) \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Note que, substituindo (2.2) em (2.1) temos

$$\lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx = t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

daí,

$$t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

e multiplicando a equação acima por t_u^{q+1} , temos

$$t_u^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

assim,

$$J'(t_u u) t_u u = 0$$

de onde concluímos que

$$t_u u \in M_{\lambda}(\Omega).$$

Portanto, neste caso, m_u tem o gráfico como na figura 2.1, e existe exatamente uma solução de (2.2). Assim existe um único valor $t_u > 0$ tal que $t_u u \in$

$M_\lambda(\Omega)$, pois como $\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0$, para t_1 suficientemente pequeno temos que $m_u(t_1) \approx 0$ e daí $m_u(t_1) < \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \infty$, existe t_2 suficientemente grande onde $m_u(t_2) > \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx$. Desde que $m_u(t) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $m_u(t_1) < d < m_u(t_2)$ então, existe pelo Teorema do Valor Intermediário [Ver Apêndice B], um $t \in]t_1, t_2[$ onde $m_u(t) = d$. Como $m_u(t)$ é crescente, então t_u é único, ou seja, a equação

$$m_u(t) = \lambda \int_\Omega a(x)|u|^{q+1} dx$$

tem uma única solução.

Além disso, sendo

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^{q+2} \cdot m'_u(t).$$

daí, como $m'_u(t) > 0$ e $t > 0$ temos que

$$\phi''_{t_u u}(1) = t^{q+2} \cdot m'_u(t_u) > 0$$

e assim $t_u u \in M_\lambda^+(\Omega)$.

Portanto, a aplicação fibração tem um único ponto crítico $t = t_u$ que é um mínimo local. Além disso, desde que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = \infty$, segue que ϕ_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.4.

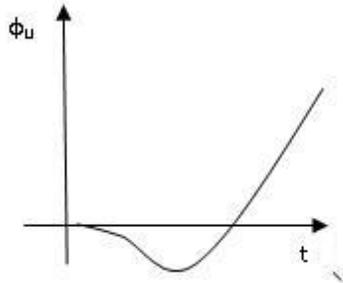


Figura 2.4: Possível forma da aplicação fibração

Análise do gráfico de $\phi_u(t)$

Desde que,

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx,$$

colocando t^{p+1} em evidência, temos

$$\phi_u(t) = t^{p+1} \left[\frac{1}{2t^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right].$$

Portanto, se $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \leq 0$, $\int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx > 0$ e passando ao limite $\phi_u(t)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = +\infty.$$

Logo, existe \bar{t} tal que, para todo $t > \bar{t}$, $\phi_u(t)$ é crescente e para todo $t < \bar{t}$, $\phi_u(t)$ é decrescente.

3º caso: $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$ e $\int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx \leq 0$.

Recorde que, novamente temos

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Veja que $m_u(t)$ pode ser escrito como sendo o polinômio

$$m_u(t) = k_1 t^{1-q} - k_2 t^{p-q}$$

onde $k_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > 0$ e $k_2 = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$.

Daí,

$$m'_u(t) = k_3 t^{-q} - k_4 t^{p-q-1}, \quad (2.4)$$

com $k_3 > 0$ e $k_4 > 0$. Fazendo $m'_u(t) = 0$, temos

$$k_3 t^{-q} - k_4 t^{p-q-1} = 0$$

e daí,

$$k_3 t^{-q} = k_4 t^{p-q-1}$$

ou ainda

$$\frac{k_3}{k_4} = t^{p-1}$$

e assim,

$$t = t_0 = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Note ainda que, fazendo $t < t_0$ temos

$$t < \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

daí,

$$\frac{1}{t^q} > \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}}$$

e multiplicando a equação acima por k_3 , temos

$$\frac{k_3}{t^q} > k_3 \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} \quad (2.5)$$

ou ainda podemos dizer que para $t < t_0$, temos

$$t^{p-q-1} < \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{p-q-1}{p-1}}$$

e multiplicando a equação acima por $-k_4$, temos

$$-k_4.t^{p-q-1} > -k_4^{\frac{q}{p-1}}.k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.4), temos que

$$m'_u(t) > k_3 \cdot \left(\frac{k_4}{k_3} \right)^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}}.k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}}$$

daí,

$$m'_u(t) > k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}}.k_4^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}}.k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} > 0$$

logo, para $t < t_0$ temos que $m'_u(t) > 0$ e portanto, $m_u(t)$ é crescente.

Agora, fazendo $t > t_0$ temos

$$t > \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

daí,

$$\frac{1}{t^q} < \left(\frac{k_4}{k_3}\right)^{\frac{q}{p-1}}$$

e multiplicando a equação acima por k_3 , temos

$$\frac{k_3}{t^q} < k_3^{\frac{p+q-1}{p-1}} \cdot k_4^{\frac{q}{p-1}} \quad (2.7)$$

ou ainda podemos dizer que para $t > t_0$, temos

$$t^{p-q-1} > \left(\frac{k_3}{k_4}\right)^{\frac{p-q-1}{p-1}}$$

e multiplicando a equação acima por $-k_4$, temos

$$-k_4 \cdot t^{p-q-1} < -k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \cdot k_4^{\frac{q}{p-1}}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.4), temos que

$$m'_u(t) < k_3 \cdot \left(\frac{k_4}{k_3}\right)^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}} \cdot k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}}$$

daí,

$$m'_u(t) < k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} \cdot k_4^{\frac{q}{p-1}} - k_4^{\frac{q}{p-1}} \cdot k_3^{\frac{p-q-1}{p-1}} < 0$$

logo, para $t > t_0$ temos que $m'_u(t) < 0$ e portanto $m_u(t)$ é decrescente.

Portanto, para todo $t < t_0$, temos que $m'_u(t) > 0$ e para todo $t > t_0$, temos que $m'_u(t) < 0$.

Observe também que

$$\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = -\infty.$$

Assim, podemos concluir que m_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.2.

Desde que $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq 0$, existe $t_u > 0$ tal que

$$m_u(t_u) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx.$$

Agora, vamos mostrar que $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$ e desde que $m'_u(t_u) < 0$, temos que neste caso $t_u u \in M_{\lambda}^{-}(\Omega)$.

De fato, substituindo (2.3) em (2.1) temos

$$\lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx = t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

daí,

$$t_u^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

e multiplicando a equação acima por t_u^{q+1} , temos

$$t_u^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t_u^{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t_u^{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx = 0$$

assim, $J'(t_u u)t_u u = 0$

onde podemos concluir que $t_u u \in M_{\lambda}(\Omega)$.

Recorde que,

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

daí,

$$m'_u(t) = (1-q)t^{-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx < 0.$$

Desde que $m'_u(t_u) < 0$, temos que $\phi''_{t_u u}(1) = t^{q+2}.m'_u(t_u) < 0$, daí $t_u u \in M_{\lambda}^{-}(\Omega)$. Portanto, a aplicação de fibração tem um único ponto crítico que é um ponto de máximo local. Desde que $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = -\infty$, segue que ϕ_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.5.

Análise do gráfico de $\phi_u(t)$

Recorde que,

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Colocando t^{p+1} em evidência, temos

$$\phi_u(t) = t^{p+1} \left[\frac{1}{2t^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right].$$

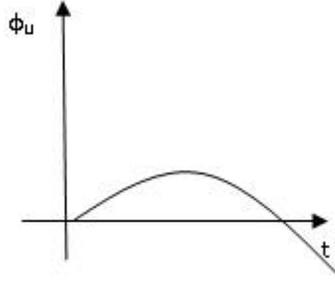


Figura 2.5: Possível forma da aplicação fibração

Portanto, se $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$ e passando ao limite $\phi_u(t)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_u(t) = -\infty.$$

Portanto, podemos concluir que ϕ_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.5.

4º caso: $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$ e $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1}dx > 0$.

Como no caso anterior, m_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.2.

De fato, note que

$$m_u(t) = t^{1-q} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^{p-q} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx.$$

Veja que $m_u(t)$ pode ser escrito como sendo o polinômio

$$m_u(t) = k_1 t^{1-q} - k_2 t^{p-q},$$

onde $k_1 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx > 0$ e $k_2 = \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$.

Daí, $m'_u(t) = k_3 t^{-q} - k_4 t^{p-q-1}$, com $k_3 > 0$ e $k_4 > 0$.

Fazendo, $m'_u(t) = 0$ temos

$$k_3 t^{-q} - k_4 t^{p-q-1} = 0$$

daí,

$$k_3 t^{-q} = k_4 t^{p-q-1}$$

ou ainda que

$$\frac{k_3}{k_4} = t^{p-1}$$

e assim,

$$t = t_0 = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

De forma análoga ao 3º caso, temos que:

Para todo $t < t_0$, temos que $m'_u(t) > 0$ e para todo $t > t_0$, temos que $m'_u(t) < 0$.

Observe também que $\lim_{t \rightarrow 0} m_u(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} m_u(t) = \infty$.

Logo, m_u tem o gráfico como mostrado na figura 2.2.

Se $\lambda > 0$ é suficientemente grande então a equação (2.3) não tem solução e daí ϕ_u não tem ponto crítico, para todo $t > 0$. Neste caso ϕ_u é uma função decrescente. Assim nenhum múltiplo de u está em $M_\lambda(\Omega)$ ($t_u u \notin M_\lambda(\Omega)$, para todo $t > 0$).

De fato, escolha λ^* tal que

$$m_u(t_0) = \max_{t > 0} m_u(t) < \lambda^* \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx, \text{ para todo } \lambda \geq \lambda^*.$$

Portanto, a equação $m_u(t) = \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$ não tem solução para todo $\lambda \geq \lambda^*$, pois

$$m_u(t) \leq m_u(t_0) < \lambda \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx, \text{ para todo } \lambda \geq \lambda^*.$$

Por outro lado, para λ suficientemente grande

$$\phi'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \lambda t^q \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - t^p \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx < 0,$$

isto é, ϕ_u é uma função decrescente.

Como $\phi'_u < 0$, então para todo t , $tu \notin M_\lambda(\Omega)$. Se, de outra forma, $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, existe exatamente duas soluções $t_1 u < t_2 u$ de (2.3) com $m'_u(t_1 u) > 0$ e $m'_u(t_2 u) < 0$. Assim existe exatamente dois múltiplos de $u \in M_\lambda(\Omega)$, a saber: $t_1 u \in M_\lambda^+(\Omega)$ e $t_2 u \in M_\lambda^-(\Omega)$. Segue que ϕ_u tem exatamente dois pontos críticos - um mínimo local em $t = t_1 u$ e um máximo

local em $t = t_2u$; além disso ϕ_u é decrescente em $(0, t_1)$, crescente em (t_1, t_2) e decrescente em (t_2, ∞) como na figura 2.6.

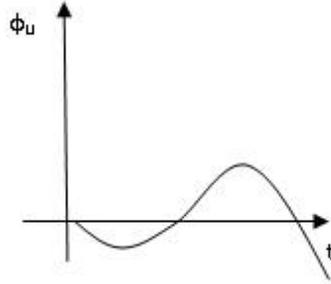


Figura 2.6: Possível forma da aplicação fibração

Recorde que

$$\phi''_{t_u}(1) = t^{q+2} \cdot m'_u(t)$$

daí, $\phi''_{t_{1u}} = t^{q+2} \cdot m'_u(t_{1u}) > 0 \Rightarrow t_{1u}u \in M_\lambda^+(\Omega)$ portanto, ϕ_u tem um ponto de mínimo local em $t = t_{1u}$. Segue que $\phi''_{t_{2u}} = t^{q+2} \cdot m'_u(t_{2u}) < 0 \Rightarrow t_{2u}u \in M_\lambda^-(\Omega)$ portanto, ϕ_u tem um ponto de máximo local em $t = t_{2u}$.

O resultado seguinte assegura que quando λ é suficientemente pequeno o gráfico de ϕ_u deve ser como mostrado na figura 2.6 para todo u não-nulo.

Lema 2.1 Existe $\lambda_1 > 0$ e $\bar{t} > 0$ tal que, quando $\lambda < \lambda_1$, $\phi_u(\bar{t})$ assume valores positivos para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ não-nulo.

Demonstração: Desde que

$$\phi_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx,$$

colocando t^{p+1} em evidência, temos

$$\phi_u(t) = t^{p+1} \left[\frac{1}{2t^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right].$$

Portanto, se $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \leq 0$ para t suficientemente grande

$$\left[\frac{1}{2t^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{(q+1)t^{p-q}} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx \right] > 0,$$

ou seja, existe \bar{t} tal que, para todo $t > \bar{t}$, $\phi_u(t) > 0$.

Suponha agora que $\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx > 0$. Seja

$$h_u(t) = \frac{t^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Assim,

$$h'_u(t) = t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx.$$

Fazendo $h'_u(t) = 0$, temos:

$$t \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = t^p \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

ou ainda,

$$t^{p-1} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx}$$

e assim,

$$t = \bar{t} = \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Logo, \bar{t} é um ponto crítico de h_u . Agora, vamos provar que \bar{t} é um ponto de máximo. Calculando $h_u''(t)$, temos

$$h_u''(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - pt^{p-1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx,$$

então

$$h_u''(\bar{t}) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right) \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$$

e daí, $h_u''(\bar{t}) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - p \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = (1-p) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$

Como $p > 1$, temos que $h_u''(t) < 0$, logo \bar{t} é ponto de máximo. Substituindo \bar{t} em $h_u(t)$, temos

$$\begin{aligned} h_u(\bar{t}) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^2 \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \left[\left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right]^{p+1} \cdot \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

e assim,

$$h_u(\bar{t}) = \frac{1}{2} \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{2}{p-1}+1}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p-1}}} - \frac{1}{p+1} \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p+1}{p-1}}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{p+1}{p-1}-1}}$$

ou ainda,

$$h_u(\bar{t}) = \frac{1}{2} \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p+1}{p-1}}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p-1}}} - \frac{1}{p+1} \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p+1}{p-1}}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p-1}}}$$

daí,

$$h_u(\bar{t}) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p+1}{p-1}}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{2}{p-1}}}$$

e assim,

$$h_u(\bar{t}) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left\{ \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p+1}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^2} \right\}^{\frac{1}{p-1}}$$

é o valor máximo de $h_u(t)$. No entanto,

$$\frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p+1}}{\left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^2} \geq S_{p+1}^{2(p+1)},$$

onde S_{p+1} denota a melhor constante de Sobolev de imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$.

Portanto,

$$h_u(\bar{t}) \geq \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\frac{S_{p+1}^{2(p+1)}}{\|b^+\|_{\infty}^2} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \delta > 0,$$

onde δ é independente de u e $b^+ = \max\{b(x), 0\}$.

Mostraremos agora que existe $\lambda_1 > 0$ tal que $\phi_u(\bar{t}) > 0$, para todo $\lambda < \lambda_1$, isto é,

$$\frac{1}{2}\bar{t}^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{\bar{t}^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0$$

ou ainda,

$$h_u(\bar{t}) - \frac{\lambda\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx > 0,$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega) - \{0\}$, sempre que $\lambda < \lambda_1$.

De fato, note que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx &\leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx \\
&\leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} |u|_{q+1}^{q+1} \\
&\leq \frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}},
\end{aligned}$$

onde S_{q+1} denota a melhor constante de Sobolev de imersão de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$.

Substituindo $\bar{t} = \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ na expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{q+1}{p-1}} \\
&\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{q+1}{2}}
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx &\leq \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left(\frac{1}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^{\frac{q+1}{p-1}}} \right) \\
&\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{(q+1)(p+1)}{2(p-1)}}
\end{aligned}$$

daí,

$$\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} \left\{ \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p+1}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^2} \right\}^{\frac{q+1}{2(p-1)}}.$$

Como $h_u(\bar{t}) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left\{ \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{p+1}}{\left(\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right)^2} \right\}^{\frac{1}{p-1}}$, temos que

$$\frac{\bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx \leq \frac{1}{q+1} \|a\|_{\infty} S_{q+1}^{q+1} h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \left[\frac{2(p+1)}{p-1} \right]^{\frac{q+1}{2}} = ch_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}}$$

onde c é independente de u .

Recorde que

$$\begin{aligned} \phi_u(\bar{t}) &= h_u(\bar{t}) - \frac{\lambda \bar{t}^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \\ &\geq h_u(\bar{t}) - \lambda ch_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \\ &= h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \left(h_u(\bar{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c \right) \end{aligned}$$

e assim, desde que $h_u(\bar{t}) \geq \delta$, segue que

$$\phi_u(\bar{t}) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \left(\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c \right).$$

Fazendo $\lambda_1 = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$, temos que para todo $\lambda < \lambda_1$,

$$\begin{aligned} \phi_u(\bar{t}) &\geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \left(\delta^{\frac{1-q}{2}} - \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c} \cdot c \right) \\ &= \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} > 0. \end{aligned}$$

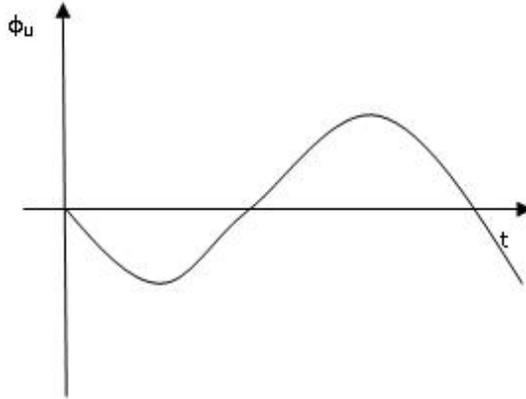
■

Segue do lema acima que quando $\lambda < \lambda_1$,

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx > 0,$$

então ϕ_u deve ter exatamente dois pontos críticos como discutido anteriormente ao lema.

Assim, quando $\lambda < \lambda_1$ temos um conhecimento completo do número de pontos críticos de ϕ_u , dos intervalos no qual ϕ_u é crescente e decrescente e dos múltiplos de u que estão em $M_{\lambda}(\Omega)$ para toda mudança possível de sinais de $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$ e $\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$. Em particular temos os seguintes resultados:



Corolário 2.1 $M_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$ quando $0 < \lambda < \lambda_1$.

Demonstração: Para $\lambda < \lambda_1$, ϕ_u tem exatamente dois pontos críticos (ver Lema 2.1) o qual é um mínimo local e um máximo local. Logo, não há pontos de inflexão e portanto $M_\lambda^0(\Omega) = \emptyset$.

■

Corolário 2.2 Se $\lambda < \lambda_1$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq \delta_1$ para todo $u \in M_\lambda^-(\Omega)$.

Demonstração: Considere $u \in M_\lambda^-(\Omega)$. Assim, ϕ_u tem um máximo global em $t = 1$. Além disso, conforme os casos estudados nesta seção e, em particular, do 3º e 4º casos temos que $\int_\Omega b(x)|u|^{p+1}dx > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) = \phi_u(1) &\geq \phi_u(\bar{t}) \\ &\geq h_u(\bar{t})^{\frac{q+1}{2}} \left(h_u(\bar{t})^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c \right) \end{aligned}$$

e desde que $h_u(\bar{t}) \geq \delta$, segue-se que $J_\lambda(u) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \left(\delta^{\frac{1-q}{2}} - \lambda c \right)$

Escolhendo $\lambda_1 = \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2c}$, temos que $J_\lambda(u) \geq \delta^{\frac{q+1}{2}} \frac{\delta^{\frac{1-q}{2}}}{2} > 0$, para todo $\lambda < \lambda_1$.

■

Capítulo 3

Resultado de Existência de Soluções Positivas

Neste capítulo, usando as propriedades da aplicação fibração, daremos uma prova simples da existência de duas soluções positivas para o problema (P), uma em $M_\lambda^+(\Omega)$ e outra em $M_\lambda^-(\Omega)$.

Teorema 3.1 *Se $\lambda < \lambda_1$, existe $u \in M_\lambda^+(\Omega)$ tal que $J_\lambda(u) = \min_{v \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(v)$.*

Demonstração: Desde que J_λ é limitado inferiormente sobre $M_\lambda(\Omega)$ e como $M_\lambda^+(\Omega) \subset M_\lambda(\Omega)$, temos que J_λ é limitado inferiormente em $M_\lambda^+(\Omega)$ e daí existe uma sequência minimizante para J_λ , isto é, existe $(u_n) \subset M_\lambda^+(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{v \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(v)$$

Desde que J_λ é coercivo, temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e da reflexividade deste espaço, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e, das imersões compactas de Sobolev, $u_n \rightarrow u_0$ em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < \frac{2N}{N-2} = 2^*$.

Se $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, então da unicidade do limite $J(u_0) = \inf_{v \in M_\lambda^+(\Omega)} J(v)$.

Suponha que $u_n \not\rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Note que para todo $v \in M_\lambda^+(\Omega)$, temos que $\phi_v''(1) > 0$, isto é,

$$(1-p) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \lambda(q-p) \int_{\Omega} a(x)|v|^{q+1} dx > 0.$$

Portanto,

$$\lambda(p - q) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx > (p - 1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx.$$

Do Lema de Fatou

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned} \liminf \lambda(p - q) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx &\geq \liminf (p - 1) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\geq (p - 1) \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx > \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

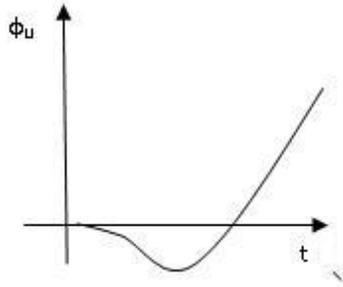
Mas,

$$\liminf \lambda(p - q) \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} dx = \lambda(p - q) \int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx$$

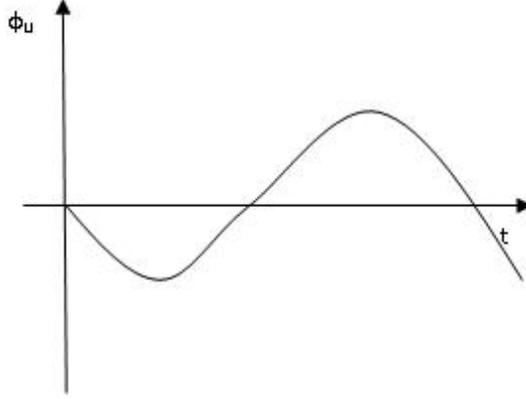
Logo,

$$\int_{\Omega} a(x)|u_0|^{q+1} dx > 0.$$

Se $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \leq 0$, então o gráfico da aplicação fibração ϕ_{u_0} é da forma



Se $\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1}dx > 0$, então o gráfico da aplicação fibração ϕ_{u_0} é da forma



Portanto, existe $t_0 > 0$ tal que $t_0 u_0 \in M_{\lambda}^+(\Omega)$ e ϕ_{u_0} é decrescente em $(0, t_0)$ com $\phi'_{u_0}(t_0) = 0$.

Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, temos que $\liminf \|u_n\|^2 \geq \|u_0\|^2$.

Mas, $\|u_n\|^2 \not\rightarrow \|u_0\|^2$. Daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [\|u_n\|^2 - \|u_0\|^2] \geq \delta > 0.$$

Portanto, para n suficientemente grande

$$\|u_n\|^2 \geq \delta + \|u_0\|^2.$$

Assim, para tais n

$$\begin{aligned} \phi'_{u_n}(t_0) &= t_0 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} - t_0^p \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p+1} \\ &\geq t_0 \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 - \lambda t_0^q \int_{\Omega} a(x)|u_n|^{q+1} - t_0^p \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p+1} + t_0 \delta. \end{aligned}$$

Como $1 \leq q+1 < 2^*$ e $1 < p+1 < 2^*$, passando ao limite de $n \rightarrow +\infty$, temos $\phi'_{u_n}(t_0) > \phi'_{u_0}(t_0) = 0$.

Desde que $(u_n) \subset M_{\lambda}^+(\Omega)$, temos que $\phi'_{u_n}(t_0) < 0$, $t \in (0, 1)$ e $\phi'_{u_n}(1) = 0$ para todo n : logo $t_0 > 1$. Mas ϕ_{u_0} é decrescente em $(0, t_0)$. Logo,

$$J(t_0 u_0) < J(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{u \in M_{\lambda}^+(\Omega)} J(u)$$

o que é um absurdo. Logo $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e assim,

$$J_\lambda(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(u)$$

Portanto, u_0 é um mínimo de J_λ sobre $M_\lambda^+(\Omega)$. ■

Teorema 3.2 *Se $\lambda < \lambda_1$, existe $u \in M_\lambda^-(\Omega)$ tal que $J_\lambda(u) = \min_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v)$.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.2, temos que $J_\lambda(u) \geq \delta_1 > 0$, para todo $u \in M_\lambda^-(\Omega)$ e assim $\inf_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v) \geq \delta_1 > 0$.

Logo, existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset M_\lambda^-(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v) > 0.$$

Como foi feito na demonstração do teorema anterior, desde que J_λ é coercivo, então, (u_n) é limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u_0$ em $L^r(\Omega)$, $1 \leq r < 2^*$.

Desde que $(u_n) \subset M_\lambda^-(\Omega)$, temos que $\phi'_{u_n}(1) < 0$, isto é,

$$(1 - q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - (p - q) \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p+1} dx < 0.$$

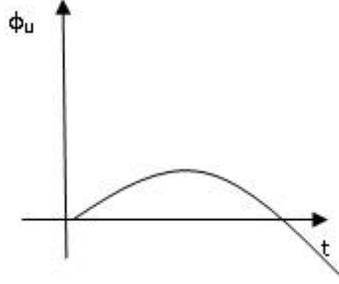
ou seja,

$$(1 - q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx < (p - q) \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p+1} dx.$$

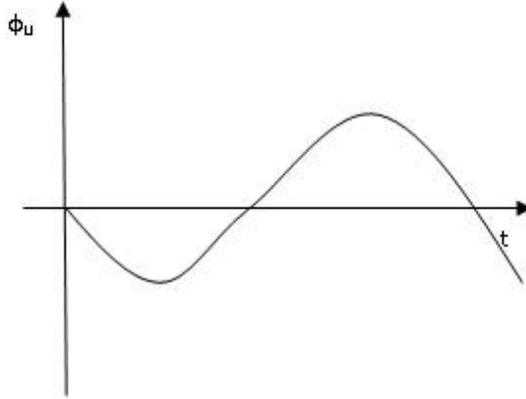
Do Lema de Fatou, $\liminf \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx$. Assim temos que

$$\begin{aligned} (p - q) \int_{\Omega} b(x) |u_0|^{p+1} dx &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} b(x) |u_n|^{p+1} dx \\ &> \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx > 0. \end{aligned}$$

Daí, o gráfico da aplicação fibração é da forma abaixo



ou também pode ser da seguinte forma



Assim, existe $\hat{t} > 0$ tal que $\hat{t}u_0 \in M_\lambda^-(\Omega)$. Suponha que $u_n \not\rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Desde que $\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$, $(u_n) \subset M_\lambda^-(\Omega)$ e como ϕ_{u_0} tem máximo global em 1, temos que

$$\phi_{u_0}(1) \geq \phi_{u_n}(s), \text{ para todo } s > 0, \text{ ou seja,}$$

$$J_\lambda(u_0) \geq J_\lambda(su_0), \text{ para todo } s > 0. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} J_\lambda(\hat{t}u_0) &= \frac{\hat{t}^2}{2} \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x) |u_0|^{q+1} dx - \frac{\hat{t}^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x) |u_0|^{p+1} dx \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\hat{t}^2}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda \hat{t}^{q+1}}{q+1} \int_\Omega a(x) |u_n|^{q+1} dx - \frac{\hat{t}^{p+1}}{p+1} \int_\Omega b(x) |u_n|^{p+1} dx \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(\hat{t}u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u) \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\lambda(u_n) = J_\lambda(u_0) = \inf_{u \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(u).$$

■

Corolário 3.1 *O Problema (P) tem pelo menos duas soluções positivas quando $0 < \lambda < \lambda_1$.*

Demonstração: Dos Teoremas 3.1 e 3.2 existem $u_1 \in M_\lambda^+(\Omega)$ e $u_2 \in M_\lambda^-(\Omega)$ tais que

$$J_\lambda(u_1) = \inf_{v \in M_\lambda^+(\Omega)} J_\lambda(v) \text{ e } J_\lambda(u_2) = \inf_{v \in M_\lambda^-(\Omega)} J_\lambda(v)$$

Do Lema 1.1, u_1 e u_2 são pontos críticos de J_λ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e portanto soluções fracas do problema (P).

Além disso, $J_\lambda(u_1) = J_\lambda(|u_1|)$ e $J_\lambda(u_2) = J_\lambda(|u_2|)$ portanto, podemos considerar $u_1 \geq 0$ e $u_2 \geq 0$.

Vamos mostrar agora que u_1, u_2 são soluções clássicas.

Considere a função

$$f(x) = \lambda a(x)u^q(x) + b(x)u^p(x)$$

Assim, temos

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Observe que

$$|f(x)| \leq \lambda|a(x)||u(x)|^q + |b(x)||u(x)|^p$$

Se $|u(x)| \leq 1$, temos que $|u(x)|^p \leq |u(x)|^q \leq 1$. Logo,

$$|f(x)| \leq \lambda|a(x)| + |b(x)| \quad (3.2)$$

Se $|u(x)| \geq 1$, temos que $|u(x)|^q \leq |u(x)|^p$. Logo,

$$|f(x)| \leq (\lambda|a(x)| + |b(x)|)|u(x)|^p \quad (3.3)$$

Assim, por (3.2) e (3.3),

$$|f(x)| \leq (\lambda|a(x)| + |b(x)|)(1 + |u(x)|^p). \quad (3.4)$$

Note que $f \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} &\leq \int_{\Omega} (\lambda|a(x)| + |b(x)|)^{\frac{2^*}{p}} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \\ &\leq \int_{\Omega} (\lambda|a(x)| + |b(x)|)^{\frac{2^*}{p}} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \end{aligned}$$

Como a e b são funções suaves, então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} &\leq C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{p}} C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^{2^*}). \end{aligned}$$

Desde que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ temos que,

$$\int_{\Omega} |f|^{\frac{2^*}{p}} < +\infty.$$

Assim, $f \in L^{\frac{2^*}{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Teorema B.7 no Apêndice B] $u \in W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega)$.

Vamos analisar os dois casos a seguir:

$$(1)_I \text{ Se } \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \leq 0$$

Pelo Teorema B.10 [Ver Apêndice B], temos a imersão contínua de $W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_0}(\Omega)$, para todo $s_0 \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$. Como $u \in W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega)$, então $u \in L^{s_0}(\Omega)$, para todo $s_0 \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$.

Por (3.4) temos que $f \in L^{\frac{s_0}{p}}(\Omega)$, para todo $s_0 \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$.

Com efeito, por (3.4)

$$\int_{\Omega} |f|^{\frac{s_0}{p}} \leq \int_{\Omega} (\lambda|a(x)| + |b(x)|)^{\frac{s_0}{p}} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{s_0}{p}}$$

Como a, b são funções suaves, então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^{\frac{s_0}{p}} &\leq C \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^p)^{\frac{s_0}{p}} \\ &\leq C 2^{\frac{s_0}{p}} \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^{s_0}) < \infty \end{aligned}$$

pois $u \in L^{s_0}(\Omega)$. Assim, $f \in L^{\frac{s_0}{p}}$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Apêndice B] temos que $u \in W^{2, \frac{s_0}{p}}(\Omega)$, $s_0 \in \left[\frac{2^*}{p}, +\infty\right)$. Tomando s_0 , tal que $\frac{s_0}{p} > N$, temos pelo Teorema B.8 [Ver Apêndice B] que $u \in C^{1, \mu}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \mu < 1$. Agora, vamos analisar o caso seguinte.

(2)_I Se $\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} > 0$, então pelo Teorema B.10 [Ver apêndice B], temos a imersão contínua $W^{2, \frac{2^*}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_1}(\Omega)$ onde $\frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}$. Logo, $u \in L^{t_1}(\Omega)$. Usando (3.4), temos que $f \in L^{\frac{t_1}{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Apêndice B] $u \in W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega)$. Vamos analisar os casos a seguir:

(1)_{II} Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} \leq 0$, segue do Teorema B.10 [Ver Apêndice B] que $W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_1}(\Omega)$, para todo $s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$, assim $u \in L^{s_1}(\Omega)$, para todo $s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$ e por (3.4), temos que $f \in L^{\frac{s_1}{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Apêndice B], $u \in W^{2, \frac{s_1}{p}}(\Omega)$, para todo $s_1 \in \left[\frac{t_1}{p}, +\infty\right)$. Tome s_1 , tal que $\frac{s_1}{p} > N$, logo, $W^{2, \frac{s_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \mu}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \mu < 1$, logo, $u \in C^{1, \mu}(\bar{\Omega})$. Agora, vamos analisar o caso seguinte.

(2)_{II} Se $\frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} > 0$, pelo Teorema B.10 [Ver Apêndice B] temos que $W^{2, \frac{t_1}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{t_2}(\Omega)$, onde $\frac{1}{t_2} = \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N}$, logo, $u \in L^{t_2}(\Omega)$. Novamente por (3.4), temos que $f \in L^{\frac{t_2}{p}}(\Omega)$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Apêndice B], $u \in W^{2, \frac{t_2}{p}}(\Omega)$. Mais uma vez vamos analisar os dois casos:

(1)_{III} Se $\frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} \leq 0$, segue do Teorema B.10 [Ver Apêndice B] a imersão contínua $W^{2, \frac{t_2}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^{s_2}(\Omega)$, para todo $s_2 \in \left[\frac{t_2}{p}, +\infty\right)$. Usando (3.4), temos que $f \in L^{s_2}(\Omega)$. Pelo Teorema de Agmon, Douglas e Nirenberg [Ver Apêndice B], $u \in W^{2, \frac{s_2}{p}}(\Omega)$, para todo $s_2 \in \left[\frac{t_2}{p}, +\infty\right)$. Escolhendo $s_2 \in \left[\frac{t_2}{p}, +\infty\right)$ de tal forma que $\frac{s_2}{p} > N$ temos a imersão contínua $W^{2, \frac{s_2}{p}}(\Omega) \hookrightarrow C^{1, \mu}(\bar{\Omega})$ com $0 < \mu < 1$, logo, $u \in C^{1, \mu}(\bar{\Omega})$.

(2)_{III} Se $\frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} > 0$, repetimos o processo feito em (2)_I e (2)_{II}. De maneira geral, repetindo esse processo, conhecido como método "bootstrap", para cada $j \in \mathbb{N}$, obtemos um t_j , tal que

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p}{t_{j-1}} - \frac{2}{N} \text{ com } \frac{1}{t_1} = \frac{p}{2^*} - \frac{2}{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2} &= \frac{p}{t_1} - \frac{2}{N} = p \left(\frac{p}{2^*} - \frac{2}{N} \right) - \frac{2}{N} = \frac{p^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p+1) \\ \frac{1}{t_3} &= \frac{p}{t_2} - \frac{2}{N} = p \left(\frac{p^2}{2^*} - \frac{2}{N}(p+1) \right) - \frac{2}{N} = \frac{p^3}{2^*} - \frac{2}{N}(p^2 + p + 1). \end{aligned}$$

De modo geral

$$\frac{1}{t_j} = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{j-1} p^k = \frac{p^j}{2^*} - \frac{2}{N} \cdot \frac{(p^j - 1)}{p - 1}$$

Logo,

$$\frac{1}{t_j} = \left(\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} \right) p^j + \frac{2}{N(p-1)} \quad (3.5)$$

Como $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $1 < p < 2^* - 1$ é claro que $\frac{1}{2^*} - \frac{2}{N(p-1)} < 0$.

Assim, observe que em (3.5), fixada uma dimensão N , existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{t_j} \leq 0$. Raciocinando como em (1)_I e (1)_{II} temos que $u \in C^{1,\mu}(\bar{\Omega})$, para algum $0 < \mu < 1$.

Pela regularidade de f e a relação (3.4) segue que f é limitada e localmente Hölder contínua e pelo Teorema B.9 [Ver Apêndice B] a solução u do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

satisfaz $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Desde que $u_1 \geq 0$ e $u_2 \geq 0$, segue da desigualdade de Harnack, $u_1(x) > 0$ e $u_2(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Apêndice A

Regularidade do funcional J_λ

Neste apêndice mostraremos que o funcional J_λ é de classe C^1 .

Definição A.1 *Seja $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Dizemos que φ possui uma derivada de Gateaux $f \in X'$ em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(u + th) - \varphi(u) - f(th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u é denotado por $\varphi'(u)$.

Definição A.2 *Seja $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Dizemos que φ possui uma derivada de Fréchet $f \in X'$ em $u \in A$ se*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} [\varphi(u + h) - \varphi(u) - f(h)] = 0.$$

Definição A.3 *Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua em A .*

Observação A.1 *A derivada de Gateaux é dada por*

$$\varphi'(u)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\varphi(u + th) - \varphi(u)].$$

Observação A.2 *Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gateaux .*

Proposição A.1 *Seja $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . Se φ possui uma derivada de Gateaux contínua em A , então $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$*

Demonstração: Consideremos $u \in A$ e $\varphi'(u)$ a derivada de Gateaux de φ em u . Pelo Teorema do Valor Médio (Ver [15]), existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$|\varphi(u + h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h)| = |\varphi'(u + \theta h)(h) - \varphi'(u)(h)| \quad (\text{A.1})$$

$$\leq \|\varphi'(u + \theta h) - \varphi'(u)\|_{X'} \|h\| \quad (\text{A.2})$$

Como φ possui derivada de Gateaux contínua em A , então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \epsilon$ temos

$$\|\varphi'(u + \theta h) - \varphi'(u)\|_{X'} < \epsilon$$

Segue então de A.1 que

$$|\varphi(u + h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h)| < \epsilon \|h\|$$

de onde concluímos que φ possui uma derivada de Fréchet e esta é contínua. ■

A partir de agora, estamos interessados em mostrar que o funcional J_λ definido em $W_0^{1,2}(\Omega)$ por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p+1} dx$$

é de classe $C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Para tal, consideremos os funcionais $J_1, J_2, J_3 : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por $J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$, $J_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx$, $J_3(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx$.

Proposição A.2 *O funcional $J_\lambda = J_1 - J_2 - J_3 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: É suficiente provar que as derivadas de Gateaux de J_1, J_2 e J_3 existem e são contínuas.

Primeiramente observaremos que o funcional $J_\lambda = J_1 - J_2 - J_3$ está bem definido.

De fato,

(i) Para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que $J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 < +\infty$. Assim, J_1 está bem definido de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em \mathbb{R} .

(ii) Para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \leq \left| \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} \right| \leq \int_{\Omega} |a(x)||u|^{q+1} \leq \max_{\Omega} |a(x)| \int_{\Omega} |u|^{q+1} < +\infty.$$

Portanto, $J_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx < +\infty$. Assim, J_2 está bem definido de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em \mathbb{R} .

(iii) Para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} \leq \left| \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} \right| \leq \int_{\Omega} |b(x)||u|^{p+1} \leq \max_{\Omega} |b(x)| \int_{\Omega} |u|^{p+1} < +\infty.$$

Portanto, $J_3(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx < +\infty$. Assim, J_3 está bem definido de $W_0^{1,2}(\Omega)$ em \mathbb{R} .

Afirmação A.1 *O funcional $J_1 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: J_1 é Gateaux-diferenciável, pois

$$\begin{aligned}
 \frac{J_1(u + tv) - J_1(u)}{t} &= \frac{\frac{1}{2}\|u + tv\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t} \\
 &= \frac{1}{2t} [\langle u + tv, u + tv \rangle - \langle u, u \rangle] \\
 &= \frac{1}{2t} [\langle u, u \rangle + \langle u, tv \rangle + \langle tv, u \rangle + \langle tv, tv \rangle - \langle u, u \rangle] \\
 &= \frac{1}{2t} [2t \langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle] \\
 &= \langle u, v \rangle + \frac{t}{2} \langle v, v \rangle
 \end{aligned}$$

Daí,

$$J'(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_1(u + tv) - J_1(u)}{t} = \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v$$

para todo $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Agora, mostraremos que J_1 é contínuo, isto é, se $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, então $J'_1(u_n) \rightarrow J'_1(u)$, ou seja se $\|u_n - u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0$, então $\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} \rightarrow 0$. Isso é equivalente a mostrar que

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |[J'_1(u_n) - J'_1(u)]v| \rightarrow 0.$$

De fato, seja $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Observe que,

$$\begin{aligned}
 |(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| &= |J'_1(u_n)v - J'_1(u)v| \\
 &= |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| \\
 &= |\langle u_n - u, v \rangle|.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| &= |\langle u_n - u, v \rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \|v\| \end{aligned}$$

Para $\|v\| \leq 1$, temos

$$|(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| \leq \|u_n - u\|.$$

Portanto,

$$\sup_{v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ e } \|v\| \leq 1} |(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| \leq \|u_n - u\|$$

ou seja,

$$0 \leq \|J'_1(u_n) - J'_1(u)\| \leq \|u_n - u\| \rightarrow 0$$

mostrando que,

$$\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))'} \rightarrow 0$$

e assim $J'_1(u)$ é contínuo e portanto, $J_1 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmção A.2 *O funcional $J_2 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: Existência da derivada de Gateaux de J_2 .

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u + stv|^{q+1}$. Temos que:

$$(a) f'(s) = \lambda a(x) (|u + stv|)^{q-1} (u + stv) tv;$$

$$(b) f(1) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u + tv|^{q+1};$$

$$(c) f(0) = \frac{\lambda}{q+1} a(x) |u|^{q+1}.$$

Sendo f diferenciável em $(0, 1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\delta).$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{q+1}a(x)|u+tv|^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1}a(x)|u|^{q+1} &= \lambda a(x)(|u+\delta tv|^{q-1}).(u+\delta tv).tv \\ \frac{\lambda}{q+1}a(x)\left(\frac{|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1}}{t}\right) &= \lambda a(x)(|u+\delta tv|^{q-1}).(u+\delta tv)v \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{q+1}a(x)\left(\frac{|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1}}{t}\right) = \lambda a(x)|u|^{q-1}uv$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda}{q+1}a(x)\left(\frac{|u+tv|^{q+1}-|u|^{q+1}}{t}\right) \right| &= \lambda|a(x)||u+\delta tv|^q|v| \\ &\leq \lambda|a(x)|(|u|+\delta|t||v|)^q|v| \\ &\leq \lambda|a(x)|(|u|+|v|)^q|v| \\ &\leq \lambda k(|u|+|v|)^q|v| \\ &\leq \lambda k 2^q(|u|^q+|v|^q)|v| \\ &\leq c_1|u|^q|v| + c_1|v|^{q+1} \end{aligned}$$

Se $|u(x)| \leq 1$, então, como $0 < q < 1$ temos que $|u(x)|^q \leq 1$.

Se $|u(x)| \geq 1$, então, $|u(x)|^q \leq |u(x)|$.

Logo, $c_1|u|^q|v| \leq c_1(1+|u|).|v|$

Daí,

$$\lambda k(|u|+|v|)^q|v| \leq c_1|v| + c_1|u||v| + c_1|v|^{q+1}$$

Como $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq 2^*$

então, $u, v \in L^p(\Omega)$, para todo p , $1 \leq p \leq 2^*$.

Logo, $v \in L^{q+1}(\Omega)$, $u \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$. Assim, pela desigualdade de Hölder temos que $|u||v| \in L^1(\Omega)$.

Além disso,

$$\left| \frac{\lambda}{q+1} a(x) \left(\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right) \right| \leq c_1|v| + c_1|uv| + c_1|v|^{q+1} \in L^1(\Omega).$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) \left(\frac{|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1}}{t} \right) = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv$$

Concluimos então que

$$J'_2(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} = \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv dx$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de J_2 em u com

$$J'_2(u)v = \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv dx$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Continuidade da derivada de Gateaux de J_2 .

Consideremos $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então, temos que

$$u_n \rightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \exists g \in L^{2^*}(\Omega) \text{ tal que} \tag{A.3}$$

$$|u_n| \leq g, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |J'_2(u_n)v - J'_2(u)v| &= \left| \lambda \int_{\Omega} a(x) |u_n|^{q-1} u_n v dx - \lambda \int_{\Omega} a(x) |u|^{q-1} uv dx \right| \\ &= \left| \lambda \int_{\Omega} a(x) (|u_n|^{q-1} u_n - |u|^{q-1} u) v dx \right| \\ &\leq \lambda \int_{\Omega} |a(x)| \left| |u_n|^{q-1} u_n - |u|^{q-1} u \right| |v| dx \\ &\leq k \int_{\Omega} \left| |u_n|^{q-1} u_n - |u|^{q-1} u \right| |v| dx \end{aligned}$$

usando Hölder para os expoentes $\frac{q+1}{q}$ e $q+1$ temos

$$|J'_2(u_n)v - J'_2(u)v| \leq k \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} \right)^{\frac{1}{q+1}}$$

Como $0 < q < 1$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega), 1 \leq s \leq 2^*$ então, $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}$. Logo

$$\begin{aligned} |J'_2(u_n)v - J'_2(u)v| &\leq kC \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}} \|v\| \\ &\leq kC \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}}. \end{aligned}$$

pois $\|v\| \leq 1$. Logo,

$$\|J'_2(u_n)v - J'_2(u)v\| \leq kC \left(\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \right)^{\frac{q}{q+1}} \quad (\text{A.4})$$

Como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω , então observe que

$$||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u| \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned} \left(||u_n(x)|^{q-1}u_n(x) - |u(x)|^{q-1}u(x)|^{\frac{q-1}{q}} \right)^{\frac{2^*}{q+1}} &\leq (||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|)^{\frac{2^*}{q}} \\ &\leq (|u_n(x)|^q + |u(x)|^q)^{\frac{2^*}{q}} \\ &\leq 2^{\frac{2^*}{q}} (|u_n(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*}) \end{aligned}$$

E por (A.3)

$$\left(||u_n(x)|^{q-1}u_n(x) - |u(x)|^{q-1}u(x)|^{\frac{q-1}{q}} \right)^{\frac{2^*}{q+1}} \leq 2^{\frac{2^*}{q}} (g^{2^*}(x) + |u|^{2^*}) \in L^1(\Omega)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\Omega} ||u_n|^{q-1}u_n - |u|^{q-1}u|^{\frac{q+1}{q}} \rightarrow 0$$

Por (A.4), temos que

$$\|J'_2(u_n)v - J'_2(u)v\| \rightarrow 0$$

Portanto, J_2 é contínuo e $J_2 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmção A.3 *O funcional $J_3 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: Existência da Derivada de Gateaux de J_3 .

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \frac{1}{p+1}b(x)|u + stv|^{p+1}$. Temos que:

$$(a) f'(s) = b(x)(|u + stv|)^{p-1}(u + stv)tv;$$

$$(b) f(1) = \frac{1}{p+1}a(x)|u + tv|^{q+1};$$

$$(c) f(0) = \frac{1}{p+1}b(x)|u|^{p+1}.$$

Sendo f diferenciável em $(0, 1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\delta \in (0, 1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\delta).$$

ou seja,

$$\frac{1}{p+1}b(x)|u + tv|^{p+1} - \frac{1}{p+1}b(x)|u|^{p+1} = b(x)(|u + \delta tv|^{p-1}).(u + \delta tv).tv$$

$$\frac{1}{p+1}b(x) \left(\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right) = b(x)(|u + \delta tv|^{p-1}).(u + \delta tv)v$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1}b(x) \left(\frac{|u + tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right) = b(x)|u|^{p-1}uv$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{p+1} b(x) \left(\frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right) \right| &= |b(x)| |u + \delta tv|^p |v| \\
&\leq |b(x)| (|u| + \delta |t| |v|)^p |v| \\
&\leq |b(x)| (|u| + |v|)^p |v| \\
&\leq k(|u| + |v|)^p |v|
\end{aligned}$$

Como $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq 2^*$ então, $u, v \in L^{p+1}(\Omega)$. Logo, $u + v \in L^{p+1}(\Omega)$. Daí, $(|u| + |v|)^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Assim, pela desigualdade de Hölder com os expoentes p e $\frac{p+1}{p}$, temos que

$$k(|u| + |v|)^p |v| \in L^1(\Omega).$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) \left(\frac{|u+tv|^{p+1} - |u|^{p+1}}{t} \right) = \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} uv$$

Concluimos então que

$$J'_3(u)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_3(u+tv) - J_3(u)}{t} = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} uv dx$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de J_3 em u com

$$J'_3(u)v = \int_{\Omega} b(x) |u|^{p-1} uv dx$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Continuidade da derivada de Gateaux de J_3

Consideremos $(u_n) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Então, temos que

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } \exists g \in L^{2^*}(\Omega) \text{ tal que} \quad (\text{A.5})$$

$$|u_n| \leq g, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |J'_3(u_n)v - J'_3(u)v| &= \left| \int_{\Omega} b(x)|u_n|^{p-1}u_nv dx - \int_{\Omega} b(x)|u|^{p-1}uv dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} b(x)(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |b(x)| \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right| |v| dx \\ &\leq k \int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right| |v| dx \end{aligned}$$

usando Hölder para os expoentes $\frac{p+1}{p}$ e $p+1$ temos

$$|J'_3(u_n)v - J'_3(u)v| \leq k \left(\int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Como $1 < p < 2^* - 1$ e pela imersão contínua de $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, $1 \leq s \leq 2^*$ então, $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}$. Logo

$$\begin{aligned} |J'_3(u_n)v - J'_3(u)v| &\leq kC \left(\int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|v\| \\ &\leq kC \left(\int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

pois $\|v\| \leq 1$. Logo,

$$\|J'_3(u_n)v - J'_3(u)v\| \leq kC \left(\int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \quad (\text{A.6})$$

Como $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p. em Ω , então observe que

$$\left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right| \rightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\left(\left| |u_n(x)|^{p-1}u_n(x) - |u(x)|^{p-1}u(x) \right|^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{2^*}{p+1}} &\leq \left(\left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right| \right)^{\frac{2^*}{p}} \\
&\leq (|u_n(x)|^p + |u(x)|^p)^{\frac{2^*}{p}} \\
&\leq 2^{\frac{2^*}{p}} (|u_n(x)|^{2^*} + |u(x)|^{2^*})
\end{aligned}$$

E por (A.5)

$$\left(\left| |u_n(x)|^{p-1}u_n(x) - |u(x)|^{p-1}u(x) \right|^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{2^*}{p+1}} \leq 2^{\frac{2^*}{p}} (g^{2^*}(x) + |u|^{2^*}) \in L^1(\Omega)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\Omega} \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right|^{\frac{p+1}{p}} \rightarrow 0$$

Por (A.6), temos que

$$\|J'_3(u_n)v - J'_3(u)v\| \rightarrow 0$$

Portanto, J_3 é contínuo e $J_3 \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$.

Apêndice B

Resultados Básicos

As definições, lemas e teoremas básicos usados no trabalho estão aqui enunciados.

Lema B.1 *Dado um espaço normado E e uma função $J : E \rightarrow \mathbb{R}$, se $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} J(x) = +\infty$, então J é limitado inferiormente.*

Demonstração: De fato, $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J_\lambda(u) = +\infty$, então, para todo $M_1 > 0$, existe $k > 0$, tal que

$$J_\lambda(u) \geq M_1 \text{ com } \|u\| \geq K.$$

Agora, para $\|u\| \leq K$, temos

$$\begin{aligned} -J_\lambda(u) \leq |J_\lambda(u)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} a(x)|u|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} b(x)|u|^{p+1} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\lambda}{q+1} \max_{\Omega} |a| \int_{\Omega} |u|^{q+1} dx + \frac{1}{p+1} \max_{\Omega} |b| \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + c_1 \|u\|^{q+1} + c_2 \|u\|^{p+1} \end{aligned}$$

implicando,

$$-J_\lambda(u) \leq c$$

ou seja,

$$J_\lambda(u) \geq -c.$$

■

Teorema B.1 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam X um espaço de Banach, $J, F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ e $M = \{u \in X; F(u) = 0\} = F^{-1}(\{0\})$ com $F'(u) \neq 0$, para todo $u \in M$. Se J é limitado inferiormente sobre M e existe $u_0 \in M$ tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u),$$

então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) verificando

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Demonstração: Ver [13].

Teorema B.2 *Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente no espaço normado X , isto é, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Então:*

- a) *O limite fraco x de (x_n) é único;*
- b) *Qualquer subsequência de (x_n) converge fracamente para x ;*
- c) *A sequência (x_n) é limitada em X .*

Demonstração: Ver [5].

Teorema B.3 *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em X , então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que*

$$(x_{n_j}) \rightharpoonup x \text{ em } X$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema B.4 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

- a) *$f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;*
- b) *Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. $n \in \mathbb{N}$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} f_n dx \rightarrow \int_{\Omega} f dx.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema B.5 (*Desigualdade de Hölder*) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} fg \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema B.6 (*Valor Intermediário*) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração: Ver [15].

Teorema B.7 (*Agmon, Douglas, Nirenberg*) Seja $f \in L^r(\Omega)$ com $1 < r < +\infty$. Então existe uma única $u \in W^{2,r}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante C independente de f e u tal que

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \|f\|_{p,\Omega}.$$

Em particular, se $r > \frac{N}{2}$ e $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ então existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração: Ver [13].

Teorema B.8 *Suponha $r > N$. Então vale a seguinte imersão compacta*

$$W^{2,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\bar{\Omega})$$

com $0 < \mu < 1 - \frac{N}{r}$.

Demonstração: Ver [1].

Teorema B.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^∞ . Se f é uma função limitada, localmente Hölder contínua em Ω e $\varphi \in C(\partial\Omega)$ então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C^2 \cap C(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [11].

Teorema B.10 *Seja $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < +\infty$. Então vale as seguintes imersões contínuas*

(i) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ temos $W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$*

(ii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ temos $W^{m,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$*

(iii) *se $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ temos $W^{m,p} \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [1].

Bibliografia

- [1] Adams, A., *Sobolev Spaces*, Academy Press, New York,(1975).
- [2] Ambrosetti, A., Brezis, H. e Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122(1994), 519-543.
- [3] Bartle, R. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons. New York , 1995.
- [4] Binding, P. A., Drabek, P. e Huang, Y. X., *On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations*, Eletron. J. Differential Equations, 1997, no.5, 1-11.
- [5] Brezis,H., *Analisis Funcional, Teoria y aplicaciones. Version espanola de Juan Ramon Esteban*, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.
- [6] Brown, K.J. e Zhang, Y., *The Nehari manifold for a semilinear elliptic problem with a sign changing weight function*, J. Differential Equations, 193 , 2003, 481-499.
- [7] Brown, K.J., Wu, T.F., *A Fiberling map approach to a semilinear elliptic boundary value problem*, Eletronic J. Differential Equations, Vol. 2007(2007), No. 69, pp. 1-9.
- [8] Chen, K.J., *On multiple solutions of concave e convex nonlinearities in elliptic equation on \mathbb{R}^N* , BVP ID 147008 (2009).
- [9] Figueiredo, D. G., Gossez J. P. e Ubilla, P., *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*, J. Funct. Anal., 199, 2003, 452-467.

- [10] Drabek, P. e Pohozaev, S. I., *Positive solutions for the p -Laplacian: application of the fibering method*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect A, 127, (1997), 703-726.
- [11] Gilbart, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin,(1977).
- [12] Ilyasov, Y., *On non-local existence results for elliptic operators with convex-concave nonlinearities*, Nonlinear Analysis, 61, 2005 211-236.
- [13] Kavian, O. *Introduction á la théorie des points critiques at applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Heildelberg, 1993.
- [14] Kreyszig,E. *Introductory Functional Analysis with Applications*,Rocky Mountain J. Math. Wiley ,1989. Mech. Anal. 46,82-95(1981).
- [15] Lima,E.L., *Curso de Análise,vol. 1. Rio de Janeiro , Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1976-vol. ilustr. (Projeto Euclides)*.
- [16] Wu,T.F., *Multiplicity results for a semilinear elliptic equation involving sign-changing weight function*, to appear in Rocky Mountain J. Math.