UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM- PA

2010

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO

Dissertação apresentada do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

BELÉM - PA

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)

Biblioteca Central / UFPA, Belém - PA

Ribeiro, Isilda Lucia de Camargo, 1952

Falta de decaimento exponencial de um sistema acoplado fracamente dissipativo / Isilda Lucia de Camargo Ribeiro; orientador, Mauro de Lima Santos. - 2010

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2010.

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Semigrupos. I. Título.

CDD:22. ed: 515.353

Isilda Lucia de Carmargo Ribeiro

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO FRACAMENTE DISSIPATIVO.

Esta Dissertação foi julgada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 26 de março de 2010

Prof. Dr. Giovany de J. M. Figueiredo
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos **(Orientador)**
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha **(Membro)**
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Prof. Dr. Dilberto da S. Almeida Junior **(Membro)**
Universidade Federal do Pará- UFPA-PPGME

Agradecimento

A Deus que é onipresente, onisciente e onipotente;

Aos meus pais Olmiro Ferreira de Camargo e Florinda Fanton de Camargo que são exemplos de honestidade, dignidade e respeito para mim, meus irmãos e meus filhos;

A meus filhos Dalise, Fabrício e Fabiano que sempre acreditaram em mim;

Ao meu esposo Riael da Silva Ribeiro que esteve comigo em todos os momentos desta conquista;

À Universidade Federal do Pará - UFPA, pela oportunidade de realizar este curso;

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA por ter permitido e facilitado a realização desse curso;

Ao meu orientador Prof. Dr. Mauro de Lima Santos pela atenção e paciência que sem elas seria muito difícil alcançar o objetivo;

Aos professores do curso de mestrado;

Aos colegas de mestrado que fizeram parte deste sonho realizado;

A Fundação de Apoio a Pesquisa do Pará - FAPESPA pelo apoio financeiro recebido durante o curso;

A todos aqueles que acreditaram e se alegraram com esta conquista.

"A dúvida permite extrair um núcleo de certeza, que cresce à medida que ela se radicaliza; é indubitável que, se duvido, penso."

Descartes

Conteúdo

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, e não decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema acoplado de equações de onda abaixo apresentado

$$(P)\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+u_t+\alpha v=0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,+\infty) \\ v_{tt}-\Delta v+\alpha u=0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,+\infty) \\ u=v=0 & \text{sobre} \quad \Gamma\times(0,+\infty) \\ u(x,0),v(x,0)=(u_0,v_0), & \text{em} \quad \Omega \\ (u_t(x,0),v_t(x,0))=(u_1(x),v_1(x)) & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

Palavras-chaves: Semigrupo, não estabilidade exponencial, decaimento polinomial.

Abstract

In this we study the existence, uniqueness, non exponential stabilization and the polynomial decay of the following coupled system

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{on} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0), v(x,0) & = \quad (u_0, v_0),\ \text{in}\ \Omega \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

We use semigroup tecnical, Gearhart Theorem and energy method.

Keywords: Semigroup, non exponential stabilization, polynomial decay.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar existência, unicidade, não decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema acoplado de equações de onda utilizando as Técnicas de Semigrupo, introduzido na literatura no final da década de 1990[14] método esse que se aplica a uma variedade de problemas dissipativos. O sistema acoplado de equações de onda está representado no problema

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0), v(x,0) = (u_0, v_0) & \text{em} \quad \Omega \\ (u-t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde Ω é um espaço de $\mathbb{R}^n$ aberto, limitado com fronteira regular, $\Gamma = \partial\Omega$, e α é um número real positivo e suficientemente pequeno. O modelo acima representa as vibrações de duas membranas elásticas sujeitas a uma força elástica que atrai uma membrana à outra com o coeficiente α,[6].

A equação de onda,[16]

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

descreve um sistema conservativo. É também conhecido que a equação de onda com termo de amortecimento, ([16], [8], [11]).

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

é exponencialmente estável.

Demonstraremos neste trabalho que o sistema de equações de onda, representado no problema (P) é bem posto e tem decaimento polinomial.

O sistema representado pelo problema (P) foi estudo por vários autores, dentre eles destacamos, ([1], [2]) e suas referências que mostraram que o sistema do problema (P) é bem posto e tem decaimento polinomial.

O diferencial é trabalhar com uma nova demonstração de decaimento polinomial, utilizando o teorema de Gearhart e argumentos de técnicas multiplicativas.

Esta dissertação é composta de três capítulos:

(i) O primeiro capítulo apresenta Teoremas e definições da Teoria de Semigrupo importantes para suporte e o desenvolvimento do trabalho;

(ii) o segundo capítulo trata sobre a existência e unicidade de solução do sistema de equações;

(iii) no terceiro capítulo mostraremos que o problema (P) não é exponencialmente estável.

Capítulo 1

Teoremas e Definições Fundamentais

Apresentaremos neste capítulo os principais aspectos da teoria de semigrupos, que usaremos nos seguintes capítulos

1.1 Alguns Resultados da Teoria de Semigrupo

Definição 1.1

Seja X um espaço de Hilbert real ou complexo equipado com o produto interno $(\ ,\ )$ e norma $\|\ .\ \|$. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear densamente definido sobre X. Dizemos que A é dissipativo se para algum $x \in D(A)$, $Re(Ax, x) \leq 0$

Definição 1.2

Uma família $S(t)(0 \leq t < \infty)$ de operadores lineares limitadas num espaço de Banach X é chamado de Semigrupo Fortemente Contínuo se

1. *$S(0) = I$, (I é o operador identidade em X);*
2. *$S(s + t) = S(s)S(t)$, $\forall t, s \geq 0$;*
3. *Para cada $x \in X$, $S(t)x$ é contínua em t sobre $[0, \infty)$.*

Para o semigrupo $S(t)$, definamos um operador denominado de A cujo domínio é $D(A)$ consistindo de pontos x tais que o limite

$$A_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, x \in D(A)$$

existe.

Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$. Dado um operador A, se A coincide com o gerador infinitesimal de $S(t)$, então dizemos que ele é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $S(t)$, $t \geq 0$.

Definição 1.3

Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é fortemente contínuo (ou C_0- semigrupo) se

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x, \forall x \in X \tag{1.1}$$

a equação (1.1) é equivalente a seguinte equação

$$\lim_{t \to 0^+} \parallel S(t)x - x \parallel = 0, \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Definição 1.4

Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínua, se

$$\lim_{t \to 0^+} \parallel S(t) - I \parallel = 0$$

Chamaremos de classe C_0 ou simplesmente semigrupo fortemente contínuo. Esse semigrupo poderá ser denotado por e^{At}.

Definição 1.5

Se $\{S(t) : t > 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X, seu gerador infinitesimal é o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

Observe que

$$A_x = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} S(t)x \mid_{t=0} ,$$

para $x \in D(A)$.

Definição 1.6

Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* seu dual. Indicaremos o valor $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por (x^*, x) ou (x, x^*). Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*, Re < x^*, x >=\| x \|^2 =\| x^* \|^2\}$$

Observação 1.1

O teorema de Hahn-Banach assegura que $F(x) \neq \varnothing$

Definição 1.7

Um operador A é dissipativo se para todo $x \in D(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re(Ax, x^*) \leq 0$.

Teorema 1.1

Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um C_0-semigrupo, então existem constante ω e $M \geq 0$ tal que

$$\| S(t) \| \leq Me^{\omega t}, \forall t \in [0, \infty[$$

Demonstração:

Vamos inicialmente mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $\| S(t) \|$ é limitada, para $0 \leq t \leq \eta$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência (t_m), com

$$\lim_{m \to \infty} t_m = 0 \text{ e } \| S(t_m) \| \geq M.$$

Do teorema da Limitação Uniforme segue que, para algum $x \in X$, a sequência$\{\| S(t_m)x \|\}$ é ilimitada, o que contraria $(1,1)$. Logo, existem $M \geq 0$ e $\eta \geq 0$ tais que

$$\| S(t) \| \leq M, \text{ para } 0 \leq t \leq \eta.$$

Como $\| S(0) \| = 1$ e $M \geq 1$, seje $\omega = \eta^{-1} \log M$. Assim $M = e^{\omega\eta}$. Dado $t \geq 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e

$0 \leq \delta < \eta$, tais que $t = n\eta + \delta$, ou seja, $n = \frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}$ e portanto, por propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}
\| S(t) \| &= \| S(n\eta + \delta) \| = \| S(n\eta)S(\delta) \| \\
&= \| S(\underbrace{\eta + \eta + \cdots + \eta}_{n \ \ vezes})S(\delta) \| \\
&= \| \underbrace{S(\eta)S(\eta)\cdots S(\eta)}_{n \ \ vezes} T(\delta) \| \\
&= \| [S(\eta)]^n S(\delta) \| = \| [S(\eta)]^n \| \| S(\delta) \| \\
&= \| S(\eta) \|^n \| S(\delta) \| \leq M^n M \\
&= M^{\frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}} M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M \leq e^{\omega t} M \\
&= M e^{\omega t}, \ \ \forall 0 \leq t < \infty
\end{aligned}$$

Corolário 1.1

Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo-C_0, então para cada $x \in X$, a função $t \longmapsto S(t)x$ é contínua de R^+ em X.

Demonstração *Veja [13].*

Definição 1.8

Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um C_0-semigrupo. Segue-se do Teorema 1.1, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| S(t) \leq M e^{\omega t}$, para $t \geq 0$. Se $\omega = 0$, $\| S(t) \| \leq M$, o semigrupo é chamado uniformemente limitado. No caso, em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo é chamado de contrações.

Definição 1.9

Dizemos que e^{At} é exponencialmente estável se existe uma constante positiva μ e $M \geq 1$ tal que

$$\| e^{At} \| \leq M e^{-\mu t}, \ \forall t \geq 0.$$

Aqui $\| \ . \ \|$ denota a norma em $\mathcal{L}(X, X)$.

Definição 1.10

Seja A um operador definido sobre um espaço de Banach X. Denotaremos por $\rho(A)$ o grupo resolvente de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in C; \ (\lambda I \setminus A)^{-1} \in \alpha\mathcal{L}(X)\}.$$

Denotaremos por $\sigma(A)$ o espectro de A, que definiremos como o complementar de $\rho(A)$ respeito a C, isto é, $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$.

Definição 1.11

Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $(\rho(A))$ de A é o conjunto de todos os números complexos $n\lambda$ para os quais $\lambda I - A$ é inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado em X. A família $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A.

Definição 1.12 *(Forma Bilinear)*

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert real. Um funcional $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to R$ é chamado uma forma bilinear se $B(., y)$ é linear para cada $y \in \mathcal{H}$ e $B(x, .)$ é linear para cada $x \in \mathcal{H}$. B é chamado de limitado (contínuo) se existe uma constante k tal que

$$| B(x, y) | \leq k \parallel x \parallel \parallel y \parallel, \ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

B é chamado coercivo se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x, x) \geq \delta \parallel x \parallel^2, \ \forall x \in \mathcal{H}$$

Corolário 1.2

Se A é o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

Demonstração *Veja [13]*

Teorema 1.2

Sejam A_0 gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo e $D(A^n)$ o domínio de A^n. Então $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.

Demonstração *Veja [13]*

Teorema 1.3

Dado o operador linear (não limitado) A com domínio $D(A)$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$,então A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.

Teorema 1.4

Seja A um operador linear dissipativo em $\mathcal{H}$. Se $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, então A é fechado (esse teorema caracteriza a definição do operador fechado).[3]

Teorema 1.5

Seja A dissipativo tal que $I_m(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$ (caracteriza a densidade do domínio do operador A no espaço da energia $\mathcal{H}$).[3]

Teorema 1.6 *(Stone)*

A é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se, e somente se, iA é auto-adjunto ($A = -A^*$). [3]

Teorema 1.7 *(Teorema de Lax-Milgram)*

Seja B uma forma bilinear, limitada, e coerciva sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então para cada funcional linear contínuo F em $\mathcal{H}$, existe um número $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$B(x, u) = F(x), \ \forall x \in \mathcal{H}$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em [1].

Teorema 1.8

Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0- semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:

1. $\forall x \in X, \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(S)xds = T(t)x;$
2. $\forall x \in X, \int_0^t T(S)xds \in D(A)$ *e* $A\left(\int_0^t T(S)xds\right) = T(t)x - x;$
3. $\forall x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ *e* $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$, $\forall t > 0;$
4. $\forall x \in D(A)$ *e* $t, s \geq 0$, $T(t)x - T(S)x = \int_S^t T(\tau)Axd\tau = \int_S^t AT(\tau)xd\tau.$

Demonstração 1.1 Ver [13]

Teorema 1.9 *(Hille - Yosida)*

Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações, se e somente se

1. *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*
2. *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém R^+ e para todo $\lambda > 0$*

$$\parallel R(\lambda, \Lambda) \parallel \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração:

Como A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$, então A é fechado e $\overline{D(A)} = X$. Para cada $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja $\mathrm{R}(\lambda) : X \to X$ definido por

$$\mathrm{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \tag{1.3}$$

Como a função $t \longmapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada em $[0, \infty)$, a integral (1.3) existe como uma integral imprópria, segundo Riemann, e define um operador $\mathrm{R}(\lambda)$ linear limitado satisfazendo

$$\| \mathrm{R}(\lambda)x \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| T(t)x \| dt \leq \frac{1}{\lambda} \| x \|, \quad \forall\ \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Além disso, multiplicando (1.3) por $\dfrac{T(h)-1}{h}$, obtemos, para $h > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h)-1}{h}\right)\mathrm{R}(\lambda)x &= \left(\frac{T(h)-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{T(h)}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h)T(t)x dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $t + h = s$ na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h)-1}{h}\right)\mathrm{R}(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h}\left(\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt\right) \\ &= \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\left[\int_h^0 e^{-\lambda t} T(t)x dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt\right] + \frac{1}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como o lado direito de (1.5) converge para $\lambda\mathrm{R}(\lambda)x - x$, temos $\mathrm{R}(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$A\mathrm{R}(\lambda)x = \lambda\mathrm{R}(\lambda)x - x. \tag{1.6}$$

Ou seja,

$$x = \lambda\mathrm{R}(\lambda)x - A\mathrm{R}(\lambda)x = (\lambda I - A)\mathrm{R}(\lambda)x.$$

Assim $(\lambda I - A)\mathrm{R}(\lambda)x = I$, para todo $\lambda > 0$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right) = A\mathrm{R}(\lambda)x. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De(1.6) e (1.7), obtemos $\mathrm{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Assim, para $\lambda > 0$, $\mathrm{R}(\lambda)$ é o inverso de $\lambda I - A$, e satisfaz a estimativa (1.4).

Os lemas seguintes são fundamentais na demonstração de (1) e (2).

Lema 1.1

Suponha que A satisfaz as condições (1) e (2) do teorema anterior e seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração

Suponhamos primeiramente que $x \in \mathcal{D}(A)$, logo de (1.6) e (1.7), obtemos

$$\| \lambda\mathrm{R}(\lambda, A)x - x \| - \| A\mathrm{R}(\lambda, A)x + x - x \| = \| \mathrm{R}(\lambda, A)Ax \| .$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\| \mathrm{R}(\lambda, A)Ax \| \leq \| \mathrm{R}(\lambda, A) \| \| Ax \| .$$

Pelo item (2) do teorema anterior, temos

$$\| \mathrm{R}(\lambda, A) \| \| Ax \| \leq \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \to 0,$$

quando $\lambda \to \infty$ em $\mathcal{D}(A)$ é denso em χ e $\| \lambda\mathrm{R}(\lambda, A) \| \leq 1$, então $\lambda\mathrm{R}(\lambda, A)x \to x$, quando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$.

Para todo $\lambda > 0$, consideremos a aproximação de Yosida A_λ de A dada por

$$A_\lambda = \lambda A\mathrm{R}(\lambda, A) = \lambda(\lambda R(\lambda, A) - I) = \lambda^2\mathrm{R}(\lambda, A) - \lambda I) \tag{1.8}$$

É imediato que, para cada $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear continuo em X e é consequência imediata do lema (1.1) e de (1.8), que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax.$$

Lema 1.2

Seja A satisfazendo as condições (1) e (2) do teorema anterior. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então A_λ, é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para cada $x \in X$, λ, $\mu > 0$, temos

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq \| A_\lambda x - A_\mu x \|, \quad \forall t \geq 0. \tag{1.9}$$

Corolário 1.3

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x, \forall x \in X. \tag{1.10}$$

Demonstração:

Do teorema anterior, segue que o lado direito de (1.10) define um C_0-semigrupo de contrações $S(t)$ cujo gerador infinitesimal é A e pela unicidade do gerador infinitesimal, concluímos que $T(t) = S(t)$.

Corolário 1.4

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : R\lambda > 0\}$ e para tais λ

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{R\lambda}.$$

Demonstração:

O operador $\mathrm{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ está bem definido para λ, satisfazendo $\mathrm{R}\lambda > 0$.

Na prova da primeira parte do teorema anterior demonstrado que $\mathrm{R}(\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = (\lambda I - A)^{-1}$, portanto $\rho(A) \supset \{\lambda : \mathrm{R}\lambda > 0\}$ e a estimativa é imediata.

Teorema 1.10

Um operador A é dissipativo se e somente se

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \lambda > 0.$$

Demonstração:

Suponhamos que A é dissipativo e sejam $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e $\mathrm{R} < Ax, x^* > \leq 0$, então

$$\| (\lambda I - A)x \| \cdot \| x \| = \| \lambda x - Ax \| \cdot \| x^* \| . \tag{1.11}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \| \lambda x - Ax \| \cdot \| x^* \| \geq | < \lambda x - Ax, x^* > | \geq Re < \lambda x - Ax, x^* > &= Re(< \lambda x - x^* > - < Ax, x^* >) \\ &= Re < \lambda x, x^* > - Re < Ax, x^* > \\ &= \lambda Re < x, x^* > - Re < Ax, x^* > . \end{aligned}$$

Como $Re < Ax, x^* > \leq 0$, então

$$\lambda Re < x, x^* > - Re < Ax, x^* > \geq \lambda Re < x, x^* > = \lambda \| x \|^2 .$$

portanto,

$$\| (\lambda I - A)x \| \cdot \| x \| \geq \lambda \| x \|^2 . \tag{1.12}$$

Como $\| x \| \neq 0$, então de (1.12), segue o resultado.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{D}(A)$ e suponhamos que

$$\lambda \| x \| \leq \| (\lambda I - A)x \|, \quad \forall \lambda > 0.$$

Sejam $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \dfrac{y_\lambda^*}{\| y_\lambda^* \|}$, então $\| z_\lambda^* \| = 1$ e

$$\begin{aligned} \lambda \| x \| \leq \| \lambda x - Ax \| = \| \lambda x - Ax \| \cdot \| z_\lambda^* \| = < \lambda x - Ax, z_\lambda^* > &= \langle \lambda x, z_\lambda^* \rangle - \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &= \lambda Re \langle x, z_\lambda^* \rangle - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\ &\leq \lambda Re |\langle x, z_\lambda^* \rangle| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\lambda Re |\langle x, z_\lambda^* \rangle| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq \lambda \| x \| \cdot \| z_\lambda^* \| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle = \lambda \| x \| - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle.$$

Logo, $\lambda \| x \| \leq \lambda \cdot \| z_\lambda^* - Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle, \quad \forall \lambda > 0$. Portanto

$$Re \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0. \tag{1.13}$$

Dividindo a desigualdade(1.13) por $\lambda > 0$, obtemos

$$\| x \| \leq Re\langle Ax, z_\lambda^* \rangle - \frac{1}{\lambda} Re\langle Ax, z_\lambda^* \rangle,$$

o que resulta em

$$Re\langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \| x \| + \frac{1}{\lambda} Re\langle Ax, z_\lambda^* \rangle = \| x \| - \frac{1}{\lambda} Re|\langle Ax, z_\lambda^* \rangle|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\| x \| - \frac{1}{\lambda} Re|\langle Ax, z_\lambda^* \rangle| \geq \| x \| - \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \cdot \| z_\lambda^* \| .$$

Assim,

$$Re\langle x, z_\lambda^* \geq \| x \| - \frac{1}{\lambda} \| Ax \| \cdot \| z_\lambda^* \| . \tag{1.14}$$

Como a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca, $\{z_\lambda^* : \lambda > 0\}$, possui um ponto de acumulação $z^* \in X^*$, com $\| z^* \| \leq 1$. De (1.13) e (1.14) segue que $Re\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$ e $Re\langle x, z^* \rangle \geq \| x \|$. Porém $Re\langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \| x \|$, portanto

$$Re\langle x, z^* \rangle = \| x \| .$$

Fazendo $x^* = \| x \| z^*$, temos que $x^* \in F(x)$. De fato, temos

$$Re\langle x^*, x \rangle = Re\langle \| x \| z^*, x \rangle = \| x \| Re\langle z^*, x \rangle = \| x \| \cdot \| x \| = \| x \|^2 .$$

Daí vem que $\| x^* \| = \| \| x \| z^* \| = \| x \| \cdot \| z^* \| = \| x \|$. Portanto $x^* \in F(x)$.

Mostraremos, agora, que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. De fato, sabemos que $Re\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$, logo $Re\left\langle Ax, \dfrac{x^*}{\| x \|} \right\rangle \leq 0$. Ou ainda, $\frac{1}{\|x\|} Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Portanto $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$, e assim A é dissipativo.

Teorema 1.11 (Lumer-Phillipis) *Seja A um operador linear em X com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X.*

i *Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.*

ii *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações sobre X, então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, temos que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Demonstração:

(i) Seja $\lambda > 0$, sendo A dissipativo temos

$$\| (\lambda I - A)x \| \geq \lambda \| x \|, \quad \forall \in \mathcal{D}(A). \tag{1.15}$$

Visto que $R(\lambda_0 I - A) = X$, de (1.15) com $\lambda = \lambda_0$, segue-se que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e, portanto fechado. Então $\lambda_0 I - A$ é fechado e assim A é fechado.

Se $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$, então de (1.15) segue que $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Do teorema de Hille-Yosida segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em X.

Para completar a prova de (i) resta mostrar que $R(\lambda I_A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Consideremos o conjunto $\Lambda = \{\lambda; 0 < \lambda < \infty \ e \ R(\lambda I - A) = X\}$. Se $\lambda \in \Lambda$, então por (1.15), $\lambda \in \rho(A)$. A interseção desta vizinhança com a reta real está contida em Λ e, portanto Λ é aberto. Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, com $\lambda > 0$. Para cada $y \in X$, existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A x_n = y \tag{1.16}$$

De (1.16) segue que $\| x_n \| \leq \frac{1}{\lambda_n} \| y \| \leq C$, para alguma constante $C > 0$. Assim

$$\lambda_m \| x_n - x_m \| \leq \| \lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m) \| \leq |\lambda_n - \lambda_m| \| x_n \| \leq C|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(A)$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Então de (1.16), $Ax_n \to \lambda x - y$. Como A é fechado, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda x - y = Ax$. Portanto, $R(\lambda I - A) = X$. Assim, Λ também é fechado em $(0, \infty)$ e como $\lambda_0 \in \Lambda$ por hipótese, segue que $\Lambda = (0, \infty)$.

(ii) Se A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $T(t)$ em X, então pelo teorema de Hille-Yosida, $\rho(A) \supset]0, \infty[$ e portanto $R(\lambda I_A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, se $x \in \mathcal{D}(A)$ e $x^* \in F(x)$, então

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \| T(t)x \| \cdot \| x^* \| \leq \| x \|^2 .$$

Como

$$Re\langle T(t)x - x, x^* \rangle - Re\langle T(t)x, x^8 \rangle - Re\langle x, x^8 \rangle,$$

$$Re\langle T(t)x, x^* \rangle \leq \langle T(t)x, x^* \rangle \leq \| x \|^2, \quad \langle x, x^* \rangle = \| x \|^2,$$

então

$$Re\langle T(t)x, x^* \rangle - Re\langle x, x^* \rangle \leq 0. \tag{1.17}$$

Dividindo (1.17) por $t > 0$ e fazendo $t \to \infty$, obtemos $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Corolário 1.5 *Seja A um operador com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Ver [1]

O teorema de Gearhart é fundamental na demonstração do principal resultado deste trabalho.

Teorema 1.12 (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in R\} \equiv iR$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} \parallel (i\beta I - A)^{-1} \parallel_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Demonstração: veja [5].

1.2 Propriedades Assintóticas de um Semigrupo

Teorema 1.13 *Seja $-A \in G(\mathcal{H}, M, 0)$ com A invertível. Se $T(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador A no espaço $\mathcal{H}$ (de Hilbert), então para todo $Y > 0$ são equivalentes:*

(i) $||T(t)A^{-y}||_{L(\mathcal{H})} \leq \dfrac{C}{t^\beta}, \ \forall t > 0;$

(ii) $||T(t)A^{-y\alpha}||_{L(\mathcal{H})} \leq \dfrac{C}{t^{\alpha\beta}}, \ \forall \alpha > 0;$

Demonstração:

Será feita para $\beta = 1$ pois o caso geral é análogo.Vamos supor inicialmente que (i) acontece,então temos

$$||T(t)A^{-\eta y}|| = ||[T(\frac{t}{\eta})A^{-Y}]^\eta|| \leq \frac{(C)^\eta}{\frac{t}{\eta}} = \frac{(C\eta)}{t^\eta} \tag{1.18}$$

Seja $\theta \in (0, 1)$. Então

$$||T(t)A^{-\eta Y\theta}|| = ||A^{\eta Y(1-\theta)}T(t)^\theta A^{-\eta Y(1-\theta)}A^{-\eta Y\theta}|| \leq ||A^{\eta Y}T(t)A^{-\eta y}||^{1-\theta}||T(t)A^{-\eta Y}||^\theta$$

Usando (1.18) e o fato de $||T(t)|| \leq M$, segue que

$$||T(t)A^{-\eta Y\theta}|| \leq \frac{C'(\eta)}{t^{\eta\theta}} \ \ \forall t > 0, \eta \in \mathbb{N}, \, \theta \in (0, 1) \tag{1.19}$$

Para $\alpha > 0$ e $\eta > \alpha$, definimos $\theta := \frac{\alpha}{\eta}$. Segue que $\theta \in (0,1)$ e de (1.19) temos

$$||T(t)A^{-Y\alpha}|| \leq \frac{C(n)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Suponhamos agora que (ii) acontece. Fazendo $\sigma := Y\alpha$, segue da hipótese que

$$||T(t)A^{-\sigma}|| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0 \tag{1.20}$$

Usando (1.20), temos

$$||T(t)A^{-\eta\sigma}|| = ||T(\frac{t}{\eta})A^{\sigma}]|| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\eta\alpha}}, \quad \forall \;\; t > 0, \;\; \eta \in \mathbb{N} \tag{1.21}$$

Seja $\overline{\theta} \in (0,1)$. De (1.21), temos

$$||T(t)A^{-\eta\sigma\overline{\theta}}|| \leq ||A^{\eta\sigma}T(t)A^{\eta\sigma}||^{1-\overline{\theta}}||T(t)A^{-\eta\sigma}||^{\overline{\theta}} \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\eta\alpha\theta}} \tag{1.22}$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $\eta > \frac{1}{\alpha}$ e definindo $\overline{\theta} := \frac{1}{\eta\alpha}$, temos

$$\overline{\theta} \in (0,1), \quad \eta\sigma\overline{\theta} = Y, \quad \eta\alpha\overline{\theta} = 1$$

De (1.22) segue que (i) acontece.

Definição 1.13

Dizemos que e^{At} *é analítico se* e^{At} *admite uma extensão* $T(\lambda)$ *para* $\lambda \in \Delta_e$, *onde* $\Delta_\theta = \{\lambda \in C; \mid arg\lambda \mid < e\}$, *para algum* $\theta > 0$ *tal que* $\lambda \to T(\lambda)$ *é analítica e*

1. $\lim_{\lambda \to 0} \parallel T(\lambda)z - z \parallel = 0, \forall z \in X, \;\; \lambda \in \Delta_\theta$;

2. $T(\lambda + \mu) = T(\lambda)T(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Delta_\theta$, *ou equivalentemente, existe uma constante* $k > 0$ *tal que*

$$\parallel Ae_{At} \parallel \leq kt^{-1}, \forall t > 0.$$

Definição 1.14

Seja A *um operador num espaço de Banach* X. *Chamaremos de cota superior do espectro de* A *ao valor*

$$w_\sigma(A) = sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}$$

Definição 1.15

Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo e^{At} de classe C_0. Diremos que $w_0(A)$ é o tipo do semigrupo gerado por A se

$$w_0(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \parallel e^{At} \parallel}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \parallel e^{At} \parallel}{t}$$

Dizemos que o semigrupo e^{At} de classe C_0 possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro se

$$w_\sigma(T) = w_0(A)$$

Definição 1.16

Seja X e Y espaços métricos. Então $T : D(T) \to Y$ com domínio $D(T) \subset X$ é dito uma aplicação aberta, se para todo conjunto aberto de $D(T)$ a imagem é um conjunto aberto de Y

Teorema 1.14 *Se T(t) é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A definido num espaço X, então*

$$T(t)x \in D(A^\infty) = \cap_{t=0}^{\infty} D(A^i) \quad \forall x \in X$$

De fato, sendo $T'(t) = AT(t)$,segue que $T^n(t) = A^nT(t)$. Logo,para todo $x \in X$, tem-se

$$||A^nT(t)x|| = ||T^n(t)x|| \leq ||T'\left(\frac{t}{n}\right)^n x|| \leq ||T'\left(\frac{t}{n}x\right)||^n$$

Podemos ver que

$$||T'(t)|| \leq \frac{C}{t}$$

Portanto segue

$$||A^nT(t)x|| \leq \frac{cn^n}{t^n}||x||^n$$

Donde segue o resultado. Nestas condições dizemos que T possui efeito regularizante.

O teorema seguinte nos dá a condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo é determinada pela cota superior do espectro.

Teorema 1.15 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos que*

$$w_0(A) = w_\sigma(A)$$

se ,e somente se, para todo $\epsilon < 0$, existe M_ϵ tal que

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq M_\epsilon \quad \forall \quad \mathbb{R}e\lambda \geq w_\sigma(A) + \epsilon$$

O teorema (1.15) nos diz que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando essa propriedade é válida, diz-se que o semigrupo possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro (PCDE). Se A gera um semigrupo analítico e se a cota superior do espectro for negativa, então temos decaimento exponencial, [3].

Teorema 1.16 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$.*

Se $w_\sigma(T) < 0$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que:

$$||T(t)|| \leq Me^{\mu t}$$

Demonstração:

Sendo A um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, existem constantes $w \geq 0$, $M \geq 1$, $\delta > 0$ e uma vizinhança V de $\lambda = w$ tal que

$$\rho(A) \supset \sum = \{\lambda; \ |arg(\lambda - w)| < \frac{\pi}{2} + \delta\}UV$$

e

$$||R(\lambda; A)|| \leq \frac{M}{|\lambda - w|} \quad \text{para } \lambda \in \sum$$

Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\tau e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda \tag{1.23}$$

onde τ é formado por

$$\tau_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + w; \ \rho \geq 0, \ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$$

e $\tau_2 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + w; \ \rho \geq 0, \ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$ e é orientado de tal forma que $\lim \lambda$ cresça ao longo de τ. A convergência em (1.23) para $t > 0$ é na topologia uniforme do operador. Por hipótese, temos que $R(\lambda; A)$ é analítico numa vizinhança de

$$\Delta = \{\lambda; \ Re\lambda > \sigma_1, \ |arg(\lambda - w)| \geq \theta$$

onde $0 > \sigma_1 > w_\sigma(T)$. Do teorema de Cauchy segue que τ em (1.23) pode ser mudado sem variar o valor da integral para a trajetória τ onde τ' é composta por

$$\begin{aligned}
\tau_1' &= \left\{\lambda = \rho e^{i\theta} + w : \rho \geq \frac{w - \sigma_1}{|\cos\theta|}\right\} \\
\tau_2' &= \{Re\lambda = \sigma_1 : |Im\lambda| \leq (w - \sigma_1)|\tan\theta|\} \\
\tau_3' &= \left\{\lambda = \rho e^{-i\theta} + w : \rho \geq \frac{w - \sigma_1}{|\cos\theta|}\right\}
\end{aligned}$$

e é orientada de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de τ'. Portanto,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi}i\int_{\tau'} e^{\lambda t}R(\lambda; A)d\lambda$$

Estimando $||T(t)||$ sobre τ_i' onde $i = 1,\ 2,\ 3$ encontramos para $t \geq 1$ e alguma constante M_1, que

$$||T(t)|| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}.$$

Desde que

$$||T(t)|| \leq M_2 \text{ para } 0 \leq t \leq 1,$$

então temos

$$||T(t)|| \leq Me^{\sigma_1 t} \text{ para } t \geq 0$$

Donde segue a conclusão.

Observação: Na prova do teorema (1.16), [3], temos decaimento exponencial da forma $||T(t)|| \leq M_1 e^{-\sigma_1 t}$ para todo $w_\sigma(T) < \sigma_1 < 0$. Em particular, para $\sigma_1 = w_\sigma(T) + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ muito pequeno, temos decaimento exponencial com taxa dada pela cota superior do espectro.Em outras palavras temos o seguinte resultado:

Teorema 1.17 *Se $T(t)$ é um semi grupo analítico com gerador infinitesimal A, então T possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro.*

O teorema nos diz que se um semi grupo é analítico, então temos decaimento exponencial da solução do sistema com a melhor taxa de decaimento.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Sistema Acoplado de Equações de Onda

Neste capítulo estudaremos a existência, a unicidade do sistema acoplado de equações de onda fracamente dissipativo descrito em (P)

$$(P)\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em} & \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em} & \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0 & \text{sobre} & \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0), v(x,0) = (u_0, v_0), & \text{em} & \Omega \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em} & \Omega \end{cases}$$

Sendo Ω um conjunto aberto limitado de R^n com fronteira regular, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$, onde u, v são deslocamentos verticais e α é um número real positivo suficientemente pequeno. Temos como condição de contorno

$$u = v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, \infty)$$

e as condições iniciais são:

$$\begin{cases} u(x,0), v(x,0) & = & (u_0, v_0), \text{ em } \Omega \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) & = & (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega \end{cases}$$

Consideremos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{2.1}$$

munido com o seguinte produto interno

$$< U, V >= \int_\Omega [\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + \alpha(u_1 v_2 + u_2 v_1)]\, dx + \int_\Omega [u_3 v_3 + u_4 v_4]\, dx \tag{2.2}$$

onde:

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \ e \ V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T.$$

O funcional de energia $E : \mathcal{H} \to \mathrm{R}$, associado ao problema (P) citado acima é definido por

$$E(t) \;=\; \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega v_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Omega uvdx \qquad (2.3)$$

A norma utilizada neste trabalho é:

$$\| U \|_{\mathcal{H}}^2 \geq \int_\Omega |u(x)|^2 dx \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega) \qquad (2.4)$$

Consideremos o operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido no espaço de energia $\mathcal{H}$ com domínio definido por:

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2 \qquad (2.5)$$

$$(2.6)$$

O operador A é definido por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \Delta & -\alpha I & -I & 0 \\ -\alpha I & \Delta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo o sistema acoplado, cujas equações estão no problema (P) acima citado, da seguinte forma: fazendo $\varphi = u_t$ e $\psi = v_t$ temos o problema de valor inicial ou problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= AU(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

com $U = (u, v, \varphi, \psi)^T$ e $U_0 = (u_0, v_0, u_1, v_1)^T$.

Usando o produto interno (2.5), obtermos

$$\begin{aligned} < U, V > &= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u dx + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla v dx + \alpha\int_\Omega \varphi v dx + \alpha \int_\Omega \psi u dx + \int_\Omega \Delta u \varphi dx + \int_\Omega -\varphi^2 dx \\ &\quad -\alpha \int_\Omega v\varphi dx + \int_\Omega \Delta v \psi dx - \alpha \int_\Omega u\psi dx \\ &= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u dx + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla v dx + \alpha\int_\Omega \varphi v dx + \alpha \int_\Omega \psi u dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi dx \\ &\quad - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\psi dx - \int_\Omega \varphi^2 dx - \int_\Omega v\varphi dx - \int_\Omega u\psi dx \\ &= -\int_\Omega |\varphi|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, A é um operador dissipativo.

2.2 Existência de Solução do Sistema Acoplado (P)

Usando os resultados: $\mathcal{D}(A)$ é denso em $\mathcal{H}$ e o operador A é dissipitavo, podemos demonstrar a existência de solução usando o teorema anterior.

O teorema a seguir prova que o sistema acoplado tem solução única.

Teorema 2.1 *O operador A é um gerador infinitesimal de semigrupo, $S(t)$, C_0 de contrações sobre o espaço $\mathcal{H}$.*

Demonstração

Como $D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$(espaço de Hilbert) e A é um operador dissipativo, então para demonstrar o teorema enunciado, é suficiente provar que $0 \in \rho(A)$. De fato, da equação resolvente $\lambda U - AU = F$, considere $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ (espaço de Hilbert).

Fazendo $\lambda = 0$, temos

$$-AU = F$$

onde $U = (u, v, \varphi, \psi)$. Substituindo na equação acima os valores de U, A e F podemos escrever

$$\varphi = f_1 \tag{2.7}$$

$$\psi = f_2 \tag{2.8}$$

$$\Delta u - \varphi - \alpha v = f_3 \tag{2.9}$$

$$\Delta v - \alpha u = f_4 \tag{2.10}$$

Como f_1 e $f_2 \in H_0^1(\omega)$ segue $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

Substituindo os valores de φ e ψ nas equações (2.9) e (2.10) e escrevendo convenientemente, temos

$$\Delta u - \varphi - \alpha v = f_1 + f_3 \tag{2.11}$$

$$\Delta v - \alpha u = f_4 \tag{2.12}$$

Multiplicando as equações (2.11) e (2.12) por θ_1, $\theta_2 \in H_0^1(\Omega)$ respectivamente,

$$\int_\Omega \Delta u \theta_1 dx - \alpha \int_\Omega v\theta_1 dx = \int_\Omega (f_1 + f_3)\theta_1 dx \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega \Delta v \theta_2 dx - \alpha \int_\Omega u\theta_2 dx = \int_\Omega f_4\theta_2 dx \tag{2.14}$$

Aplicando a fórmula de Green e somando as equações acima temos a seguinte equação

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \theta_1 dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_\omega (u\theta_2 + v\theta_1)dx = \int_\Omega [(f_1 + f_3)\theta_1 + f_4\theta_2]dx \tag{2.15}$$

A equação (2.15) dá origem ao seguinte problema variacional $b((u,v),(\theta_1,\theta_2)) = \chi(\theta_1,\theta_2), \ \ \forall \ \ \theta_1$, $\theta_2 \in H_0^1(\Omega)$ utilizado para determinar

$$u, \ v \in H_0^1(\Omega)$$

fazendo

$$b((u,v),(\theta_1,\theta_2)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\theta_1 dx + \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\theta_2 dx + \alpha\int_\omega (u\theta_2 + v\theta_1)dx \tag{2.16}$$

$$\chi(\theta_1,\theta_2) = \int_\Omega [(f_1+f_3)\theta_1 + f_4\theta_2]dx \tag{2.17}$$

Escrevendo convenientemente a equação (2.17)

$$\begin{aligned}
&\chi : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\
&(\theta_1,\theta_2) \to \chi(\theta_1,\theta_2) = \int_\Omega [(f_1+f_3)\theta_1 + f_4\theta_2)]dx \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \int_\Omega (f_1+f_3)\theta_1 dx + \int_\Omega f_4\theta_2 dx
\end{aligned}$$

Mostramos que χ é linear

$$\begin{aligned}
\chi(\alpha(\theta_1,\theta_2)+\beta(\varphi_1,\varphi_2)) &= \chi(\alpha\theta_1+\beta\varphi_1, \alpha\theta_2+\beta\varphi_2) \\
&= \int_\Omega (f_1+f_3)(\alpha\theta_1+\beta\varphi_1)dx + \int_\Omega f_4\theta_2(\alpha\theta_2+\beta\varphi_2)dx \\
&= \alpha\int_\Omega (f_1+f_3)\theta_1 dx + \beta\int_\Omega (f_1+f_3)\varphi_1 dx + \alpha\int_\Omega f_4\theta_2 dx + \beta\int_\Omega f_4\varphi_2 dx \\
&= \alpha\int_\Omega (f_1+f_3)\theta_1 dx + \alpha\int_\Omega f_4\theta_2 dx + \beta\int_\Omega (f_1+f_3)\varphi_1 dx + \beta\int_\Omega f_4\varphi_2 dx \\
&= \alpha\chi(\theta_1,\theta_2) + \beta\chi(\varphi_1,\varphi_2) \ \ \forall \ \ \alpha, \, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \theta_1, \, \theta_2, \, \varphi_1, \, \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

que χ é contínua

$$|\chi(\theta_1,\theta_2)| = |\int_\Omega (f_1+f_3)\theta_1 dx + \int_\Omega f_4\theta_2 dx| \tag{2.18}$$

$$\leq |\int_\Omega (f_1+f_3)\theta_1 dx| + |\int_\Omega f_4\theta_2 dx| \tag{2.19}$$

$$\leq \int_a^b |(f_1+f_3)||\theta_1|dx + |\int_a^b |f_4||\theta_2|dx \tag{2.20}$$

$$\leq |(f_1+f_3)|_{L^2\Omega)}|\theta_1|_{L^2(\Omega)} + |f_4|_{L^2(\Omega)}|\theta_2|_{L^2(\Omega)} \tag{2.21}$$

Fazendo

$$|(f_1+f_3)|_{L^2(\Omega)} = C_1 \ e \ |f_4|_{L^2(\Omega)} = C_2$$

e usando a desigualdade de Poincaré obtemos

$$|X(\theta_1,\theta_2)| \leq C_1|\theta_1|_{L^2(\Omega)} + C_2|\theta_2|_{L^2(\Omega)} \tag{2.22}$$

$$\leq (C_1||\theta_1|| + C_2||\theta_2||)H_0^1(\Omega) \tag{2.23}$$

escrevendo convenientemente a equação (2.16)

$$\begin{aligned} b : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)]^2 &\to \mathrm{R} \\ ((u,v)(\theta_1,\theta_2)) &\to b(u,v)(\theta_1,\theta_2) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\theta_1 dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_\Omega (u\theta_2 + v\theta_1)dx \end{aligned}$$

Mostraremos que b é linear

$$\begin{aligned} b((u,v)(\theta_1,\theta_2)) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\theta_1 dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \theta_2 dx + \alpha \int_\Omega (u\theta_1 + v\theta_2)dx \\ &\le \left(\int_{(\Omega)} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla\theta_1|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \left(\int_\Omega |\nabla\theta_2|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \alpha \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \theta_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \theta_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$2ab \le a^2 + b^2$$

obtemos que b é limitado

$$|b(u,v),(\theta_1,\theta_2)| \le c(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| v \|^2_{H_0^1(\Omega)} \left(\| \theta_1 \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| \theta_2 \|^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \ \forall (\theta_1,\theta_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Verificamos também que além de ser linear e limitado b é coercivo

$$b((u,v)(u,v)) = (\| u \|^2_{H_0^1} + \| v \|^2_{H_0^1} + 2\alpha \int_\Omega uvdx \ge \beta(\| u \|^2_{H_0^1} + \| v \|^2_{H_0^1})$$

onde β é uma constante pequena e positiva.

Logo pelo Teorema de Lax Milgran o problema variacional tem solução única

$$(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$$

Usando regularidade elíptica [12] segue-se que

$$(u,v) \in (H_0^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$$

Finalmente, segue que existe uma única $U \in \mathcal{D}(A)$, portanto $0 \in \rho(A)$. Logo A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Capítulo 3

Falta de Decaimento Exponencial e Estabilidade Polinomial

3.1 Falta de Decaimento Exponencial

Aqui usaremos condições necessárias e suficientes por ser o semigrupo C_0 de contrações, exponencialmente estável no espaço de Hilbert. Este resultado foi obtido por Gearhart[5] e Huang[9] independentemente. Para isso considere o problema espectral

$$\begin{cases} -\Delta w_\nu = \lambda_\nu w_\nu & \text{em} \quad \Omega \\ w_\nu = 0 & \text{em} \quad \Gamma \end{cases}$$

onde $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é crescente e

$$\lim_{\nu \to \infty} \lambda_\nu = \infty$$

O teorema seguinte nos dá as condições necessárias e suficientes para que o semigrupo C_0 de contrações seja exponencialmente estável, isto é que o resolvente de A contém o eixo imaginário e a norma do operador $\| (i\beta I - A)^{-1} \|$ seja limitado.

Teorema 3.1 (Gearhart) *Seja $S(t) = e^{At}$ o semi grupo C_0 de contrações no espaço de Hilbert. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se somente se*

$$\rho(A) \subset \{i\beta : \beta \in R\} \equiv iR \qquad \text{e}$$

$$\overline{\lim_{|\beta| \to \infty}} ||(i\beta I - A)^{-1}|| < \infty$$

onde $\rho(A)$ é o resolvente de A. Usaremos o teorema (3.1) para provar a falta de estabilidade do semigrupo $S(t)$ demonstrando o teorema seguinte.

Teorema 3.2 *Seja $S(t)$ o semi grupo $-C_0$ de contrações gerado por A, e*

$$\begin{aligned} E_1(t) &:= E_1(t,u,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv)dx \\ E_2(t) &:= E_1(t,u,v), \quad E_3(t) := E_1(t,u_{tt},v_{tt}) \end{aligned}$$

as energias associadas a (P). Então, segue que:

(i) *$S(t)$ não é exponencialmente estável, mas*

(ii) *Existe uma constante positiva d, tal que*

$$E_1(t) \leq \frac{d}{t}\sum_{j=1}^{3} E_j(0), \quad \text{para todo } t > 0.$$

DemonstraçãoPara provar (i), usamos o Teorema (3.1). Façamos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathcal{H}$ e $U(u, v, \varphi, \psi)$. Buscamos a solução do sistema,

$$i\lambda U - AU = F,$$

isto é

$$\begin{bmatrix} i\lambda u \\ i\lambda v \\ i\lambda\varphi \\ i\lambda\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ \Delta u - \alpha v - \varphi \\ \Delta v - \alpha u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

ou, de forma

$$\begin{aligned} i\lambda u - \varphi &= f_1 \\ i\lambda v - \psi &= f_2 \\ i\lambda\varphi - \Delta u + \alpha v + \varphi &= f_3 \\ i\lambda\psi - \Delta v + \alpha u &= f_4 \end{aligned} \tag{3.2}$$

z Consideremos $u = aw_\nu$, $v = bw_\nu$, $\varphi = cw_\nu$ e $\psi = dw_\nu$, com a, b, c, $d \in \mathbb{C}$. Então fazendo $f_1 = f_2 = 0$ e $f_3 = f_4 = w_\nu$ em (3.2) e usando o problema espectral (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda u &= \varphi \\ i\lambda v &= \psi \\ -\lambda^2 aw_\nu + a\lambda_\nu w_\nu + \alpha bw_\nu + cw_\nu &= w_\nu \\ -\lambda^2 bw_\nu + b\lambda_\nu w_\nu + \alpha aw_\nu &= w_\nu \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somando as duas últimas igualdade das equações (3.3), obtemos

$$-\lambda^2(a+b)w_\nu + (a+b)\lambda_\nu w_\nu + \alpha(a+b)w_\nu + cw_\nu = 2w_\nu \tag{3.4}$$

Escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_\nu + \alpha}$, e usando na equação (3.4), obtemos $c = 2$. Logo de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \\
b &= -\left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha}\right) \\
c &= 2 \\
d &= -\left(-2\alpha - i\frac{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} w_\nu, \\
v &= -\left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) w_\nu \\
\varphi &= 2w_\nu \\
\varphi &= -\left(-2\alpha + i\frac{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}\right) w_\nu
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Vamos mostrar que

$$||U||_{\mathcal{H}} \to \infty, \text{ quando } \nu \to \infty.$$

De fato, de (3.5), temos que

$$\begin{aligned}
\| U \|^2_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \left| \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \nabla w_\nu \right) \right|^2 dx + \int_\Omega \left| \left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right) \nabla w_\nu \right|^2 dx \\
&+2\alpha \int_\Omega \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} w_\nu \right) \left(\frac{2i}{\lambda_\nu + \alpha} \right) w_\nu dx + \int_\Omega \left| \left(\frac{-2\alpha + i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha} \right) \right|^2 dx \to \infty
\end{aligned} \tag{3.6}$$

quando $\nu \to \infty$. Lembrando que

$$\begin{aligned}
i\lambda U - AU &= F \\
U(i\lambda I - A) &= F \\
U &= (i\lambda I - A)^{-1} F
\end{aligned}$$

Segue de (3.6) e do teorema (3.1) que $S(t)$ não é exponencialmente estável.

3.2 Decaimento Polinomial

Nesta secção mostraremos que a energia associada ao problema (P) decai polinomialmente. Para isto usaremos o método de energia combinado com algumas desigualdades básicas.

Demonstraremos agora a parte (ii) do teorema (3.1). Multiplicando as equações acopladas do problema (P) por u_t e v_t respectivamente, integrando em Ω e aplicando a fórmula de Grenn, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx + \int_\Omega \alpha v u_t dx + \int_\Omega u_t u_t dx &= 0 \qquad (3.7)\\ \int_\Omega v_{tt}v_t dx - \int_\Omega \Delta v v_t dx + \int_\Omega \alpha u v_t dx &= 0 \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Somando as equações (3.7) e (3.8) temos

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx + \int_\Omega v_{tt}v_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx - \int_\Omega \Delta v v_t dx + \alpha\int_\Omega v u_t dx + \alpha\int_\Omega u v_t dx = -\int_\Omega u_t^2 dx \qquad (3.9)$$

Analisando convenientemente os termos da equação (3.9)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega 2\alpha u v dx = \int_\Omega u_t^2 dx (3.10)$$

Reorganizando os termos em (3.10)

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2 + v_t^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha u v) dx\right\} = -\int_\Omega u_t^2 dx$$

Conhecendo a definição de $E_1(t)$, temos que

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -\int_\Omega u_t^2 dx \qquad (3.11)$$

Voltando às equações acopladas do problema (P)

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v &= 0\\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u &= 0\end{aligned}$$

Derivando-as em relação à t e multiplicando por u_{tt} e v_{tt} respectivamente, integrando e somando as equações chegamos a equação (3.12)

$$\int_\Omega u_{ttt}\cdot u_{tt} dx + \int_\Omega v_{ttt}v_{tt} dx - \int_\Omega \Delta u_t u_{tt} dx - \int_\Omega \Delta v_t v_{tt} dx + \int_\Omega u_{tt}^2 dx + \int_\Omega \alpha u_t v_{tt} dx + \int_\Omega \alpha v_t u_{tt} dx = 0 \qquad (3.12)$$

Analisando convenientemente os termos da equação acima, usando a fórmula de Green obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{Dt}\int_\Omega v_{tt}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega 2\alpha u_t v_t dx = -\int_\Omega u_{tt}^2 dx$$

Por definição

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{tt}^2 + v_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2 + |\nabla v_{tt}|^2 + 2\alpha u_t v_t)dx$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}E_2(t) := -\int_\Omega u_{tt}^2 dx \tag{3.13}$$

Voltando as equações do problema (P), derivando duas vezes em relação à t, multiplicando por u_{ttt} e v_{ttt} respectivamente, integrando e somando as equações obtemos

$$\int_\Omega u_{tttt}u_{ttt}dx - \int_\Omega \Delta u_{tt}u_{ttt}dx - \int_\Omega \Delta v_{tt}v_{ttt}dx + \int_\Omega u_{ttt}u_{ttt}dx + \int_\Omega \alpha(u_{tt}v_{ttt} + v_{tt}u_{ttt})dx = 0 \tag{3.14}$$

Analisando convenientemente cada termo da equação (3.14), aplicando a fórmula de Green obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{ttt}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega v_{ttt}^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega 2\alpha u_{tt}v_{tt}dx = -\int_\Omega u_{ttt}^2 dx$$

Por definição

$$E_3(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{ttt}^2 + v_{ttt}^2 + |\nabla u_{tt}|^2 + |\nabla v_{tt}|^2 + 2\alpha u_{tt}v_{tt})dx$$

Logo

$$\frac{d}{dt}E_3(t) := -\int_\Omega u_{ttt}^2 dx \tag{3.15}$$

Determinando outras funcionais para controlar alguns termos. Derivando a primeira equação do problema (P) em relação à t, multiplicando por v_t e integrando em Ω, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_{ttt}v_t dx - \int_\Omega \Delta u_t v_t dx + \int_\Omega u_{tt}v_t dx + \int_\Omega \alpha v_t v_t dx &= 0 & (3.16)\\ \int_\Omega u_{ttt}v_t dx - \int_\Omega \Delta u_t v_t dx + \int_\Omega u_{tt}v_t dx &= -\alpha\int_\Omega v_t^2 dx & (3.17) \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Green e notando que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}v_t dx &= \int_\Omega u_{ttt}v dx + \int_\Omega u_{tt}v_t dx \\ \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \nabla u_t \nabla v dx\right) &= \int_\Omega \nabla u_{tt}\cdot\nabla v dx + \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla v_t dx \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t) = \int_\Omega \nabla u_{tt}\cdot\nabla v dx + \int_\Omega u_{ttt}\cdot v dx - \int_\Omega u_{ttt}\cdot v_t dx - \alpha\int_\Omega |v_t|^2 dx,$$

onde

$$\varphi_1(t) = \int_\Omega u_{tt} v dx + \int_\Omega \nabla u_t \nabla v dx$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t) \leq -\alpha \int_\Omega |v_t|^2 dx + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega v_t dx - \int_\Omega \nabla u_{tt} \nabla v dx - \int_\Omega u_{ttt} v dx \tag{3.18}$$

Multiplicando a primeira equação do problema (P) por u, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt} u dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_\Omega u v dx + \int_\Omega u_t u dx = 0$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx = \int_\Omega u_{tt} \cdot u dx + \int_\Omega |u_t|^2 dx$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_\Omega u v dx + \int_\Omega |u_t|^2 dx \tag{3.19}$$

onde

$$\varphi_2(t) := \varphi_2(t; u, v) = \int_\Omega u_t u dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \tag{3.20}$$

De modo análogo, derivando duas vezes a primeira equação do problema (P) em relação a t, multiplicando por u_{tt}, integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_{tttt} u_{tt} dx + \int_\Omega \nabla u_{tt} u_{tt} dx + \int_\Omega u_{ttt} u_{tt} dx + \int_\Omega \alpha v_t v_{tt} dx = 0 \tag{3.21}$$

Analisando cada termo convenientemente, aplicando a fórmula de Green e substituindo na equação (3.21), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{ttt} u_{tt} dx - \int_\Omega u_{ttt}^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}^2 dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega \alpha u_{tt} v_t dx + \alpha \int_\Omega u_{tt} v_t dx = 0$$

onde

$$\varphi_3(t) = \int_\Omega u_{ttt} u_{tt} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u_{tt}^2 dx + \alpha \int_\Omega u_{tt} v_t dx \tag{3.22}$$

Obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_3(t) = -\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx - \alpha \int_\Omega u_{tt} v_{tt} dx + \int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx + \alpha \int_\Omega u_{ttt} v_t dx \tag{3.23}$$

multiplicando a segunda equação do problema (P) por v, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega v_{tt} v dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Omega uvdx = 0$$

Visto que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v \cdot v_t dx = \int_\Omega v_t^2 dx + \int_\Omega v \cdot v_{tt} dx$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_4(t) = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \alpha \int_\Omega uvdx + \int_\Omega |v_t|^2 dx \tag{3.24}$$

onde

$$\varphi_4 := \int_\Omega v_t v dx \tag{3.25}$$

Considere o seguinte funcional:

$$L(t) = N_1(E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + N_2\varphi_3(t) + \epsilon_2\varphi_4(t) \tag{3.26}$$

derivando a equação (3.26) onde $N_1 > N_2 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$. então de (3.11),(3.13),(3.15),(3.18),(3.21),(3.22),(3.24) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &= N_1\left\{\frac{d}{dt}E_1(t) + \frac{d}{dt}E_2(t) + \frac{d}{dt}E_3(t)\right\} + \frac{d}{dt}\varphi_1(t) + \frac{d}{dt}\varphi_2(t) + N_2\frac{d}{dt}\varphi_3(t) + \epsilon_2\frac{d}{dt}\varphi_4(t) \\
&\leq -N_1\left\{\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |u_{tt}|^2 dx + \int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx\right\} - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |v_t|^2 dx + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx \\
&\quad + \int_\Omega u_{ttt} v dx + \int_\Omega u_{tt} \nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha\int_\Omega uvdx + \int_\Omega u_t^2 dx - N_2\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx \\
&\quad + N_2\alpha\int_\Omega u_{ttt} v_t dx + N_2\int_\Omega u_{ttt}^2 dx - \epsilon\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \epsilon\alpha\int_\Omega uvdx + \epsilon\int_\Omega v_t^2 dx
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &\leq -N_1\int_\Omega |u_t|^2 dx - N_1\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx - N_1\int_\Omega u_{ttt}^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega v_t^2 dx + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega |u_{ttt}| 2 dx + \frac{1}{2\epsilon_1}\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx \\
&\quad + \frac{C(\Omega)\epsilon_1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon_1} + \int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha\int_\Omega uvdx + \int_\Omega |u_t|^2 dx \\
&\quad - N_2\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx + N_2\alpha\int_\Omega u_{ttt} v_t dx + N_2\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx - \epsilon_2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \epsilon_2\alpha\int_\Omega uvdx + \epsilon_1\int_\Omega |v_t|^2 d
\end{aligned}$$

onde ϵ_1 é uma constante positiva. Logo escolhendo $N_1 > N_2 > 0$ e ϵ_2 e ϵ_1 bastante pequenos, com $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, segue que existe $k > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -kE_1(t), \forall t > 0 \tag{3.27}$$

Da desigualdade (3.27) segue-se

$$E_1(t) \leq C_1 \sum_{j=1}^{3} E_j(t) \leq L(t) \leq C_2 \sum_{j=1}^{3} E_j(t) \tag{3.28}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. De (3.27) e (3.28) obtemos

$$E_1(t) \leq -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}L(t) \tag{3.29}$$

e

$$L(0) \leq C_2 \sum_{j=1}^{3} E_j(0) \tag{3.30}$$

Integrando (3.30) sobre $[0, t]$, temos

$$\int_0^t E_1(s)ds \leq \frac{L(0)}{K} \tag{3.31}$$

de onde segue que

$$\int_0^{+\infty} E_1(s)ds \leq \frac{L(0)}{K} \tag{3.32}$$

De (3.31) e (3.32) encontramos

$$\int_0^{+\infty} E_1(s)ds \leq \frac{L(0)}{k} \leq \frac{C_2}{K} \sum_{j=1}^{3} E_j(0) \tag{3.33}$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} = E_1 + t\frac{d}{dt}E_1(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq 0$$

segue-se que

$$\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} \leq E_1(t) \tag{3.34}$$

Integrando (3.34) sobre $[0,t]$, temos

$$tE_1(t) \leq \int_0^t E_1(s)ds \leq \int_0^{+\infty} E_1(s)ds \tag{3.35}$$

De (3.33) e (3.34), obtemos

$$tE_1(t) \leq \frac{C_2}{K} E_j(0)$$

Fazendo $d = \frac{C_2}{K}$, obtemos

$$E_1(t) \leq \frac{1}{t}\left(\frac{C_2}{K}\right)\sum_{j=1}^{3} E_j(0)$$

o que conclui a prova do resultado. O semigrupo $S(t)$ é polinomialmente estável do tipo $\frac{1}{t}$.

Conclusão

O modelo utilizado para obter a não estabilidade exponencial (P) pode ser aplicado a outros modelos. Mostraremos alguns exemplos específicos de sistemas acoplados de equações diferenciais parciais, que podemos estudar no contexto dos teoremas (3.2) e (3.1)

Modelo 1:

Consideremos o sistema acoplado de equações de onda

$$(P) \qquad \begin{array}{rcl} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v & = & 0 \;\text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u & = & 0 \;\text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u & = & v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0), v(x,0) & = & (u_0, v_0), \text{ em } \Omega \\ (u_t(x,0), v_t(x,0)) & = & (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega \end{array}$$

Usando os teoremas (3.2) e (3.1), concluímos que este sistema não é exponencialmente estável, porém é polinomialmente estável, onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha|u - v|^2)dx.$$

Modelo 2:

Consideremos o sistema acoplado do tipo *Onda- Petrowsky*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em} \quad \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} \Delta^2 v + \alpha u = 0 & \text{em} \quad \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = \Delta v = 0 & \text{sobre} \quad \Omega, \\ (u(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

o mesmo não possui estabilização exponencial, mas é polinomialmente estável, conforme os teoremas (3.2) e (3.1), onde

$$E_1 := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\Delta v|^2 + 2\alpha uv)dx.$$

Modelo 3:

Consideremos o sistema acoplado do tipo *Onda-Petrowsky*

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u_t + \alpha v = 0 & \text{in} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ v_{tt} - \Delta v = \alpha u = 0 & \text{in} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = \Delta u = v = 0 & \text{on} \quad \Gamma\times],\infty[, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) & \text{in} \quad \Omega, \\ (u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema (3.1), conclui-se que não há estabilidade exponencial, mas há o decaimento polinomial onde:

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2 + |\Delta u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv)dx.$$

Bibliografia

[1] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik, **Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations.** J. Evol. Equ., 2, 127-150, (2002)

[2] F. Alabau, **Stabilisation fronteiére indirecte de systémes faiblement couplés.** C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999).

[3] D. G. Figueiredo and E. Mitidierri, **A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems.** SIAM J. Math. Anal. 17, 836-849,(1986).

[4] Z. Liu and S. Zheng, **Semigroups associated with dissipative systems.** In CRC Reseach Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).

[5] L. Gearhart, **Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces.** Trans. Ams 236, 385-394, (1978).

[6] A. E. H. Love, **Mathematical Theory of Elasticity.** Fourth Edition, Dover Publications, New York, (1942).

[7] H. Matsuzawa, **Asymptotic profiles of variational for a FitzHugh-Nagumo-type elliptic system.** Nonlinear Analysis 63, 2545-2551, (2005).

[8] A. Wiler, **Stability of wave equations with dissipative bounded conditions in boundend domain.** Diff. and Integral Eqs., 7 (2), 345-366, (1994).

[9] F. Huang, **Characteristic Condition for exponencial stability of linnear dynamical systems in Hilbert space.** Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43-56, (1985).

[10] J. Pruss, **On the spectrum C_0-semigroups**. Trans. AMS 28, 847-857, (1984).

[11] D. L. Russell, **A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic system.** J. Math. Anal. Appl., (2) 173, 339-358, (1993).

[12] H. Brézis, **Analisis Funcional. Teoria** y **Aplicaciones.** Alianza Editorial, Madrid, Paris, (1948).

[13] A. Pazy, **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**, springer - Velag, 1983.

[14] R. A. Adams, **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.

[15] E. Kreyszig, **Introductory functional analysis with applications**, John Wiley e Saons, 1978.

[16] J. L. Lions, **Quelques méthodes de resolutions des problémes aux limites non linéaris**, Dunod, Paris, 1969.

Apêndice A

Espaços de Sobolev

Nesta seção considere Ω um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue. Seja $p \geq 1$, chamaremos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u, para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\| u \|^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx; \quad 1 \leq p < \infty,$$

Com esta norma $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u, essecialmente limitadas sobre Ω. Este espaço com norma

$$\| u \| \ \text{ em } L_\infty = supess|u(x)| \text{ onde } x \in \Omega.$$

Também neste caso $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma

$$\| u \|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx$$

Além disso, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e chamaremos por D^α o operador derivada de ordem $|\alpha|$, derivada de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ definimos $D^\alpha u := u$. Com estas anotações definimos o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m \text{ no sentido das distribuições}$$

Seja a norma

$$\| u \|_{m,p}^{p}= \sum \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{p}dx \quad (\text{ onde } |\alpha| \leq m)$$

com esta norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev de ordem m. Além disso, definimos o espaço de Banach $W_{0}^{m,p}(\Omega)$ como sendo a fechadura de C_{0}^{∞} no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$W_{0}^{m,p}(\Omega) = C_{0}^{\infty}(\Omega)W^{m,p}(\Omega)$$

Quando $p = 2, W^{m,2}(\Omega)$ é chamado por $H^{m}(\Omega)$, e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x)D^{\alpha}v(x)dx$$

e norma dada por

$$\| u \|_{m,2}^{2}= \sum \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^{2}dx \quad (\text{ onde } |\alpha| \leq m)$$

Num espaço de Banach X, definimos os espaços

$$L^{p}(0, T; X) = \{u : [0, T] \to X \text{ mensurável } ; t \to \| u \|_{B} \in L^{p}(0, T)\}$$

Em $L^{p}(0, T; X)$ definimos a norma

$$\| u \|_{L^{\infty}} (0, T; X) = supess \| u(x) \|_{x} \quad (0 < t < T)$$

Então $L^{\infty}(0, T; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

A.1 Imersões de Sobolev

Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^{n}$ com fronteira de classe C^{m}. Seja $m \leq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:

i Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^{q}(\Omega)$, para todo q pertecente a $[p, q]$ onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

ii Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^{q}(\Omega)$, para todo $q \in [p, \infty]$.

iii Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ implica que $W^{m,p}(\Omega)$ imersão $L^{\infty}(\Omega)$

sendo as imersões acima contínuas.

Neste caso

$$W^{m,p}(\Omega) \text{ imersões } C^{k}(\Omega) \text{ e } K =\| m - \frac{n}{p} \|$$

Desigualde de Hölder

Seja $f \in L^(\Omega),\ g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \| f \|_{L_p} \| g \|_{L_q}$$

Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um domínio aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva

$$C_p := C_p(\Omega, n), \text{ tal que}$$

$$\| u \|_{L^p}\ (\Omega) \leq C_p \| \nabla u \|_{L^p}\ (\Omega), \text{ para todo } u \in W^{1,p_0}(\Omega)$$

onde C_p é a constante de Poincaré.

Teorema da divergência e fórmula de Green

Vale as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω bem regular.

i $\int_\Omega (divF)(x)dx = \int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x)d\Gamma, \quad F \in [H^1(\Omega)]^\eta$

ii $\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = -\int_\Omega \nabla v(x) \cdot u(x)dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega)$

iii $\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \Delta v(x)u(x)dx, \quad v \in H^2(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega)$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a norma exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$. A função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço, isto é, $\int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x)d\Gamma$ significa $\int_\Gamma (y_0 F)(x) \cdot \eta(x)d\Gamma$.

Teorema do valor médio para integrais

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Então, existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(s)ds = f(c)(b - a)$$

Teorema da Aplicação Aberta

Um operador linera limitado T de um espaço de Banach X em outro espaço de Banach X em outro espaço de Banach Y é uma aberta. Em particular, se T é bijetiva, T^1 é contínua.

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{aligned} \tfrac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

onde $f : [0, T) \to X$ e A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $T(t)$.

Definição A.1 *Uma função* $u : [0, T) \to X$ *é uma solução clássica de () sobre* $[0, T)$ *se* u *é contínua sobre* $[0, T)$, *continuamente diferençável sobre* $[0, T)$, $u(t) \in D(A)$ *para* $0 < t < T$ *e satisfaz () em* $[0, T)$.

Definição A.2 *Seja* A *o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0, $T(t)$. *Seja* $x \in X$ *e* $f \in L^1(0, T; X)$. *A função* $u \in C([0, T]; X)$ *dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^1 T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$