UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Um estudo sobre uma classe de problemas locais e uma classe de problemas não-locais.

BELÉM

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Um estudo sobre uma classe de problemas locais e uma classe de problemas não-locais.

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADORA: Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento

BELÉM
2010

Santos, Gelson Conceição Gonçalves dos

Um estudo sobre uma classe de problemas locais e uma classe de problemas não-locais/ (Gelson Conceição Gonçalves dos Santos); orientadora, Rúbia Gonçalves Nascimento. - 2010.

128 f. ; 28cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2010.

1.Equações Diferenciais Elípticas. I Nascimento, Rúbia Gonçalves, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título

CDD 22. ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Gelson Conceição Gonçalves dos Santos

Um estudo sobre uma classe de problemas locais e uma classe de problemas não-locais.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 21 de Maio de 2010.

Conceito:______________

Banca Examinadora

Prof. Dr^{a}. Rúbia Gonçalves Nascimento (Orientadora)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Faculdade de Matemática - DME-UFPB

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos...

Acima de tudo a Deus, por estar sempre ao meu lado.

A minha mãe pelo amor, carinho, compreensão e incentivo. E sobre tudo a minha esposa Francy pelo incentivo, compreensão e carinho.

A minha estimada orientadora, doutora Rúbia Gonçalves Nascimento pela excelente orientação, pelo incentivo, disponibilidade, amizade e compreensão. Ao professor doutor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, também pelo incentivo, disponibilidade e amizade, além disso, por ser fundamental para a elaboração e conclusão dessa dissertação.

Aos meus grandes colegas e amigos do curso de mestrado: Amanda, Elifaleth e Marcos pela eterna amizade e companheirismo, e também aos demais colegas Cláudia, Rafael e João.

Novamente agradeço ao professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e ao professor doutor Daniel Cordeiro de Morais Filho por terem aceitado fazer parte da banca examinadora de minha dissertação.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudaremos duas classes de problemas elípticos, uma classe de problemas locais e outra de problemas não-locais. Na classe de problemas locais, estudaremos o problema

$$\begin{cases} -h^2\Delta u + b(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Na classe de problemas não-locais estudaremos os problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u & = & |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} & \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v & = & |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} & \text{em } \Omega \\ u = v & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Abstract

In this work we will study two classes of problems. In the class of the local problems, we study the problem

$$\begin{cases} -h^2\Delta u + b(x)u = f(x,u),\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

In this class of the nonlocal problems, we will study the problems

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u & = & |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} & \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v & = & |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} & \text{em } \Omega \\ u = v & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Conteúdo

Introdução

Nesta dissertação estudaremos duas classes de problemas do tipo elíptico.

Primeiramente estudaremos a seguinte classe de equações de Schrödinger

$$\begin{cases} -h^2\Delta u + b(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

onde h é um parâmetro real e $N \geq 3$. As hipóteses sobre as funções b e f serão enunciadas posteriormente.

A equação em (1) surge naturalmente no estudo de existência de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger do tipo

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = -h^2\Delta\psi + V(x)\psi - |\psi|^{p-1}\psi, \tag{2}$$

onde i é a unidade imaginária, h é a constante de Planck e $p > 2$ se $N = 1, 2$ ou $2 < p \leq 2^*$ se $N \geq 3$. Uma onda estacionária para o problema (2) é uma função da forma

$$\psi(x,t) = exp(-iEt/h)v(x), \qquad v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \tag{3}$$

Assim, substituindo (3) em (2), temos

$$-h^2\Delta v + (V(x) - E)v = |v|^{p-1}v, \ \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{4}$$

As hipótese sobre a função f nos permitirá concluir que (4) é um caso particular de (1), pois a função $f(z) = |z|^{p-1}z$ satisfará as hipóteses sobre f.

Note que fazendo a mudança de variável $y = h^{-1}x$ e depois retornando a variável x, a equação (4) torma-se

$$-\Delta u + (V(hx) - E)u = |u|^{p-1}u, \ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{5}$$

onde $u(x) = v(hx)$.

Este estudo é baseado no artigo de P.H Rabinowitz [35]. Tal artigo é possivelmente o primeiro trabalho que trata esse problema do ponto de vista variacional.

Agora vamos tratar da segunda classe de problemas estudados neste trabalho.

Desde o aparecimento no trabalho de Kirchhoff [24] em 1883, que estudou o problema hiperbólico

$$\rho u_{tt} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right) u_{xx} = 0, \tag{6}$$

chamado de equação de Kirchhoff, que estende a equação clássica da corda proposta por D'Alembert, considerando os efeitos da mudança de comprimento da corda durante a vibração, o interesse dos matemáticos no chamado problema não-local tem crescido bastante, porque ele representa um variante de uma situação da física e da engenharia e requer aparatos não-triviais para resolvê-los.

De fato, o problema (6) é uma caso particular da equação

$$u_{tt} - M(||u||^2)\Delta u = f(x, u) \tag{7}$$

que tem sido muito estudada nos recentes anos.

Contudo, a versão estacionária de (7) com a condição de fronteira de Dirichlet,

$$\begin{cases} -M(||u||^2)\Delta u &= f(x, u) \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

onde $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções dadas, $||u|| = (\int_\Omega |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$ é a norma usual no Espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ e Ω é um domínio limitado com fronteira suave, somente nos últimos anos tem sido estudada mais cuidadosamente. Veja, por exemplo, Alves-Corrêa [3], Alves-Corrêa-Ma [4], Corrêa-Figueiredo [9], Corrêa-Figueiredo [10], Corrêa-Menezes [14], Ma [28], Perera-Zhang [31] e Zang-Perera [34].

Atualmente, o problema (8) é um exemplo da grande classe das chamadas equações não-locais porque o termo $M(||u||^2)\Delta u$ não é calculado pontualmente.

Vamos continuar comentando alguns aspectos dos problemas não-locais, para mostrar a importância dessa classe de problemas.

Em [17], Deng-Lie-Xie consideraram a seguinte equação parabólica degenerada com uma fonte não-local

$$\begin{cases} u_t & = f(u)(\triangle u + a\displaystyle\int_\Omega u) \quad \text{em } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) & = 0 \qquad \text{em } (\partial\Omega, \infty) \\ u(x,0) & = u_0(x) \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

onde $a > 0$ e f é uma função positiva e regular satisfazendo certas condições. O problema (9) conduz ao seguinte problema

$$\begin{cases} -\triangle u & = a\displaystyle\int_\Omega u \qquad \text{em } \Omega \\ u & = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

cuja generalização

$$\begin{cases} -\triangle u & = a(x,u)|u|_q^p \qquad \text{em } \Omega \\ u & = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{11}$$

foi estudada por Corrêa-Menezes [15].

Um sistema associado ao problema (11) foi estudado, por exemplo, por Deng-Lie-Xie [18] que investigou a existência global e não-existência de solução não-negativa do sistema parabólico degenerado não-local

$$\begin{cases} u_t = \triangle u^m + a|v|_p^\alpha & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v^n + b|u|_q^\beta & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = v(x,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

onde $m, n > 1,\ p, q \geq 1,\ \alpha, \beta, a, b > 0$ e u_0, v_0 são funções limitadas não-negativas. Uma questão central em Deng-Lie-Xie [18] é a ocorrência de blow-up da solução. A versão estacionária de (12)

$$\begin{cases} -\triangle u^m = a|v|_p^\alpha & \text{em } \Omega \\ -\Delta v^n = b|u|_q^\beta & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{13}$$

foi estudada por Corrêa-Lopes [13].

Inspirados, principalmente neste último trabalho, Corrêa-Figueiredo-Lopes, publicaram no ano de 2008, na revista Differential and Integral Equations, veja [11], o estudo feito sobre os seguintes problemas não-locais e com expoentes variáveis

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

O estudo de problemas não-locais e com expoentes variáveis, têm várias motivações na física, biologia e engenharia.

Com relação ao estudo de problemas não-locais, podemos citar as seguintes motivações:

(i) Representam modelos de ignição de gases reagentes comprimidos.

(ii) Descrevem fenômenos físicos onde a reação é dirigida pela temperatura em um único ponto.

(iii) Modelam problemas de fluxo de fluidos e de populações dinâmicas.

Relacionado com estes fenômenos, podemos citar os trabalhos de Deng-Duan-Xie [16], Souplet [32] e suas referências.

Com relação os problemas com expoentes variáveis, podemos citar as seguintes motivações:

(i) Processamento de imagens, veja Chambolle-Lions [8].

(ii) Fluidos eletroreológico, veja Acerbi-Mingione [1].

(iii) Lei Darcy em meios porosos (dinâmica de fluidos e hidrologia), veja Antontsev-Shmarev [5].

De certo modo, podemos dizer que estes problemas desfrutam de dois aspectos básicos da investigação matemática:

(i) Eles são a interpretação matemática de importantes fenômenos da física e da engenharia;

(ii) Estes estudos requerem relevante tópicos de Análise Funcional Não-Linear.

Descrevemos a estrutura deste trabalho assim:

No capítulo 1, estudaremos o problema (1). As hipóteses sobre as funções b e f serão definidas oportunamente em cada seção deste capítulo. Como h não influência nos resultados obtidos das seções deste capítulo, com excessão da última, estudaremos o problema (1) para $h = 1$. O principal resultado deste capítulo é o teorema que segue abaixo devido a Rabinowitz [35].

Teorema 0.1 *Suponha que* (b_1), (b_3), (b_6) *e* $(f_1)-(f_5)$ *são satisfeitas com* f *independente de* x. *Então, existe uma constante* $h_0 > 0$, *tal que,* $\forall\ h \in (0, h_0)$, *o problema* (1) *tem uma solução clássica não-trivial.*

No capítulo 2, definiremos o operador p-Laplaciano e estudaremos a existência de solução para um problema linear de Dirichlet, usando métodos variacionais.

No capítulo 3, definiremos os espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ e o de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Apesar de definirmos o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$, gostariamos de ressaltar que as soluções dos problemas (14) e (15) são obtidas em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ para $p(x) = p$ constante.

Nos capítulos 4 e 5, estudaremos um artigo de Corrêa, Figueiredo e Lopes [11]. Mais expecificamente, no capítulos 4, estudaremos o problema (14). Neste capítulo mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 0.2 *Se* $1 < p < N$, $\alpha \in C^0(\overline{\Omega})$ *com* $0 < \alpha(x) < p - 1$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$ *e* $q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$; $1 \leq q(x) < \dfrac{Np}{N-p} = p^*$. *Então, o problema* (14) *possui uma solução positiva.*

Demonstramos este teorema usando o método de sub e supersolução.

No capítulo 5, estudaremos a existência de solução para o problema (15), usando o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{16}$$

onde $0 < \epsilon < 1$.

Para estudar o problema auxiliar, usaremos um resultado de Rabinowitz (veja o Teorema B.14 no Apêndice B), para obtermos o seguinte resultado:

Teorema 0.3 *Suponha que* $1 < p_1, p_2 < N$, $\alpha_1, \alpha_2, q_1, q_2 \in C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N-p_2} = p_2^*$, $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*$ *e* $0 < \alpha_1(x).\alpha_2(x) < (p_1 - 1)(p_2 - 1)$ $\forall x \in \overline{\Omega}$. *Então, o problema* (16) *possui uma solução positiva.*

Com o auxílio deste teorema, obteremos o seguinte resultado para o problema (15).

Teorema 0.4 *Com as mesmas hipótese do Teorema anterior, o problema* (15) *possui uma solução positiva.*

Para facilitar a leitura, enunciaremos os teoremas e as hipóteses citadas nesta introdução nos capítulos subsequentes.

No corpo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\displaystyle\int_\Omega f$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$,

$\displaystyle\int_\Omega f(x,u)$: denota $\displaystyle\int_\Omega f(x,u)dx$,

$|f|_s = |f|_{L^s(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $1 \leq s < \infty$,

$|f|_{s(B_r(x))} = |f|_{L^s(B_r(x))} = \left(\displaystyle\int_{B_r(x)} |f|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $1 \leq s < \infty$,

Capítulo 1

Sobre uma Classe de Equações de Schrödinger

Neste capítulo, estudaremos os resultados obtidos por Rabinowitz [35] sobre a existência de solução para a seguinte classe de equações de Schrödinger

$$\begin{cases} -h^2\Delta v + b(x)v = f(x,v), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

e por uma mudança de variável este problema é equivalente a

$$(P_h)\begin{cases} -\Delta u + b(hx)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $u(x) = v(hx)$, $N \geq 3$, $h > 0$ é um parâmetro real e as hipóteses sobre o potencial b e a não linearidade f serão definidas oportunamente. Em todas as seções deste capítulo, com excessão da última, nos estudaremos o problema (P_h) para o caso em que $h = 1$.

1.1 O problema (P_h) com $h = 1$.

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o problema (P_h) com $h = 1$. Assim, estudaremos o seguinte problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $N \geq 3$, o potencial b e a não linearidade f satisfazem as seguintes condições:
(b_1) $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e existe uma constante $b_0 > 0$, tal que, $b_0 \leq b(x), \ \forall \, x \in \mathbb{R}^N$.

(b_2) b é coercivo, ou seja, $b(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

(f_1) $f \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(f_2) $f_z(x,0) = 0 = f(x,0)$.

(f_3) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $s \in \left(1, \dfrac{N+2}{N-2}\right)$, tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R}$,

$$|f_z(x,z)| \leq a_1 + a_2|z|^{s-1}.$$

(f_4) Existe uma constante $\mu > 2$, tal que,

$$0 < \mu F(x,z) \equiv \mu \int_0^z f(x,t)dt \leq zf(x,z), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Denotaremos por E o espaço de Hilbert

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\},$$

com a norma usual dada por

$$||u||_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

e por $\widetilde{E}$ o subespaço de E dado por

$$\widetilde{E} = \left\{u \in E : \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2) < \infty\right\}$$

e a norma em $\widetilde{E}$ é dada por

$$||u|| = ||u||_{\widetilde{E}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

que provém do seguinte produto interno

$$\Big\langle u, v \Big\rangle_{\widetilde{E}} = \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla v + b(x)uv\Big).$$

Para todo $N \geq 3$, temos

$$\widetilde{E} \hookrightarrow E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq \frac{2N}{N-2},$$

continuamente e para $N = 1, 2$ as imersões são contínuas para todo $p \in [2, \infty)$.

O funcional energia associado a (P) é definido por

$$I : \widetilde{E} \to \mathbb{R},$$

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u),$$

onde $||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)$.

Por (f_1) e (f_3), I está bem definido. Mostraremos que o funcional I verifica as condições do Teorema do Passo da Montanha, exceto possivelmente a condição Palais-Smale.

Teorema 1.1 *Suponha que as hipóteses* $(b_1) - (b_2)$ *e* $(f_1) - (f_4)$ *são satisfeitas, então, o problema* (P) *possui uma solução clássica não-trival* $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: De fato, primeiro enunciaremos e demonstraremos uma afirmação que será usada para mostrarmos a primeira geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Afirmação 1.1 *Dado* $\epsilon > 0$ *existe uma constante positiva* A *dependendo de* ϵ *e* s, *tal que,*

$$|f_z(x,z)| \leq \epsilon + A|z|^{s-1}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \ e\ z \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Com efeito, como $f \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $f_z(x,0) = 0$, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon = \delta(\epsilon) > 0$, tal que,

$$|f_z(x,z)| \leq \epsilon, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}, \text{ com } |z| < \delta_\epsilon. \tag{1.2}$$

Por (f_3), note que

$$\frac{|f_z(x,z)|}{|z|^{s-1}} \leq \frac{a_1}{|z|^{s-1}} + a_2,$$

como $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{a_1}{|z|^{s-1}} = 0$, existe uma constante $N_\epsilon = N(\epsilon) > 0$ suficientemente grande, tal que,

$$\frac{a_1}{|z|^{s-1}} \leq \epsilon, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}, \text{ com } |z| > N_\epsilon,$$

logo,

$$\frac{|f_z(x,z)|}{|z|^{s-1}} \leq \epsilon + a_2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}, \text{ com } |z| > N_\epsilon,$$

com isso,

$$|f_z(x,z)| \leq C_\epsilon |z|^{s-1}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}, \text{ com } |z| > N_\epsilon. \tag{1.3}$$

Agora, para $z \in \mathbb{R}$, com $\delta_\epsilon \leq |z| \leq N_\epsilon$, como $f \in C^2$, existe uma constante $M > 0$, tal que,

$$|f_z(x,z)| \leq M, \ \forall\, \delta_\epsilon \leq |z| \leq N_\epsilon,$$

observe que

$$|f_z(x,z)| = \frac{|f_z(x,z)|}{|z|^{s-1}}|z|^{s-1} \le \frac{M}{\delta_\epsilon^{s-1}}|z|^{s-1},$$

logo,

$$|f_z(x,z)| \le \overline{C}_{\epsilon,s}|z|^{s-1},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R},\ \text{com } \delta_\epsilon \le |z| \le N_\epsilon. \tag{1.4}$$

Por (1.2), (1.3) e (1.4) existe uma constante $A = A(\epsilon, s) > 0$, tal que,

$$|f_z(x,z)| \le \epsilon + A|z|^{s-1},\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R},$$

o que prova a afirmação.

Assim, por (1.1), temos

$$|f(x,z)| \le \epsilon|z| + \frac{A}{s}|z|^s,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

em consequência,

$$F(x,u) \le \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \frac{A}{s(s+1)}|u|^{s+1},$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) \le \frac{\epsilon}{2}|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C_\epsilon|u|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)},$$

pela imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para $2 \le p \le 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) \le \frac{\epsilon}{2}C||u||^2 + C_\epsilon C||u||^{s+1},$$

com isso,

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) \ge \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{2}C||u||^2 - C_\epsilon C||u||^{s+1},$$

logo,

$$I(u) \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon C}{2} - C_\epsilon C||u||^{s-1}\right)||u||^2. \tag{1.6}$$

Assim, para $\rho > 0$, tal que, $||u|| = \rho$, temos

$$I(u) \ge \left(\frac{1-\epsilon C}{2} - C_\epsilon C\rho^{s-1}\right)\rho^2.$$

Podemos fixar $\rho > 0$ de forma que

$$\left(\frac{1-\epsilon C}{2} - C_\epsilon C\rho^{s-1}\right)\rho^2 > 0.$$

Com efeito, observe que

$$\left(\frac{1-\epsilon C}{2} - C_\epsilon C\rho^{s-1}\right)\rho^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\epsilon C}{2} > C_\epsilon C\rho^{s-1} \Leftrightarrow 0 < \rho < \left(\frac{1-\epsilon C}{2C_\epsilon C}\right)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Assim, para $\rho = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\epsilon C}{2C_\epsilon C}\right)^{\frac{1}{s-1}}$, fazendo

$$\alpha = \left(\frac{1-\epsilon C}{2} - C_\epsilon C\rho^{s-1}\right)\rho^2,$$

temos que

$$I(u) \geq \alpha > 0, \;\; \forall\, u \in \widetilde{E} \text{ com } ||u|| = \rho.$$

Agora enunciaremos e mostraremos outra afirmação para verificarmos a segunda geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Afirmação 1.2 *Existe uma constante* $a_3 > 0$*, tal que,*

$$F(x,z) \geq a_3|z|^\mu,$$

para $|z|$ *suficientemente grande e* $\mu > 2$.

Com efeito,

(i) Para $z \geq 1$, segue de (f_4) que

$$\frac{\mu}{z} \leq \frac{f(x,z)}{F(x,z)},$$

logo,

$$\int_1^z \frac{\mu}{s} ds \leq \int_1^z \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds,$$

de onde segue que

$$\mu \ln z \leq \ln F(x,z) - \ln F(x,1),$$

assim,

$$\ln z^\mu \leq \ln \frac{F(x,z)}{F(x,1)}.$$

Como a função ln é crescente, então,

$$z^\mu \leq \frac{F(x,z)}{F(x,1)},$$

com isso,

$$F(x,z) \geq z^\mu F(x,1),$$

por (f_4), existe uma constante $a_1 > 0$, tal que,

$$F(x,z) \geq a_1 z^{\mu}, \forall z > 1.$$

(ii) Para $z < -1$, segue de (f_4) que

$$\frac{\mu}{z} \geq \frac{f(x,z)}{F(x,z)},$$

logo,

$$\int_z^{-1} \frac{\mu}{z} ds \geq \int_z^{-1} \frac{f(x,z)}{F(x,z)} ds,$$

com isso,

$$\mu \ln|-1| - \mu \ln|z| \geq \ln F(x,-1) - \ln F(x,z),$$

assim,

$$\ln \frac{F(x,z)}{F(x,-1)} \geq \ln |z|^{\mu},$$

usando novamente o fato da função ln ser crescente, temos

$$\frac{F(x,z)}{F(x,-1)} \geq |z|^{\mu},$$

por (f_4) existe uma constante $a_2 > 0$, tal que,

$$F(x,z) \geq a_2 |z|^{\mu}, \;\; z < -1,$$

por (i) e (ii) existe uma constante $a_3 > 0$, tal que,

$$F(x,z) \geq a_3 |z|^{\mu}, \; \forall \, z \in \mathbb{R}, \text{ com } |z| > 1,$$

com $|z|$ suficientemente grande.

Fixada uma função $\varphi > 0$ em $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, segue da Afirmação (1.2) que para t suficientemente grande

$$I(t\varphi) = \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 - a_3 \int_{\mathbb{R}^N} |t\varphi|^{\mu} = \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 - a_3 t^{\mu} \int_{supp\varphi} |\varphi|^{\mu},$$

como $\mu > 2$, temos

$$I(t\varphi) \to -\infty \;\text{ quando }\; t \to \infty.$$

Assim, para um $t_0 > 0$ suficientemente grande, fazendo $e = t_0\varphi$, temos

$$I(e) < 0 \;\text{ e }\; ||e|| > \rho.$$

Como $I(0) = 0$ e $I \in C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R})$ (veja o Apêndice A), segue do Teorema do Passo da Montanha (veja o Teorema B.20 no Apêndice B), que existe

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{1.7}$$

onde

$$\Gamma = \Big\{ \gamma \in C\Big([0,1], \widetilde{E}\Big) \colon \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0 \Big\}, \tag{1.8}$$

além disso,

$$c \geq \alpha > 0$$

e existe uma sequência $(u_n) \subset \widetilde{E}$, tal que,

$$I(u_n) \to c \text{ em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0 \text{ em } \widetilde{E}'. \tag{1.9}$$

Agora mostraremos que (u_n) é limitada em $\widetilde{E}$ e que uma subsequência de (u_n) converge fraco para um ponto crítico não-trivial de I.

Com efeito, como

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)$$

e

$$\frac{1}{\mu} I'(u_n) u_n = \frac{1}{\mu}||u_n||^2 - \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) u_n,$$

temos

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n) u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)||u_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{\mu} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n)\right]. \tag{1.10}$$

Agora, note que

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n) u_n \leq I(u_n) + \frac{1}{\mu}|I'(u_n) u_n| \leq I(u_n) + ||I'(u_n)|| \, ||u_n||.$$

Por (1.9) existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$I(u_n) \leq C \quad \text{e} \quad ||I'(u_n)|| \leq C, \;\; \forall \, n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$I(u_n) - \frac{1}{\mu} I'(u_n) u_n \leq C + C||u_n||, \;\; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Assim, por (1.10)

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)||u_n||^2+\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\mu}f(x,u_n)u_n-F(x,u_n)\right]\leq C+C||u_n||,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

É imediato de (f_4) que

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)||u_n||^2\leq C+C||u_n||,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

De onde segue que (u_n) é limitada em $\widetilde{E}$. Logo, existe uma constante $M>0$, tal que,

$$||u_n||\leq M,\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Como $\widetilde{E}$ é um espaço de Hilbert reflexivo, a menos subsequência,

$$u_n\rightharpoonup u\ \text{ em }\ \widetilde{E}.$$

Desde que,

$$\widetilde{E}\hookrightarrow L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),\quad 2\leq p<2^*=\frac{2N}{N-2},$$

compactamente, temos que, a menos de subsequência,

$$u_n\to u\ \text{ em }\ L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),\quad 2\leq p<2^*. \tag{1.11}$$

A seguir, mostraremos que

$$I'(u_n)\varphi\to I'(u)\varphi,\ \ \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Com efeito, observe que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\subset\widetilde{E}$ e que

$$I'(u_n)\varphi=\Big\langle u_n,\varphi\Big\rangle_{\widetilde{E}}-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)\varphi,\ \ \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

e

$$I'(u)\varphi=\Big\langle u,\varphi\Big\rangle_{\widetilde{E}}-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)\varphi,\ \ \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Como $u_n\rightharpoonup u$ em $\widetilde{E}$, então,

$$\Big\langle u_n,\varphi\Big\rangle_{\widetilde{E}}\to\Big\langle u,\varphi\Big\rangle_{\widetilde{E}},\ \ \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.12}$$

Por (1.11)

$$u_n\to u\text{ em }\ L^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

onde s é o expoente presente em (f_3).

Pelo Teorema B.21 (veja o Apêndice B), existe uma função $h \in L^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \;\text{ q.t.p em } K$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x), \;\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ q.t.p em } K,$$

onde K é um compacto qualquer do $\mathbb{R}^N$.

Por (f_3), para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} |f(x,u_n(x))\varphi(x)| &\leq C_1|u_n(x)||\varphi(x)| + C_2|u_n(x)|^s|\varphi(x)| \\ &\leq C_1 h(x)|\varphi(x)| + C_2 h^s(x)|\varphi(x)|, \;\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\text{ q.t.p em } K, \end{aligned}$$

como $|\varphi| \in L^{s+1}_{loc}(\mathbb{R}^N),\; L^{\frac{s+1}{s}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$h|\varphi|, \; h^s|\varphi| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Pela continuidade de f,

$$f(x,u_n(x))\varphi(x) \to f(x,u(x))\varphi(x) \;\text{ q.t.p em } K.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{supp\varphi} f(x,u_n)\varphi \to \int_{supp\varphi} f(x,u)\varphi, \;\; \forall\, \varphi\; C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi, \;\; \forall\, \varphi\; C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.13}$$

Por (1.12) e (1.13)

$$\left\langle u_n, \varphi \right\rangle_{\widetilde{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi \to \left\langle u, \varphi \right\rangle_{\widetilde{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi, \;\; \forall\, \varphi\; C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$I'(u_n)\varphi \to I'(u)\varphi, \;\; \forall\, \varphi\; C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.14}$$

Desde que, $I'(u_n) \to 0$ em $\widetilde{E}$, temos

$$I'(u_n)\varphi \to 0, \;\; \forall\, \varphi\; C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.15}$$

Por (1.14), (1.15) e unicidade de limite

$$I'(u)\varphi = 0, \ \ \forall \ \varphi \ C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Seja $\varphi \in \widetilde{E}$, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\widetilde{E}$, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que,

$$\varphi_n \to \varphi \text{ em } \widetilde{E},$$

por continuidade

$$I'(u)\varphi_n \to I'(u)\varphi,$$

mas $I'(u)\varphi_n = 0$, pois $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, logo,

$$I'(u)\varphi = 0, \ \forall \ \varphi \in \widetilde{E}.$$

Portanto, u é ponto crítico de I e

$$\Big\langle u, \varphi \Big\rangle_{\widetilde{E}} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi, \ \ \forall \ \varphi \ \widetilde{E},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\nabla u \nabla \varphi + b(x) u \varphi \Big) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi, \ \ \forall \ \varphi \ \widetilde{E}.$$

Assim, u é solução fraca de (P), usando regularidade elíptica, mostra-se que u é uma solução clássica de (P). Note que, por (f_2), a função nula é solução de (P). Mostraremos que u é uma solução não-trivial de (P).

Com efeito, como

$$I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n)$$

e

$$\frac{1}{2} I'(u_n)u_n = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} f(x,u_n)u_n,$$

temos

$$I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \Big],$$

como por (f_4), $F(x,z) \geq 0$, $\forall \ x \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R}$,

$$I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} f(x,u_n)u_n. \tag{1.16}$$

Desde que $I(u_n) \to c$ em $\mathbb{R}$, $I'(u_n) \to 0$ em $\widetilde{E}'$ e $||u_n|| \leq M$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Segue que para todo $0 < \epsilon \leq \dfrac{c}{M+2}$, existe um natural N_0, tal que,

$$c - \epsilon < I(u_n) < c + \epsilon \quad \text{ e } \quad ||I'(u_n)|| ||u_n|| \leq \epsilon M, \ \ \forall \ n \geq N_0,$$

logo,

$$I(u_n)-\frac{1}{2}I'(u_n)u_n\geq c-\epsilon-\frac{1}{2}\epsilon M=c-\epsilon\Big(\frac{2+M}{2}\Big)\geq c-\frac{c}{M+2}\Big(\frac{2+M}{2}\Big)=\frac{c}{2},$$

usando (1.16), temos

$$\frac{c}{2}\leq\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n,$$

por (1.5)

$$\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2}f(x,u_n)u_n\leq\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{2}\epsilon u_n^2+\frac{A}{2s}|u_n|^{s+1}\Big),$$

logo,

$$\frac{c}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\frac{A}{2s}|u_n|^{s+1}_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)}.$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Niremberg (veja [20]), para toda $w\in E$,

$$|w|_{L^{s+1}(\mathbb{R}^N)}\leq a_5|\nabla w|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)}|w|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^N)},\text{ onde }\theta=N\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{s+1}\Big).$$

Assim,

$$\frac{c}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}|u_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+a_6|\nabla u_n|^{\theta(s+1)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}|u_n|^{(s+1)(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

usando a imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e observando que $|\nabla u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq||u||$, existe uma constante $C>0$, tal que,

$$\frac{c}{2}\leq\frac{\epsilon C}{2}||u_n||^2+a_6||u_n||^{\theta(s+1)}|u_n|^{(s+1)(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que $||u_n||\leq M\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, temos

$$\frac{c}{2}\leq\frac{\epsilon}{2}M_1+a_6M^{\theta(s+1)}|u_n|^{(s+1)(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Escolhendo $0<\epsilon\leq\min\Big\{\frac{c}{M+2},\frac{c}{2M_1}\Big\}$, temos $\epsilon\leq\frac{c}{2M_1}$, logo

$$\frac{\epsilon}{2}M_1\leq\frac{c}{4},$$

com isso,

$$\frac{c}{2}\leq\frac{c}{4}+a_6M^{\theta(s+1)}|u_n|^{(s+1)(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

assim,

$$\frac{c}{4}\leq a_6M^{\theta(s+1)}|u_n|^{(s+1)(1-\theta)}_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Observe que $(s+1)(1-\theta) > 0$, pois

$$(s+1)(1-\theta) = (s+1)\Big[1-N\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{s+1}\Big)\Big] = (s+1)\Big[1-\frac{N(s-1)}{2(s+1)}\Big] = (s+1)\Big[\frac{2s+2-Ns+N}{2(s+1)}\Big]$$

$$= \frac{s(2-N)+N+2}{2} > 0 \Leftrightarrow s(2-N)+N+2 > 0 \Leftrightarrow N+2 > s(N-2) \Leftrightarrow \frac{N+2}{N-2} > s.$$

Note que a última desigualdade ocorre por (f_3).

Assim,

$$\left(\frac{C}{4}\right)^{\frac{1}{(s+1)(1-\theta)}} \leq a_7 |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Façamos $c_1 = \left(\frac{C}{4}\right)^{\frac{1}{(s+1)(1-\theta)}}$, então,

$$c_1 \leq a_7 |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

onde a_7 é uma constante que depende de M, a_6, s e θ.

Suponha, por contradição, que $u \equiv 0$. Por (1.11),

$$u_n \to 0 \text{ em } L^2_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

logo, dado $r > 0$ existe um natural $n_r = n(r)$, tal que,

$$a_7 |u_n|_{L^2(B_r)} \leq \frac{c_1}{2}, \ \ \forall\, n \geq n_r. \tag{1.18}$$

Por (1.17) e (1.18), temos

$$\frac{c_1}{2} \leq a_7 |u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)}, \ \ \forall\, n \geq n_r. \tag{1.19}$$

Com efeito, pois caso contrário, existiria um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$a_7 |u_{n_0}|_{L^2(B_r)} + a_7 |u_{n_0}|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} < c_1, \text{ para algum } n_0 \geq n_r,$$

logo,

$$\Big(|u_{n_0}|_{L^2(B_r)} + |u_{n_0}|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)}\Big)^2 < \left(\frac{c_1}{a_7}\right)^2$$

com isso,

$$|u_{n_0}|^2_{L^2(B_r)} + |u_{n_0}|^2_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} < \left(\frac{c_1}{a_7}\right)^2$$

assim,

$$a_7 |u_{n_0}|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < c_1, \text{ para algum } n_0 \geq n_r,$$

mas, isso contradiz (1.17).

É claro que para todo $r > 0$,

$$\Big(\inf_{|x|\geq r} b(x)\Big) u_n^2 \leq b(x)u_n^2, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \text{ com } |x| \geq r,$$

logo,

$$\int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} u_n^2 \leq \frac{1}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)} \int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} b(x)u_n^2,$$

assim,

$$|u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} \leq \frac{1}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} b(x)u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{M}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)^{\frac{1}{2}}},$$

pois $||u_n|| \leq M$, $\forall\, n \in N$.

Logo,

$$a_7|u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} \leq \frac{a_7 M}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Desde que, b é coercivo

$$\frac{a_7 M}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)^{\frac{1}{2}}} \to 0 \ \text{ quando } \ r \to \infty.$$

Assim, para $r > 0$ suficientemente grande, temos

$$a_7|u_n|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus B_r)} \leq \frac{a_7 M}{\inf\limits_{|x|\geq r} b(x)^{\frac{1}{2}}} < \frac{c_1}{2},$$

o que contradiz (1.19).

Portanto, $u \not\equiv 0$. Logo, u é uma solução clássica não-trivial de (P).

■

Corolário 1.1 *Assumindo as hipóteses do Teorema (1.1), existem funções u_1, u_2 que são soluções de (P) com $u_1 > 0$ e $u_2 < 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

Demonstração: Usaremos um argumento bem conhecido para mostrar que o problema (P) possui uma solução positiva u_1.

Considere a função

$$f^+(x,z) = \begin{cases} f(x,z), & \text{se } \ z \geq 0 \\ 0, & \text{se } \ z \leq 0, \end{cases}$$

então, f^+ satisfaz $(f_1) - (f_3)$ e também (f_4) para $z > 0$.

Assim, está bem definido o funcional

$$I^+ : \widetilde{E} \to \mathbb{R},$$

$$I^+(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F^+(x,u),$$

onde $F^+(x,u) = \displaystyle\int_0^u f^+(x,t)dt$. O funcional I^+ tem as mesmas propriedades do funcional I da demonstração do teorema anterior. Logo, usando os mesmos argumentos feitos para o funcional I, mostra-se que I^+ tem um ponto crítico $u_1 \not\equiv 0$, que é uma solução clássica de

$$(P^+)\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = f^+(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1 \nabla \varphi + b(x)u_1\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x,u_1)\varphi, \ \forall \ \varphi \in \widetilde{E},$$

tomando $\varphi = -u_1^-$ como função teste, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1 \nabla(-u_1^-) + b(x)u_1(-u_1^-) = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x,u_1)(-u_1^-),$$

lembrando que $u_1 = u_1^+ - u_1^-$ e usando a definição de f^+, temos que

$$||u_1^-||^2 = 0,$$

assim,

$$u_1 \geq 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Como u_1 é contínua, pois u_1 é uma solução clássica de (P^+), temos

$$u_1 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Suponha que exista um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, tal que,

$$u_1(x_0) = 0,$$

como

$$-\Delta u_1 + b(x)u_1 \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

pelo Princípio do Máximo Forte (veja o Teorema B.16 no Apêndice B), segue que

$$u_1 \equiv 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto,

$$u_1 > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

De modo análogo, considerando a função

$$f^-(x,z) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad z \geq 0 \\ f(x,z), & \text{se} \quad z \leq 0, \end{cases}$$

e o funcional

$$I^-(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F^-(x,u),$$

onde $F^-(x,u) = \displaystyle\int_0^u f^-(x,t)dt$.

Mostra-se que o funcional I^- tem um ponto crítico $u_2 < 0$, que é uma solução clássica de (P).

■

1.2 Alguns Resultados Qualitativos

Nesta seção o principal resultado é que o nível minimax c definido em (1.7) depende continuamente do potencial b. Outro importante resultado desta seção é uma caracterização de c que será útil na demonstração deste resultado e de outros presentes ao longo deste capítulo.

Na seção anterior conseguimos um ponto crítico $u \in \widetilde{E}$ do funcional

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u), \quad \forall\, u \in \widetilde{E}$$

que corresponde a uma solução clássica não-trivial de

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + b(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Observe que a condição (b_2), isto é, a coercividade de b, não influenciou quando obtivemos a solução u de (P). Mas ela foi fundamental para mostrarmos que a solução obtida era não-trivial, isto é, $u \not\equiv 0$. Nesta e nas outras seções retiraremos a hipótese (b_2). Vamos supor que f continua satisfazendo as condições $(f_1) - (f_4)$ e acrescentamos a seguinte hipótese:

(f_5) $t^{-1}zf(x,tz)$ é uma função crescente para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nas outras seções mostraremos que com as condições $(f_1)-(f_5)$ e outras sobre o potencial b, que serão definidas oportunamente, que o problema (P) e também (P_h) possuem solução não-trivial.

Note que uma condição necessária para que $u \in \widetilde{E}$ seja um ponto crítico de I é que $I'(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari associada ao funcional I que corresponde ao seguinte conjunto

$$\mathcal{N} = \Big\{ u \in \widetilde{E} \setminus \{0\} \colon I'(u)u = 0 \Big\},$$

ou seja,

$$\mathcal{N} = \Big\{ u \in \widetilde{E} \setminus \{0\} \colon \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)u \Big\}.$$

Observe que se u é uma solução não-trivial de (P), então, u é ponto crítico de I, logo, $u \in \mathcal{N}$, assim, toda solução de (P) está na variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Para garantirmos que a solução obtida é não-trivial iremos trabalhar na variedade de Nehari.

Agora enunciaremos e demonstraremos um lema que será usado no restante deste capítulo.

Lema 1.1 *Assumindo as hipóteses $(f_1)-(f_5)$, para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, existe um único $t_u = t(u) > 0$, tal que, $t_u u \in \mathcal{N}$. O máximo de $I(tu)$, para $t \geq 0$ é atingido em t_u.*

Demonstração: De fato, para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$ defina a função

$$\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

$$\psi(t) = I(tu),$$

ou seja,

$$\psi(t) = \frac{t^2}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,tu).$$

Por (1.6)

$$I(tu) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon C}{2} - C_\epsilon C t^{s-1}||u||^{s-1}\right) t^2 ||u||^2,$$

observe que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon C}{2} - C_\epsilon C t^{s-1}||u||^{s-1}\right) t^2 ||u||^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\epsilon C}{2} > C_\epsilon C t^{s-1}||u||^{s-1} \Leftrightarrow 0 < t < \left(\frac{1-\epsilon C}{2C_\epsilon C||u||^{s-1}}\right)^{\frac{1}{s-1}},$$

logo, $\psi(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno.

Por outro lado, pela Afirmação 1.2, temos

$$I(tu) \le \frac{t^2}{2}||u||^2 - a_3 t^\mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\mu,$$

como $\mu > 2$,

$$I(tu) \to -\infty \ \text{ quando } \ t \to \infty.$$

Logo, $\psi(t) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande.

Assim, temos $\psi(t) > 0$, para $t > 0$ pequeno $\psi(0) = 0$ e $\psi(t) < 0$, para $t > 0$ suficientemente grande. Portanto, existe $t_u = t(u) > 0$, tal que,

$$\psi(t_u) = \max_{t \ge 0} \psi(t) = \max_{t \ge 0} I(tu) = I(t_u u).$$

Observe que

$$\psi'(t) = t||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, tu)u, \tag{1.20}$$

assim,

$$\psi'(t) = 0 \Leftrightarrow tu \in \mathcal{N} \Leftrightarrow ||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, tu)u}{t}. \tag{1.21}$$

Se existissem $t_1 \neq t_2$, tal que, $\psi'(t_1) = 0$ e $\psi'(t_2) = 0$, teríamos por (1.21) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(x, t_1 u)u}{t_1} - \frac{f(x, t_2 u)u}{t_2} \right] = 0,$$

o que não pode ocorrer por (f_5). Logo, para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, existe um único $t_u > 0$, tal que, $t_u u \in \mathcal{N}$.

■

Proposição 1.1 *Está bem definido e é contínuo o operador*

$$T : \widetilde{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+,$$

$$T(u) = t_u$$

onde t_u *é o máximo de* $\psi(t) = I(tu),\ t \ge 0,$ *ou ainda,* $t_u u \in \mathcal{N}$.

Demonstração: De fato, como para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$ t_u é único, o operador T está bem definido.

Seja $u_n \to u$ em $\widetilde{E} \setminus \{0\}$, mostraremos que

$$T(u_n) = t_{u_n} \to t_u = T(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^+.$$

Com efeito, pela difinição de t_u segue de (1.21) que

$$t_{u_n}^2 ||u_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_{u_n} u_n) t_{u_n} u_n. \tag{1.22}$$

Afirmamos que a sequência $(t_{u_n}) \subset \mathbb{R}^+$ é limitada. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < t_{u_n} \leq 1 \text{ ou } t_{u_n} > 1.$$

Suponha que exista $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$t_{u_n} > 1, \ \forall\, n \geq n_0,$$

pois caso contrário, (t_{u_n}) será limitada.

Observe que por (f_4)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_{u_n} u_n) t_{u_n} u_n \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t_{u_n} u_n). \tag{1.23}$$

Para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, defina a função

$$h(t) = \frac{F(x, tu)}{t^\mu}, \ \ \forall\, t > 0,$$

h está bem definida e é derivável, com

$$h'(t) = \frac{1}{t^{\mu+1}} [tuf(x, tu) - \mu F(x, tu)], \ \forall\, t > 0,$$

por (f_4) temos $h'(t) > 0$, $\forall\, t > 0$. Logo, h é crescente e assim, para todo $t \geq 1$, $h(t) \geq h(1)$, ou seja,

$$\frac{F(x, tu)}{t^\mu} \geq F(x, u), \ \forall\, t \geq 1,$$

logo,

$$F(x, tu) \geq t^\mu F(x, u), \ \forall\, t \geq 1. \tag{1.24}$$

Usando (1.23) e (1.24), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, t_{u_n} u_n) t_{u_n} u_n \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} t_{u_n}^\mu F(x, u_n),$$

usando (1.22), obtemos

$$t_{u_n}^2 ||u_n||^2 \geq \mu t_{u_n}^\mu \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n),$$

logo,

$$\frac{||u_n||^2}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)} \geq t_{u_n}^{\mu-2},$$

Desde que $u_n \to u$ em $\widetilde{E} \setminus \{0\}$,

$$||u_n||^2 \to ||u||^2,$$

e como o funcional

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u), \ u \in \widetilde{E}$$

é de classe $C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R})$ (veja o Apêndice A),

$$G(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n) \to G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u).$$

Como consequência, das duas últimas convergências, a sequência

$$\left(\frac{||u_n||^2}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)} \right)$$

é limitada. Assim, observe que existe uma constante $K > 0$, tal que,

$$t_{u_n}^{\mu-2} \leq \frac{||u_n||^2}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)} \leq K, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a sequência $(t_{u_n}) \subset \mathbb{R}^+$ é limitada. Logo, a menos de subsequência,

$$t_{u_n} \to \bar{t} \text{ em } \mathbb{R}^+.$$

Suponha que $\bar{t} = 0$. Dividindo a equação (1.22) por t_{u_n}, temos

$$||u_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, t_{u_n} u_n) u_n}{t_{u_n}},$$

como $||u_n||^2 \to ||u||^2$, então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, t_{u_n} u_n) u_n}{t_{u_n}} \to ||u||^2. \tag{1.25}$$

Além disso, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x, t_{u_n} u_n) u_n}{t_{u_n}} \to 0. \tag{1.26}$$

Com efeito, desde que por (f_2)

$$f_z(x, 0) = 0 = f(x, 0),$$

então,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, h)}{h} = 0 \tag{1.27}$$

pois,

$$0 = f_z(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h+0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)}{h}.$$

Como $u_n \to u$ em $\widetilde{E} \setminus \{0\}$ e $\widetilde{E} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*$ continuamente, então, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*$, logo,

$$u_n \to u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad u_n \to u \text{ em } L^{s+1}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

e existem funções $h \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$, tais que,

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $t_{u_n} \to 0$ em $\mathbb{R}^+$

$$t_{u_n} u_n(x) \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Assim, por (1.27)

$$\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x))}{t_{u_n} u_n(x)} \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \tag{1.28}$$

Note que

$$\Big|\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x)) u_n(x)}{t_{u_n}}\Big| = \Big|\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x))}{t_{u_n} u_n(x)} u_n^2(x)\Big| \leq \Big|\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x))}{t_{u_n} u_n(x)}\Big|\ h^2(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

por (1.28),

$$\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x)) u_n(x)}{t_{u_n}} \to 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

além disso, por (f_3)

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x, t_{u_n} u_n(x)) u_n(x)}{t_{u_n}}\Big| &\leq \frac{1}{t_{u_n}}\Big(a_1|t_{u_n} u_n(x)| + \frac{a_2}{s}|t_{u_n} u_n(x)|^s\Big)|u_n(x)| \\ &\leq a_1|u_n(x)|^2 + a_3 t_{u_n}^{s-1}|u_n(x)|^{s+1},\end{aligned}$$

como (t_{u_n}) converge, existe uma constante $K > 0$, tal que,

$$\Big|\frac{f(x,t_{u_n}u_n(x))u_n(x)}{t_{u_n}}\Big| \leq a_1h^2(x) + a_3Kg(x)^{s+1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(x,t_{u_n}u_n)u_n}{t_{u_n}} \to 0,$$

o que prova (1.26).

Por (1.25), (1.26) e unicidade de limite

$$||u|| = 0,$$

mas isso contradiz o fato de $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$. Portanto, $\bar{t} > 0$.

Passando o limite em (1.22) e fazendo $n \to \infty$, temos

$$\bar{t}^2||u||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\bar{t}u)\bar{t}u,$$

o que implica que $\bar{t}u \in \mathcal{N}$. Pelo Lema 1.1, t_u é o único real positivo t, tal que, $tu \in \mathcal{N}$. Logo, por unicidade

$$\bar{t} = t_u.$$

Assim, a menos de subsequência,

$$T(u_n) = t_{u_n} \to t_u = T(u),$$

pelo Teorema B.1 (veja o Apêndice B), o operador T é contínuo.

$\blacksquare$

A seguir, faremos uma caracterização do nível minimax c que será útil nos nossos estudos.

Proposição 1.2 *Seja c o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha associado ao funcional I, definido em (1.7). Definindo*

$$c^* = \inf_{u\in\widetilde{E}\setminus\{0\}} \max_{t\geq 0} I(tu),$$

temos que

$$c^* = c = \inf_{\mathcal{N}} I.$$

Demonstração: De fato, observe que I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$, pois para cada $u \in \mathcal{N}$, $I'(u)u = 0$. Como

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}f(x,u)u - F(x,u)\Big],$$

por (f_4), temos

$$I(u) > 0, \ \forall\ u \in \mathcal{N},$$

logo, I é limitado inferiormente sobre $\mathcal{N}$. Assim, existe $\inf\limits_{\mathcal{N}} I$.

Pelo Lema 1.1, para cada $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, existe um $t_u = t(u) > 0$, tal que, $t_u u \in \mathcal{N}$, logo

$$\inf_{\mathcal{N}} I \leq I(t_u u) = \max_{t \geq 0} I(tu), \ \forall\ u \in \widetilde{E} \setminus \{0\},$$

assim,

$$\inf_{\mathcal{N}} I \leq c^*. \tag{1.29}$$

Por outro lado, para cada $u \in \mathcal{N}$, temos que,

$$I(u) = \max_{t \geq 0} I(tu) \geq c^*.$$

Assim,

$$\inf_{\mathcal{N}} I \geq c^*. \tag{1.30}$$

Por (1.29) e (1.30), temos

$$c^* = \inf_{\mathcal{N}} I.$$

Agora, mostraremos que

$$c^* = c.$$

Afirmamos que existe um $t_0 \in [0,1]$, tal que,

$$\gamma(t_0) \in \mathcal{N}.$$

Com efeito, como

$$I'(\gamma(t))\gamma(t) = ||\gamma(t)||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\gamma(t))\gamma(t),$$

usando a Afirmação 1.1, a imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$I'(\gamma(t))\gamma(t) \geq ||\gamma(t)||^2 - \epsilon C||\gamma(t)||^2 - C_\epsilon C||\gamma(t)||^{s+1} = (1-\epsilon C - C_\epsilon C||\gamma(t)||^{s-1})||\gamma(t)||^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\epsilon C > C_\epsilon C||\gamma(t)||^{s-1} \Leftrightarrow 0 < ||\gamma(t)|| < \Big(\frac{1-\epsilon C}{C_\epsilon C}\Big)^{\frac{1}{s-1}}.$$

Fazendo $r = \Big(\frac{1-\epsilon C}{C_\epsilon C}\Big)^{\frac{1}{s-1}}$, temos que

$$\forall\ t \in (0,1],\ \text{tal que, } ||\gamma(t)|| < r$$

$$I'(\gamma(t))\gamma(t) > 0. \tag{1.31}$$

Como $I(\gamma(1)) < 0$, temos

$$\frac{||\gamma(1)||^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,\gamma(1)) < 0,$$

logo,

$$||\gamma(1)||^2 < \int_{\mathbb{R}^N} 2F(x,\gamma(1)) < \int_{\mathbb{R}^N} \mu F(x,\gamma(1)) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\gamma(1))\gamma(1).$$

Mas

$$I'(\gamma(1))\gamma(1) = ||\gamma(1)||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\gamma(1))\gamma(1),$$

logo,

$$I'(\gamma(1))\gamma(1) < 0.$$

Seja $\bar{t} \in (0,1)$, tal que, $||\gamma(\bar{t})|| < r$, então, por (1.31), temos

$$I'(\gamma(\bar{t}))\gamma(\bar{t}) > 0.$$

Note que a aplicação $I'(\gamma(t))\gamma(t)$ é contínua, logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $t_0 \in (\bar{t}, 1)$ tal que,

$$I'(\gamma(t_0))\gamma(t_0) = 0,$$

o que mostra que $\gamma(t_0) \in \mathcal{N}$.

Assim,

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq I(\gamma(t_0)) \geq \inf_{\mathcal{N}} I,$$

com isso,

$$c \geq c^*. \tag{1.32}$$

Por outro lado, desde que

$$I(tu) \to -\infty \text{ quando } t \to \infty,$$

existe um $\bar{t}_u > 0$ suficientemente grande, tal que, $I(\bar{t}_u u) < 0$. Defina a curva

$$\gamma_u : [0,1] \to \widetilde{E},$$

$$\gamma_u(\theta) = (\bar{t}_u u)\theta,$$

então, $\gamma_u(0) = 0$, $I(\gamma_u(1)) < 0$ e $\gamma_u \in C([0,1], \widetilde{E})$. Logo, $\gamma_u \in \Gamma$, onde Γ é o conjunto definido em (1.8).

Observe que pela definição de γ_u,

$$\max_{t \geq 0} I(tu) \geq \max_{\theta \in [0,1]} I(\gamma_u(\theta)), \ \forall\, u \in \widetilde{E} \setminus \{0\},$$

logo,

$$c^* \geq c. \tag{1.33}$$

Por (1.32) e (1.33)

$$c = c^*.$$

■

Observação 1.1 *Desde que $c = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$ e cada ponto crítico de I pertence a $\mathcal{N}$, então, se c é um valor crítico de I, ele é o de menor energia.*

A seguir demonstraremos um lema que compara níveis minimax. Este lema será útil para mostrarmos que o nível minimax c depende continuamente do potencial b.

Lema 1.2 *Suponha que f satisfaz $(f_1) - (f_5)$ e $b, \widetilde{b}$ satisfaçam (b_1). Sejam os funcionais I e $\widetilde{I}$, associados aos potenciais b e $\widetilde{b}$, ou seja,*

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + b(x)u^2) - F(x,u)\Big]$$

e

$$\widetilde{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \widetilde{b}(x)u^2) - F(x,u)\Big]$$

e sejam ainda c e $\widetilde{c}$ os seus valores minimax dados por (1.7), ou seja,

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\theta \in [0,1]} I(\gamma(\theta)) \quad e \quad \widetilde{c} = \inf_{\gamma \in \widetilde{\Gamma}} \max_{\theta \in [0,1]} \widetilde{I}(\gamma(\theta)),$$

onde

$$\Gamma = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], \widetilde{E}\Big) \colon \gamma(0) = 0 \ e \ I(\gamma(1)) < 0\Big\}$$

e

$$\widetilde{\Gamma} = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], \widetilde{E}\Big) \colon \gamma(0) = 0 \ e \ \widetilde{I}(\gamma(1)) < 0\Big\}.$$

Então, supondo que $b \geq \widetilde{b}$, temos que

$$c \geq \widetilde{c}.$$

Demonstração: Desde que $b \geq \widetilde{b}$, é claro que

$$I(u) \geq \widetilde{I}(u), \ \forall \ u \in \widetilde{E}, \tag{1.34}$$

logo,

$$I(tu) \geq \widetilde{I}(tu), \ \forall \ t \geq 0 \ \text{ e } \ \forall \ u \in \widetilde{E},$$

com isso,

$$\max_{t\geq 0} I(tu) \geq \max_{t \geq 0} \widetilde{I}(tu), \ \forall \ u \in \widetilde{E},$$

pela caracterização de c e $\widetilde{c}$ dadas pela proposição1.2, temos que

$$c \geq \widetilde{c}.$$

■

Note que o valor minimax c faz sentido se o potencial b for contínuo ou simplesmente mensurável. Pelo Lema 1.2 o nível minimax c depende de b, mostraremos que c depende contínuamente do potencial b. Para indicar a dependência de c por b, escreveremos $c = c(b)$, no próximo teorema.

Teorema 1.2 *Suponha que f satisfaça $(f_1) - (f_5)$ e b, (b_n) satisfaçam (b_1), $\forall \ n \in \mathbb{N}$. Suponha ainda que*

$$b_n \to b \ \text{ em } \ L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

então,

$$c(b_n) \to c(b),$$

isto é, o nível minimax c depende continuamente do potencial b.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$, então, para todo n, suficientemente grande

$$b+\epsilon \geq b+|b_n-b| \geq b \geq b-|b_n-b| \geq b-\epsilon. \tag{1.35}$$

Assim, por (1.35) e pelo Lema 1.2, para a prova do Teorema 1.2, basta provar um resultado mais simples, ou seja, que

$$c_\epsilon \equiv c(b+\epsilon) \to c(b) \equiv c_0 \text{ quando } \epsilon \to 0, \tag{1.36}$$

onde $c_\epsilon \equiv c(b+\epsilon)$ é o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha associado ao funcional

$$I_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}\Big(|\nabla u|^2 + (b+\epsilon)u^2\Big) - F(x,u)\Big], \;\; \forall\, u \in \widetilde{E}, \tag{1.37}$$

Primeiro mostraremos o resultado para $\epsilon < 0$.

Com efeito, para todo $\epsilon < 0$, $\;b+\epsilon < b$, pelo Lema 1.2

$$c_\epsilon \leq c_0,$$

logo,

$$\lim_{\epsilon \to 0^-} c_\epsilon = \underline{c} \leq c_0.$$

Suponha que

$$\underline{c} < c_0.$$

Seja c_{ϵ_k} o nível minimax para o funcional I_{ϵ_k}. E sejam sequências $\epsilon_k \to 0^-$ quando $k \to \infty$ e $\delta_n \to 0^+$ quando $n \to \infty$. Pela Proposição 1.2, existe uma sequência $(u_{k_n}) \subset \widetilde{E}$, tal que,

$$\max_{t \geq 0} I_{\epsilon_k}(t u_{k_n}) \leq c_{\epsilon_k} + \delta_n, \tag{1.38}$$

sem perda da generalidade, podemos supor que $||u_{k_n}|| = 1$.

Assim como na demonstração da Proposição 1.2, para cada função u_{k_n} podemos associar a curva

$$\gamma_{k_n} : [0,1] \to \widetilde{E},$$

$$\gamma_{k_n}(\theta) = (\bar{t}_{k_n} u_{k_n})\theta,$$

com $\bar{t}_{k_n}$ suficientemente grande e concluir que $\gamma_{k_n} \in \Gamma_k$, onde

$$\Gamma_k = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], \widetilde{E}\Big) \colon \gamma(0) = 0 \text{ e } I_{\epsilon_k}(\gamma(1)) < 0\Big\},$$

além disso, concluimos que

$$\max_{\theta\in[0,1]} I_{\epsilon_k}(\gamma_{k_n}(\theta)) \leq \max_{t\geq 0} I_{\epsilon_k}(tu_{k_n}). \tag{1.39}$$

Seja $K_0 = \{0,1\}$, observe que $\gamma_{k_n}(K_0) = \{0, \gamma_{k_n}(1)\}$, logo,

$$c_1 \equiv \max_{\gamma_{k_n}(K_0)} I_{\epsilon_k} = 0,$$

observe ainda que

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_k} \max_{\theta\in[0,1]} I_{\epsilon_k}(\gamma(\theta)) = c_{\epsilon_k} > 0 = c_1.$$

Por (1.38) e (1.39)

$$\max_{\theta\in[0,1]} I_{\epsilon_k}(\gamma(\theta)) \leq c_{\epsilon_k} + \delta_n.$$

Fazendo

$$X = \widetilde{E},\ K = [0,1],\ K_0 = \{0,1\},\ M = \Gamma \ \text{ e } \ \varphi = \gamma_{k_n},$$

segue do Teorema B.19 (veja o Apêndice B), a existência de sequências $(w_{k_n}) \subset \widetilde{E}$ e $(\theta_{k_n}) \subset [0,1]$, tais que

$$||w_{k_n} - \gamma_{k_n}(\theta_{k_n})|| \leq \delta_n^{\frac{1}{2}}, \tag{1.40}$$

$$I_{\epsilon_k}(w_{k_n}) \in (c_{\epsilon_k} - \delta_n, c_{\epsilon_k} + \delta_n) \tag{1.41}$$

e

$$||I'\epsilon_k(w_{k_n})|| \leq \delta_n^{\frac{1}{2}}. \tag{1.42}$$

Por (1.37)

$$I_{\epsilon_k}(u) = I(u) + \frac{\epsilon_k}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u^2,\ \ \forall\, u \in \widetilde{E}.$$

Fazendo $n = k$ acima e considerando $u_k \equiv u_{k_k}$ e $w_k \equiv w_{k_k}$, temos que

$$\begin{aligned} c_0 &\leq \max_{t\geq 0} I(tu_k) = I(t_{u_k}u_k) = I_{\epsilon_k}(t_{u_k}u_k) - \frac{\epsilon_k}{2}t_{u_k}^2\int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 \\ &\leq \max_{t\geq 0} I_{\epsilon_k}(tu_k) - \frac{\epsilon_k}{2}t_{u_k}^2\int_{\mathbb{R}^N} u_k^2, \end{aligned}$$

por (1.38)

$$c_0 \leq c_{\epsilon_k} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2}t_{u_k}^2\int_{\mathbb{R}^N} u_k^2,$$

logo,

$$c_0 \leq \underline{c} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2} t_{u_k}^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2.$$

Desde que $||u_k|| = 1$, pela imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, existe uma constante $M_1 > 0$, tal que, $|u_k|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq M_1$. Assim,

$$c_0 \leq \underline{c} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2} t_{u_k}^2 M_1. \tag{1.43}$$

Afirmação 1.3 *Existe uma subsequência de* (t_{u_k}), *que ainda denotaremos por* (t_{u_k}), *limitada, ou seja,*

$$|t_{u_k}| \leq C, \ \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

Assumindo, por enquanto, essa afirmação, por (1.43)

$$c_0 \leq \underline{c} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2} C_1. \tag{1.44}$$

Por outro lado, como $\epsilon_k \to 0^-$, $\delta_k \to 0^+$ e estamos supondo que $\underline{c} < c_0$. Podemos escolher ϵ_k e δ_k suficientemente pequenos, de forma que

$$c_0 > \underline{c} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2} C_1.$$

Com efeito, podemos tomar δ_k suficientemente pequeno, de forma que

$$\underline{c} + \delta_k < c_0,$$

assim,

$$(\underline{c} + \delta_k) - c_0 < 0 \Rightarrow \frac{2}{C_1}\Big[(\underline{c} + \delta_k) - c_0\Big] < 0.$$

Tomando ϵ_k, tal que,

$$\frac{2}{C_1}\Big[(\underline{c} + \delta_k) - c_0\Big] < \epsilon_k < 0,$$

temos

$$(\underline{c} + \delta_k) - c_0 < \frac{\epsilon_k}{2} C_1,$$

com isso,

$$c_0 > \underline{c} + \delta_k - \frac{\epsilon_k}{2} C_1,$$

o que contradiz (1.44).

Portanto

$$\underline{c} = c_0. \tag{1.45}$$

E assim,

$$c_\epsilon \to c_0 \text{ quando } \epsilon \to 0^-.$$

Agora, mostraremos a Afirmação 1.3.

Demonstração da Afirmação 1.3.

Observe que $t_{u_k} > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Logo, se a menos de subsequência,

$$0 < t_{u_k} \leq 1, \ \forall\, k \geq n_0,$$

não há nada a mostrar. Assim, suponha que

$$t_{u_k} > 1, \ \forall\, k \geq n_0,$$

pela definição de t_{u_k} e a normalização de (u_k), segue de (1.21) que

$$t_{u_k}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} t_{u_k} u_k f(x, t_{u_k} u_k),$$

por (f_4)

$$t_{u_k}^2 \geq \mu \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t_{u_k} u_k),$$

usando (1.24) temos

$$t_{u_k}^2 \geq \mu t_{u_k}^\mu \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k),$$

assim,

$$t_{u_k}^{\mu-2} \leq \frac{1}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k)}. \tag{1.46}$$

Afirmamos que existe uma constante $\alpha > 0$, tal que, a menos de subsequência,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k) \geq \alpha. \tag{1.47}$$

Observe que de (1.46) e (1.47), obtemos, a menos de subsequência, a limitação de (t_{u_k}).

Assim, para concluirmos a prova de (1.36) para o caso em que $\epsilon < 0$, resta-nos mostrar a relação (1.47).

Suponha que (1.47) não ocorra. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_k) \to 0. \tag{1.48}$$

Usaremos (1.40) para provar que (1.48) é impossível.

Com efeito, desde que $\gamma_{k_n}(\theta) = (\bar{t}_{k_n} u_{k_n})\theta$, então, para $n = k$ e $\gamma_k \equiv \gamma_{kk}$, temos

$$\gamma_k(\theta_k) \equiv \gamma_{k_k}(\theta_{k_k}) = (\bar{t}_{k_k} u_{k_k})\theta_{k_k} = (\bar{t}_{k_k}\theta_{k_k})u_{k_k} \equiv \xi_k u_k,$$

logo, por (1.40)

$$||\xi_k u_k - w_k|| \leq \delta_k^{\frac{1}{2}}, \tag{1.49}$$

assim,

$$||\xi_k u_k|| - ||w_k|| \leq \delta_k^{\frac{1}{2}},$$

como $||u_k|| = 1$, temos

$$\xi_k \leq \delta_k^{\frac{1}{2}} + ||w_k||. \tag{1.50}$$

Desde que $c_\epsilon \to \underline{c}$ quando $\epsilon \to 0^-$, por (1.41), temos

$$I_{\epsilon_k}(w_k) \to \underline{c} \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além disso, por (1.42)

$$I'_{\epsilon_k}(w_k) \to 0 \text{ em } \widetilde{E}'.$$

Utilizando as duas últimas convergências e seguindo a idéia contida na demonstração do Teorema 1.1, a partir de (1.9) mostra-se que (w_k) é limitada em $\widetilde{E}$. Portanto, por (1.50)

$$\xi_k \leq M_2, \tag{1.51}$$

assim,

$$u_k^2 \geq \frac{1}{M_2}\xi_k u_k^2,$$

logo, para todo $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{B_r(y)} u_k^2 \geq \frac{1}{M_2}\int_{B_r(y)} \xi_k u_k^2,$$

com isso,

$$\begin{aligned} |u_k|_{L^2(B_r(y))} &\geq C|\xi_k u_k|_{L^2(B_r(y))} = C|\xi_k u_k - w_k + w_k|_{L^2(B_r(y))} \\ &\geq C\Big(|w_k|_{L^2(B_r(y))} - |w_k - \xi_k u_k|_{L^2(B_r(y))}\Big), \end{aligned}$$

usando (1.49) e a imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u_k|_{L^2(B_r(y))} \geq C\Big(|w_k|_{L^2(B_r(y))} - M_3\delta_k^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{1.52}$$

Afirmamos que existem uma sequência $(y_k) \subset \mathbb{R}^N$, constantes $\beta > 0$ e $R > 0$, tais que,

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{B_R(y_k)} w_k^2 \geq \beta. \tag{1.53}$$

Com efeito, pois caso contrário, teríamos

$$\liminf_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_k^2 = 0, \quad \forall\, R > 0.$$

Como consequência, pelo Lema de Lions (veja o Lema B.2 no Apêndice B), teríamos

$$w_k \to 0 \;\text{ em }\; L^q(\mathbb{R}^N) \text{ com } q \in \Big(2,\ 2^* = \frac{2N}{N-2}\Big). \tag{1.54}$$

Mas, recorde que

$$I_{\epsilon_k}(w_k) \to \underline{c} \;\text{ em } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad I'_{\epsilon_k}(w_k) \to 0 \;\text{ em } \widetilde{E}',$$

e que (w_k) é limitada em $\widetilde{E}$, logo,

$$I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k \to \underline{c} > 0. \tag{1.55}$$

Por outro lado, note que

$$I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k = \int_{\mathbb{R}^N} [\frac{1}{2} f(x, w_k)w_k - F(x, w_k)] \geq 0,$$

assim, por (f_4)

$$0 \leq I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x, w_k)w_k,$$

pela Afirmação 1.1, para todo $\epsilon > 0$ existe uma constante $C_\epsilon > 0$, tal que,

$$0 \leq I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^2 + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^{s+1},$$

por (1.54)

$$0 \leq I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^2 + o_1(k),$$

de onde segue que

$$I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k)w_k \to 0,$$

o que contradiz (1.55).

Assim, existem (y_k), β e R que satisfazem (1.53). Fazendo $y = y_k$ e $r = R$ em (1.52), temos que

$$|u_k|_{L^2(B_{R(y_k)})} \geq C\Big(|w_k|_{L^2(B_{R(y_k)})} - M_3 \delta_k^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Por (1.53), segue do Corolário B.1 (veja o Apêndice B), que existe um natural k_0, tal que,

$$\int_{B_{R(y_k)}} |w_k|^2 \geq \beta, \; \forall \, k \geq k_0,$$

logo,

$$|u_k|_{L^2(B_{R(y_k)})} \geq C\left[\beta^{\frac{1}{2}} - M_3\delta_k^{\frac{1}{2}}\right], \; \forall \, k \geq k_0.$$

Como $\delta_k \to 0^+$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que,

$$|u_k|_{L^2(B_{R(y_k)})} \geq C\Big(\frac{\beta}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}, \; \forall \, k \geq k_1. \tag{1.56}$$

Para provarmos que (1.48) é impossível basta mostrarmos que existe uma constante $\beta_1 > 0$, tal que,

$$\int_{B_R(y_k)} F(x, u_k) \geq \beta_1. \tag{1.57}$$

Recorde que pela Afirmação 1.2, $F(x, z) \geq a_3|z|^\mu$ para $|z| \geq 1$ com a_3 independente de x. Portanto, para todo $\delta > 0$, existe uma constante $A_\delta > 0$ tal que,

$$|z|^2 \leq \delta + A_\delta F(x, z), \; \forall \, x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente,

$$\int_{B_R(y_k)} |u_k|^2 \leq \delta \int_{B_R(y_k)} + A_\delta \int_{B_R(y_k)} F(x, u_k),$$

assim se (1.57) não ocorresse, teríamos

$$\int_{B_{R(y_k)}} |u_k|^2 \to 0,$$

o que contradiz (1.56).

Portanto, a prova do teorema está concluída para o caso em que $\epsilon < 0$.

Usaremos um argumento similar para provar (1.36) para $\epsilon > 0$.

Para cada $\epsilon > 0$, tem-se $b < b + \epsilon$, pelo Lema 1.2,

$$c(b) \equiv c_0 \leq c_\epsilon \equiv c(b + \epsilon),$$

logo,

$$c_0 \leq \overline{c} = \lim_{\epsilon \to 0^+} c_\epsilon.$$

Suponha que

$$c_0 < \overline{c}. \tag{1.58}$$

Seja a sequência δ_k como no caso em que $\epsilon < 0$. Pela Proposição 1.2, existe uma sequência $(u_k) \subset \widetilde{E}$, tal que, $||u_k|| = 1$ e

$$\max_{t\geq 0} I(tu_k) \leq c_0 + \delta_k. \tag{1.59}$$

Como no caso anterior existem sequências $(w_k) \subset \widetilde{E}$ e $(\theta_k) \subset [0,1]$, tal que,

$$||w_k - \gamma_k(\theta_k)|| \leq \delta_k^{\frac{1}{2}},$$

$$I(w_k) \in (c_0 - \delta_k, c_0 + \delta_k)$$

e

$$||I'(w_k)|| \leq \delta_k^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $\epsilon > 0$ e $u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}$, seja $t_\epsilon(u)$ o máximo de $\psi_\epsilon(t) = I_\epsilon(tu)$, obtido pelo Lema 1.1. Note que

$$\overline{c} \leq c_\epsilon \leq \max_{t\geq 0} I_\epsilon(tu_k) = I_\epsilon(t_\epsilon(u_k)u_k) = I(t_\epsilon(u_k)u_k) + \frac{\epsilon}{2} t_\epsilon(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2,$$

usando (1.59), temos

$$\overline{c} \leq c_0 + \delta_k + \frac{\epsilon}{2} t_\epsilon(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2.$$

Como $||u_k|| = 1$, se $(t_\epsilon(u_k))$ possui uma subsequência limitada, teremos a menos de subsequência que

$$\overline{c} \leq c_0 + \delta_k + \frac{\epsilon}{2} M. \tag{1.60}$$

Por outro lado, como $\delta_k \to 0^+$ e $c_0 < \overline{c}$, podemos tomar k suficientemente grande tal que,

$$c_0 + \delta_k + \frac{\epsilon}{2} M < \overline{c},$$

o que contradiz (1.60). Assim,

$$c_0 = \overline{c},$$

com isso,

$$c_\epsilon \to c_0 \ \text{ quando } \ \epsilon \to 0^+.$$

Portanto, (1.36) ocorre. Assim, o Teorema 1.2 estará provado.

Logo, resta-nos mostrar que a sequência $(t_\epsilon(u_k))$ possui uma subsequência limitada.

Com efeito, como $t_\epsilon(u_k) > 0$, se ao longo de uma subsequência $t_\epsilon(u_k) \leq 1$ não há nada a provar. Assim, suponha que exista um natural k_0, tal que, $t_\epsilon(u_k) > 1$, $\forall\, k \geq k_0$.

Pela definição de $t_\epsilon(u_k)$, segue do Lema 1.1 que $t_\epsilon(u_k)u_k \in \mathcal{N}_\epsilon$, onde

$$\mathcal{N}_\epsilon = \Big\{u \in \widetilde{E} \setminus \{0\}\colon I'_\epsilon(u)u = 0\Big\},$$

logo,

$$t_\epsilon(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^2 + (b+\epsilon)u_k^2 = \int_{\mathbb{R}^N} t_\epsilon(u_k)u_k f(x, t_\epsilon(u_k)u_k),$$

usando novamente (f_4) e (1.24), concluimos que

$$t_\epsilon(u_k)^{\mu-2} \leq \frac{1}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_k)} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u_k|^2 + (b+\epsilon)u_k^2\Big),$$

Como $||u_k|| = 1$ e $\widetilde{E} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ continuamente, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$t_\epsilon(u_k)^{\mu-2} \leq \frac{C}{\mu \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_k)}.$$

Argumentando como no caso anterior a partir de (1.46), mostra-se que existe uma constante $\alpha > 0$, tal que, a menos de subsequência,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_k) \geq \alpha,$$

com isso, a sequência $(t_\epsilon(u_k))$ possui uma subsequência limitada, o que conclui a demonstração do teorema.

$\blacksquare$

1.3 Outros Resultados de Existência

Nesta seção vamos apresentar outros resultados sobre a existência de solução, obtidos por Rabinowitz [35], para o problema

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + b(x)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

que são baseados em parte, em argumentos de comparação.

Para o próximo resultado faremos a seguinte hipótese sobre o potencial b:

(b_3) Suponha que exista uma constante $\widehat{b}$, tal que,

$$\liminf_{|x|\to\infty} b(x) \geq \widehat{b}.$$

Note que como $\widehat{b}$ é uma constante, o funcional

$$\widehat{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \widehat{b}u^2) - F(x,u)\Big], \tag{1.61}$$

está bem definido para toda $u \in E = W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, além disso, como $(f_1) - (f_4)$ são satisfeitas, $\widehat{I} \in C^1(E, \mathbb{R})$ (veja o Apêndice A). E seguindo os mesmos argumentos feitos para o funcional

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + b(x)u^2) - F(x,u)\Big], \ \forall\, u \in \widetilde{E},$$

contido na demonstração do Teorema 1.1, mostra-se que o funcional $\widehat{I}$, satisfaz as geometrias do Teorema do Passo da Montanha. Portanto, existe o nível minimax

$$\widehat{c} = \inf_{\gamma \in \widehat{\Gamma}} \max_{\theta \in [0,1]} \widehat{I}(\gamma(\theta)), \tag{1.62}$$

onde

$$\widehat{\Gamma} = \Big\{\gamma \in C\Big([0,1], E\Big) \colon \gamma(0) = 0 \text{ e } \widehat{I}(\gamma(1)) < 0\Big\}.$$

Mostraremos resultados sobre a existência de solução para o problema (P), utilizando argumentos de comparação entre níveis minimax.

Teorema 1.3 *Suponha que as hipóteses $(b_1), (b_3)$ e $(f_1) - (f_5)$ são satisfeitas, então, c é um valor crítico de I ou $c \geq \widehat{c}$.*

Demonstração: Primeiro, suponha que

$$\liminf_{|x| \to \infty} b(x) > \widehat{b}. \tag{1.63}$$

A demonstração deste resultado segue parte da demonstração do teorema anterior.

De fato, pela caracterização de c dada pela Proposição 1.2, para cada $\epsilon_n > 0$, existe $u_n \in \widetilde{E}$, com $||u_n|| = 1$, tal que,

$$c \leq \max_{t \geq 0} I(tu_n) \leq c + \epsilon_n,$$

logo,

$$\max_{t \geq 0} I(tu_n) \to c. \tag{1.64}$$

Assim, como na demonstração da Proposição 1.2, a cada função u_n associamos uma curva $\gamma_n \in \Gamma$, com

$$\max_{\theta \in [0,1]} I(\gamma_n(\theta)) \leq \max_{t \geq 0} I(tu_n),$$

com isso,

$$\max_{\theta\in[0,1]} I(\gamma_n(\theta)) \leq c + \epsilon_n.$$

Como na demonstração do teorema anterior fazendo

$$X = \widetilde{E}, \quad K = [0,1] \quad K_0 = \{0,1\} \quad M = \Gamma, \quad \varphi = \gamma_n$$

$$c_1 = \max_{\gamma_n(K_0)} I = 0 < c,$$

segue do Teorema B.19 (veja o Apêndice B), que existem sequências $(w_n) \subset \widetilde{E}$ e $(\theta_n) \subset [0,1]$, tais que

$$||w_n - \gamma_n(\theta_n)|| \leq \epsilon_n^{\frac{1}{2}}, \tag{1.65}$$

$$I(w_n) \in (c - \epsilon_n, c + \epsilon_n) \tag{1.66}$$

e

$$||I'(w_n)|| \leq \epsilon_n^{\frac{1}{2}}.$$

Desde que

$$I(w_n) \to c \text{ em } \mathbb{R} \text{ e } I'(w_n) \to 0 \text{ em } \widetilde{E}', \tag{1.67}$$

mostra-se como na demonstração do Teorema 1.1, que a sequência (w_n) é limitada em $\widetilde{E}$. Além disso, a menos de subsequência, temos que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } \widetilde{E} \quad \text{e} \quad w_n \to w \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \;\; 1 \leq p < 2^* - 1,$$

onde w é solução de (P).

Também como no teorema anterior existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes $\beta > 0$ e $R > 0$, tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 > \beta. \tag{1.68}$$

Suponha que existe uma subsequência de (y_n), que ainda denotaremos por (y_n), limitada. Então, existe $r > 0$, tal que, $B_R(y_n) \subset B_r(0)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, assim,

$$\int_{B_r(0)} w_n^2 \geq \int_{B_R(y_n)} w_n^2, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelas imersões compactas de Sobolev,

$$\int_{B_r(0)} w^2 = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_r(0)} w_n^2 \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 \geq \beta > 0,$$

de onde segue que $w \not\equiv 0$.

Desde que

$$I(w_n) - \frac{1}{2}I'(w_n)w_n = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}f(x,w_n)w_n - F(x,w_n)\Big],$$

segue de (f_4) que para cada $\rho > 0$

$$I(w_n) - \frac{1}{2}I'(w_n)w_n \geq \int_{B_\rho(0)} \Big[\frac{1}{2}f(x,w_n)w_n - F(x,w_n)\Big]. \tag{1.69}$$

Como $w_n \to w$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),\ 1 \leq p < 2^* - 1$, a menos de subsequência,

$$w_n(x) \to w(x) \ \text{ q.t.p na } B_\rho(0)$$

e existem funções $h \in L^2(B_\rho(0))$ e $g \in L^{s+1}(B_\rho(0))$, tais que

$$|w_n(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p na } B_\rho(0)$$

e

$$|w_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p na } B_\rho(0).$$

Assim, observe que

$$|f(x,w_n(x))w_n(x)| \leq a_1|w_n(x)|^2 + a_3|w_n(x)|^{s+1} \leq a_1 h(x)^2 + a_3 g(x)^{s+1} \in L^1(B_\rho(0))$$

e

$$f(x,w_n(x))w_n(x) \to f(x,w(x))w(x) \ \text{ q.t.p na } B_\rho(0).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{B_\rho(0)} f(x,w_n)w_n \to \int_{B_\rho(0)} f(x,w)w. \tag{1.70}$$

Além disso, por (f_4)

$$|F(x,w_n(x))| \leq \frac{1}{\mu}|f(x,w_n(x))w_n(x)| \leq \frac{a_1}{\mu}h(x)^2 + \frac{a_3}{\mu}g(x)^{s+1} \in L^1(B_\rho(0))$$

e

$$F(x,w_n(x)) \to F(x,w(x)) \ \text{ q.t.p na } B_\rho(0).$$

Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{B_\rho(0)} F(x, w_n) \to \int_{B_\rho(0)} F(x, w), \tag{1.71}$$

Passando o limite em (1.69), usando (1.67), (1.70), (1.71) e o fato de ρ ser arbitrário concluimos que

$$c \geq \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2} f(x, w)w - F(x, w)\Big]. \tag{1.72}$$

Como $w \in \widetilde{E}$ é uma solução de (P), então, $I'(w)w = 0$. Desde que,

$$I(w) = I(w) - \frac{1}{2} I'(w)w = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2} f(x, w)w - F(x, w)\Big],$$

temos $I(w) \leq c$. Mas como $w \in \mathcal{N}$ e pela Proposição 1.2 o nível minimax $c = \inf_{\mathcal{N}} I$, concluimos que

$$I(w) = c.$$

Portanto, para o caso em que (y_n) é limitada, o nível minimax c é um valor crítico do funcional I.

Agora, suponha que (y_n) seja uma sequência ilimitada. Como

$$I(u) = \widehat{I}(u) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|u|^2, \ \ \forall\, u \in \widetilde{E},$$

para cada $\alpha > 0$ e $\rho > 0$, temos

$$\max_{t \geq 0} I(tu_n) \geq I(\alpha u_n) = \widehat{I}(\alpha u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|\alpha u_n|^2,$$

logo,

$$\max_{t \geq 0} I(tu_n) \geq \widehat{I}(\alpha u_n) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|\alpha u_n|^2 + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|\alpha u_n|^2.$$

Por (1.63) podemos escolher ρ, tal que, $b(x) \geq \widehat{b}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \geq \rho$. Assim,

$$\max_{t \geq 0} I(tu_n) \geq \widehat{I}(\alpha u_n) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|\alpha u_n|^2,$$

escolhendo $\alpha = \widehat{t}_{u_n}$, onde $\widehat{t}_{u_n}$ é o máximo de $\widehat{\psi}_n(t) = \widehat{I}(tu_n)$, dado pelo Lema 1.1, temos

$$\widehat{I}(\widehat{t}_{u_n} u_n) = \max_{t \geq 0} \widehat{I}(tu_n),$$

logo,

$$\max_{t \geq 0} I(tu_n) \geq \max_{t \geq 0} \widehat{I}(tu_n) + \int_{B_\rho(0)} \frac{1}{2}(b - \widehat{b})|\widehat{t}_{u_n} u_n|^2.$$

Pela Proposição 1.2, para o funcional $\widehat{I}$,

$$\max_{t\geq 0} \widehat{I}(tu_n) \geq \widehat{c},$$

assim,

$$\max_{t\geq 0} I(tu_n) \geq \widehat{c} + \frac{\widehat{t}_{u_n}}{2}^2 \int_{B_\rho(0)} (b-\widehat{b})|u_n|^2. \tag{1.73}$$

Com os argumentos da demonstração do teorema anterior, mostra-se que a sequência $(\widehat{t}_{u_n})$ é limitada.

Suponha que exista uma constante $\lambda_1 > 0$, tal que,

$$|u_n|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \lambda_1. \tag{1.74}$$

Assim, como na demonstração do teorema anterior façamos $\gamma_n(\theta_n) = \xi_n u_n$ usando (1.65)

$$||\xi_n u_n - w_n|| \leq \epsilon_n^{\frac{1}{2}}. \tag{1.75}$$

Portanto,

$$|w_n|_{L^2(B_\rho(0))} = |w_n - \xi_n u_n + \xi_n u_n|_{L^2(B_\rho(0))} \geq |\xi_n u_n|_{L^2(B_\rho(0))} - |w_n - \xi_n u_n|_{L^2(B_\rho(0))},$$

usando (1.74), (1.75) e imersão contínua, temos

$$|w_n|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \xi_n \lambda_1 - M\epsilon_n^{\frac{1}{2}}.$$

Se a menos de subsequência, $\xi_n \to 0$, como $(u_n) \subset \widetilde{E}$ é limitada, pois $||u_n|| = 1$, temos que $\xi_n u_n \to 0$ em $\widetilde{E}$. Por (1.75), $w_n \to 0$ em $\widetilde{E}$, por continuidade $I(w_n) \to 0$, o que é uma contradição, pois por (1.66), $I(w_n) \to c > 0$, . Logo, (ξ_n) tem uma limitação inferior positiva. Assim, existe uma constante $\lambda_2 > 0$, tal que,

$$|w_n|_{L^2(B_\rho(0))} \geq \lambda_2. \tag{1.76}$$

Como $w_n \to w$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < 2^* - 1$, segue de (1.76) que $w \not\equiv 0$. Com os mesmos argumentos usados para o caso em que (y_n) é limitada, concluimos que w é uma solução de (P) com $I(w) = c$. Assim, concluimos novamente que o nível minimax c é um valor crítico do funcional I.

Suponha que (1.74) não ocorra, então, a menos de subsequência,

$$|u_n|_{L^2(B_\rho(0))} \to 0. \tag{1.77}$$

Passando o limite em (1.73), usando (1.64), (1.77) e a limitação de $(\widehat{t}_{u_n})$, concluimos que

$$c \geq \widehat{c}.$$

Portanto, a demonstração do teorema esta concluida para o caso em que

$$\liminf_{|x|\to\infty} b(x) > \widehat{b}.$$

Finalmente, suponha que

$$\liminf_{|x|\to\infty} b(x) = \widehat{b},$$

então, para cada $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{|x|\to\infty} b(x) > \widehat{b} - \epsilon.$$

Pelos resultados já provados uma das situações ocorre:

(i)ou c é um valor crítico de I,

(ii)ou $c \geq \widehat{c}_\epsilon$, onde $\widehat{c}_\epsilon$ é o nível minimax obtido pelo Teorema do Passo da Montanha para o funcional

$$\widehat{I}_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}\Big(|\nabla u|^2 + (\widehat{b} - \epsilon)u^2\Big) - F(x,u)\Big].$$

Suponha que a situação (i) não seja válida. Então, fazendo $\epsilon \to 0$ e usando o Teorema 1.2, temos que

$$c \geq \widehat{c}.$$

Concluimos assim a demonstração do teorema.

∎

A seguir, mostraremos um resultado para o problema (P), usando o Teorema 1.3. Antes vamos enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 1.4 *Suponha que $\widehat{b} > 0$ e que f satisfaça a $(f_1) - (f_5)$ com f independente de x. Então, $\widehat{c}$ é um valor crítico de $\widehat{I}$ com uma correspondente solução clássica $\widehat{u}$ de*

$$(P_{\widehat{b}})\begin{cases} -\Delta u + \widehat{b}u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Demonstração: Note que a Proposição 1.2 é válida para o funcional $\widehat{I}$. Logo, como na demonstração do Teorema 1.2, aplicando esta proposição e em seguida o Teorema B.19, obtemos uma sequência $(w_n) \subset E$, tal que,

$$\widehat{I}(w_n) \to \widehat{c} \qquad \text{e} \qquad \widehat{I}'(w_n) \to 0.$$

Como vimos anteriormente (w_n) é limitada em E e existem uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$, constantes $\beta > 0$ e $R > 0$ tais que,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} w_n^2 > \beta.$$

Defina $u_n(x) = w_n(x + y_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, temos que (u_n) é limitada em E.

Com efeito,

$$||u_n||_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n(x)|^2 + u_n(x)^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n(x + y_n)|^2 + w_n(x + y_n)^2)dx,$$

fazendo a mudança de variável $z = x + y_n$, temos

$$||u_n||_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_n(z)|^2 + w_n(z)^2)dz = ||w_n||_E^2 \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

assim, a sequência (u_n) é limitada em E. Portanto, da reflexividade deste espaço, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ em E. Além disso, observe que

$$\int_{B_R(0)} |u_n(x)|^2 dx = \int_{B_R(0)} |w_n(x + y_n)|^2 dx = \int_{B_R(y_n)} |w_n(z)|^2 dz,$$

pelas imersões compactas de Sobolev, temos

$$\int_{B_R(0)} |\widehat{u}(x)|^2 dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |u_n(x)|^2 dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |w_n(z)|^2 dz > \beta > 0,$$

consequentemente $\widehat{u} \not\equiv 0$.

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(w_n(x + y_n))dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(w_n(z))dz,$$

logo,

$$\widehat{I}(u_n) = \widehat{I}(w_n),$$

note também que $\forall\, \varphi \in E$ com $||\varphi||_E \leq 1$, temos

$$|\widehat{I}'(u_n(x))\varphi(x)| = |\widehat{I}'(w_n(x+y_n))\varphi(x)| = |\widehat{I}'(w_n(z))\varphi(z-y_n)| \leq ||\widehat{I}'(w_n)||_{E'}\ ||\varphi||_E \leq ||\widehat{I}'(w_n)||_{E'},$$

logo,

$$||\widehat{I}'(u_n)||_{E'} \leq ||\widehat{I}'(w_n)||_{E'}.$$

Portanto,

$$\widehat{I}(u_n) \to \widehat{c} \qquad \text{e} \qquad \widehat{I}'(u_n) \to 0,$$

Desde que, a menos de subsequência, $u_n \to \widehat{u}$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < 2^* - 1$, usando os mesmos argumentos empregados na prova do Teorema 1.1 apartir de (1.11), conclui-se que $\widehat{u}$ é uma solução de $(P_{\widehat{b}})$.

Assim, como em (1.72), temos

$$\widehat{c} \geq \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}\widehat{u}f(\widehat{u}) - F(\widehat{u})\Big],$$

logo, $\widehat{c} \geq \widehat{I}(\widehat{u})$.

Desde que $\widehat{u}$ é uma solução de $(P_{\widehat{b}})$, então, $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{N}}$, onde

$$\widehat{\mathcal{N}} = \Big\{u \in E \setminus \{0\} \colon \widehat{I}'(u)u = 0\Big\}.$$

Pela Proposição 1.2 para o funcional $\widehat{I}$, sabemos que o nível minimax $\widehat{c} = \inf\limits_{\widehat{\mathcal{N}}} \widehat{I}$. Assim, concluimos que

$$\widehat{I}(\widehat{u}) = \widehat{c}.$$

Portanto, $\widehat{c}$ é um valor crítico do funcional $\widehat{I}$.

■

Teorema 1.5 *Suponha que $(f_1) - (f_5)$ são satisfeitas, com f independente de x e que b satisfaça a (b_1)*

(b_4) $\liminf\limits_{|x| \to \infty} b(x) \equiv b_\infty$

e

(b_5) $b_\infty \geq b(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ *com* $b_\infty \not\equiv b(x)$.

Então, o nível mimimax c é um valor crítico de I.

Demonstração: Note que $(b_4) - (b_5)$ implicam em (b_3) para cada $\widehat{b} \in (0, b_\infty]$.

Suponha que c não seja um valor crítico de I. Sejam o funcional $\widehat{I}$ e $\widehat{c}$ o seu nível minimax, obtido em (1.62). Pelo Teorema 1.3,

$$c \geq \widehat{c}. \tag{1.78}$$

Seja $u \in E$ o ponto crítico de $\widehat{I}$ correspondente a $\widehat{c}$ dado pelo Teorema 1.4. Assim, $u \in \widehat{\mathcal{N}}$, onde $\widehat{\mathcal{N}}$ é a variedade de Nehari para o funcional $\widehat{I}$, ou seja,

$$\widehat{\mathcal{N}} = \{u \in E \setminus \{0\} \colon \widehat{I}'(u)u = 0\},$$

pelo Lema 1.1,

$$u \in \widehat{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \widehat{\psi}'(1) = 0,$$

onde 1 é ponto máximo de $\widehat{\psi}(t) = \widehat{I}(tu)$, logo,

$$\widehat{c} = \widehat{I}(u) = \max_{t \geq 0} \widehat{I}(tu). \tag{1.79}$$

Observe que para cada $\alpha > 0$,

$$\max_{t \geq 0} \widehat{I}(tu) \geq \widehat{I}(\alpha u) = I(\alpha u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{b} - b)|\alpha u|^2.$$

Escolhendo $\alpha = t_u$, onde t_u é dado pelo Lema 1.1 e usando (1.79) temos

$$\widehat{c} \geq I(t_u u) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{b} - b)|t_u u|^2,$$

como $t_u u \in \mathcal{N}$ e $c = \inf\limits_{\mathcal{N}} I$, temos

$$\widehat{c} \geq c + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{b} - b)|t_u u|^2,$$

por (b_5) para $\widehat{b} = b_\infty$

$$\widehat{c} \geq c + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{b} - b)|t_u u|^2 > c,$$

o que contradiz (1.78).

Portanto, c é um valor crítico do funcional I.

$\blacksquare$

1.4 O Problema (P_h)

Nesta seção estudaremos a existência de solução para o problema

$$(P_h) \begin{cases} -\Delta u + b(hx)u = f(x,u), \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde h é um parâmetro real.

Vamos considerar nesta seção a seguinte hipótese:

(b_6) $b(0) < \widehat{b}$,

onde $\widehat{b}$ é a constante presente na hipótese (b_3).

Temos o seguinte resultado obtido por Rabinowitz [35]

Teorema 1.6 *Suponha que* (b_1), (b_3), (b_6) *e* $(f_1)-(f_5)$ *são satisfeitas com* f *independente de* x. *Então, existe uma constante* $h_0 > 0$, *tal que,* $\forall\ h \in (0, h_0)$, *o problema* (P_h) *tem uma solução clássica não-trivial.*

Demonstração: Sejam $h > 0$ e c_h o nível minimax obtido pelo Teorema do Passo da Montanha para o funcional

$$I_h(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + b(hx)u^2) - F(u)\Big],$$

onde $||u||^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(hx)|u|^2)$.

Suponha que c_h não seja um valor crítico do funcional I_h. Pelo Teorema 1.3,

$$c_h \geq \widehat{c}, \tag{1.80}$$

onde $\widehat{c}$ é o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha para $\widehat{I}$.

Pelo Teorema 1.4, existe $w \in E$ solução de $(P_{\widehat{b}})$, tal que,

$$\widehat{I}(w) = \widehat{c} \qquad \text{e} \qquad \widehat{I}'(w) = 0.$$

Para cada $R > 0$, seja $\chi_R \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, tal que,

$$\chi_R(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \leq R \\ 0, & \text{se} \quad t \geq R + 2, \end{cases}$$

e $|\chi_R'(t)| \leq 1$, $\forall\, t \in (R, R+2)$. Seja

$$v = \chi_R w.$$

Note que

$$||\chi_R w - w|| = ||(\chi_R - 1)w|| = |\chi_R - 1|||w||,$$

como $\chi_R \to 1$ em $\mathbb{R}$ quando $R \to \infty$, então,

$$||\chi_R w - w|| \to 0 \text{ quando } R \to \infty,$$

ou seja,

$$v = \chi_R w \to w \text{ em } \widetilde{E} \text{ quando } R \to \infty.$$

Desde que

$$\widehat{I}(u) = I_h(u) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\widehat{b} - b(hx))|u|^2, \ \forall\, u \in \widetilde{E},$$

então, para cada $\alpha > 0$,

$$\gamma_R \equiv \max_{t\geq 0} \widehat{I}(tv) \geq I_h(\alpha v) + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (\widehat{b} - b(hx))|\alpha v|^2.$$

Escolhendo $\alpha = t_h(v)$, onde $t_h(v)$ é equivalente a t_u dado pela Lema 1.1, para $\psi_h(t) = I_h(tv)$, então,

$$\gamma_R \geq I_h(t_h(v)v) + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (\widehat{b} - b(hx))|t_h(v)v|^2,$$

logo

$$\gamma_R \geq c_h + \frac{1}{2}\int_{B_{R+2}(0)} (\widehat{b} - b(hx))|t_h(v)v|^2. \tag{1.81}$$

Observe que existe uma constante $h_0 > 0$, tal que, $\forall\, h \in (0, h_0)$

$$\widehat{b} - b(hx) \geq \frac{1}{2}(\widehat{b} - b(0)) > 0, \ \ \forall\, x \in B_{R+2}(0).$$

Com efeito, como $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, então,

$$|b'(hx)| \leq |b'|_{L^\infty(\overline{B_{R+2}(0)})}, \ \forall\, x \in B_{R+2}(0).$$

Para cada $x \in B_{R+2}(0)$, o segmento de reta aberto $(0, hx) \subset B_{R+2}(0)$, $\forall\, h \in (0,1)$.

Como $b \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, segue da desigualdade do Valor Médio (veja o Apêndice B, Teorema B.5) que

$$|b(hx) - b(0)| \leq |b'|_{L^\infty(\overline{B_{R+2}(0)})}||hx|| \leq |b'|_{L^\infty(\overline{B_{R+2}(0)})}(R+2)h, \ \forall\, x \in B_{R+2}(0).$$

Façamos $C(R) = |b'|_{L^\infty(\overline{B_{R+2}(0)})}(R+2)$. Assim,

$$b(hx) - b(0) \leq C(R)h.$$

Note que

$$\widehat{b} - b(hx) \geq \widehat{b} - b(0) - C(R)h \geq \frac{\widehat{b} - b(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{\widehat{b} - b(0)}{2} \geq C(R)h \Leftrightarrow 0 < h < \frac{\widehat{b} - b(0)}{2C(R)}.$$

Assim, para $h_0 = \min\left\{1, \dfrac{\widehat{b} - b(0)}{2C(R)}\right\}$, temos que $\forall\, h \in (0, h_0)$,

$$\widehat{b} - b(hx) \geq \frac{1}{2}(\widehat{b} - b(0)) > 0, \ \ \forall\, x \in B_{R+2}(0).$$

logo, por (1.81)

$$\gamma_R \geq c_h + \frac{1}{4}(\widehat{b} - b(0)) t_h(v)^2 \int_{B_{R+2}(0)} |v|^2.$$

Note que $t_h(v)$ depende de h e R. Afirmamos que existe uma constante $t_0 > 0$, tal que,

$$t_h(v) \geq t_0,$$

para todo $h > 0$ pequeno e R grande.

Além disso, escolhendo R, tal que,

$$\int_{B_{R+2}(0)} v^2 \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} w^2 \tag{1.82}$$

e aceitando, por enquanto, a existência de t_0, temos

$$\gamma_R \geq c_h + \frac{1}{8}(\widehat{b} - b(0)) t_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2. \tag{1.83}$$

Por outro lado, garantimos a existência de uma função $\psi(R) \geq 0$, tal que,

$$\psi(R) \to 0 \ \text{ quando } \ R \to \infty$$

e

$$\gamma_R \leq \widehat{c} + \psi(R). \tag{1.84}$$

Portanto, escolhendo $R > 0$ suficientemente grande

$$\psi(R) < \frac{1}{8}(\widehat{b} - b(0)) t_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2,$$

por (1.84)

$$\gamma_R < \widehat{c} + \frac{1}{8}(\widehat{b} - b(0)) t_0^2 \int_{\mathbb{R}^N} w^2,$$

usando (1.83), temos

$$c_h < \widehat{c},$$

o que contradiz (1.80). Assim, c_h é um valor crítico do funcional I_h.

Portanto, para concluirmos a demonstração do Teorema 1.6, basta mostrarmos a existência de t_0 e da função $\psi(R)$.

Primeiro, mostraremos a existência de t_0. Note que pela caracterização de $t_h(v)$, dada pelo Lema 1.1, para o funcional I_h (veja a relação (1.21)), temos

$$||v||^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(t_h(v)v)v}{t_h(v)},$$

logo,

$$t_h(v)^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b(hx)v^2) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t_h(v)v)t_h(v)v. \tag{1.85}$$

Por $(f_2) - (f_3)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $A_\epsilon > 0$, tal que,

$$|f(z)| \leq \epsilon|z| + A_\epsilon |z|^s, \;\; \forall\, z \in \mathbb{R}. \tag{1.86}$$

Por (1.85) e (1.86)

$$t_h(v)^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b_0 v^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\epsilon t_h(v)^2 v^2 + A_\epsilon |t_h(v)v|^{s+1}),$$

onde b_0 é a constante presente na condição (b_1).

Para $\epsilon = \dfrac{b_0}{2}$, temos

$$t_h(v)^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + b_0 v^2) \leq t_h(v)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{b_0}{2} v^2 + t_h(v)^{s+1} A_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{s+1},$$

com isso,

$$t_h(v)^2 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + \frac{b_0}{2} v^2) \leq t_h(v)^{s+1} A_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{s+1}. \tag{1.87}$$

Observe que pela definição de χ_R e v, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{s+1} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{s+1} \tag{1.88}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v|^2 + \frac{b_0}{2} v^2\Big) \geq \int_{B_R(0)} \Big(|\nabla w|^2 + \frac{b_0}{2} w^2\Big). \tag{1.89}$$

Portanto, para $R > 0$ suficientemente grande

$$\int_{B_R(0)} \Big(|\nabla w|^2 + \frac{b_0}{2} w^2\Big) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla w|^2 + \frac{b_0}{2} w^2\Big). \tag{1.90}$$

Por (1.89) e (1.90), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla v|^2 + \frac{b_0}{2} v^2\Big) \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla w|^2 + \frac{b_0}{2} w^2\Big). \tag{1.91}$$

De (1.87), (1.88) e (1.91), temos

$$\frac{t_h(v)^2}{2}\int_{\rm I\!R^N}\Big(|\nabla w|^2+\frac{b_0}{2}w^2\Big)\leq t_h(v)^{s+1}A_\epsilon\int_{\rm I\!R^N}|w|^{s+1},$$

logo,

$$t_h(v)\geq\left[\frac{\frac{1}{2}\int_{\rm I\!R^N}\Big(|\nabla w|^2+\frac{b_0}{2}w^2\Big)}{\int_{\rm I\!R^N}|w|^{s+1}}\right]^{\frac{1}{s-1}}\equiv t_0>0,$$

o que mostra a existência de t_0.

Agora, mostraremos a existência de $\psi(R)$.

Pelo Lema 1.1, existe $\widehat{t_v}>0$, tal que,

$$\max_{t\geq 0}\widehat{I}(tv)=\widehat{I}(\widehat{t_v}v).$$

Desde que, $\gamma_R=\max\limits_{t\geq 0}\widehat{I}(tv)$ e $\widehat{I}(w)=\widehat{c}$, então,

$$\gamma_R=\widehat{I}(\widehat{t_v}v)=\widehat{c}+\widehat{I}(\widehat{t_v}v)-\widehat{I}(w).$$

Façamos

$$\psi(R)=\widehat{I}(\widehat{t_v}v)-\widehat{I}(w),$$

onde $v=\chi_R w$.

Logo,

$$\gamma_R=\widehat{c}+\psi(R),$$

assim, resta-nos provar que $\psi(R)\geq 0$ e $\psi(R)\to 0$ quando $R\to\infty$.

Pela Proposição 1.2, para o funcional $\widehat{I}$,

$$\widehat{c}=\inf_{\widehat{\mathcal{N}}}\widehat{I},$$

onde $\widehat{\mathcal{N}}=\Big\{u\in\widetilde{E}\setminus\{0\}\colon \widehat{I}'(u)u=0\Big\}$.

Desde que, $\widehat{t}_v v\in\widehat{\mathcal{N}}$, pois $\widehat{I}(\widehat{t}_v v)=\gamma_R=\max\limits_{t\geq 0}\widehat{I}(tv)$, temos

$$\widehat{I}(\widehat{t}_v v)\geq\widehat{c}=\widehat{I}(w),$$

logo, $\psi(R)\geq 0$.

Como

$$v=\chi_R w\to w\ \text{ em }\ \widetilde{E}\ \text{ quando }\ R\to\infty,$$

pela Proposição 1.1,

$$\widehat{t}_v\to\widehat{t}_w\ \text{ quando }\ R\to\infty,$$

mas desde que $w \in \widehat{\mathcal{N}}$, pois w é ponto crítico de $\widehat{I}$, temos $\widehat{t}_w = 1$, com isso,

$$\widehat{t}_v v \to w \ \text{ em } \ \widetilde{E} \ \text{ quando } \ R \to \infty,$$

pela continuidade de $\widehat{I}$,

$$|\widehat{I}(\widehat{t}_v v) - \widehat{I}(w)| \to 0 \ \text{ quando } \ R \to \infty,$$

assim,

$$\psi(R) \to 0 \ \text{ quando } \ R \to \infty,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

■

Capítulo 2

Preliminares sobre o p-Laplaciano e os espaços generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ de Lebesgue e $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de Sobolev.

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre o operador p-Laplaciano e definiremos os espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ e de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

O operador p-Laplaciano é difinido por

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),\ p > 1,$$

ele aparece naturalmente em várias áreas da Ciência como Astronomia, Engenharia, Climatologia, Fluídos Não-Newtonianos, Extração do Petróleo, etc. O que justifica a importância do seu estudo (veja [30]).

2.1 Formulação Fraca do p-Laplaciano

A formulação fraca deste operador é dada por

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))',$$

$$u \mapsto -\Delta_p u,$$

onde

$$-\Delta_p u : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$$< -\Delta_p u, v >= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

Portanto, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$-\Delta_p u \in (W_0^{1,p}(\Omega))'.$$

Com efeito, observe que

$$< -\Delta_p u, v + kw >= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla (v + kw) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + k \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w$$

$$=< -\Delta_p u, v > +k < -\Delta_p u, w >, \quad \forall v, w \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } k \in \mathbb{R}$$

e

$$| < -\Delta_p u, v > | = | \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v|.$$

Desde que $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então, $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^p(\Omega)$, logo,

$$|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

como $\dfrac{p}{p-1}$ e p são expoentes conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$, segue da desigualdade de Hölder (veja o Apêndice B, Proposição B.1) que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \leq \left[\int_\Omega |\nabla u|^p \right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

assim,

$$| < -\Delta_p u, v > | \leq ||u||^{p-1} ||v||,$$

portanto,

$$| < -\Delta_p u, v > | \leq C ||v||, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo, $-\Delta_p u$ é contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$, assim $-\Delta_p u \in (W_0^{1,p}(\Omega))'$.

Uma importante consequência deste fato é que se

$$v_n \rightharpoonup v \;\text{ em }\; W_0^{1,p}(\Omega),$$

então,

$$< -\Delta_p u, v_n > \to < -\Delta_p u, v >,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v_n \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v.$$

Observamos que o dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o espaço $W^{-1,p'}(\Omega)$, onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

2.2 Problema de Dirichlet

A seguir mostraremos a existência e unicidade de solução para o seguinte problema linear de Dirichlet envolvendo o operador p-Laplaciano

$$(P_p)\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $1 < p < \infty$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$, com $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Note que para cada $f \in L^{p'}(\Omega)$, o funcional

$$J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$$J_p(\varphi) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\varphi|^p - \int_\Omega f\varphi$$

está bem definido.

Usaremos técnicas variacionais para mostrar que pontos críticos deste funcional são soluções fraca de (P_p). Este resultado estar expresso no seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Seja Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Então,*
(i) Existe u em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que, $J_p(u) = \min\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi)$.
(ii) O mínimo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do item (i) é uma solução fraca de (P_p), isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

(iii) O problema (P_p) possui uma única solução fraca.

Demonstração:
(i) *Existência do mínimo.*

Desde que p e p' são expoentes conjugados, $f \in L^{p'}(\Omega)$ e $\varphi \in L^p(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$\Big|\int_\Omega f\varphi\Big| \le |f|_{p'}|\varphi|_p, \;\; \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

usando a desigualdade de Poincaré (veja o Apêndice B),

$$\Big|\int_\Omega f\varphi\Big| \le C|f|_{p'}|\nabla\varphi|_p, \;\; \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo,

$$J_p(\varphi) \ge \frac{1}{p}|\nabla\varphi|_p^p - C|f|_{p'}|\nabla\varphi|_p,$$

pela desigualdade de Young (veja o Apêndice B) com $a = |\nabla\varphi|_p$ e $b = C|f|_{p'}$, temos

$$J_p(\varphi) \geq \frac{1}{p}|\nabla\varphi|_p^p - \left(\frac{|\nabla\varphi|_p^p}{p} + \frac{(C|f|_{p'})^{p'}}{p'}\right),$$

assim,

$$J_p(\varphi) \geq -\frac{1}{p'}(C|f|_{p'})^{p'}, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo, J_p é limitado inferiomente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Portanto, pelo Postulado de Dedekind, existe $\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi)$. Pela propriedade de ínfimo, existe uma sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, chamada de sequência minimizante, tal que,

$$J_p(u_n) \to \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi).$$

Como $J_p(0) = 0$, temos $\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi) \leq 0$.

Afirmação 2.1 $\inf\limits_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi) < 0$.

Com efeito, fixada uma função não-nula φ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega f\varphi > 0 \ \text{ ou } \ \int_\Omega f\varphi < 0.$$

Suponha que $\int_\Omega f\varphi > 0$. Observe que

$$J_p(t\varphi) = \frac{1}{p}|t\nabla\varphi|_p^p - t\int_\Omega f\varphi,$$

logo, existe um $t_0 > 0$, tal que,

$$J_p(t_0\varphi) < 0,$$

pois, note que

$$J_p(t_0\varphi) < 0 \Leftrightarrow \frac{t_0^p}{p}|\nabla\varphi|_p^p < t_0\int_\Omega f\varphi \Leftrightarrow t_0^{p-1} < \frac{p\int_\Omega f\varphi}{|\nabla\varphi|_p^p} \Leftrightarrow 0 < t_0 < \left(\frac{p\int_\Omega f\varphi}{|\nabla\varphi|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Supondo que $\int_\Omega f\varphi < 0$. Neste caso, para obtermos t_0, basta consideramos $\psi = -\varphi$ e notar que $\int_\Omega f\psi > 0$.

Portanto,

$$\inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi) < 0.$$

Como consequência, existe um natural N_0, tal que,

$$J_p(u_n) \leq 0, \ \ \forall\, n \geq N_0,$$

logo,

$$\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u_n|^p \leq \int_{\Omega} f u_n,$$

usando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos

$$|\nabla u_n|_p^p \leq p|f|_{p'}|u_n|_p \leq pC|f|_{p'}|\nabla u_n|_p,$$

de onde segue que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Desde que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo, existe uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Note que J_p é contínuo, pois os funcionais

$$\begin{array}{ccc} L : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} & \text{e} & H : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}; \\ L(\varphi) = \displaystyle\int_{\Omega} f\varphi & & H(\varphi) = \displaystyle\int_{\Omega}|\nabla\varphi|_p = ||u||^p, \end{array}$$

são contínuos. Além disso, como L e H para todo $p \geq 1$, são convexos segue que o funcional J_p é convexo. Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, J_p é contínuo e convexo, segue do Teorema B.15 (veja o Apêndice B) que

$$J_p(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J_p(u_n) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi),$$

assim,

$$J_p(u) = \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)} J_p(\varphi),$$

ou seja, u é um mínimo do funcional J_p em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Além disso, observe que pela Afirmação 2.1 $u \not\equiv 0$.

(ii) *Existência de solução.*

Seja u o mínimo de J_p em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Para cada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, defina a função

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$G(t) = J_p(u + t\varphi),$$

ou seja,

$$G(t) = \frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla(u + t\varphi)|^p - \int_{\Omega} f.(u + t\varphi), \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Desde que u é um mínimo de J_p, segue que 0 é um mínimo de G. Pois, observe que

$$G(0) = J_p(u) \leq J_p(\varphi), \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular,

$$G(0) \leq J_p(u+t\varphi) = G(t), \ \ \forall\, t \ \in \mathbb{R}$$

Considere

$$g_1(x,t) = |\nabla(u+t\varphi)|^p \quad \text{ e } \quad g_2(x,t) = f.(u+t\varphi),$$

então,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}|\nabla(u+t\varphi)|^p = \frac{\partial}{\partial t}\Big[|\nabla(u+t\varphi)|^2\Big]^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2}\Big[|\nabla(u+t\varphi)|^2\Big]^{\frac{p}{2}-1}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla(u+t\varphi)|^2$$

$$= \frac{p}{2}|\nabla(u+t\varphi)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial t}\{|\nabla u|^2 + 2t\nabla u\nabla\varphi + t^2|\nabla\varphi|^2\} = \frac{p}{2}|\nabla(u+t\varphi)|^{p-2}\{2\nabla u\nabla\varphi + 2t|\nabla\varphi|^2\},$$

logo,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_1(x,t) = p|\nabla(u+t\varphi)|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + t|\nabla\varphi|^2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} g_2(x,t) = f\varphi.$$

Note que, como $u, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$, então, $\frac{\partial}{\partial t} g_1(x,t)$ e $\frac{\partial}{\partial t} g_2(x,t)$ são integráveis. Pelo Teorema B.17 (veja o Apêndice B), G é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} g_1(x,t) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} g_2(x,t),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}G(t) = \int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi + t|\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega f\varphi,$$

como 0 é ponto de mínimo de G, então, $\frac{d}{dt}G(0) = 0$, logo,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, o mínimo u de J_p em $W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca do problema (P_p).

(iii) *Unicidade de solução.*

Sejam u_1 e $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas de (P_p), então,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in \ W_0^{1,p}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in \ W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo,

$$\int_{\Omega}|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\nabla\varphi=\int_{\Omega}|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\nabla\varphi,\ \ \forall\ \ \varphi\in\ W_0^{1,p}(\Omega),$$

assim,

$$\int_{\Omega}(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla\varphi=0,\ \ \forall\ \varphi\in\ W_0^{1,p}(\Omega),$$

em particular para $\varphi=u_1-u_2$, temos

$$\int_{\Omega}(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2)=0. \tag{2.1}$$

Usando a desigualdade, veja Teorema B.4 (veja o Apêndice B),

$$(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)(\nabla u_1-\nabla u_2)\geq\begin{cases} C_p|\nabla u_1-\nabla u_2|^p, & \text{se}\ \ p\geq 2\\ \\ C_p\dfrac{|\nabla u_1-\nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}, & \text{se}\ \ 1<p<2.\end{cases} \tag{2.2}$$

Para $p\geq 2$, temos

$$C_p\int_{\Omega}|\nabla u_1-\nabla u_2|^p\leq\int_{\Omega}\Big(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\Big)\nabla(u_1-u_2)=0,$$

logo,

$$|\nabla(u_1-u_2)|_p=0,$$

usando a desigualdade de Poincaré, temos

$$|u_1-u_2|_p=0,$$

assim, concluimos que

$$u_1=u_2.$$

Para $1<p<2$. Note que como u_1,u_2 são soluções de (P_p), então, $\nabla u_1,\nabla u_2\neq 0$, logo,

$$\int_{\Omega}|\nabla u_1-\nabla u_2|^p=\int_{\Omega}\frac{|\nabla u_1-\nabla u_2|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}.(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}.$$

Defina

$$l=\frac{|\nabla u_1-\nabla u_2|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}\ \ \text{e}\ \ g=(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{p(2-p)}{2}},$$

assim, temos $l\in L^{\frac{2}{p}}(\Omega)$ e $g\in L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)$.

Com efeito,

$$\int_{\Omega}|g|^{\frac{2}{2-p}}=\int_{\Omega}(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p\leq 2^p\int_{\Omega}(|\nabla u_1|^p+|\nabla u_2|^p)=2^p(|\nabla u_1|_p^p+|\nabla u_2|_p^p)$$

e

$$\begin{aligned}\int_\Omega |l|^{\frac{2}{p}} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \leq \int_\Omega \frac{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} = \int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p \\ &\leq 2^p(|\nabla u_1|_p^p + |\nabla u_2|_p^p),\end{aligned}$$

desde que $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue que $l \in L^{\frac{2}{p}}(\Omega)$ e $g \in L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)$.

Pela desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega lg \leq |l|_{\frac{2}{p}} |g|_{\frac{2}{2-p}},$$

fazendo $C = |g|_{\frac{2}{2-p}}$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p \leq C \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \right]^{\frac{p}{2}}.$$

Assim, para $1 < p < 2$, usando esta desigualdade e (2.2), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p \leq C \left[\frac{1}{C_p} \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p_1-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \right]^{\frac{p}{2}},$$

por (2.1), temos

$$|\nabla(u_1 - u_2)|_p = 0.$$

Pela desigualdade de Poincaré, segue que

$$u_1 = u_2.$$

o que conclui a demonstração do teorema.

■

Observação 2.1 *Supondo que* $f \in C^0(\overline{\Omega})$, *usando regularidade elíptica mostra-se que* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para algum* $0 < \alpha < 1$ *(veja [19] e [33]).*

2.3 Problema de Autovalor

Considere o problema de autovalor

$$(P_\lambda) \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde λ é um parâmetro real.

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do problema (P_λ) se existir uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $u \not\equiv 0$ satisfazendo (P_λ) no sentido fraco. Tal função é chamada de autofunção do problema (P_λ) associada ao autovalor λ.

Existe uma sequência de autovalores do problema (P_λ). O primeiro autovalor λ_1 de (P_λ) é caracterizado como o mínimo do quociente de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \min_{0 \not\equiv u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p} > 0.$$

Além disso, λ_1 é simples (isto é, todas as autofunções associadas a λ_1 são múltiplas uma da outra), λ_1 é isolado (isto é, existe uma vizinhança de λ_1, tal que, λ_1 é único nessa vizinhança).

A autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1, que denotaremos por φ_1, tem sinal definido. Assim, podemos considerar $\varphi_1 > 0$ em Ω ou $\varphi_1 < 0$ em Ω. Além disso, observe que como λ_1 é simples, podemos assumir que $|\varphi_1|_{p(x)} \leq 1$. Ressaltamos que estes fatos serão usados na demonstração da existência de solução para o problema $(P.E)$, presente no próximo capítulo.

Para mais informações sobre o p-Laplaciano o leitor pode consultar Peral [30], Di Benedetto [19], Tolksdorff [33] e Guo [23].

2.4 Os espaços generalizados $L^{p(x)}(\Omega)$ de Lebesgue e $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de Sobolev

Agora definiremos os espaços generalizados de Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ e de Sobolev $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Recorde que estamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave. Definimos o conjunto

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{h : \ h \in C(\overline{\Omega}) \ \text{ e } \ h(x) > 1, \ \forall x \in \overline{\Omega}\}$$

e denotamos por

$$h^+ = \max_{\overline{\Omega}} h(x) \qquad \text{e} \qquad h^- = \min_{\overline{\Omega}} h(x).$$

Assumindo que a função $p \in C_+(\overline{\Omega})$. Definimos o espaço

$$L^{p(x)}(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ u é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} < \infty \ \Big\}.$$

No espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ temos a seguinte norma

$$|u|_{p(x)} = \inf\Big\{ \lambda > 0 : \ \int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} \leq 1 \Big\},$$

assim, $\Big(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)}\Big)$ é um espaço de Banach o qual é chamamos de espaço de Lebesgue generalizado.

Lema 2.1 *Sejam duas funções $u,\ v \in L^{q(x)}(\Omega)$, tais que*

$$|u(x)| \leq |v(x)| \ \ q.t.p \ em \, \Omega,$$

então,

$$|u|_{q(x)} \leq |v|_{q(x)}.$$

Demonstração: Com efeito, temos que, para toda função $w \in L^{q(x)}(\Omega)$,

$$|w|_{q(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \ \int_\Omega \Big|\frac{w(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} \leq 1 \right\}.$$

Considere então, os segintes conjuntos

$$I_u = \left\{ \lambda > 0 : \ \int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad I_v = \left\{ \lambda > 0 : \ \int_\Omega \Big|\frac{v(x)}{\lambda}\Big|^{q(x)} \leq 1 \right\}.$$

Tome $\lambda_0 \in I_v$, assim

$$\int_\Omega \Big|\frac{v(x)}{\lambda_0}\Big|^{q(x)} \leq 1.$$

Desde que $|u(x)| \leq |v(x)|$ q.t.p em Ω e $\lambda_0 > 0$, temos

$$\Big|\frac{u(x)}{\lambda_0}\Big| \leq \Big|\frac{v(x)}{\lambda_0}\Big| \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

logo,

$$\Big|\frac{u(x)}{\lambda_0}\Big|^{q(x)} \leq \Big|\frac{v(x)}{\lambda_0}\Big|^{q(x)} \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

com isso,

$$\int_\Omega \Big|\frac{u(x)}{\lambda_0}\Big|^{q(x)} \leq \int_\Omega \Big|\frac{v(x)}{\lambda_0}\Big|^{q(x)} \leq 1,$$

logo, $\lambda_0 \in I_u$ e assim

$$I_v \subset I_u,$$

de onde segue que

$$\inf I_u \leq \inf I_v.$$

Portanto,

$$|u|_{q(x)} \leq |v|_{q(x)},$$

o que conclui a demonstração do lema.

$\blacksquare$

O espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é chamado de espaço de Sobolev generalizado o qual é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \Big\{u \in L^{p(x)}(\Omega): \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega), \ i = 1, 2, ..., N\Big\},$$

onde $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a i-ésima derivada fraca de u, isto é,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi, \ \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big).$$

Note que podemos escrever o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega): \ |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

onde está definida a seguinte norma

$$|u|_{W^{1,p(x)}} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

Denotamos por $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ e

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & \text{se} \ \ p(x) < N \\ \infty, & \text{se} \ \ p(x) \geq N. \end{cases}$$

Capítulo 3

O Caso Escalar

Neste capítulo, estudaremos um resultado obtido por Corrêa, Figueiredo e Lopes [11], sobre a existência e positividade de solução para a seguinte classe de problemas elípticos não-locais com expoentes variáveis

$$(PE)\begin{cases} -\Delta_p u &= |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\alpha, q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, são funções contínuas e $p > 1$.

Definição 3.1 *Diz-se que uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução do problema (PE) se verificar a seguinte identidade*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega |u|_{q(x)}^{\alpha(x)}\varphi, \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para α constante temos o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Para toda função constante $\alpha(x) = \alpha \neq p-1$. A função*

$$u(x) = w(x)|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}}$$

é solução do problema (PE), onde w é solução do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= 1 \quad \textit{em } \Omega \\ w &= 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração: De fato, observe que

$$-\Delta_p u \;=\; -\Delta_p(w|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}}) = -div\left(\left|\nabla(w|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}})\right|^{p-2}\nabla(w|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}})\right)$$

$$= \quad -div\left(|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-2)}{p-1-\alpha}}|\ |\nabla w|^{p-2}\ |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}}\nabla w\right) = -div\left(|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}}|\ |\nabla w|^{p-2}\nabla w\right)$$

$$= \quad |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}}\Big[-div(|\nabla w|^{p-2}\nabla w)\Big] = |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}}(-\Delta_p w) = |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}},$$

logo,

$$-\Delta_p u = |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}}. \tag{3.1}$$

Como

$$u(x) = w(x)|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}},$$

então,

$$|u|_{q(x)} = \Big|w|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}}\Big|_{q(x)} = |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}}\ |w|_{q(x)} = |w|_{q(x)}^{\frac{p-1}{p-1-\alpha}}.$$

Assim,

$$|u|_{q(x)}^{\alpha} = |w|_{q(x)}^{\frac{\alpha(p-1)}{p-1-\alpha}}. \tag{3.2}$$

Por (3.1) e (3.2) temos

$$-\Delta_p u = |u|_{q(x)}^{\alpha},$$

e como $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, então, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Portanto,

$$u(x) = w(x)|w|_{q(x)}^{\frac{\alpha}{p-1-\alpha}},$$

é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= |u|_{q(x)}^{\alpha} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\alpha \neq p-1$ é uma constante.

■

Observamos que a situação relevante ocorre quando α não é uma função constante. E neste caso, temos o resultado principal deste capítulo expresso no próximo teorema. Para demonstrar esse teorema vamos usar o método de sub e supersolução, por isso, a seguir vamos definir sub e supersolução fraca para o problema (PE).

Definição 3.2 *Uma função $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita uma subsolução de (PE) se*

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{u} & \leq & |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} & em\,\Omega \\ \underline{u} & = & 0 & sobre\,\partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi \leq \int_\Omega |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}\varphi,\ \forall\ \varphi > 0\ em\, W_0^{1,p}(\Omega).$$

Uma função $\overline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é dita uma supersolução de (PE) se

$$\begin{cases} -\Delta_p \overline{u} & \geq & |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} & em\,\Omega \\ \overline{u} & = & 0 & sobre\,\partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco, ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi \geq \int_\Omega |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}\varphi,\ \forall\ \varphi > 0\ em\, W_0^{1,p}(\Omega).$$

Teorema 3.1 *Se $1 < p < N$, $\alpha \in C^0(\overline{\Omega})$ com $0 < \alpha(x) < p-1$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$; $1 \leq q(x) < \dfrac{Np}{N-p} = p^*$. Então, o problema (PE) possui uma solução positiva.*

Demonstração: Construiremos, primeiramente, uma subsolução para (PE).

Seja $\lambda_1 > 0$ o primeiro autovalor de $(-\Delta_p, W_0^{1,p}(\Omega))$ e $\varphi_1 > 0$ a autofunção associada a λ_1, logo,

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_1 & = & \lambda_1\varphi_1^{p-1} & \text{em } \Omega \\ \varphi_1 & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Façamos $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$. Mostraremos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$-\Delta_p(\epsilon\varphi_1) < |\epsilon\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega,$$

ou seja, que $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (PE).

Com efeito, observe que

$$-\Delta_p\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1^{p-1},$$

isto é,

$$-div(|\nabla\varphi_1|^{p-2}\nabla\varphi_1) = \lambda_1\varphi_1^{p-1},$$

multiplicando ambos os membros dessa equação por ϵ^{p-1}, temos

$$\lambda_1(\epsilon\varphi_1)^{p-1} = -div\ (\epsilon^{p-1}|\nabla\varphi_1|^{p-2}\nabla\varphi_1) = -div\ (\epsilon^{p-2}|\nabla\varphi_1|^{p-2}\epsilon\nabla\varphi_1),$$

logo,

$$\lambda_1(\epsilon\varphi_1)^{p-1} = -div(|(\nabla\epsilon\varphi_1)|^{p-2}\nabla(\epsilon\varphi_1)),$$

ou seja,

$$-\Delta_p(\epsilon\varphi_1) = \lambda_1(\epsilon\varphi_1)^{p-1},$$

assim,

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\epsilon\varphi_1) < |\epsilon\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \ &\Leftrightarrow\ \lambda_1(\epsilon\varphi_1)^{p-1} < |\epsilon\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \\ &\Leftrightarrow\ \lambda_1\epsilon^{p-1}\varphi_1^{p-1} < \epsilon^{\alpha(x)}|\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \end{aligned}$$

logo,

$$-\Delta_p(\epsilon\varphi_1) < |\epsilon\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \ \Leftrightarrow\ \lambda_1\varphi_1^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha(x)} < |\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)}. \tag{3.3}$$

Afirmamos que esta última desigualdade ocorre para

$$0 < \epsilon < \min\left\{\left(\frac{|\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha^+}}{\lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1-\alpha^+}},\ \ 1\right\},$$

onde $\varphi_1^+ = \max\limits_{\overline{\Omega}}\varphi_1$ e $\alpha^+ = \max\limits_{\overline{\Omega}}\alpha(x)$.

Com efeito, para este ϵ, temos

$$\lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha^+} < |\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha^+}. \tag{3.4}$$

Como $\alpha \in C^0(\overline{\Omega})$ e $0 < \alpha(x) < p-1$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, então,

$$\alpha(x) \le \alpha^+ < p-1,$$

logo,

$$0 < p-1-\alpha^+ \le p-1-\alpha(x),\ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Para todo $0 < \epsilon < 1$, temos

$$\epsilon^{p-1-\alpha(x)} \le \epsilon^{p-1-\alpha^+},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

logo,

$$\lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha(x)} \le \lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha^+},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

por (3.4)

$$\lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha(x)} < |\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha^+},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3.5}$$

Como λ_1 é simples, podemos considerar que $|\varphi_1|_{q(x)} \leq 1$, com isso,

$$|\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha^+} \leq |\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)},\ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Usando (3.5), temos

$$\lambda_1\varphi_1^{p-1}\epsilon^{p-1-\alpha(x)} < |\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)},\ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

como tinhamos afirmado.

Assim, por (3.3)

$$-\Delta_p(\epsilon\varphi_1) < |\epsilon\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha(x)},\ \text{em } \Omega.$$

Portanto, $\underline{u} = \epsilon\varphi_1$ é uma subsolução de (PE).

Agora, construiremos uma supersolução para o problema (PE). Seja $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a solução de

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= |u|_{q(x)}^{\alpha^+} & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\alpha^+ = \max\limits_{\overline{\Omega}} \alpha(x)$.

Note que u_0 existe em virtude do Lema 3.1, pois α^+ é uma constante e $\alpha^+ < p-1$. Além disso, para $\mu > 1$ temos

$$-\Delta_p(\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}u_0) > |\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}u_0|_{q(x)}^{\alpha^+}\ \text{ em } \Omega.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} -\Delta_p(\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}u_0) > |\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} &\Leftrightarrow \mu^{\frac{\alpha^+(p-1)}{p-1}}(-\Delta_p u_0) > \mu^{\frac{(\alpha^+)^2}{p-1}}|u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} \\ &\Leftrightarrow \mu^{\alpha^+}|u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} > \mu^{\frac{(\alpha^+)^2}{p-1}}|u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} \\ &\Leftrightarrow \mu^{\alpha^+} > \mu^{\frac{(\alpha^+)^2}{p-1}} \Leftrightarrow \alpha^+ > \frac{(\alpha^+)^2}{p-1} \end{aligned}$$

visto que $\mu > 1$. Mas,

$$\alpha^+ > \frac{(\alpha^+)^2}{p-1} \Leftrightarrow 1 > \frac{\alpha^+}{p-1} \Leftrightarrow p-1 > \alpha^+.$$

Assim, como $\alpha^+ < p-1$ e $\mu > 1$, temos

$$-\Delta_p(\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0) > |\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} \text{ em } \Omega.$$

Além disso, para todo $\mu > \left(\dfrac{1}{|u_0|_{q(x)}}\right)^{\frac{p-1}{\alpha^+}}$, temos $|\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0|_{q(x)} > 1$. Desde que $0 < \alpha(x) \leq \alpha^+$, segue que

$$|\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0|_{q(x)}^{\alpha^+} > |\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0|_{q(x)}^{\alpha(x)}, \ \ \forall x \in \ \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$-\Delta_p(\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0) > |\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0|_{q(x)}^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega.$$

Em consequência

$$\overline{u} = \mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0,$$

é uma supersolução de (PE), onde

$$\mu > \max\left\{\left(\frac{1}{|u_0|_{q(x)}}\right)^{\frac{p-1}{\alpha^+}}, \ 1\right\}.$$

Agora mostraremos que $\underline{u} < \overline{u}$, ou seja,

$$\underline{u}(x) = \epsilon\varphi_1(x) < \mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}} u_0(x) = \overline{u}(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

De fato, como

$$-\Delta_p\varphi_1, \ -\Delta_p u_0 > 0 \ \text{ em } \Omega$$

e $0 < u_0, \varphi_1 \in C_0^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Princípio de Máximo de Hopf (veja o Teorema B.12, no Apêndice B), segue que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}, \ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} < 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.$$

Considere $\delta > 0$ suficientemente pequeno e defina o seguinte conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \ dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Sendo $\varphi_1, \ u_0 > 0$ em Ω e $\Omega \setminus \Omega_\delta$ um compacto, existe uma constante $m > 0$, tal que,

$$\frac{u_0(x)}{\varphi_1(x)} \geq m, \ \ \forall\, x \in \Omega \backslash \Omega_\delta. \tag{3.6}$$

Desde que $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}$, $\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, então, $\partial\Omega$ é um conjunto compacto, logo,

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial \eta}, \ \frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} < 0 \ \ \forall\, x \in \ \overline{\Omega}_\delta,$$

assim, existem constante $C_1, C_2 < 0$ satisfazendo

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial \eta} \geq C_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} \leq C_2 \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Definamos a seguinte função

$$H(x) = \beta\varphi_1(x) - u_0(x), \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

com $\beta \in \mathbb{R}$ a ser escolhido posteriormente. Assim,

$$\frac{\partial H(x)}{\partial \eta} = \beta\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial \eta} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial \eta} \geq \beta C_1 - C_2 > 0, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde que $0 < \beta < \dfrac{C_2}{C_1}$.

Fixado $x \in \Omega_\delta$, considere a função

$$f(s) = H(x + s\eta), \ \ s \in \mathbb{R},$$

onde s é tomado de forma que $(x + s\eta) \in \overline{\Omega}_\delta$.

Para cada $x \in \Omega_\delta$ escolha um único $\widetilde{x} \in \partial\Omega$ de modo que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\eta = \eta(\widetilde{x})$. Logo, existe $\widehat{s} > 0$, tal que,

$$x + \widehat{s}\eta = \widetilde{x} \ \in \partial\Omega.$$

Como $H(\partial\Omega) \equiv 0$, segue que

$$f(\widehat{s}) = H(x + \widehat{s}\eta) = H(\widetilde{x}) = 0.$$

Note que f é uma composição de funções de classe C^1, logo, $f : [0, \widehat{s}] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \widehat{s}]$ e derivável em $(0, \widehat{s})$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \widehat{s})$, tal que,

$$f(\widehat{s}) - f(0) = f'(\xi)(\widehat{s} - 0),$$

logo,

$$0 - f(0) = f'(\xi)\widehat{s}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial v}(x+\xi\eta) &= \lim_{t\to 0}\frac{H(x+\xi\eta+t\eta)-H(x+\xi\eta)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{H(x+(\xi+t)\eta)-H(x+\xi\eta)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(t+\xi)-f(\xi)}{t}\\
&= f'(\xi),
\end{aligned}$$

com isso,

$$-H(x)=\frac{\partial H}{\partial \eta}(x+\xi\eta)\widehat{s}>0 \ \text{ em } \ \Omega_\delta,$$

logo,

$$H(x)<0 \ \text{ em } \ \Omega_\delta$$

assim,

$$\beta\varphi_1(x)-u_0(x)\leq 0 \ \ \forall\, x\in\Omega_\delta.$$

de onde segue que

$$\beta\varphi_1(x)\leq u_0(x) \ \ \forall\, x\in\Omega_\delta. \tag{3.7}$$

Portanto por (3.6) e (3.7), considerando $C=\min\{m,\beta\}$, temos

$$C\varphi_1(x)\leq u_0(x) \ \ \forall\, x\in\Omega.$$

Desde que $\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}>1$, então, para todo

$$0<\epsilon<\min\left\{C,\left(\frac{|\varphi_1|_{q(x)}^{\alpha^+}}{\lambda_1(\varphi_1^+)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1-\alpha^+}},\ 1\right\},$$

temos

$$\epsilon\varphi_1(x)<\mu^{\frac{\alpha^+}{p-1}}u_0(x), \quad \forall x\in\Omega,$$

assim,

$$\underline{u}<\overline{u}, \quad \text{em } \Omega.$$

A seguir, construiremos uma sequência

$$(u_n)\subset W_0^{1,p}(\Omega)\cap C_0^1(\overline{\Omega}),$$

onde u_{n+1} é solução do problema

$$(P_{n+1})\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u_{n+1} &=& |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega\\ u_{n+1} &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega,\end{array}\right.$$

com

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \overline{u}, \ \forall \, n \in \mathbb{N} \text{ e } \ x \in \overline{\Omega}.$$

Com efeito, observe que $\underline{u}, \overline{u} \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Considere o problema linear

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta_p u_1 &= |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u_1 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

desde que $\underline{u} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, então, $\underline{u} \in L^{q(x)}(\Omega)$ e daí $|\underline{u}|_{q(x)}$ é um número real positivo, pois $\underline{u} > 0$ em Ω. Logo, a aplicação

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

$$g(t) = |\underline{u}|_{q(x)}^t$$

é contínua. Sendo $\alpha \in C^0(\overline{\Omega})$, a composição

$$g \circ \alpha : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},$$

$$(g \circ \alpha)(x) = |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}$$

é contínua em $\overline{\Omega}$. Desde que Ω é um domínio limitado, $g \circ \alpha \in L^p(\Omega), \ \forall \ p \geq 1$, em particular a composição $|\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \in L^{p_1}(\Omega)$ com $p_1 = \dfrac{p}{p-1}$. Assim pelo Teorema 2.1 o problema linear (P_1), acima, possui uma solução fraca u_1, e desde que $|\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \in C^0(\overline{\Omega})$, temos que $u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$.

Como $-\Delta_p \underline{u} < |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}$, então,

$$-\Delta_p \underline{u} \leq -\Delta_p u_1, \text{ em } \ \Omega \ \text{ com } \ \underline{u} \equiv u_1 \equiv 0, \text{ sobre } \partial\Omega,$$

pelo Princípio de Comparação (veja o Apêndice B, Teorema B.11), temos

$$\underline{u} \leq u_1 \ \text{ q.t.p em } \ \Omega.$$

Desde que $\underline{u}, u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$ então,

$$\underline{u} \leq u_1 \ \text{ em } \ \Omega.$$

Sendo $0 < \underline{u} < \overline{u}$, segue do Lema 2.1 que

$$|\underline{u}|_{q(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)} \Rightarrow |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \Omega,$$

assim,

$$-\Delta_p u_1 = |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq -\Delta_p \overline{u},$$

logo,

$$-\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p \overline{u} \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ u_1 \equiv \overline{u} \equiv 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega,$$

pelo Princípio de Comparação

$$u_1 \leq \overline{u} \ \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Desde que $u_1, \overline{u}$ são contínuas no compacto $\overline{\Omega}$, então,

$$u_1 \leq \overline{u} \ \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$\underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u} \ \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Agora, considere o problema linear

$$(P_2) \begin{cases} -\Delta_p u_2 &= |u_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u_2 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o fato de $u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$, seguindo o mesmo argumento usado no problema anterior, mostra-se que

$$u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^1(\overline{\Omega}).$$

Desde que $u_1 \geq \underline{u} > 0$ em Ω, segue do Lema 2.1 que

$$|u_1|_{q(x)} \geq |\underline{u}|_{q(x)} \Rightarrow |u_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \geq |\underline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Assim,

$$-\Delta_p u_2 \geq -\Delta_p u_1 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ com } \ u_1 \equiv u_2 \equiv 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega,$$

da mesma forma como

$$\overline{u} \geq u_1 > 0 \Rightarrow |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \geq |u_1|_{q(x)}^{\alpha(x)} \ \text{ em } \Omega,$$

logo,

$$-\Delta_p \overline{u} \geq -\Delta_p u_2 \geq -\Delta_p u_1 \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ com } \ u_1 \equiv u_2 \equiv \overline{u} \equiv 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega,$$

usando o Princípio de Comparação, obtemos

$$\overline{u} \geq u_2 \geq u_1 \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

e desde que $\overline{u}, u_2, u_1 \in C_0^1(\overline{\Omega})$,

$$\overline{u} \geq u_2 \geq u_1 \ \text{ em } \overline{\Omega},$$

logo,

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \overline{u} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Portanto, por recorrência construimos a sequência

$$(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C_0^1(\overline{\Omega}),$$

verificando o problema (P_{n+1}) com

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \overline{u}, \ \forall\, n \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Agora, observe que como u_{n+1} é solução de (P_{n+1}), então,

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} \nabla \varphi = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

em particular para $\varphi = u_{n+1}$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^p = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} u_{n+1}.$$

Desde que

$$0 < u_{n+1} \leq \overline{u} \Rightarrow |u_{n+1}|_{q(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)} \Rightarrow |u_{n+1}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

sendo $|\overline{u}|_{q(x)}$ uma constante positiva, então, caso
$0 < |\overline{u}|_{q(x)} < 1 \Rightarrow |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha^-}, \forall x \in \overline{\Omega}$ e se $1 \leq |\overline{u}|_{q(x)} \Rightarrow |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha^+}, \ \forall x \in \overline{\Omega}$, onde $\alpha^- = \min_{\overline{\Omega}} \alpha(x)$ e $\alpha^+ = \max_{\overline{\Omega}} \alpha(x)$.

Assim, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$|u_{n+1}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq |\overline{u}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$|u_{n+1}|_{q(x)}^{\alpha(x)} \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ x \in \overline{\Omega}, \tag{3.8}$$

logo,

$$||u_{n+1}||_{W_0^{1,p}}^p = \int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^p \leq C \int_\Omega u_{n+1} \leq C \int_\Omega \overline{u}.$$

Consequentemente,

$$||u_{n+1}||_{W_0^{1,p}}^p \leq C', \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

e assim, a sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é limitada. Desde que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, existe uma $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u_{n+1} - u$, como função teste, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} \nabla (u_{n+1} - u) = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} (u_{n+1} - u).$$

Agora, usando o Teorema B.4 (veja o Apêndice B),

$$(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq \begin{cases} C_p|\nabla u_1 - \nabla u_2|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ \\ C_p\dfrac{|\nabla u_1 - \nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Observe que

$$\int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u + |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{n+1} - \nabla u) = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)}(u_{n+1} - u),$$

logo

$$\int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{n+1} - \nabla u) +$$

$$+ \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{n+1} - \nabla u) = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)}(u_{n+1} - u).$$

Como vimos no capítulo anterior, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $-\Delta_p u \in W^{-1,p_1}(\Omega)$. Assim, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{n+1} - \nabla u) \to 0,$$

com isso,

$$\int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{n+1} - \nabla u) = \left[\int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)}(u_{n+1} - u)\right] - o_n(1) \tag{3.11}$$

Para $p \geq 2$, usando (3.10) temos que

$$C_p \int_\Omega |\nabla u_{n+1} - \nabla u_n|^p \leq \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^{p-2}\nabla u_{n+1} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{n+1} - \nabla u),$$

usando (3.11), temos

$$C_p \int_\Omega |\nabla u_{n+1} - \nabla u_n|^p \leq \left[\int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)}(u_{n+1} - u)\right] - o_n(1),$$

por (3.8), temos

$$C_p||u_{n+1}-u||^p_{W_0^{1,p}} \leq C|u_{n+1}-u|_1 - o_n(1), \tag{3.12}$$

passando ao limite de $n \to \infty$ e recordando que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos, a menos de subsequência, que para todo p, tal que, $2 \leq p < N$,

$$u_{n+1} \to u, \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para o caso $1 < p < 2$, observe que

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n+1}-u)|^p = \int_\Omega |\nabla(u_{n+1}-u)||\nabla(u_{n+1}-u)|^{p-1} \leq \int_\Omega |\nabla u_{n+1}-\nabla u|(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{p-1}.$$

Note que, para todo n, $\nabla u_{n+1} \neq 0$, pois caso contrário, u_{n+1} seria uma função constante e desde que $u_{n+1} = 0$ sobre $\partial\Omega$, pois u_{n+1} é solução de (P_{n+1}), teríamos $u_{n+1} = 0$ em Ω, o que é uma contradição, pois $u_{n+1} > 0$ em Ω. Logo,

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n+1}-u)|^p \leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_{n+1}-\nabla u|}{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{1-\frac{p}{2}}}(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{\frac{p}{2}}.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n+1}-u)|^p \leq \int_\Omega \left[\frac{|\nabla u_{n+1}-\nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{2-p}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^p\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Definindo $h_n = \left[\frac{|\nabla u_{n+1}-\nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{2-p}}\right]^{\frac{1}{2}}$ e $g_n = [(|\nabla u_{n+1}| + |\nabla u|)^p]^{\frac{1}{2}}$, temos $h_n, g_n \in L^2(\Omega)$.

Com efeito, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h_n|^2 &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_{n+1}-\nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{2-p}} \leq \int_\Omega \frac{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^2}{(|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^{2-p}} = \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^p \\ &\leq 2^p \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^p + |\nabla u|^p) = 2^p(||u_{n+1}||^p_{W_0^{1,p}} + ||u||^p_{W_0^{1,p}})\end{aligned}$$

usando (3.9) temos

$$\int_\Omega |h_n|^2 \leq 2^p(C' + ||u||^p_{W_0^{1,p}}), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

além disso,

$$\int_\Omega |g_n|^2 = \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|+|\nabla u|)^p \leq 2^p \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^p + |\nabla u|^p) = 2^p(||u_{n+1}||^p_{W_0^{1,p}} + ||u||^p_{W_0^{1,p}}),$$

logo,

$$\int_\Omega |g_n|^2 \leq 2^p(C' + ||u||^p_{W_0^{1,p}}) = M_p, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

assim $h_n,\ g_n \in L^2(\Omega)$.

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega h_n g_n \leq \left(\int_\Omega |h_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega |h_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} M_p^{\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\int_\Omega \left[\frac{|\nabla u_{n+1} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}| + |\nabla u|)^{2-p}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[(|\nabla u_{n+1}| + |\nabla u|)^p\right]^{\frac{1}{2}} \leq M_p^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_{n+1} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}| + |\nabla u|)^{2-p}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Usando essa desigualdade e (3.13) temos

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n+1} - u)|^p \leq M_p^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_{n+1} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{n+1}| + |\nabla u|)^{2-p}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, para o caso $1 < p < 2$, de (3.10) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(u_{n+1} - u)|^p \leq M_p^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{C_p} \int_\Omega (|\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla u_{n+1} - \nabla u)\right]^{\frac{1}{2}},$$

usando (3.11) temos

$$||u_{n+1} - u||^p_{W_0^{1,p}} \leq \left(\frac{M_p}{C_p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[\int_\Omega |u_n|^{\alpha(x)}_{q(x)} (u_{n+1} - u)\right] - o_n(1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

por (3.8), temos

$$||u_{n+1} - u||^p_{W_0^{1,p}} \leq \left(\frac{M_p}{C_p}\right)^{\frac{1}{2}} \left[C|u_{n+1} - u|_1 - o_n(1)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

passando ao limite de $n \to \infty$ obtemos que para todo p, tal que, $1 < p < 2$,

$$u_{n+1} \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, para todo $1 < p < N$, temos

$$u_{n+1} \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Usando a imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^{q(x)}(\Omega)$ para $1 \leq q(x) < p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ e o fato de que

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

temos que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^{q(x)}(\Omega),$$

e desde que

$$||u_n|_{q(x)} - |u|_{q(x)}| \leq |u_n - u|_{q(x)} \to 0,$$

temos

$$|u_n|_{q(x)} \to |u|_{q(x)}.$$

Como $\alpha \in C^0(\overline{\Omega})$,

$$|u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \to |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Observe que para cada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\left||u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi\right| = |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} |\varphi| \leq C|\varphi| \ \in \ L^1(\Omega).$$

Além disso,

$$|u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi(x) \to |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi \to \int_\Omega |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi, \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Desde que

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} \nabla \varphi = \int_\Omega |u_n|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi, \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

então,

$$\int_\Omega |\nabla u_{n+1}|^{p-2} \nabla u_{n+1} \nabla \varphi \to \int_\Omega |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi, \quad \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.15}$$

Para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$, defina a função

$$f_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i},$$

como $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ então, $\nabla u_n \to \nabla u$ em $(L^p(\Omega))^N$, logo, a menos de subsequência,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p em } \Omega,$$

assim, para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p em } \Omega$$

e

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2} \to |\nabla u(x)|^{p-2} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto,

$$f_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to f(x) = |\nabla u(x)|^{p-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, observe que

$$\int_\Omega |f_n(x)|^{\frac{p}{p-1}} = \int_\Omega \Big| |\nabla u_n(x)|^{p-2} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \Big|^{\frac{p}{p-1}} = \int_\Omega \left(|\nabla u_n(x)|^{p-2} \Big| \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \Big| \right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Como para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$,

$$\Big| \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \Big| \leq |\nabla u_n(x)|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

então,

$$\int_\Omega |f_n(x)|^{\frac{p}{p-1}} \leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n(x)|^{p-2} |\nabla u_n(x)| \right)^{\frac{p}{p-1}} = \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^p = ||u_n||^p_{W_0^{1,p}},$$

por (3.9),

$$\int_\Omega |f_n(x)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C', \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $p_1 = \dfrac{p}{p-1}$ temos

$$|f_n|_{p_1} \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Assim a sequência de funções (f_n) está em $L^{p_1}(\Omega)$ e é limitada neste espaço. Pelo Lema de Brezis-Lieb (veja o Apêndice B, Lema B.1),

$$f_n \rightharpoonup f \ \text{ em } L^{p_1}(\Omega).$$

Desde que para cada $\varphi \in L^p(\Omega)$ a aplicação

$$T_\varphi : L^{p_1}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

$$T_\varphi(\psi) = \int_\Omega \psi \varphi$$

pertence ao dual de $L^{p_1}(\Omega)$, segue do Teorema B.7 (veja o Apêndice B), que

$$T_\varphi(f_n) \to T_\varphi(f) \quad \forall\, \varphi \in L^p(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in L^p(\Omega).$$

Em particular, para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$, logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.16}$$

por (3.15), (3.16) e unicidade de limite, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega |u|_{q(x)}^{\alpha(x)} \varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Portanto, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca de (PE). Usando a Teoria de regularidade elíptica obtemos que $u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$.

Pelo Princípio de Comparação Fraco (veja o Apêndice B, Teorema B.11), temos

$$u \geq 0 \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

como u é contínua,

$$u \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Pelo Princípio do Máximo Forte (veja o Apêndice B, Teorema B.13), temos

$$u > 0 \text{ em } \Omega,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

■

Capítulo 4

O Sistema (p_1, p_2) – Laplaciano

Neste capítulo, estudaremos um resultado obtido por Corrêa, Figueiredo, e Lopes [12]. sobre a existência e positividade de solução para o seguinte sistema (p_1, p_2) – Laplaciano

$$(PS)\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < p_1, p_2 < N$ e $\alpha_i, q_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \;\; i = 1, 2$ são funções contínuas. Para isso, usaremos o seguinte problema auxiliar

$$(PS)_\epsilon\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 < \epsilon < 1$.

Para o problema auxiliar, mostraremos a existência de solução usando um resultado de Rabinowitz (veja Teorema B.14 no Apêndice B).

A seguir definiremos o que é uma solução para os problemas $(PS)_\epsilon$ e (PS).

Definição 4.1 *Uma solução para o problema $(PS)_\epsilon$ é um par de funções $(u, v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$, verificando $(PS)_\epsilon$ no sentido fraco, ou seja,*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega (|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon)\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla\varphi = \int_\Omega |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Fazendo $\epsilon = 0$, temos a definição de solução para o problema (PS).

Em $W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$, definimos a seguinte norma

$$||(u,v)||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)\times W_0^{1,p_2}(\Omega)} = ||u||_{W_0^{1,p_1}(\Omega)} + ||v||_{W_0^{1,p_2}(\Omega)},$$

onde

$$||u||_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \ p > 1.$$

De modo análogo, define-se a norma em $L^{q_1(x)}(\Omega) \times L^{q_2(x)}(\Omega)$.

Para o problema auxiliar temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Suponha que* $1 < p_1, p_2 < N,\ \alpha_1, \alpha_2, q_1, q_2 \in C^0(\overline{\Omega}),\ 1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N-p_2} = p_2^*,\ 1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*$ *e* $0 < \alpha_1(x)\alpha_2(x) < (p_1-1)(p_2-1)\ \forall x \in \overline{\Omega}$. *Então, o problema* $(PS)_\epsilon$ *possui uma solução positiva.*

Demonstração: Para cada $\epsilon > 0$ vamos construir um operador T satisfazendo as hipóteses do Teorema B.14, (veja o Apêndice B).

Com efeito, fixadas $f \in L^{q_2(x)}(\Omega),\ g \in L^{q_1(x)}(\Omega)$ e $\lambda \geq 0$. Considere o problema

$$(\overline{P}) \begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= \lambda[|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= \lambda |f|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Desde que $g \in L^{q_1(x)}(\Omega)$, $|g|_{q_1(x)}$ é um número real não-negativo, logo, a aplicação

$$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

$$h(t) = |g|_{q_1(x)}^t$$

é contínua. E como $\alpha_1 \in C^0(\overline{\Omega})$, a composição

$$h \circ \alpha_1 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},$$

$$h \circ \alpha_1(x) = |g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}$$

é contínua. Desde que Ω é um domínio limitado, temos que $|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \in L^{p_1'}(\Omega)$, onde $p_1' = \dfrac{p_1}{p_1 - 1}$. Logo, $\lambda[|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \in L^{p_1'}(\Omega)$.

Portanto, pelo Teorema 2.1, o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= \lambda[|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$.

De modo análogo, prova-se que o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta_{p_2} v &= \lambda |f|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui uma única solução $v \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$.

Assim, fica bem definido o seguinte operador

$$T : \mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega) \to W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega),$$

$$(\lambda, f, g) \mapsto T(\lambda, f, g) = (u, v),$$

onde o par (u, v) é solução do problema $(\overline{P})$.

Como $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N - p_1} = p_1^*$ e $1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N - p_2} = p_2^*$, então, valem as seguintes imersões contínuas

$$W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega) \text{ e } W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1(x)}(\Omega),$$

assim, podemos redefinir o operador T da seguinte forma

$$T : \mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega) \to L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega),$$

$$(\lambda, f, g) \mapsto T(\lambda, f, g) = (u, v).$$

Afirmação 4.1 *O operador T é compacto.*

De fato, sejam $(\lambda_n, f_n, g_n) \subset \mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$ uma sequência limitada e $(u_n, v_n) = T(\lambda_n, f_n, g_n)$. Pela definição de T, o par (u_n, v_n) satisfaz a

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_n &= \lambda_n [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v_n &= \lambda_n |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u_n = v_n &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1 - 2} \nabla u_n \nabla \varphi = \lambda_n \int_\Omega [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p_2 - 2} \nabla v_n \nabla \varphi = \lambda_n \int_\Omega |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Em particular fazendo $\varphi = u_n$ na primeira equação e $\varphi = v_n$ na segunda, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} = \lambda_n \int_\Omega [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] u_n$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p_2} = \lambda_n \int_\Omega |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} v_n.$$

Assim,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} = \lambda_n \int_\Omega [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] u_n$$

e

$$||v_n||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} = \lambda_n \int_\Omega |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} v_n.$$

Desde que a sequência (λ_n, f_n, g_n) é limitada em $\mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$, existem constantes $\lambda^* > 0,\ C_1, C_2 \geq 0$, tais que,

$$\lambda_n \leq \lambda^*, \ \ |f_n|_{q_2(x)} \leq C_1 \ \text{ e } \ |g_n|_{q_1(x)} \leq C_2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < \alpha_1, \alpha_2 \in C^0(\overline{\Omega})$, sejam

$$\alpha_1^- = \min_{\overline{\Omega}} \alpha_1(x), \ \ \alpha_1^+ = \max_{\overline{\Omega}} \alpha_1(x) \ \ \text{ e } \ \ \alpha_2^- = \min_{\overline{\Omega}} \alpha_2(x), \ \ \alpha_2^+ = \min_{\overline{\Omega}} \alpha_2(x).$$

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, se

$$|g_n|_{q_1(x)} \leq 1 \Rightarrow |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^-} \leq C_1^{\alpha_1^-},$$

e se

$$|g_n|_{q_1(x)} > 1 \Rightarrow |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+} \leq C_1^{\alpha_1^+},$$

assim, note que tomando $K = \max\left\{ C_1^{\alpha_1^-}, C_1^{\alpha_1^+}, C_2^{\alpha_2^-}, C_2^{\alpha_2^+} \right\}$, temos

$$\lambda_n \leq \lambda^*, \ \ |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}, |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq K, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

logo,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq \lambda^*[K + \epsilon] \int_\Omega u_n$$

ou seja,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq \lambda^*[K + \epsilon] |u_n|_1, \ \forall\, n \ \in \mathbb{N}.$$

Da imersão contínua de $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ obtemos

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq C_\epsilon^* ||u_n||_{W_0^{1,p_1}}, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

assim, $(u_n) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$ é limitada.

De modo análogo, mostra-se que a sequência (v_n) é limitada em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$. Como $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $W_0^{1,p_2}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivo, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

e

$$v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev

$$u_n \to u \ \text{ em } L^{q_2(x)}(\Omega)$$

e

$$v_n \to v \ \text{ em } L^{q_1(x)}(\Omega).$$

Assim,

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \ \text{ em } L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega).$$

Portanto, T é compacto.

Afirmação 4.2 *O operador T é contínuo.*

Com efeito, sejam

$$(\lambda_n, f_n, g_n) \to (\lambda, f, g) \ \text{ em } \mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$$

$$(u_n, v_n) = T(\lambda_n, f_n, g_n) \ \text{ e } (u, v) = T(\lambda, f, g).$$

Provaremos que

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \ \text{ em } L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega).$$

Pela definição de T, temos

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} -\Delta_{p_1} u_n & = & \lambda_n[|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] & \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v_n & = & \lambda_n |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} & \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_1} u & = & \lambda[|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] & \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v & = & \lambda |f|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} & \text{em } \Omega \\ u_n = v_n = u = v & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Desde que a sequência (λ_n, f_n, g_n) é convergente em $\mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$, segue que ela é limitada. Usando os mesmos argumentos da afirmação anterior, mostra-se que existem constantes positivas $\overline{\lambda}$ e K, tais que

$$\lambda_n \leq \overline{\lambda}, \quad |f_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}, |g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq K, \; \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

e que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e a (v_n) em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$. Desde que $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $W_0^{1,p_2}(\Omega)$, são espaços reflexivos, temos que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \in \; W_0^{1,p_1}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \rightharpoonup v_0 \in \; W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Pelas imersões compactas de Sobolev, a menos de subsequência,

$$u_n \rightarrow u_0 \in \; L^{q_2(x)}(\Omega) \quad \text{e} \quad v_n \rightarrow v_0 \in \; L^{q_1(x)}(\Omega).$$

Assim,

$$(u_n, v_n) \rightarrow (u_0, v_0) \in \; L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega).$$

A seguir mostraremos que

$$u_0 = u \;\text{ e }\; v_0 = v$$

Como u_n e u satisfazem (4.1), então,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2} \nabla u_n \nabla \varphi = \lambda_n \int_\Omega [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in \; W_0^{1,p_1}(\Omega) \tag{4.3}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega [|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in \; W_0^{1,p_1}(\Omega). \tag{4.4}$$

Desde que

$$(\lambda_n, f_n, g_n) \rightarrow (\lambda, f, g) \;\text{ em } R^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega),$$

obtemos

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R}, \quad f_n \rightarrow f \text{ em } L^{q_2(x)}(\Omega) \quad \text{e} \quad g_n \rightarrow g \text{ em } L^{q_1(x)}(\Omega),$$

assim, $|g_n|_{q_1(x)} \rightarrow |g|_{q_1(x)}$ e como $\alpha_1 \in C^0(\overline{\Omega})$, temos $|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \rightarrow |g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}$.

Assim, para cada $\varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$,

$$\lambda_n[|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi(x) \rightarrow \lambda[|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi(x) \quad \text{q.t.p em } \Omega.$$

Note que

$$|\lambda_n[|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi(x)| \le \overline{\lambda}[K+\epsilon]|\varphi(x)| \ \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lambda_n \int_\Omega [|g_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi \to \lambda \int_\Omega [|g|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Usando esta convergência (4.3), (4.4) e unicidade de limite, concluimos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Considere por enquanto a afirmação.

Afirmação 4.3

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0\nabla\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Considerando a afirmação, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla\varphi = \int_\Omega |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0\nabla\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega),$$

logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)\nabla\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u - u_0$, temos

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)\nabla(u-u_0) = 0.$$

Seguindo os argumentos feitos apartir de (2.1), concluimos que

$$u = u_0.$$

De modo análogo, mostra-se que

$$v = v_0.$$

Portanto,

$$(u_n, v_n) \to (u,v) \in \ L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega),$$

a menos de subsequência. Usando o Teorema B.1 (veja o Apêndice B), concluimos que o operador T é contínuo.

Agora, provaremos a afirmação anterior.

Demonstração da Afirmação 4.3 Fazendo $\varphi = u_n - u$ em (4.3) e usando (4.2), temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u_0) \leq \overline{\lambda}[K+\epsilon]\int_\Omega (u_n - u_0),$$

logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0 + |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)\nabla(u_n - u_0) \leq C_1|u_n - u_0|_1,$$

assim,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)(\nabla u_n - \nabla u_0) + \int_\Omega |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) \leq C_1|u_n - u_0|_1.$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0 \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0 \nabla(u_n - u_0) \to 0.$$

Temos

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)(\nabla u_n - \nabla u_0) + o_n(1) \leq C_1|u_n - u_0|_1.$$

Usando a desigualdade

$$(|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p_1-2}\nabla u_0)(\nabla u_n - \nabla u_0) \geq \begin{cases} C_{p_1}|\nabla u_n - \nabla u_0|^{p_1}, & \text{se } \ p_1 \geq 2 \\ \\ C_{p_1}\dfrac{|\nabla u_n - \nabla u_0|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u_0|)^{2-p_1}}, & \text{se } \ 1 < p_1 < 2, \end{cases}$$

conclui-se de modo análogo ao feito na demonstração do Teorema 3.1 que, a menos de subsequência,

$$u_n \to u_0 \ \text{ em } \ W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Agora, para cada $i \in \{1, 2, ..., N\}$, considere a função

$$h_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p_1-2}\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i}.$$

Novamente, considerando a função h_n e seguindo os mesmos argumentos feitos sobre a função f_n contida na demonstração do Teorema 3.1, concluimos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-1}\nabla u_n \nabla\varphi \to \int_\Omega |\nabla u_0|^{p_1-1}\nabla u_0 \nabla\varphi, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega),$$

o que conclui a demonstração da afirmação.

Portanto, como o operador T é contínuo, compacto, $L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach e $T(0,u,v) = (0,0)$, segue do Teorema B.14 (veja o Apêndice B), que existe uma componente ilimitada $A_\epsilon \subset \mathbb{R}^+ \times L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$ de soluções da equação

$$(u,v) = T(\lambda, u, v). \tag{4.5}$$

Pela definição do operador T, a terna (λ, u, v) satisfaz a

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u &= \lambda[|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon] \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v &= \lambda |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Assim,

(i) Se $\lambda = 0$, então, $(u,v) = (0,0)$.

(ii) Se $u = 0$, então, $v = 0$ e portanto, $\lambda = 0$.

(iii) Se $v = 0$, então, $\lambda = 0$ ou $|u|_{q_2(x)} = 0$. Caso, $\lambda = 0$, temos $u = 0$. E se $|u|_{q_2(x)} = 0$, temos $u = 0$, pois $|u|_{q_2(x)} \Leftrightarrow u = 0$.

Portanto, $A_\epsilon - \{(0,0,0)\}$ é constituído de soluções (λ, u, v) de (4.5), quando $\lambda > 0$.

Usando a Teoria de Regularidade Elíptica, temos que

$$u, v \in C_0^{1,\mu}(\overline{\Omega}),$$

pelo Princípio de Comparação (veja o Teorema B.11 no Apêndice B),

$$u, v \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

pelo Princípio do Máximo (veja o Teorema B.13 no Apêndice B),

$$u, v > 0 \text{ em } \Omega.$$

Agora, suponha que A_ϵ seja limitado com relação ao parâmetro λ, isto é, que existe um $\lambda^* > 0$, tal que, para todo $(\lambda, u, v) \in A_\epsilon - \{(0,0,0)\}$, temos

$$\lambda \leq \lambda^*.$$

Como (λ, u, v) satisfaz a (4.6), então,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega [|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \epsilon]\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\varphi = \lambda\int_\Omega |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}\varphi,\ \ \forall\,\varphi\in W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = u$ na primeira equação e $\varphi = v$ na segunda, obtemos

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} = \lambda\int_\Omega [|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}+\epsilon]u \tag{4.7}$$

e

$$||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} = \lambda\int_\Omega |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}v, \tag{4.8}$$

como $0<\alpha_1,\alpha_2\in C^0(\overline{\Omega})$, então,

$$0<\alpha_1^-\le\alpha_1(x)\le\alpha_1^+\ \text{ e }\ 0<\alpha_2^-\le\alpha_2(x)\le\alpha_2^+,\ \ \forall\,x\in\overline{\Omega},$$

onde

$$\alpha_i^- = \min_{\overline{\Omega}}\alpha_i(x)\ \text{ e }\ \alpha_i^+ = \max_{\overline{\Omega}}\alpha_i(x),\ i=1,2.$$

Desde que $|u|_{q_2(x)}$ e $|v|_{q_1(x)}$ são números reais não-negativos, temos os segintes casos a considerar:

1ºCaso: $|u|_{q_2(x)}\ge 1$ e $|v|_{q_1(x)}<1$.

Note que

$$|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}<1\ \text{ e }\ |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}\le |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+},$$

usando (4.7) e (4.8), temos

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1}\le\lambda^*[1+\epsilon]\int_\Omega u \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}\le\lambda^*|u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+}\int_\Omega v,$$

logo,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1}\le\lambda^*[1+\epsilon]|u|_1 \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}\le\lambda^*|u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+}|v|_1,$$

desde que

$$W_0^{1,p_1}(\Omega),\ W_0^{1,p_2}(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$$

continuamente. Existem constantes $C_1,C_2>0$, que não dependem de u e v respectivamente, tais que,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1}\le\lambda^*C_1[1+\epsilon]||u||_{W_0^{1,p_1}} \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2}\le\lambda^*C_2|u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+}||v||_{W_0^{1,p_2}},$$

assim,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1-1}\le C_{\lambda^*,\epsilon} \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2-1}\le\lambda^*C_2|u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+},$$

logo,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}} \leq C \tag{4.9}$$

como $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$ então,

$$W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

continuamente, logo, existe uma constante $C_3 > 0$, que não depende de u, tal que,

$$||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2-1} \leq \lambda^* C_2 C_3 ||u||_{W_0^{1,p_1}}^{\alpha_2^+},$$

com isso,

$$||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq C_{\lambda^*} ||u||_{W_0^{1,p_1}}^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}},$$

desde que $0 < \alpha_2^+ < p_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{\alpha_2^+}{p_2-1} > 0$, usando (4.9), temos

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}} \leq C^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}},$$

assim,

$$||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq C_{\lambda^*} C^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}.$$

Tomando $K_1 = \max\{C, C_{\lambda^*} C^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}\}$, obtemos

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}, ||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq K_1,$$

onde K_1 é uma constante que não depende de u ou v.

2ºCaso: $|u|_{q_2(x)} \geq 1$ e $|v|_{q_1(x)} \geq 1$.

Observe que

$$|u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \leq |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} \quad \text{e} \quad |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+}, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

logo, por (4.7) e (4.8)

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq \lambda^* [|v|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+} + \epsilon] \int_\Omega u \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \leq \lambda^* |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} \int_\Omega v,$$

como $|v|_{q_1(x)} \geq 1 \Rightarrow |v|_{q_1(x)}^{\alpha^+} > \epsilon$, assim,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} < 2\lambda^* |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+} |u|_1 \quad \text{e} \quad ||v||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \leq \lambda^* |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} |v|_1,$$

usando o fato de

$$W_0^{1,p_1}(\Omega), W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

continuamente, temos

$$||u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} < 2\lambda^* C_1 |v|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)} ||u||_{W_0^{1,p_1}} \quad \text{e} \quad ||v||^{p_2}_{W_0^{1,p_2}} \leq \lambda^* C_2 |u|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)} ||v||_{W_0^{1,p_2}},$$

logo,

$$||u||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < 2\lambda^* C_1 |v|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)} \quad \text{e} \quad ||v||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq \lambda^* C_2 |u|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)}$$

por hipótese $1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N-p_2} = p_2^*$ e $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*;\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$, então,

$$W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1(x)}(\Omega) \text{ e } W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

continuamente. Assim, existem constantes $C_3, C_4 > 0$, que não dependem de u e v respectivamente, tais que,

$$||u||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < 2\lambda^* C_1 C_4^{\alpha_1^+} ||v||^{\alpha_1^+}_{W_0^{1,p_2}}, \tag{4.10}$$

e

$$||v||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq \lambda^* C_2 C_3^{\alpha_2^+} ||u||^{\alpha_2^+}_{W_0^{1,p_1}},$$

ou seja,

$$||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq B_{\lambda^*} ||u||^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}} \tag{4.11}$$

combinando (4.10) e (4.11), obtemos

$$||u||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < C_{\lambda^*} ||u||^{\frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}},$$

assim,

$$||u||^{p_1-1-\frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}} < C_{\lambda^*}.$$

Desde que

$$p_1 - 1 - \frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1} = \frac{(p_1-1)(p_2-1) - \alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1} > 0,$$

pois, $0 < \alpha_1(x)\alpha_2(x) < (p_1-1)(p_2-1),\ \ \forall\, x\ \in \overline{\Omega}$, então,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}} < C'_{\lambda^*},$$

por (4.11) concluimos que

$$||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq C''_{\lambda^*},$$

assim,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}, ||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq K_2,$$

onde $K_2 = \max\{C'_{\lambda^*}, C''_{\lambda^*}\}$.

Com um raciocínio análogo, para o 3º caso ($|u|_{q_2(x)} < 1,\ |v|_{q_1(x)} \geq 1$) e o 4º caso ($|u|_{q_2(x)} < 1,\ |v|_{q_1(x)} < 1$). Mostra-se que existem constantes $K_3, K_4 > 0$, respectivamente, tais que,

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}, ||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq K_3, K_4.$$

Tomando $K_5 = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, temos

$$||u||_{W_0^{1,p_1}}, ||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq K_5, \quad \forall\ (\lambda, u, v) \in A_\epsilon - \{(0,0,0)\}. \tag{4.12}$$

Usando as seguintes imersões contínuas

$$W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1(x)}(\Omega) \ \text{ e } \ W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

e (4.12) concluimos que existe uma constante $K > 0$, que só depende de λ^* e ϵ, tal que,

$$|u|_{q_2(x)}, |v|_{q_1(x)} \leq K,$$

para todo $(u, v) \in L^{q_2(x)}(\Omega) \times L^{q_1(x)}(\Omega)$, com $(\lambda, u, v) \in A_\epsilon$. Assim, A_ϵ é limitado, o que é uma contradição. Logo, A_ϵ é ilimitado com relação ao parâmetro λ.

Portanto, para $\lambda = 1$ (λ, u, v) é solução do problema $(PS)_\epsilon$.

■

Teorema 4.2 *Com as mesmas hipótese do Teorema 4.1, o problema (PS) possui uma solução positiva.*

Demonstração: Para cada n, considere o problema

$$(PS)_n \begin{cases} -\Delta_{p_1} u_n &= |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + 1/n \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v_n &= |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u_n = v_n &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 4.1, existe um par de funções $(u_n, v_n) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ que é solução de $(PS)_n$.

Considere o conjunto

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \colon\ |u_n|_{q_2(x)} \geq 1 \ \text{ e } \ |v_n|_{q_1(x)} \leq 1\}.$$

Se $n \in \mathbb{N}_1$, então,

$$|v_n|_{q_1(x)} \leq 1 \Rightarrow |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \geq |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+}, \ \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que

$$-\Delta_{p_1} u_n > |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \Rightarrow -\Delta_{p_1} u_n > |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+} \Rightarrow \frac{1}{|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^+}}(-\Delta_{p_1} u_n) > 1,$$

logo,

$$-\Delta_{p_1}\left(\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}}}\right) > 1 \text{ em } \Omega.$$

Agora, seja $0 < w_1 \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$, a solução de

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} w_1 & = & 1 & \text{em } \Omega \\ w_1 & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$-\Delta_{p_1}\left(\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}}}\right) > -\Delta_{p_1} w_1 \ \text{ em } \Omega,$$

pelo Princípio de Comparação (veja o Apêndice B, Teorema B.11)

$$\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}}} \geq w_1 \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

logo,

$$u_n \geq w_1 |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}} \ \text{ q.t.p em } \Omega,$$

assim, pelo Lema 2.1

$$|u_n|_{q_2(x)} \geq \left| w_1 |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}} \right|_{q_2(x)},$$

com isso,

$$|u_n|_{q_2(x)} \geq |w_1|_{q_2(x)} |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}}. \tag{4.13}$$

De modo análogo, verifica-se que

$$|v_n|_{q_1(x)} \geq |w_2|_{q_1(x)} |u_n|_{q_2(x)}^{\frac{\alpha_2^-}{p_2-1}}, \tag{4.14}$$

onde $0 < w_2 \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$, é solução de

$$\begin{cases} -\Delta_{p_2} w_2 & = & 1 & \text{em } \Omega \\ w_2 & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Substituindo (4.14) em (4.13), temos

$$|u_n|_{q_2(x)} \geq |w_1|_{q_2(x)} |w_2|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}} |u_n|_{q_2(x)}^{\frac{\alpha_1^+ \alpha_2^-}{(p_1-1)(p_2-1)}},$$

logo,

$$|u_n|_{q_2(x)}^{1-\frac{\alpha_1^+ \alpha_2^-}{(p_1-1)(p_2-1)}} \geq |w_1|_{q_2(x)} |w_2|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^+}{p_1-1}} > 0,$$

onde $(p_1-1)(p_2-1) - \alpha_1^+ \alpha_2^- > 0$. Assim, concluimos que

$$|u_n|_{q_2(x)} \geq C_1 > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_1.$$

Como $\dfrac{\alpha_2^-}{p_2-1} > 0$, segue de (4.14) que

$$|v_n|_{q_1(x)} \geq |w_2|_{q_1(x)} C_1^{\frac{\alpha_2^-}{p_2-1}},$$

logo,

$$|v_n|_{q_1(x)} \geq C_2 > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_1,$$

onde C_1, C_2 são contantes que não dependem de $n \in \mathbb{N}_1$.

Agora, considere o conjunto

$$\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} \colon\ |u_n|_{q_2(x)} \geq 1 \ \text{ e } \ |v_n|_{q_1(x)} > 1\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_2$, como

$$|v_n|_{q_1(x)} > 1 \Rightarrow |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} > |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^-}, \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

desde que

$$-\Delta_{p_1} u_n > |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} > |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^-} \Rightarrow \frac{1}{|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1^-}} (-\Delta_{p_1} u_n) > 1 \Rightarrow -\Delta_{p_1} \left(\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}}} \right) > 1 \ \text{ em } \ \Omega,$$

então,
$$-\Delta_{p_1}\left(\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}}}\right) > -\Delta_{p_1} w_1 \ \text{ em } \ \Omega,$$
pelo Princípio de Comparação
$$\frac{u_n}{|v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}}} \geq w_1 \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$
logo,
$$u_n \geq w_1 |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}} \ \text{ q.t.p em } \ \Omega,$$
assim, pelo Lema 2.1
$$|u_n|_{q_2(x)} \geq \left| w_1 |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}} \right|_{q_2(x)},$$
com isso,
$$|u_n|_{q_2(x)} \geq |w_1|_{q_2(x)} |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}}. \tag{4.15}$$

De modo análogo, verifica-se que
$$|v_n|_{q_1(x)} \geq |w_2|_{q_1(x)} |v_n|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_2^-}{p_2-1}}, \tag{4.16}$$
substituindo (4.16) em (4.15), temos
$$|u_n|_{q_2(x)} \geq |w_1|_{q_2(x)} |w_2|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}} |u_n|_{q_2(x)}^{\frac{\alpha_1^- \alpha_2^-}{(p_1-1)(p_2-1)}},$$
logo,
$$|u_n|_{q_2(x)}^{\frac{(p_1-1)(p_2-1)-\alpha_1^-\alpha_2^-}{(p_1-1)(p_2-1)}} \geq |w_1|_{q_2(x)} |w_2|_{q_1(x)}^{\frac{\alpha_1^-}{p_1-1}} > 0,$$
como $(p_1-1)(p_2-1) - \alpha_1^-\alpha_2^- > 0$, existe uma constante C_3, tal que,
$$|u_n|_{q_2(x)} \geq C_3 > 0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}_2,$$
por (4.16) temos
$$|v_n|_{q_1(x)} \geq |w_2|_{q_1(x)} C_3^{\frac{\alpha_2^-}{p_2-1}},$$
assim,
$$|v_n|_{q_1(x)} \geq C_4 > 0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}_2,$$
onde C_3, C_4 são constantes que não dependem de $n \in \mathbb{N}_2$.

De modo análogo, considerando os conjuntos

$$\mathbb{N}_3 = \{n \in \mathbb{N}\colon \ |u_n|_{q_2(x)} < 1 \ \text{ e } \ |v_n|_{q_1(x)} \leq 1\}$$

e

$$\mathbb{N}_4 = \{n \in \mathbb{N}\colon \ |u_n|_{q_2(x)} \leq 1 \ \text{ e } \ |v_n|_{q_1(x)} > 1\},$$

obtemos limitações inferiores positivas para (u_n) em $L^{q_2(x)}(\Omega)$ e (v_n) em $L^{q_1(x)}(\Omega)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_3$ e $\mathbb{N}_4$.

Portanto, existe uma constante C, que não depende de n, tal que,

$$|u_n|_{q_2(x)}, |v_n|_{q_1(x)} \geq C > 0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Agora mostraremos que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ a sequência (v_n) em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$. Novamente, usaremos os conjuntos $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_3$ e $\mathbb{N}_4$, para obtermos tais limitações.

Com efeito, desde que (u_n, v_n) é solução de $(PS)_n$, então,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} = \int_\Omega \Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n} \Big) u_n \tag{4.18}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p_2} = \int_\Omega |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} v_n. \tag{4.19}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_1$,

$$|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} < 1 \ \text{ e } \ |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \leq |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+},$$

usando (4.18) e (4.19), temos

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq 2 \int_\Omega u_n \quad \text{e} \quad ||v_n||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \leq |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} \int_\Omega v_n,$$

logo,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq 2|u_n|_1 \quad \text{e} \quad ||v_n||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \leq |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} |v_n|_1,$$

desde que

$$W_0^{1,p_1}(\Omega), W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

continuamente. Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}^{p_1} \leq C_1 ||u_n||_{W_0^{1,p_1}} \quad \text{e} \quad ||v_n||_{W_0^{1,p_2}}^{p_2} \leq C_2 |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2^+} ||v_n||_{W_0^{1,p_2}},$$

como $1 < p_1 < N$,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}} \leq K_1, \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}_1, \tag{4.20}$$

logo,

$$||v_n||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq C_2 |u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)},$$

como $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*, \; \forall \; x \in \overline{\Omega}$,

$$W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

continuamente, logo, existe uma constante $C_3 > 0$, tal que,

$$||v_n||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq C_2 C_3 ||u_n||^{\alpha_2^+}_{W_0^{1,p_1}},$$

com isso,

$$||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq C ||u_n||^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}},$$

desde que $0 < \alpha_2^+ < p_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{\alpha_2^+}{p_2-1} > 0$, usando (4.20), temos

$$||u_n||^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}} \leq K_1^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}},$$

como $1 < p_2 < N$,

$$||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq C^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}.$$

Considerando $C_1' = \max\{K_1, CK_1^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}\}$, obtemos

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}, ||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq C_1'.$$

Agora, mostraremos a limitação de (u_n) em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e de (v_n) em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$ no conjunto de índices $\mathbb{N}_2$.

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}_2$,

$$|u_n|^{\alpha_2(x)}_{q_2(x)} \leq |u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)} \quad \text{e} \quad |v_n|^{\alpha_1(x)}_{q_1(x)} \leq |v_n|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)}, \;\; \forall x \in \overline{\Omega},$$

logo, por (4.18) e (4.19),

$$||u_n||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} \leq [|v_n|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)} + \frac{1}{n}] \int_\Omega u_n \quad \text{e} \quad ||v_n||^{p_2}_{W_0^{1,p_2}} \leq |u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)} \int_\Omega v_n,$$

assim,

$$||u_n||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} < 2|v_n|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)}|u_n|_1 \quad \text{e} \quad ||v_n||^{p_2}_{W_0^{1,p_2}} \leq |u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)}|v_n|_1,$$

usando o fato de

$$W_0^{1,p_1}(\Omega), W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$$

continuamente, temos

$$||u_n||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} < 2C_1|v_n|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)}||u_n||_{W_0^{1,p_1}} \quad \text{e} \quad ||v_n||^{p_2}_{W_0^{1,p_2}} \leq C_2|u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)}||v_n||_{W_0^{1,p_2}},$$

logo,

$$||u_n||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < 2C_1|v_n|^{\alpha_1^+}_{q_1(x)} \quad \text{e} \quad ||v_n||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq C_2|u_n|^{\alpha_2^+}_{q_2(x)}.$$

Por hipótese $1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N-p_2} = p_2^*$ e $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*$; $\forall\ x \in \overline{\Omega}$, então,

$$W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1(x)}(\Omega) \ \text{ e } \ W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

continuamente. Assim, existem constantes $C_3, C_4 > 0$, que não dependem de n, tais que,

$$||u_n||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < 2C_1C_4^{\alpha_1^+}||v_n||^{\alpha_1^+}_{W_0^{1,p_2}} \tag{4.21}$$

e

$$||v_n||^{p_2-1}_{W_0^{1,p_2}} \leq C_2C_3^{\alpha_2^+}||u_n||^{\alpha_2^+}_{W_0^{1,p_1}},$$

ou seja,

$$||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq B||u_n||^{\frac{\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}}. \tag{4.22}$$

Combinando (4.21) e (4.22), obtemos

$$||u_n||^{p_1-1}_{W_0^{1,p_1}} < ||u_n||^{\frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}},$$

assim,

$$||u_n||^{p_1-1-\frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1}}_{W_0^{1,p_1}} < C.$$

Desde que

$$p_1 - 1 - \frac{\alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1} = \frac{(p_1-1)(p_2-1) - \alpha_1^+\alpha_2^+}{p_2-1} > 0,$$

pois, $0 < \alpha_1(x)\alpha_2(x) < (p_1-1)(p_2-1),\ \ \forall\ x \in \overline{\Omega}$, então,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}} < C',$$

por (4.22) concluimos que

$$||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq C'',$$

assim,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}, ||v||_{W_0^{1,p_2}} \leq K_2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}_2,$$

onde $K_2 = \max\{C', C''\}$.

De modo análogo, mostra-se que para todo $n \in \mathbb{N}_3$ e $\mathbb{N}_4$, a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e a sequência (v_n) em $W_0^{1,p_2}(\Omega)$.

Portanto, existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$||u_n||_{W_0^{1,p_1}}, ||v_n||_{W_0^{1,p_2}} \leq C, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelas imersões de Sobolev, existe uma constante $C_0 > 0$, tal que,

$$|u_n|_{q_2(x)}, |v_n|_{q_1(x)} \leq C_0; \ \forall\, n\ \mathbb{N}.$$

Assim,

$$|u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}, |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq C; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \,\text{e}\, x \in \overline{\Omega},$$

onde $C = \max\{C_0^{\alpha_1^-}, C_0^{\alpha_1^+}, C_0^{\alpha_2^-} \text{ e } C_0^{\alpha_2^+}\}$.

Como $W_0^{1,p_1}(\Omega)$, $W_0^{1,p_2}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivo, então, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ W_0^{1,p_1}(\Omega) \ \text{ e } \ v_n \rightharpoonup v \ \text{ em } \ W_0^{1,p_2}(\Omega).$$

Desde que (u_n, v_n) é solução de $(PS)_n$, fazendo $(u_n - u)$ e $(v_n - v)$ como funções testes, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) = \int_\Omega \Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big)(u_n - u)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v) = \int_\Omega |u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}(v_n - v),$$

logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u) \leq (C+1)|u_n - u|_1.$$

Considere a seguinte desigualdade

$$(|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \geq \begin{cases} C_{p_1}|\nabla u_n - \nabla u|^{p_1}, & \text{se } \ p_1 \geq 2 \\ \\ C_{p_1}\dfrac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p_1}}, & \text{se } \ 1 < p_1 < 2. \end{cases} \tag{4.23}$$

Observe que

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u + |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \le (C+1)|u_n - u|_1,$$

logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) +$$

$$+\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u) \le (C+1)|u_n - u|_1.$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ então,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla(u_n - u) \to 0,$$

logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u) \le (C+1)|u_n - u|_1 - o_n(1). \tag{4.24}$$

Para $p_1 \ge 2$, usando (4.23) temos

$$C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p_1} \le \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u),$$

logo

$$C_p ||u_n - u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} \le \overline{K}|u_n - u|_1 - o_n(1).$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ continuamente, então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$.

Passando o limite na última desigualdade acima e fazendo $n \to \infty$, temos

$$C_p ||u_n - u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} \to 0,$$

com isso,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Para $1 < p_1 < 2$, observe que

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p_1} = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p_1}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}}}.(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}}.$$

Defina

$$g_n = \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p_1}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}}} \ \text{ e } \ h_n = (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}},$$

temos $g_n \in L^{\frac{2}{p_1}}(\Omega)$ e $h_n \in L^{\frac{2}{2-p_1}}(\Omega)$.

Com efeito,

$$\int_\Omega |g_n|^{\frac{2}{p_1}} = \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p_1}} \leq \int_\Omega \frac{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p_1}}$$

$$\leq \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p_1} \leq 2^{p_1} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1} + |\nabla u|^{p_1}) \leq 2^{p_1}(||u_n||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} + ||u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}}).$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ existe uma constante $C > 0$, tal que,

$$\int_\Omega |g_n|^{\frac{2}{p_1}} \leq 2^{p_1}(C + ||u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}}),$$

e

$$\int_\Omega |h_n|^{\frac{2}{2-p_1}} = \int_\Omega (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p_1} \leq 2^{p_1}(C + ||u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}}),$$

assim, $g_n \in L^{\frac{2}{p_1}}(\Omega)$ e $h_n \in L^{\frac{2}{2-p_1}}(\Omega)$. Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega g_n h_n \leq \Big(\int_\Omega |g_n|^{\frac{2}{p_1}}\Big)^{\frac{p_1}{2}} \Big(\int_\Omega |h_n|^{\frac{2}{2-p_1}}\Big)^{\frac{2-p_1}{2}},$$

façamos $C_1 = 2^{p_1}(C + ||u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}})$, então,

$$\int_\Omega g_n h_n \leq \Big(\int_\Omega |g_n|^{\frac{2}{p_1}}\Big)^{\frac{p_1}{2}} C_1^{\frac{2-p_1}{2}},$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p_1}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}}} . (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p_1(2-p_1)}{2}} \leq C_1^{\frac{2-p_1}{2}} \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p_1}}\right]^{\frac{p_1}{2}},$$

logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p_1} \leq C_2 \left[\int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p_1}}\right]^{\frac{p_1}{2}}.$$

Usando a desigualdade (4.23), obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^{p_1} \leq C_2 \left[\frac{1}{C_p} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\right]^{\frac{p_1}{2}},$$

usando (4.24), temos

$$||u_n - u||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} \leq C_4 \Big[\overline{K}|u_n - u|_1 - o_n(1)\Big]^{\frac{p_1}{2}},$$

de onde segue que, para todo $1 < p_1 < 2$,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Portanto, para todo $1 < p_1 < N$, temos que

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p_1}(\Omega). \tag{4.25}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$v_n \to v \text{ em } W_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{4.26}$$

Assim $\nabla u_n \to \nabla u$ em $(L^{p_1}(\Omega))^N$, logo, para cada $i = 1, 2...N$.

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p em } \Omega,$$

além disso,

$$|\nabla u_n(x)|^{p_1-2} \to |\nabla u(x)|^{p_1-2} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Para cada i, defina

$$f_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p_1-2}\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i},$$

logo,

$$f_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p_1-2}\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to f(x) = |\nabla u(x)|^{p_1-2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Agora, observe que

$$\int_\Omega |f_n|^{\frac{p_1}{p_1-1}} = \int_\Omega \left||\nabla u_n|^{p_1-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{p_1}{p_1-1}} \le \int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1} = ||u_n||^{p_1}_{W_0^{1,p_1}} \le C, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pois, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p_1}(\Omega)$.

Assim, $(f_n) \subset L^{p_1'}(\Omega)$ e $|f_n|_{p_1'} \le C$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema de Brezis-Lieb (veja o Apêndice B, Lema B.1),

$$f_n = |\nabla u_n|^{p_1-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup f = |\nabla u|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L^{p_1'}(\Omega).$$

Assim, para cada $i = 1, 2, ...N$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \ \ \forall \in L^{p_1}(\Omega).$$

Em particular, para cada $\varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^{p_1}(\Omega)$, logo,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \ \ \forall \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega),$$

assim,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla \varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \varphi, \ \ \forall \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

Desde que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega \Big[|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big]\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega),$$

então,

$$\int_\Omega \Big[|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big]\varphi \to \int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\varphi \ \ \forall\varphi \in \ W_0^{1,p_1}(\Omega). \tag{4.27}$$

Agora observe que como $1 \leq q_1(x) < \dfrac{Np_2}{N-p_2} = p_2^*$, e $1 \leq q_2(x) < \dfrac{Np_1}{N-p_1} = p_1^*$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ valem as seguintes imersões contínuas

$$W_0^{1,p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1(x)}(\Omega) \quad \text{ e } \quad W_0^{1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_2(x)}(\Omega),$$

por (4.25) e (4.26), temos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^{q_2(x)}(\Omega) \quad \text{ e } \quad v_n \to v \ \text{ em } \ L^{q_1(x)}(\Omega),$$

assim,

$$|v_n|_{q_1(x)} \to |v|_{q_1(x)},$$

pois,

$$\Big||v_n|_{q_1(x)} - |v|_{q_1(x)}\Big| \leq |v_n - v|_{q_1(x)} \to 0.$$

Como $\alpha_1 \in C^0(\overline{\Omega})$, então,

$$|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \to |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \quad \text{q.t.p em } \ \Omega.$$

Além disso, para cada $\varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$, temos

$$\Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big)\varphi(x) \to |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}\varphi(x) \quad \text{q.t.p em } \ \ \Omega,$$

e

$$\Big|\Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big)\varphi\Big| \leq (|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + 1)|\varphi|.$$

Como

$$|u_n|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)}, |v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \leq K_0, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \,\text{e}\, x \in \overline{\Omega},$$

então,

$$\Big|\Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big)\varphi\Big| \leq (K_0+1)|\varphi| \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \Big(|v_n|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} + \frac{1}{n}\Big)\varphi \to \int_\Omega |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)}\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega), \tag{4.28}$$

usando (4.27), (4.28) e unicidade de limite, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \varphi, \ \ \forall \ \varphi \in W_0^{1,p_1}(\Omega). \tag{4.29}$$

De modo análogo, prova-se que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v \nabla \varphi = \int_\Omega |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \varphi, \ \ \forall \ \varphi \in W_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{4.30}$$

Por (4.29) e (4.30) o par $(u,v) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ é solução fraca de

$$(PS) \begin{cases} -\Delta_{p_1} u & = |v|_{q_1(x)}^{\alpha_1(x)} \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta_{p_2} v & = |u|_{q_2(x)}^{\alpha_2(x)} \quad \text{em } \Omega \\ u = v & = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

que é não-trivial, pois por (4.17)

$$|u_n|_{q_2(x)}, |v_n|_{q_1(x)} \geq C > 0, \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando a Teoria de Regularidade Elíptica, tem-se $u, v \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Usando o Princípio de Comparação, temos

$$u, v \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

pelo Princípio de Máximo, concluimos que $u, v > 0$ em Ω.

Portanto, o par (u,v) é uma solução positiva do problema (PS), o que conclui a demonstração do teorema.

■

Apêndice A

Funcional Diferenciável

Neste apêndice mostraremos a diferenciabilidade do funcional

$$I : \widetilde{E} \to \mathbb{R},$$

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + b(x)u^2) - F(x,u)\Big],$$

ou seja,

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u),$$

usado em parte deste trabalho.

Iniciaremos com a seguinte definição.

Definição A.1 *Considere o funcional $I : U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que I é Gateaux-diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que, para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u) - < f, th >] = 0$$

Caso o limite acima exista, ele é único e a derivada de Gateaux em u será denotado por $I'(u)$, e dada por

$$< I'(u), h > := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I(u+th) - I(u)].$$

O funcional I tem derivada a Fréchet $f \in X'$ em u se

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{||h||}[I(u+h) - I(u) - < f, h >] = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se I possui derivada a Fréchet e esta é contínua em U.

Proposição A.1 *Se I tem derivada a Gateaux contínua em U, então, $I \in C^1(U, R)$.*

Demonstração: Sejam $u, h \in U$, com $u + h \in U$, como I possui derivada de Gateaux sobre U, então, pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0, 1)$ tal que,

$$I(u + h) - I(u) = I'(u + \theta h)h.$$

Note que

$$I(u + h) - I(u) - I'(u)h = I'(u + \theta h)h - I'(u)h$$

de onde segue que

$$\frac{1}{||h||}[I(u + h) - I(u) - I'(u)h] = \frac{1}{||h||}[I'(u + \theta h)h - I'(u)h] = [I'(u + \theta h) - I'(u)]\frac{h}{||h||}.$$

Desse modo

$$\Big|\Big|\frac{1}{||h||}[I(u + h) - I(u) - I'(u)h]\Big|\Big| = ||I'(u + \theta h) - I'(u)||.$$

Uma vez que a derivada de Gateaux é contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $||h|| < \delta$, segue que

$$||I'(u + \theta h) - I'(u)] < \epsilon,$$

logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||}[I(u + h) - I(u) - I'(u)h] = 0.$$

Assim, concluimos que a derivada de Fréchet existe e é igual a derivada de Gateaux e que a derivada de Fréchet de I é contínua sobre U, logo, $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Afirmação A.1 *Considerando o espaço de Hilbert*

$$\widetilde{E} = \{u \in E : \int_{\mathbb{R}^N} \Big(|\nabla u|^2 + b(x)u^2\Big) < \infty\},$$

onde $||.||$ é a norma em $\widetilde{E}$ dada por

$$||u|| = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

O funcional

$$J : \widetilde{E} \to \mathbb{R},$$

$$J(u) = \frac{1}{2}||u||^2$$

é de classe $C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R})$.

Demonstração: Com efeito, observe que a norma no espaço $\widetilde{E}$ provém do seguinte produto interno

$$\Big\langle u, v\Big\rangle_{\widetilde{E}} = \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\nabla u \nabla v + b(x)uv\Big).$$

Portanto, é imediato das propriedades do produto interno que o funcional

$$J \in C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R}).$$

■

Afirmação A.2 *O funcional*

$$G : \widetilde{E} \to \mathbb{R},$$

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u),$$

é de classe $C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R})$.

Demonstração: Com efeito, observe que

$$\frac{G(u+t\varphi) - G(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(x, u+t\varphi) - F(x,u)}{t}.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, fixados, considere a função real $s(z) = F(x,z)$, definida no extremo do intervalo $u(x)$, $u(x) + t\varphi(x)$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$s(u(x) + t\varphi(x)) - s(u(x)) = s'(\theta_t)t\varphi(x),$$

logo,

$$F(x, u+t\varphi) - F(x,u) = f(x, \theta_t)t\varphi,$$

onde $\min\{u(x), u(x)+t\varphi(x)\} < \theta_t(x) < \max\{u(x), u(x)+t\varphi(x)\}$.

Observe que para $|t| \leq 1$, temos

$$|\theta_t(x)| \leq 2|u(x)| + |\varphi(x)| \tag{A.1}$$

e que

$$\frac{G(u+t\varphi) - G(u)}{t} = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,\theta_t)t\varphi \tag{A.2}$$

e ainda que

$$\theta_t(x) \to u(x) \text{ quando } t \to 0.$$

Pela continuidade de f, temos

$$f(x,\theta_t(x))\varphi(x) \to f(x,u(x))\varphi(x) \text{ q.t.p no } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, $f(x,\theta_t(x))\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Com efeito, por (f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $s \in (1, 2^*-1)$, tal que,

$$|f(.,\theta_t)\varphi| \leq (c_1|\theta_t| + c_2|\theta_t|^s)|\varphi| = c_1|\theta_t||\varphi| + c_2|\theta_t|^s|\varphi|$$

por $(A.1)$

$$|f(.,\theta_t)\varphi| \leq 2c_1|u||\varphi| + c_1|\varphi|^2 + c_2(2|u| + |\varphi|)^s|\varphi|,$$

como $1 < s < 2^* - 1$, então, $2 < s+1 < 2^*$. Desde que $\widetilde{E} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*$, continuamente, então,

$$\widetilde{E} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N),\ L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$$

continuamente. Assim, $|u|, |\varphi| \in L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$, logo,

$$c_2(2|u| + |\varphi|)^s \in L^{\frac{s+1}{s}}(\mathbb{R}^N).$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder para os expoentes $s+1$ e $\dfrac{s+1}{s}$, temos

$$c_2(2|u| + |\varphi|)^s|\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

E como $|u|, |\varphi| \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$g \equiv 2c_1|u||\varphi| + c_1|\varphi|^2 + c_2(2|u| + |\varphi|)^s|\varphi| \in\ L^1(\mathbb{R}^N)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,\theta_t)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi,\ \forall\, u, \varphi \in \widetilde{E}.$$

Por $(A.2)$ temos

$$\frac{G(u+t\varphi) - G(u)}{t} \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi.$$

Portanto, G é gateaux diferenciável com

$$G'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi,\ \forall\, u, \varphi \in \widetilde{E}.$$

Agora, mostraremos que a aplicação

$$G' : \widetilde{E} \to \widetilde{E}'$$

$$u \mapsto G'(u)$$

é contínua em $\widetilde{E}'$, ou seja,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ \widetilde{E} \ \ \Rightarrow \ \ G'(u_n) \to G'(u) \ \text{ em } \ \widetilde{E}'.$$

Com efeito, observe que $\forall\, \varphi \in \widetilde{E}$ com $||\varphi|| \leq 1$, temos

$$|(G'(u_n) - G'(u))\varphi| = |G'(u_n)\varphi - G'(u)\varphi| = \Big| \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)\varphi - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)\varphi \Big| \qquad \text{(A.3)}$$

Usando a imersão contínua de $\widetilde{E}$ em $L^{s+1}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^{s+1}(\mathbb{R}^N),$$

logo, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p no } \ \mathbb{R}^N,$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. no } \ \mathbb{R}^N,$$

Observe que

$$|f(., u_n)\varphi| \leq c_1|u_n||\varphi| + c_2|u_n|^s|\varphi| \leq c_1 h|\varphi| + c_2 h^s|\varphi|.$$

De modo análogo ao anterior, mostra-se que a função

$$g \equiv c_1 h|\varphi| + c_2 h^s|\varphi| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)\varphi, \ \forall\, u, \varphi \in \widetilde{E}.$$

Usando a relação $(A.3)$, obtemos

$$G'(u_n) \to G'(u) \ \text{ em } \ \widetilde{E}' \ \text{ quando } \ u_u \to u \ \text{ em } \ \widetilde{E}.$$

Assim,

$$G \ \in C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R}).$$

$\blacksquare$

Portanto, pelas duas últimas afirmações

$$I \in C^1(\widetilde{E}, \mathbb{R})$$

e

$$I'(u)v = \left\langle u, v \right\rangle_{\widetilde{E}} - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v, \ \ \forall\, u, v \in \widetilde{E}.$$

Afirmação A.3 *Suponha que o potencial b é limitado, então, $\widetilde{E} = E$ e as normas $||.||_{\widetilde{E}}$ e $||.||_E$ são equivalentes.*

Demonstração: Com efeito, suponha que exista uma constante $b_1 > 0$, tal que,

$$b(x) \leq b_1, \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

então, para toda função $u \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b_1 u^2) \leq \bar{b} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) = \bar{b}||u||_E^2 < \infty,$$

onde $\bar{b} = \max\{1, b_1\}$. Assim, $u \in \widetilde{E}$, logo,

$$\widetilde{E} = E = W^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, mostraremos que as normas

$$||u||_{\widetilde{E}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + b(x)u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ \text{e} \ ||u||_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

De fato, segundo os cálculos acima, temos que

$$||u||_{\widetilde{E}} \leq C_1 ||u||_E, \tag{A.4}$$

por outro lado, note que

$$b_0 ||u||_E^2 = b_0 \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (b_0 |\nabla u|^2 + b(x)u^2),$$

tomando $\widehat{b} = \max\{b_0, 1\}$, temos

$$b_0 ||u||_E^2 \leq \widetilde{b} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(x)u^2) = \widetilde{b} ||u||_{\widetilde{E}}^2,$$

logo,

$$||u||_E \leq C_2 ||u||_{\widetilde{E}}, \tag{A.5}$$

por (A.4) e (A.5) segue a equivalência das normas.

■

Portanto, se o potencial b for limitado concluir que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$.

Além disso, em particular, para cada constante $\widehat{b} > 0$, temos que o funcional

$$\widehat{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + \widehat{b}u^2) - F(x,u)\Big]$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Apêndice B

Resultados Básicos

Neste Apêndice apresentaremos as definições e alguns resultados, principalmente sobre a Teoria da medida e dos Espaços de Lebesgue e Sobolev que foram utilizados nesta dissertação.

Teorema B.1 *(Veja [26]) Sejam M e N espaços métricos. Para que uma função $f : M \to N$ seja contínua num ponto a, é suficiente que para toda sequência $x_n \to a$ imlique que $f(x_n)$ possua uma subsequência $f(x_{n_k})$ convergindo para $f(a)$.*

Teorema B.2 *(Veja [6])(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis em Ω, convergente quase sempre para uma função f mensurável. Se existir uma função integrável g tal que, $|f_n| \leq g$ quase em toda parte (q.t.p.) para todo $n \in \mathbb{N}$, então, f é integrável e tem-se*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Teorema B.3 *(Veja [7]): Seja (f_n) uma sequência em $L^{p(x)}(\Omega)$, e $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$, tais que $f_n \to f$ em $L^{p(x)}(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que:*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.

Lema B.1 *(Veja [38])(Brezis-Lieb) Seja (f_n) uma sequência de funções limitadas em $L^p(\Omega)$, tal que,*

$$f_n(x) \to f(x) \ \ q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Então,

$$f_n \rightharpoonup f \quad em \; L^p(\Omega), \; \forall \, 1 < p < \infty.$$

Teorema B.4 *(Veja [30]): Sejam $a, b \in \mathbb{R}^N$. Existe uma constante positiva C_p, que só depende de p, tal que,*

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq \begin{cases} C_p|a-b|^p, & se \quad p \geq 2 \\ \\ C_p \dfrac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}}, & se \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Teorema B.5 *(Desigualdade do Valor Médio)(Veja [27]) Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto $(a, a+v)$ e tal que, sua restrição ao segmento fechado $[a, a+v] \subset U$ seja contínua. Se $|f'(x)| \leq M, \; \forall \, x \in (a, a+v)$, então,*

$$|f(a+v) - f(a)| \leq M|v|.$$

Definição B.1 *(Veja [7])(Convergência Forte): Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Dizemos que (x_n) converge forte em X se existe $x \in X$ com $||x_n - x|| \to 0$, quando $n \to \infty$. Neste caso, x é o limite de (x_n) em X.*

Definição B.2 *(Veja [7])(Convergência fraca): Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Dizemos que (x_n) converge fraco em X, se existe $x \in X$ verificando:*

$$f(x_n) \to f(x) \quad em \;\; \mathbb{R}, \; \forall f \in X'.$$

Neste caso, x é chamado limite fraco de (x_n) em X e denotamos $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema B.6 *(Veja [7]): Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe $x \in X$ tal que,*

$$x_n \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Então,

a) O limite fraco x de (x_n) é único;

b) Toda subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x;

c) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema B.7 *(Veja [7]): Seja (x_n) uma sequência em X. Então,*

a) Se $x_n \to x$, então, $x_n \rightharpoonup x$;

b) Se $x_n \rightharpoonup x$, então, $\|x_n\|$ é limitado e $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$;

c) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ em X', então, $f_n(x_n) \to f(x)$.

Teorema B.8 *(Veja [7]): Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada. Então, existe $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ que converge fracamente em X, isto é, existe $x \in X$ tal que,*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Definição B.3 *(Veja [2])(Imersão contínua): Dizemos que o espaço normado $(X, \|.\|_X)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \|.\|_Y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

i) X for subespaço vetorial de Y;

ii) A aplicação identidade

$$\begin{array}{rccl} i: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que, $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Definição B.4 *(Veja [25])(Operador Linear Compacto): Sejam X e Y espaços métricos. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição B.5 *(Ver [2])(Imersão compacta): Dizemos que o espaço normado X está imerso compactamente no espaço Y e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{array}{rccl} i: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

é um operador linear compacto.

Teorema B.9 *(Veja [2]): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $(N \geq 2)$ e $1 < p < \infty$. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$, *se* $kp < N$ *(se* $kp = N$ *, podemos tomar* $1 \leq q < \infty$*), Além disso, se* Ω *é limitado essa imersão é compacta quando* $q < \frac{Np}{N-kp}$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\lambda}(\Omega)$, *se* $kp > N$, *onde* k *é um inteiro verificando* $m < k - \frac{N}{p} \leq m+1$ *e* λ *é um real satisfazendo* $0 < \lambda \leq k - m - \frac{N}{p} = \lambda_0$, *se* $\lambda_0 < 1$, *e* $0 < \lambda < 1$, *se* $\lambda_0 = 1$.

Teorema B.10 *(Veja [7]): Sejam* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Verifica-se que:*

(i) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *então,* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *então,* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall\, q \in [p, +\infty)$,

(iii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *então,* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

com injeções contínuas.

Proposição B.1 *(Veja [21]):*

(i) O espaço normado $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{p(x)})$ *é um espaço de Banach separável, reflexivo uniformemente convexo e seu conjugado é o espaço* $(L^{q(x)}(\Omega), |.|_{q(x)})$, *onde* $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$. *Para cada* $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ *e* $g \in L^{q(x)}(\Omega)$, *temos* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\Big|\int_\Omega fg\Big| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q_-}\right)|f|_{p(x)}|g|_{q(x)};$$

(ii) Se $p_1, p_2 \in C_+(\overline{\Omega})$, $p_1(x) \leq p_2(x)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, *então,*

$$L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$$

continuamente.

Proposição B.2 *(Veja [21]):*

(i) $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *e* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *são espaços de Banach separáveis e reflexivos.*

(ii) Se $q \in C_+(\overline{\Omega})$ *e* $q(x) < p^*(x)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, *então, a imersão de* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *em* $L^{p(x)}(\Omega)$ *é contínua e compacta, onde*

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & se \quad p(x) < N \\ \infty, & se \quad p(x) \geq N. \end{cases}$$

(iii) Existe uma constante $C > 0$, *tal que,*

$$|f|_{p(x)} \leq C|\nabla f|_{p(x)}, \;\; \forall\, f \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Teorema B.11 *(Veja [30])(Princípio de Comparação Fraco): Sejam* $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 & \leq & -\Delta_p u_2 & em\, \Omega \\ u_1 & \leq & u_2 & sobre\, \partial\Omega, \end{cases}$$

no sentido fraco. Então,

$$u_1 \leq u_2 \ q.t.p\ em\, \Omega.$$

Teorema B.12 *(Veja [30])(Princípio de Máximo de Hopf): Seja* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *verificando*

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0 & em\, \Omega \\ u > 0 & em\, \Omega \\ u = 0 & sobre\, \partial\Omega, \end{cases}$$

então, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ *sobre* $\partial\Omega$*, onde* η *é o vetor normal a* $\partial\Omega$*.*

Teorema B.13 *(Veja [30])(Um Princípio de Máximo Forte): Assuma que* $k \in \mathbb{R}$ *é uma constante não-negativa,* $1 < p \leq 2$ *e* Ω *um domínio limitado do* $\mathbb{R}^N$*. Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *satisfaz*

$$-\Delta_p u + ku \geq 0 \ em\, \Omega\ (no\ sentido\ fraco),$$

$u \geq 0$ *e* $u \not\equiv 0$ *em* Ω*. Então,* $u > 0$ *em* Ω*. A conclusão continua válida para todo* $p > 1$*, quando* $k = 0$*.*

Teorema B.14 *(Veja [36])Seja* E *um espaço de Banach e* $T : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ *um operador contínuo e compacto com* $T(0, u) = 0$*. Então, a equação*

$$u = T(\lambda, u)$$

possui uma componente ilimitada $A \subset \mathbb{R}^+ \times E$ *de soluções com* $(0, 0) \in A$*.*

Teorema B.15 *(Veja [7]) Seja* $\varphi : E \to \mathbb{R}$*, uma função convexa e semicontínua (na topologia forte). Então,* φ *é semicontínua na topologia fraca. Em particular se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* E*, então,*

$$\varphi(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n).$$

Teorema B.16 *(Veja [20])(Princípio de Máximo Forte) Assuma que* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e*

$$c(x) \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Suponha que Ω *é conexo.*

(i) Se

$$-\Delta u + c(x)u \geq 0 \text{ em } \Omega$$

e u *atinge um mínimo não positivo sobre* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então,*

$$u \text{ é constante dentro de } \Omega.$$

(ii) Se

$$-\Delta u + c(x)u \leq 0 \text{ em } \Omega$$

e u *atinge um máximo não negativo sobre* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então,*

$$u \text{ é constante dentro de } \Omega.$$

Teorema B.17 *(Veja [6]) Considere a função* $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$. *Suponha que para cada* t *fixado a função* $x \mapsto f(x,t)$ *é* $\mathcal{A}(x)$ *mensurável para cada* $t \in [a,b]$. *Suponha que para algum* $t_0 \in [a,b]$ *a função* $x \mapsto f(x,t_0)$ *é integravél sobre* X, *que* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *exista sobre* $X \times [a,b]$ *e que exista uma função integravél* g, *sobre* X, *tal que,*

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x).$$

Então, a função

$$F(t) = \int_X f(x,t) d_\mu(x)$$

é diferenciável sobre $[a,b]$ *e*

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\int_X f(x,t)d_\mu(x) = \int_X \frac{d}{dt} f(x,t) d_\mu(x)$$

Teorema B.18 *(Veja [20])(Desigualdade de Young): Seja* $1 < p, q < \infty$ *tais que,* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então, para todos* $a, b > 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{B.1}$$

Teorema B.19 *(Veja [29]) Sejam K um espaço métrico compacto, $K_0 \subset K$ um conjunto fechado, X um espaço de Banach, $\varphi \in C(K_0, X)$ e defina o espaço métrico completo M por*

$$M = \{g \in C(K, X) : g(s) = \varphi(s), \ se \ s \in K_0\},$$

com a distância usual d. Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e defina

$$c = \inf_{g \in M} \max_{s \in K} I(g(s)), \qquad c_1 = \max_{\varphi(K_0)} I$$

. Se $c > c_1$ então, para cada $\epsilon > 0$ e cada $f \in M$ tal que,

$$\max_{s \in K} I(f(s)) \leq c + \epsilon,$$

existe um $v \in X$ tal que,

$$c - \epsilon \leq I(v) \leq \max_{s \in K} I(f(s)),$$

$$d(v, f(K)) \leq \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$|I'(v)| \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Corolário B.1 *(Veja [27]) Sejam (x_n) uma sequência limitada e c uma constante. Suponha que*

$$\liminf_{n \to \infty} x_n > c,$$

então, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\forall \ n > n_1 \Rightarrow x_n > c.$$

Analogamente, se $\limsup_{n \to \infty} x_n < d$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$x_n < d, \ \forall \ n > n_2$$

Lema B.2 *(P.L. Lions)(Veja [37]) Suponha (u_n) limitada em $W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e seja $R > 0$, tal que,*

$$\liminf_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 = 0.$$

Então, $u_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, com $2 < q < 2^*$.

Definição B.6 *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível c, que denotamos por $(P.S)_c$, relacionada a I se*

$$I(u_n) \to c \qquad e \qquad I'(u_n) \to 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição $(P.S)_c$ se toda sequência $(P.S)_c$ possui um subsequência convergente em X.

Teorema B.20 *(Teorema do Passo da Montanha)(Veja [38]) Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, *com* $I(0) = 0$, *Suponha que:*

(i) *Existem constantes* $\alpha, \rho > 0$, *tais que,* $I(u) \geq \alpha$, $\forall\, \alpha \in X$, *com* $||u|| = \rho$,

(ii) *Existe* $e \in X$, *tal que,* $I(e) < 0$.

Então, existe uma sequência $(u_n) \subset X$, *tal que,*

$$I(u_n) \to c \ \ em \ \ \mathbb{R} \quad e \quad I'(u_n) \to 0 \ \ em\, X',$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{\theta \in [0,1]} I(\gamma(\theta))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \colon \gamma(0) = 0 \ e\, I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Teorema B.21 *(Veja [38]) Seja* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Suponha que* $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então, existem uma subsequência* $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ *e uma função* $h \in L^p(\Omega)$ *tais que,*

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \ q.t.p \ em\, \Omega$$

e

$$|u_{n_k}(x)| \leq h(x) \ q.t.p \ em\, \Omega, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Bibliografia

[1] Acerbi and Mingione, *Regularity results for electrorheological fluids: stationary case,* C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 2002

[2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Alves, C.O. and Corrêa, F.J.S.A., *On existence of solutions for a class problem involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 2001.

[4] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A. and Ma, T.F., *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math Appel., 2005.

[5] Antontsev and Shmarev, *Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions* Nonl. Anal. T.M.A, 2006

[6] Bartle, Robert G., *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[7] Brézis, Haïm, *Análisis Funcional*, Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[8] Chambolle and Lions, P.L. *Image recovery via total variational minimization and ralatel problemas* Numer. Math. 1997.

[9] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M., *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74(2006), 263-277.

[10] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M., *On the existence of positive solution for an elliptic equation of Kirchhoff-type via Moser iteration method*, Boundary Value Problems, Vol. 2006(2006), Article ID 79679, 1-10.

[11] Corrêa, F. J. S. A., Figueiredo, G. M., and Lopes, F.P.M., *On the existence of positive solutions for a nonlacal elliptic problem involving the p-Laplacian and the generalized Lebesgue Space* $L^{p(x)}(\Omega)$, Differential and Integral Equations, v. 21, p. 305-324, 2008.

[12] Corrêa, F. J. S. A. and Lopes, F.P.M., *Positive solutions for a class nonlocal elliptic systems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol. 14, 67-77, 2007

[13] Corrêa, F.J.S.A. and Lopes, F.P.M., *Positive solutions for a class of nonlocal elliptic systems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol 14, N. 2(2007),67-77.

[14] Corrêa, F.J.S.A. and Menezes, S.D.B., *Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2004(2004).N. 19, 1-10.

[15] Corrêa, F.J.S.A. end Menezes, S.D.B., *Positive solutions for a class of nonlocal problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Volume in honor of Djairo G. de Figueiredo, Vol. 66(2005), 195-206.

[16] Deng, W., Duan, Z. and Xie, C., *The blow-up rate for a degenerate parabolic equation with a nonlocal source*, J. Math. Anal. Appl., 264(2001), 577-597.

[17] Deng, W., Li, Y. and Xie, C., *Existence and nonexistence of global solutions of some nonlocal degenerate parabolic equations*, Appl. Math. Lett.,16(2003), 803-808.

[18] Deng, W., Lie, Y. and Xie, C., *Blow-up and global existence for a nonlocal degenerate parabolic system*, J. Math. Anal. Appl., 227(2003), 199-217.

[19] Di Benedeto, E., $C^{1,\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal.,7, N8(1983), 827-850.

[20] Evans, Laurence C.,*Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[21] Fan, X.L. and Zhao, D., *On the generalized Orlicz-Sobolev space* $W^{k,p(x)}(\Omega)$, J. Gansu Edu c. College 12 (1) (1998) 1–6.

[22] Guimarães, Cicero J., *Sobre os espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados e aplicações envolvendo o* $p(x)-$*Laplaciano*, Dissertação de mestrado, (UFCG 2006).

[23] Guo, Z., *Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems*, Nonlinear Anal.Vol,18, N.10(1992), 957-971.

[24] Kirchhoff, G., Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[25] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.

[26] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[27] Lima, Elon L., *Curso de Análise Vol.2*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[28] Ma, T.F., *Remarks on an elliptic equations of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal. 63(2005),1967-1977.

[29] Mawhin, J. and Willem, M., *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*???

[30] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School of Nonlinear Funtional Analysis and Applications to Differential equations, ICTP-Trieste-Italia(1997).

[31] Perera K. and Zhang Z., *Nontrivial solutions of Kirchhoff type problems via the Yang index*, J. Differential Equations, 221(2006), N.1, 246-255.

[32] Souplet, P., *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source*, J. Differential Equations, 153(1999), 374-406.

[33] Tolksdorff, P., *Regularity for a mare general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, 51(1984), 126-150.

[34] Zhang Z. and Perera, K. *Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flows*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 317, 2,(2006), 456-463.

[35] Rabinowitz, P.H.,*On a class of nonlinear Schrödiger equations*, Z. Angew Math Phys, Vol. 43, 270-291, 1992

[36] Rabinowitz P.H, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems,* J.Funct. Anal. 7(1971), 487-513.

[37] Zelati, V. C., and Rabinowitz, P. H., *Homoclinic type solutions for a classe semilinear elliptic PDE on* $\mathbb{R}^N$, Comm. on Pure and Appl. Math. Vol. 45, 1217-1269, 1992.

[38] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.