UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Elifaleth Rego Sabino**

# Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev

**BELÉM**

**2010**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Elifaleth Rego Sabino**

# Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

**ORIENTADORA: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento**

**BELÉM**

**2010**

Sabino, Elifaleth Rego

Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev / (Elifaleth Rego Sabino); orientadora, Rúbia Gonçalves Nascimento.- 2010.

121 f. il. 28cm

Dessertação (Mestrado)- Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém ,2010

1. Equações Diferenciais Elípticas.I.Nascimento, Rúbia Gonçalves, orient. II.Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título

CDD 22. ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Elifaleth Rego Sabino**

# Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 24 de fevereiro de 2010.

Conceito:_______________

Banca Examinadora

_______________________________________

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Rúbia Gonçalves Nascimento (Orientadora)
PPGME - UFPA

_______________________________________

Prof$^{o}$. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
PPGME - UFPA

_______________________________________

Prof$^{o}$. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
DM-UFSCar

_______________________________________

Prof$^{o}$. Dr. Valcir João da Cunha Farias
PPGME - UFPA

# Dedicatória

Á minha família.

# Agradecimentos

À Deus, pela saúde e força.

À minha família em especial a minha irmã, Elizabeth Sabino, por todo o apoio e carinho.

À professora Rúbia Gonçalves Nacimento, por todo apoio, orientação e compreensão dado durante o mestrado.

Ao Professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, pelo apoio, e sugestão e compreensão dado durante o período da Pós-Graduação, e disposição nesta tarefa de me avaliar fazendo parte da banca examinadora.

Aos colegas da pós-graduação (UFPa).

Aos funcionários do ICEN/ UFPa.

Aos amigos, que estiveram comigo nas horas difíceis.

A Capes, pelo apoio financeiro.

# Resumo


Nesta dissertação estudaremos a existência, multiplicidade e regularidade de soluções, para a seguinte classe de problemas elípticos.

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x) H(u-a) u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais, $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ e $H$ são funções satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo deste estudo e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$. Utilizaremos métodos variacionais aplicados a funcionais localmente lipschitziano, usaremos Análise Convexa, Cálculo Subdiferencial, Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano e o Princípio Variacional de Ekeland.

# Abstract


In this paper we study the existence, multiplicity and regularity of solutions, we use variational methods applied to locally lipschitziano functionals, for the following class of elliptic problems

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x) H(u-a) u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where $\lambda, a > 0$ are parameters , $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ and $H$ is the function Heaviside, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ is the critical Sobolev exponent with $N \geq 3$ and $0 \leq q < 2^* - 1$.

# *Conteúdo*

# *Introdução*

Neste trabalho vamos considerar a seguinte classe de problemas elípticos

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0,\ a \in \mathbb{R}$ são parâmetros, $h$ é uma função não negativa e integrável em $\mathbb{R}^N$, $H$ é a função Heaviside, isto é,

$$H(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ x \leq 0 \\ 1 \ \ se \ \ x > 0, \end{cases}$$

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$ e $\Delta$ é o **operador Laplaciano** dado por $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

O espaço que vamos trabalhar será o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o qual é definido por

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

que é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação a norma

$$\|u\| = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u.\nabla v dx.$$

Essa classe de problemas, denominado problemas com não linearidade descontínua vem, ao longo dos últimos anos, sendo estudado por vários autores e várias técnicas foram aplicadas para estudar os mesmos, tais como: técnicas variacionais para funcionais não diferenciáveis, sub e super solução, bifurcação global etc.

Particularmente, o problema (P) apresenta algumas combinações que, ao menos para o nosso conhecimento, parece ser relevantes. De fato, no problema (P) temos a presença do operador laplaciano que aparece em várias áreas da ciência como Astronomia, Glaciologia e Engenharia do Ambiente. Além disso, problemas envolvendo não linearidade descontínua aparecem em alguns ramos relacionados a física-matemática como por exemplo: são modelos para a condutividade do calor em meios elétricos, modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que problemas com não linearidade descontínua aparecem em situações relevantes da Física do Plasma. Ver em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] e suas referências.

O estudo do problema $(P)$, foi baseado no artigo de Alves, Bertone e Gonçalves [2], onde os autores usaram técnicas variacionais para funcionais não diferenciáveis afim de estudar sobre existência, multiplicidade e regularidade de soluções.

As soluções do problema $(P)$ serão obtidas através do estudo do funcional energia $I_{\lambda,a} : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, associado a ele, o qual é dado por

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx$$

onde $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)dt$, $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ é uma função não decrescente e $u^+ = max\{0, u\}$.

Observamos que esse funcional não é diferenciável, pois a parcela $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx$ não é diferenciável, uma vez que o problema (P) envolve a função Heaviside, o qual é descontínua.

Dessa forma, foi desenvolvida por Chang [14] a teoria dos pontos críticos para funcionais não diferenciáveis, mais especificamente Chang desenvolveu a teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos e essa teoria foi baseada na Análise Convexa e no Cálculo Subdiferencial devido a Clarke [15].

Para uma melhor compreensão, esta dissertação está assim desenvolvida:

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados da teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos devido a Chang [14], onde seguindo a dissertação de [23] e a tese de [10] abordaremos algumas definições, observações e propriedades importantes, que serão úteis para a demonstração dos teoremas e lemas apresentados em capítulos posteriores.

No capítulo 2 iniciaremos apresentando algumas preliminares onde enunciaremos e demonstraremos lemas que serão muito úteis na demonstração do resultado principal.

Os principais resultados deste capítulo são:

***Lema 2.1*** *Seja $h$ satisfazendo a hipótese (H). Então $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$. Além disso, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha nas seguintes condições:*

*ii)* $0 \leq q \leq 1$, $a > 0$ *e* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *para algum* $\lambda_0 > 0$

*ii)* $1 < q < 2^* - 1$, $a > 0$ *e* $\lambda > 0$.

***Lema 2.2*** *Seja $h$ satisfazendo a hipótese $(H)$, $0 \leq q < 2^* - 1$. Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w \in \partial\Phi(u)$ então*

$$w(x) \in \big[h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)\big] \qquad q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}$$

*onde* $\overline{f}(u) = \lim_{\delta\to 0^+} f(t+\delta)$, $\underline{f}(u) = \lim_{\delta\to 0^+} f(t-\delta)$ *e* $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.

***Lema 2.3*** *Seja $h$ satisfazendo a hipótese $(H)$ e $0 \leq q \leq 2^* - 1$. Então $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ desde que satisfaça as condições abaixo :*

*i)* $0 \leq q \leq 1$ *e* $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$

*ii)* $1 < q < 2^* - 1$ *e* $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

***Lema 2.4*** *Seja $h$ satisfazendo $(H)$ e $0 \leq q < 2^* - 1$. Se, além disso, $\rho > 0$ é a constante da geometria do passo da montanha dado pelo Teorema 1.1 e no Lema 2.1, então o nível $c$ do Passo da Montanha satisfaz:*

*i)* $\rho \leq c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{1}{N}} + M_\lambda$ *para* $0 \leq q \leq 1$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *e* $a \in (0, a_{*1})$ *para algum* $\lambda_1 > 0$ *e* $a_{*1} > 0$

*ii)* $\rho \leq c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{1}{N}}$ *para* $1 < q < 2^* - 1$, $\lambda, a > 0$.

No capítulo 3 mostraremos a existência de três soluções para o problema $(P)$ usando o Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitzianos ( uma versão devido a Chang) e o Princípio Variacional de Ekeland.

O resultado principal deste capítulo e da dissertação é dado pelo seguinte resultado:

***Teorema 3.3*** *Seja $h$ satisfazendo $(H)$ e assuma $0 \leq q < 2^* - 1$, $\lambda\ a > 0$. Então,*

*i) Se $0 \leq q \leq 1$ existem $\lambda_* > 0$ e $a_* > 0$, tal que para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e $a \in (0, a_*)$ existe uma função positiva $u_i = u_i(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N), i = 1, 2$ satisfazendo*

$(i)_1$ $-\triangle u_i = \lambda h(x) H(u_i - a) u_i^q + u_i^{2^*-1}$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$

$(i)_2$ $med(\{u_i > a\}) > 0$

$(i)_3$ $I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1)$

*ii) Se $1 < q < 2^* - 1$, então existe uma função positiva $u_0 = u_0(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$(ii)_1$ $-\triangle u_0 = \lambda h(x) H(u_0 - a) u_0^q + u_0^{2^*-1}$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$

$(ii)_2$ $med(\{u_0 > a\}) > 0$

$(ii)_3$ $I_{\lambda,a}(u_0) > 0.$

Para completar este estudo colocamos nos apêndices alguns resultados e demonstrações que serão usados no corpo desta dissertação.

No apêndice A colocamos alguns resultados que envolvem a teoria de análise funcional, medida e integração e sobre espaços de Sobolev utilizados em nosso estudo. No apêndice B enunciaremos alguns resultados básicos que estão sendo usados na dissertação.

Para uma maior clareza deste trabalho repetiremos o problema e os enunciados dos principais resultados nos seus respectivos capítulos.

**Notações:**

- $\|.\| = \|.\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$

- $|.|_{2^*} = |.|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$

- $|.|_* = |.|_{(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*}$

- $|.|_\alpha = |.|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}$

- $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ : denota o espaço dos funcionais localmente lipschitzianos

- $med(A)$ : é a medida de Lebesgue do conjunto A

- $\rightharpoonup$: convergência fraca.

- $\langle ., . \rangle$: par de dualidade.

- $u = u(x)$.

- $v = v(x)$.

- $(u > a)$: o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) > a\}$

Capítulo

1

# Resultados Abstratos

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades envolvendo funcionais localmente lipschitziano e Gradiente Generalizado da teoria dos pontos críticos desenvolvida por Clarke [15] e Chang [14], colocaremos algumas definições e propriedades importantes que serão muito úteis no desenvolvimento desta dissertação.

**Definição 1.1** *Seja $X$ um espaço de Banach e $I : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que $I$ é um funcional localmente lipschitziano ($I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de $u$ e uma constante $k = k_V > 0$ tal que*

$$\|I(v_2) - I(v_1)\| \leq k\|v_2 - v_1\|, \quad v_i \in V, i = 1, 2. \tag{1.1}$$

**Definição 1.2** *A Derivada Direcional Generalizada de um funcional $I : X \to \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $I^0(u; v)$ é definida por*

$$I^0(u; v) = \limsup_{h \to 0 \ \lambda \downarrow 0} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}, \quad v \in X.$$

**Definição 1.3** *O Gradiente Generalizado de $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $u \in X$ é o conjunto $\partial I(u) \subset X^*$, onde $X^*$ é o dual topológico de $X$, definido por*

$$\partial I(u) = \{\mu \in X^*; I^0(u; v) \geq \langle \mu, v \rangle_{X^* \times X}, \ \forall \ \ v \in X\}$$

*onde $\langle , \rangle$ é o par de dualidade entre $X^*$ e $X$.*

Desde que $I^0(u; 0) = 0$, segue-se que $\partial I(u) = \partial I^0(u; 0)$.

Uma propriedade importante do gradiente generalizado é a seguinte: Se $u \in X$ então $\partial I(u)$ é um conjunto convexo, não vazio e fraco*-compacto.

Defininos

$$m(u) = \min\{|w|_*; w \in \partial I(u)\}.$$

Em particular, como $\partial I(u)$ é o conjunto convexo, não vazio e fraco*-compacto existe $w \in \partial I(u) \subset X^*$ tal que

$$m(u) = \min\{|w|_*; w \in \partial I(u)\}.$$

Note que $\partial I(u) = \{I'(u)\}$ quando $I \in C^1(X;\mathbb{R})$.

**Definição 1.4** *Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível c $((PS)_c)$ se*

onde $m(u_n) = \min\{|\omega_n|_*; \omega \in \partial I(u_n)\} \subset \mathbb{R}$.

**Definição 1.5** *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência fortemente convergente.*

A seguir iremos mostrar algumas propridades da Derivada Direcional Generalizada, as quais podem também ser encontradas em [23]

- $(A_1)$ $I^0(u;.) : X \to \mathbb{R}$ é subaditiva e homôgenea positiva, isto é, para todo $u \in X$ temos

  $(a)$ $I^0(u; v_1 + v_2) \leq I^0(u; v_1) + I^0(u; v_2),\ \forall\ v_1, v_2 \in X$

  $(b)$ $I^0(u; kv) = kI^0(u; v),\ \forall\ v \in X, k \geq 0$

- $(A_2)$ $|I^0(u; v)| \leq k\|v\|$, onde $k$ satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$.

- $(A_3)$ $|I^0(u; v) + I^0(u; t)| \leq k\|v - t\|$, para todo $v, t \in X$, isto é, $I^0(u;.) : X \to \mathbb{R}$ é uma função $Lip_{loc}(X,\mathbb{R})$, com constante $k$.

- $(A_4)$ $|I^0(u : v)| \leq k\|v\|$, onde $k$ satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto $V_u$, para cada $u \in X$.

**Demonstração:** Vamos mostrar a propriedade $(A_3)$. As $A_1, A_2$ *e* $A_4$ estam demonstradas em [23]:

Observe que de $(A_1)$

$$I^0(u;v) = I^0(u;v-t+t) \leq I^0(u;v-t) + I^0(u;t)$$

e

$$I^0(u;t) = I^0(u;t-v+v) \leq I^0(u;t-v) + I^0(u;v).$$

Assim,

$$I^0(u;v) - I^0(u;t) \leq I^0(u;v-t) \leq |I^0(u;v-t)|$$

e por $(A_2)$

$$I^0(u;v) - I^0(u;t) \leq k\|v-t\|. \tag{1.2}$$

Por outro lado,

$$I^0(u;v) - I^0(u;t) \leq I^0(u;t-v) \leq |I^0(u;t-v)|$$

donde segue de $(A_2)$

$$I^0(u;t) - I^0(u;v) \leq k\|t-v\| = \|v-t\|. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3)

$$|I^0(u;v) - I^0(u;t)| \leq k\|v-t\|.$$

**Lema 1.1** *Dados* $u, v \in X$, *tem-se* $I^0(u;v) = \max\{\langle \mu, v\rangle\,; \mu \in \partial I(u)\}$.

**Demonstração:** De fato, dados $u, v \in X$, defina o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} \gamma_u : \langle v \rangle &\to \mathbb{R} \\ w = tv &\mapsto \langle \gamma_u, w \rangle = tI^0(u; v). \end{aligned}$$

Afirmamos que $\gamma_u$ é um funcional linear, pois dado $w_1, w_2 \in \langle v \rangle$, com $w_1 = t_1 v$ e $w_2 = t_2 v$ e $c \in \mathbb{R}$, temos $w_1 + cw_2 = (t_1 + ct_2)v$, ou seja,

$$\langle \gamma_u, (w_1 + cw_2) \rangle = (t_1 + ct_2) I^0(u; v),$$

isto é,

$$\langle \gamma_u, (w_1 + cw_2) \rangle = t_1 I^0(u; v) + ct_2 I^0(u; v) = \langle \gamma_u, w_1 \rangle + c \langle t_2, w_2 \rangle .$$

Por um raciocínio análogo usado no Lema A.3 (apêndice A) mostra-se que

$$\langle \gamma_u, w \rangle \leq I^0(u; w), \ \forall \ w \in \langle v \rangle .$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach (apêndice A) e de $(A_1)$, que existe um funcional linear $\gamma_u^*$ definido em $X$ tal que

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle \leq I^0(u; w), \ \forall \ w \in X \tag{1.4}$$

e

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle = tI^0(u; v), \ \forall \ tv \in \langle v \rangle ,$$

assim

$$\langle \gamma_u^*, v \rangle = I^0(u; v). \tag{1.5}$$

De (1.5) e (1.4)

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle \leq k|w|, \ \forall \ w \in X,$$

mostrando que $\gamma_u^*$ é um funcional linear contínuo, isto é, $\gamma_u^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1.4), que $\gamma_u^* \in \partial I(u)$. De (1.5)

$$\langle \gamma_u^*, v\rangle \leq \langle \gamma, v\rangle \,, \ \forall \ \gamma \in \partial I(u).$$

Logo, $\langle \gamma_u^*, v\rangle$ é uma cota superior do conjunto $\{\langle \gamma, v\rangle \,; \gamma \in \partial I(u)\}$ e $\langle \gamma_u^*, v\rangle \in \{\langle \gamma, v\rangle \,; \gamma \in \partial I(u)\}$, pois $\gamma_u^* \in X^*$ e satisfaz a desigualdade (1.4).

Sendo assim, podemos concluir que

$$I^0(u; v) = \langle \gamma_u^*, v\rangle = \max\{\langle \gamma, v\rangle \,; \gamma \in \partial I(u)\}, \quad \forall v \in X,$$

demonstrando o Lema. ■

**Lema 1.2** *Para cada $u \in X$, existe $\xi_0 \in \partial I(X)$ tal que*

$$|\xi_0|_* = \min\{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\}.$$

**Demonstração:** Para mostrar este lema, basta mostrar que o ínfimo do conjunto

$$A = \{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido. Primeiramente, observe que o conjunto $A$ é limitado inferiormente, pois

$$|\xi|^* \geq 0, \ \forall \ \xi \in \partial I(u).$$

Definamos

$$c_I(u) - \inf\{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\}.$$

Logo, $c_I(u)$ é ponto aderente do conjunto $A$, e assim existe uma sequência $(\xi_n) \subset \partial I(u)$ tal que

$$|\xi|^* \to c_I(u). \tag{1.6}$$

Note que $(\xi_n) \subset \partial I(u) \subset \overline{B}_{k(u)}(0) \subset X$, onde $\overline{B}_{k(u)}(0)$ compacto na topologia $fraca^*$. Segue, pelo fato de $(\xi_n) \subset \overline{B}_{k(u)}(0)$, que existe uma subsequência $(\xi_{n_j})$ de $(\xi_n)$ e $\xi_0 \in X^*$ tal que

$$\xi_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} c_I(u). \tag{1.7}$$

Sendo $\partial I(u)$ fechado $fraca^*$, concluímos que $\xi_0 \in \partial I(u)$. Defina agora a seguinte função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \xi & \longmapsto & \varphi(\xi) = |\xi|_*. \end{array}$$

De (1.7)

$$\liminf_{n \to +\infty} \varphi(\xi_n) \geq \varphi(\xi), \tag{1.8}$$

para todo sequência $(\xi_n) \subset X^*$ tal que

$$\xi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \ em \ X^*.$$

De (1.6), (1.7) em (1.8), temos

$$c_I(u) = \liminf_{n_j \to +\infty} |\xi_{n_j}|_* \geq |\xi_0|_*.$$

Donde segue-se, pelo fato de $c_I(u) = \inf A$, que

$$c_I(u) = |\xi_0|_*,$$

pois $\xi_0 \in \partial I(u)$, mostrando que o ínfimo do conjunto $A$ é atingido. ■

Como foi dito na introdução, na demonstração do resultado principal desta dissertação usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano, o qual foi demonstrado po Chang [14], usando uma variante apropriada do Lema de Deformação, tal resultado pode ser encontrado também em [18].

A seguir enunciaremos tal resultado:

**Teorema 1.1** *(Teorema do Passo da Montanha ) (ver [2]) Seja* $X$ *um espaço de Banach e* $I : X \to \mathbb{R}$ *um funcional* $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ *tal que* $I(0) = 0$ *e suponhamos que*

$(i)$ *Existem constantes* $\alpha, \rho > 0$ *tais que* $I(u) \geq \rho$ *se* $\|u\| = \alpha$.

$(ii)$ *Existe* $e \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \quad \|e\| > \alpha$ *tal que* $I(e) \leq 0$.

*Seja*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I((\gamma(t)),$$

*onde* $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0 \text{ } e \text{ } \gamma(1) = e\}$.

*Então,* $c \geq \rho$ *e existe alguma sequência* $(u_n) \in X$ *tal que*

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad m(u_n) \longrightarrow 0.$$

Capítulo

2

# Sobre um problema elíptico com não linearidade descontínua

Neste capítulo, enunciaremos e demonstraremos alguns lemas, nos quais usaremos técnicas variacionais associadas a funcionais localmente lipschitzianos, afim de obter existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o seguinte problema:

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais, $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função não negativa e integrável em $\mathbb{R}^N$, satisfazendo a seguinte condição

$$h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \qquad onde\ \ \alpha = \frac{2^*}{2^* - (q+1)}, \tag{H}$$

$H$ é a função Heaviside, a qual recordamos que é dada por

$$H(x) = \begin{cases} 0 \ \ se \ \ x \leq 0 \\ 1 \ \ se \ \ x > 0, \end{cases}$$

e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$.

Para obtermos existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o problema (P), vamos fazer a distinção de dois casos para o expoente $q$, a saber: $0 \leq q \leq 1$ e $1 < q < 2^* - 1$.

Como foi dito na introdução, vamos trabalhar com o espaço de Hilbert

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ e o funcional energia $I_{\lambda,a} : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, associado ao problema $(P)$, o qual é definido por

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda\Phi(u) - \Psi(u), \tag{2.1}$$

onde $Q, \Phi$ $e$ $\Psi$ são funcionais dados por

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx \ e \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx,$$

e $F(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)dt$, com $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ sendo função não decrescente e $u^+ \equiv \max\{u, 0\}$.

Desde que estamos trabalhando com o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ recordemos que a única imersão que temos é a seguinte imersão contínua

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

e a melhor constante desta imersão é denotada por $S$ e definida por

$$S = \inf\left\{\frac{\int |\nabla u|^2 dx}{|u|_{2^*}^2}; u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), u \not\equiv 0\right\}.$$

Para $0 \le q \le 1$, vamos considerar $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$g(t) = \frac{S}{N}t^2 + \lambda\Big(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1}\Big)|h|_\alpha t^{q+1}.$$

Fazendo $M_\lambda = \min\limits_{t\in[0,\infty)} g(t)$ notemos que

$$M_\lambda = \begin{cases} -\widehat{M}\lambda^{\frac{2}{1-q}} & se \quad 0 \le q < 0 \\ 0 & se \quad q = 1 \end{cases}$$

onde $\widehat{M}$ é uma constante positiva dependente de $q, |h|_\alpha$ $e$ $N$, $M_\lambda \to 0$ quando $\lambda \to 0$.

## 2.1 Lema 2.1

Nesta seção vamos mostrar que o funcional $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e satisfaz a geometria do passo do montanha para funcionais $Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Lema 2.1** *Seja h satisfazendo a hipótese (H). Então* $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *para cada* $\lambda, a > 0$. *Além disso,* $I_{\lambda,a}$ *satisfaz a geometria do passo da montanha nas seguintes condições:*

*(i)* $0 \leq q \leq 1$, $a > 0$ *e* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *para algum* $\lambda_0 > 0$

*(ii)* $1 < q < 2^* - 1$, $a > 0$ *e* $\lambda > 0$.

**Demonstração**: Primeiramente, vamos mostrar que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$. De fato, recordemos que

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda\Phi(u) - \Psi(u)$$

onde

$$Q(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx \ e \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx.$$

Consideremos $V = V_{\overline{u}} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma vizinhança de $\overline{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, para todo $u, v \in V$ temos

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(v)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_0^u f(t)dt\Big)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_0^v f(t)dt\Big)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt\Big)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt\Big)dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt - \int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt\Big)dx\right|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |\Phi(u)-\Phi(v)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(-\Big(\int_u^0 H(t-a)(t^+)^q dt + \int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt\Big)\Big)dx\right| \\ &= \left|-\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\Big(\int_u^v H(t-a)(t^+)^q dt\Big)dx\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\left|\int_u^v H(t-a)(t^+)^q dt\right|dx. \end{aligned}$$

Sendo $H(t-a)\le 1$ obtemos,

$$\begin{aligned} |\Phi(u)-\Phi(v)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_u^v |(t^+)^q|dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{|t|^{q+1}}{q+1}\bigg|_u^v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\frac{|v|^{q+1}-|u|^{q+1}}{q+1}dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Considere $f:[u(x),v(x)]\to\mathbb{R}$ contínua e derivável em $(u(x),v(x))$ então pelo Teorema do Valor Médio (apêndice (B)) existe $\xi\in(u(x),v(x))$ tal que

$$f'(\xi)=\frac{f(v(x))-f(u(x))}{v(x)-u(x)}. \tag{2.3}$$

Tomando $f(t)=|t|^{q+1}$, de (2.3) temos que

$$(q+1).|\xi|^q=\frac{|v(x)|^{q+1}-|u(x)|^{q+1}}{v(x)-u(x)}.$$

Assim,

$$(v(x)-u(x)).|\xi|^q=\frac{|v(x)|^{q+1}-|u(x)|^{q+1}}{q+1}.$$

Substituindo em (2.2) teremos

$$\begin{aligned}|\Phi(u)-\Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(v(x)-u(x)).|\xi|^q dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v(x)-u(x)||\xi|^q dx.\end{aligned}$$

Tomando $\xi(x)^q \leq \max\{|u(x)|^q - |v(x)|^q\} = |w(x)|^q$ obtemos,

$$|\Phi(u)-\Phi(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|w(x)|^q|v(x)-u(x)|dx.$$

Desde que $h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N), w \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$ e $(v-u) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ com $\alpha \leq \frac{2^*}{q} \leq 2^*$ e $\frac{1}{\alpha} = \frac{q}{2^*} = \frac{1}{2^*} = 1$, e $h.w.(v-u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pela desigualdade de Hölder (apêndice A) temos que

$$\begin{aligned}|\Phi(u)-\Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|w(x)|^q|v(x)-u(x)|dx\\ &\leq |h|_{\alpha}|w|_{2^*}^q|v-u|_{2^*}.\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 3$ segue-se,

$$|v-u|_{2^*} \leq k\|v-u\|.$$

Assim, existe uma vizinhança limitada, $V = V_{\overline{u}} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de $\overline{u}$ tal que

$$|\Phi(u)-\Phi(v)| \leq k|h|_{\alpha} \sup_{w\in V}(|w(x)|_{2^*}^q)\|v-u\| \leq \overline{K}\|v-u\|,$$

onde $\overline{K} = k|h|_{\alpha}\sup_{w\in V}(|w(x)|_{2^*}^q)$.

Assim, $\Phi \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ e desde que $Q, \Psi \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ (apêndice A) segue que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$.

Mostraremos agora que $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha. De fato, temos que

$$\begin{aligned}I_{\lambda,a}(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^{2^*}dx\\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dtdx - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Como $H \leq 1$, temos

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{q+1} dx.$$

Desde que $u^{q+1} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq \alpha \leq \frac{2^*}{q+1} < \infty$ então, $h.u^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, logo usando a desiguadade de Hölder obtemos

$$\frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{q+1} dx \leq \frac{\lambda}{q+1} |h|_{\alpha} |u|_{2^*}^{q+1}.$$

Assim,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{q+1} dx \leq \frac{\lambda}{q+1} |h|_{\alpha} |u|_{2^*}^{q+1}. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.4) segue-se que

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}|h|_{\alpha}|u|_{2^*}^{q+1} - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}. \tag{2.6}$$

Agora, desde que $S$ é a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$S \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}$$

assim,

$$|u|_{2^*} \leq S^{-\frac{1}{2}} \|u\|$$

daí,

$$|u|_{2^*}^{q+1} \leq S^{-\frac{q+1}{2}} \|u\|^{q+1} \tag{2.7}$$

e

$$|u|_{2^*}^{2^*} \leq S^{-\frac{(2^*)}{2}} \|u\|^{2^*}. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) em (2.6) resulta que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}|h|_\alpha S^{\frac{-(q+1)}{2}}\|u\|^{q+1} - \frac{1}{2^*}S^{\frac{-(2^*)}{2}}\|u\|^{2^*} \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}|h|_\alpha S^{\frac{-(q+1)}{2}}\|u\|^{q-1}\|u\|^2 - \frac{1}{2^*}S^{\frac{-(2^*)}{2}}\|u\|^{2^*-2}\|u\|^2 \\ &\geq \|u\|^2\bigg(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{q+1}|h|_\alpha S^{\frac{-(q+1)}{2}}\|u\|^{q-1} - \frac{1}{2^*}S^{\frac{-(2^*)}{2}}\|u\|^{2^*-2}\bigg). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\delta = \frac{S^{\frac{-(q+1)}{2}}}{q+1}|h|_\alpha \qquad e \qquad \beta = \frac{S^{\frac{-(2^*)}{2}}}{2^*}.$$

temos

$$I_{\lambda,a}(u) \;\; \geq \;\; \|u\|^2\bigg(\frac{1}{2} - \lambda\delta\|u\|^{q-1} - \beta\|u\|^{2^*-2}\bigg).$$

Agora vamos fazer a distinção entre os dois casos abaixo:

**Caso** (i) $0 \leq q \leq 1$ *e* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ para algum $\lambda_0 > 0$.

Considere $p(s) = \frac{1}{2} - \beta s^{2^*-2}$ e observe que $p(s) > \frac{1}{4}$ se $s \leq r \leq (\frac{1}{4\beta})^{\frac{N-2}{4}}$. De fato, note que

$$\frac{1}{2} - \beta s^{2^*-2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow -s^{2^*-2} > \frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{2} = \frac{-1}{4\beta} \Leftrightarrow s^{2^*-2} < \frac{1}{4\beta} \Leftrightarrow s < \big(\frac{1}{4\beta}\big)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Desde que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ obtemos

$$s < \left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}}.$$

Assim,

$$p(s) - \lambda\delta s^{q-1} > \frac{1}{8} \;\; se \;\; \lambda \leq \lambda_0 = \frac{1}{8\delta r^{q-1}}.$$

Observe que

$$p(s) - \lambda\delta s^{q-1} > \frac{1}{4} - \lambda\delta\left(\left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}}\right)^{q-1} = \frac{1}{4} - \lambda\delta\left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}(q-1)}$$

note que,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}-\lambda\delta\left(\left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{(N-2)}{4}}\right)^{q-1}>\frac{1}{8} \;&\Leftrightarrow\; -\lambda\delta\left(\left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{(N-2)}{4}}\right)^{q-1}>-\frac{1}{8}\\
&\Leftrightarrow\; -\lambda\delta r^{q-1}>-\frac{1}{8}\\
&\Leftrightarrow\; -\lambda>-\frac{1}{8\delta r^{q-1}}\\
&\Leftrightarrow\; \lambda<\frac{1}{8\delta r^{q-1}}=\lambda_0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\|u\|=r$ temos

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u) &\geq r^2\left(\frac{1}{2}-\lambda\delta r^{q-1}-\beta r^{2^*-2}\right)\\
&\geq r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8\delta r^{q-1}}\delta r^{q-1}-\beta r^{2^*-2}\right)\\
&\geq r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\beta r^{2^*-2}\right)\\
&\geq r^2\left(p(s)-\frac{1}{8}\right)\\
&\geq r^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\\
&\geq \frac{r^2}{8}.
\end{aligned}
$$

tomando $\rho=\dfrac{r^2}{8}$ temos que

$$I_{\lambda,a}(u)\geq\rho \;\textit{quando}\; \|u\|=r$$

para $\lambda\in(0,\lambda_0)$.

Agora seja $\varphi\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ fixado com $\varphi>0$.

Considere $\gamma>0$ e faça $u=\gamma\varphi$ em (2.4). Assim,

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) = \frac{\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2dx-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)\int_0^{\gamma\varphi}H(t-a)(t^+)^q dtdx-\frac{\gamma^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi^+)^{2^*}dx.$$

Desde que $H \geq 0 \ \ (-H \leq 0)$ então

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \ \ \leq \ \ \frac{\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2dx - \frac{\gamma^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi^+)^{2^*}dx$$

e como $1 < 2 < 2^*$ teremos

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \ \ \to \ \ -\infty \quad \text{quando} \quad \gamma \to +\infty.$$

Logo, existe $e = \gamma_0\varphi$ tal que

$$I_{\lambda,a}(e) \ \ < \ \ 0 \quad \text{com} \quad \|e\| > r.$$

Portanto, para $0 \leq q \leq 1$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha.

**Caso**(ii) $1 < q < 2^* - 1, \ a > 0 \ \ e \ \lambda > 0$.

Considere $p(s) = \lambda\delta s^{q-1} + \beta s^{2^*-2}$, segue que

$$p(s) \to 0$$

quando

$$s \to 0$$

assim, existe $r > 0$ tal que $p(r) < \dfrac{1}{4}$. Daí ,

$$\frac{1}{2} - p(r) > \frac{1}{4}$$

para $\|u\| = r$ assim,

$$\frac{1}{2} - p(\|u\|) > \frac{1}{4}.$$

Dessa maneira,

$$I_{\lambda,a}(u) \ \ \geq \ \ r^2\left(\frac{1}{2} - \lambda\delta r^{q-1} - \beta r^{2^*-2}\right) = r^2\left(\frac{1}{2} - p(r)\right) > \frac{r^2}{4}.$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u) > \frac{r^2}{4},$$

fazendo $\rho = \dfrac{r^2}{4} > 0$ então,

$$I_{\lambda,a}(u) > \rho, \quad \forall \quad \|u\| = r.$$

Agora seja, $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \varphi > 0$ fixado e considere $\gamma > 0$. Fazendo $u = \gamma\varphi$ em (2.4), desde que $H \geq 0 \ \ (-H \leq 0)$, segue-se que

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \ \ \leq \ \ \frac{\gamma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx - \frac{\gamma^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx.$$

Como $2 < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$ temos

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \ \ \longrightarrow \ \ -\infty \quad \text{quando} \quad \gamma \longrightarrow +\infty.$$

Portanto existe $e = \gamma_0\varphi$ tal que

$$I_{\lambda,a}(e) \ \ \leq \ \ 0 \quad \text{com} \quad \|e\| > r \ \ \text{para algum} \quad e \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \ \gamma_0 > 0.$$

Dessa forma $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha para $1 < q < 2^*$ e $a, \lambda > 0$.■

## 2.2 Lema 2.2

Nesta seção iremos enunciar e demonstrar o seguinte lema técnico, o qual é de grande importância para as seções posteriores.

**Lema 2.2** *Seja $h$ satisfazendo a hipótese $(H)$, $0 \leq q < 2^* - 1$. Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w \in \partial\Phi(u)$ então*

$$w(x) \in \big[h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)\big] \qquad q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

*onde* $\overline{f}(u) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} f(t+\delta), \ \ \underline{f}(u) = \lim\limits_{\delta\to 0^+} f(t-\delta)$ *e* $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.

**Demonstração**: Seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \mu_n \longrightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ $e$ $\delta_n \longrightarrow 0^+$ tal que

$$\Phi^0(u,v) = \limsup_{\mu_n \to 0 \ \delta_n \downarrow 0^+} \frac{\Phi(u+\mu_n+\delta_n v) - \Phi(u+\mu_n)}{\delta_n} \ \forall \ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{2.9}$$

ou seja,

$$\Phi^0(u,v) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\Phi(u+\mu_n+\delta_n v) - \Phi(u+\mu_n)}{\delta_n}, \quad \forall \ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por definição de $\Phi$ temos

$$\Phi(u+\mu_n+\delta_n v) \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u+\mu_n+\delta_n v) dx \tag{2.10}$$

e

$$\Phi(u+\mu_n) \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u+\mu_n) dx. \tag{2.11}$$

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9) obtemos

$$\Phi^0(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u+\mu_n+\delta_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u+\mu_n) dx}{\delta_n}, \ \forall \ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

logo,

$$\Phi^0(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big(F(u+\mu_n+\delta_n v) - F(u+\mu_n)\big) dx}{\delta_n}, \ \forall \ v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Podemos escrever

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \big(F(u+\mu_n+\delta_n v) - F(u+\mu_n)\big) dx$$

da seguinte maneira

$$\Phi^0(u,v) = \limsup_{n \to \infty} \left[ \int_{\{v>0\}} h(x) G_n(v(x)) dx + \int_{\{v<0\}} h(x) G_n(v(x)) dx \right] \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.12}$$

onde

$$G_n(v(x)) = \frac{1}{\delta_n}\big(F(u+\mu_n+\delta_n v) - F(u+\mu_n)\big).$$

Desde que $\mu_n \longrightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos a menos de subsequência que

$$\mu_n \longrightarrow 0 \ em \ L^{2^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Além disso,

$$\mu_n(x) \longrightarrow 0 \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Assim, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x) > 0$ obtemos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta(x) \in (u(x)+\mu_n(x), u(x)+\mu_n(x)+\delta_n(x)v(x))$ tal que

$$F'(\theta(x)) = \frac{F(u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)) - F(u(x)+\mu_n(x))}{\delta_{(n)} v(x)}.$$

Logo,

$$f(\theta(x))v(x) = \frac{F(u(x)+\mu_n(x)+\delta_n(x)v(x)) - F(u(x)+\mu_n(x))}{\delta_n v(x)},$$

ou seja,

$$G_n(v(x)) = f(\theta(x))v(x).$$

Desde que

$$u(x)+\mu_n(x) < \theta(x) < u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)$$

passando ao limite de $n \to +\infty$ e como $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ segue-se que

$$\theta(x) = u(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$G_n(v(x)) = f(u(x))v(x)$$

e sendo $f$ não decrescente, temos

$$G_n(v(x)) = f(u(x))v(x) \leq f(u(x)+\delta_n)v(x).$$

Então,

$$\limsup_{n\to\infty} h(x)G_n(v(x)) \leq h(x)\overline{f}(u(x))v(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
|h(x)G_n(v(x))| &= \left|\frac{h(x)}{\delta_n}\left[F(u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)) - F(u(x)+\mu_n(x))\right]\right| \\
&= \left|\frac{h(x)}{\delta_n}\int_0^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} H(t-a)(t^+)^q dt - \frac{h(x)}{\delta_n}\int_0^{u(x)+\mu_n(x)} H(t-a)(t^+)^q dt\right| \\
&= \frac{h(x)}{\delta_n}\left|\int_{u(x)+\mu_n(x)}^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} H(t-a)(t^+)^q dt\right|.
\end{aligned}$$

Como $H \leq 1$ obtém-se

$$\begin{aligned}
|h(x)G_n(v(x))| &\leq \frac{h(x)}{\delta_n}\int_{u(x)+\mu_n(x)}^{u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)} |t|^q dt \\
&\leq \frac{h(x)}{(q+1)}\Big[\frac{|u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)|^{q+1} - |u(x)+\mu_n(x)|^{q+1}}{\delta_n}\Big]. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = h(x)|u(x)+\mu_n(x)+t\delta_n v(x)|^{q+1}.$$

Como $g$ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então pelo Teorema do Valor Médio dado $0 < |\delta_n| < 1$, existe $\theta_n \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta_n)(1-0).$$

Observe que

$(a)$ $g(1) = h(x)|u(x)+\mu_n(x)+\delta_n v(x)|^{q+1}$

$(b)$ $g(0) = h(x)|(u(x))+\mu_n(x)|^{q+1}$

$(c)$ $g'(\theta_n) = (q+1)h(x)|u(x)+\mu_n(x)+\theta_n\delta_n v(x)|^q|\delta_n v(x)|.$

Considerando por um momento a seguinte notação $\mu_n(x) = \mu_n$ e $u(x) = u$ e $v(x) = v$ então,

$$\frac{h(x)\Big(|u+\mu_n+\delta_n v|^{q+1} - |u+\mu_n|^{q+1}\Big)}{(q+1).|\delta_n|} \quad = \quad h(x)|u+\mu_n+\theta_n\delta_n v|^q|v|. \tag{2.14}$$

Substituindo (2.14) em (2.13) obtemos

$$|h(x)G_n(v(x))| \quad \leq \quad h(x)|u(x)+\mu_n(x)+\theta_n\delta_n v(x)|^q|v(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|u(x)+\mu_n(x)+\theta_n\delta_n v(x)|^q &\leq (3\max\{u(x),\mu_n(x),\theta_n\delta_n v(x)\})^q \\
&\leq 3^q\max\{u(x)^q,\mu_n(x)^q,(\theta_n\delta_n v(x))^q\} \\
&\leq 3^q u(x)^q + 3^q\mu_n(x)^q + 3^q(\theta_n\delta_n v(x))^q \\
&\leq 3^q(|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |\theta_n\delta_n v(x)|^q) \\
&= 3^q(|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |\theta_n|^q|\delta_n|^q|v(x)|^q).
\end{aligned}$$

Como $\theta_n \in (0,1)$ e $0 < |\delta_n| < 1$ então $|\theta_n||\delta_n| < 1$, implicando que $|\theta_n|^q|\delta_n|^q < 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
|h(x)G_n(v(x))| &\leq 3^q h(x)(|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |v(x)|^q)|v(x)| \\
&= 3^q h(x)(|u(x)|^q|v(x)| + |\mu_n(x)|^q|v(x)| + |v(x)|^{q+1}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|h(x)G_n(v(x))| \leq C(h(x)|u(x)|^q|v(x)| + h(x)|\mu_n(x)|^q|v(x)| + h(x)|v(x)|^{q+1}).$$

Desde que $\mu_n \to 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então a menos de subsequência $\mu_n \to 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $\mu_n \to 0$ *q.t.p.* $\mathbb{R}^N$ e existe $\tau \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|\mu_n(x)| \leq \tau(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$, assim,

$$|h(x)G_n(v(x))| \leq C(h(x)|u(x)|^q|v(x)| + h(x)|\tau(x)|^q|v(x)| + h(x)|v(x)|^{q+1}).$$

Como $h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $|u|^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$, $|v| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ $e$ $|\tau|^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$ com $\frac{2^*-(q+1)}{2^*} + \frac{q}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$. Pela desigualdade de Hölder

$$h.|u|^q.|v| \in L^1(\mathbb{R}^N) \ e \ |v|.h.|\mu|^q \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, como $|v|^{q+1} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N),\ h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{q+1}{2^*} + \frac{2^*-(q+1)}{2^*} = 1$ usando novamente a desigualdade de Hölder

$$|v|^{q+1}.h \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$h|u|^q|v| + h|\mu|^q|v| + h|v|^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Desde que

$$\limsup_{n\to\infty} h(x)G_n(v(x)) \leq \overline{f}(u(x))v(x),$$

segue do Lema de Fatou (apêndice A)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{v>0\}} h(x)G_n(v(x))dx &\leq \int_{\{v>0\}} \limsup_{n\to\infty} h(x)G_n(v(x))dx \\ &\leq \int_{\{v>0\}} \overline{f}(u(x))v(x)dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\{v>0\}} h(x)G_n(v(x))dx \leq \int_{\{v>0\}} \overline{f}(u(x))v(x)dx. \tag{2.15}$$

Usando um raciocínio análogo feito anteriormente temos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\{v<0\}} h(x)G_n(v(x))dx \leq \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx. \tag{2.16}$$

Portanto de (2.15) e (2.16) segue de (2.12)

$$\Phi^0(u,v) \leq \int_{\{v>0\}} \overline{f}(u(x))v(x)dx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx,\ \forall\ v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}$, para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ existe $(v_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \to v \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Note que

$$\Phi^0(u, v_n) \;\; \to \;\; \Phi^0(u, v), \quad \forall \;\; v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, sabemos que $\Phi^0(u; .) : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana com constante $k$. Daí,

$$|\Phi^0(u; v_n) - \Phi^0(u; v)| \;\; \leq \;\; k\|v_n - v\| \to 0 \; quando \; n \to +\infty.$$

Assim, por densidade obtemos

$$\Phi^0(u, v) \;\; \leq \;\; \int_{\{v>0\}} h(x)\overline{f}(u(x))v(x)dx + \int_{\{v<0\}} h(x)\underline{f}(u(x))v(x)dx \; \forall \; v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{2.17}$$

Considere $\omega \in \partial I(u) \subset (L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N))^*$ e suponhamos, por contradição que existe $A \subset \mathbb{R}^N$ com $med(A) > 0$ tal que

$$\omega(x) < h(x)\underline{f}(u(x)) \;\; em \;\; A.$$

Então,

$$\int_A \omega(x)dx \;\; < \;\; \int_A h(x)\underline{f}(u(x))dx. \tag{2.18}$$

Assim, existe $B \subset A$ tal que $0 < med(B) < +\infty$ ou seja,

$$\int_B \omega(x)dx \;\; < \;\; \int_B h(x)\underline{f}(u(x))dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega(x)(-\chi_B)dx \;\; = \;\; -\int_B \omega(x)dx \tag{2.19}$$

onde $\chi_B$ é a função característica de $B$ e $-\chi_{_B} \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\omega \in (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz (apêndice A) existe um único $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$< \omega, v > \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} u.v dx, \;\; \forall \;\; v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular fazendo $v = -\chi_{_B}$ e como $\omega \in \partial\Phi(u)$ então

$$< \omega, -\chi_{_B} >= \int_{\mathbb{R}^N} u.(-\chi_{_B}) dx.$$

Por identificação obtemos

$$< \omega, -\chi_{_B} > \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \omega.(-\chi_{_B}) dx \tag{2.20}$$

Da definição de $\partial\Phi(u)$ temos

$$< \omega, -\chi_{_B} > \;\leq\; \Phi^0(u, -\chi_{_B}). \tag{2.21}$$

De (2.17),(2.19),(2.20) e (2.21) obtemos

$$\begin{aligned} -\int_B \omega(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega(x)(-\chi_{_B}) dx \\ &= < \omega, -\chi_{_B} > \\ &\leq \Phi^0(u, -\chi_{_B}) \\ &\leq \int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x)\underline{f}(u(x))(-\chi_{_B}) dx + \int_{\{-\chi_B > 0\}} h(x)\overline{f}(u(x))(-\chi_{_B}) dx. \end{aligned}$$

Então,

$$-\int_B \omega(x) dx \;\leq\; \int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x)\underline{f}(u(x))(-\chi_{_B}) dx, \tag{2.22}$$

ou seja,

$$-\int_B \omega(x)dx \;\; \leq \;\; \int_{\{-\chi_B<0\}} h(x)\underline{f}(u(x))(-\chi_B)dx = -\int_{\{-\chi_B<0\}} h(x)\underline{f}(u(x))dx.$$

Logo,

$$-\int_B \omega(x)dx \;\; \leq \;\; -\int_B h(x)\underline{f}(u(x))dx,$$

isto é,

$$-\int_B h(x)\underline{f}(u(x))dx \;\; \leq \;\; \int_B \omega(x)dx.$$

O que é uma contradição. Logo,

$$\omega(x) \geq h(x)\underline{f}(u(x))dx \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Usando um raciocínio análogo feito anteriormente temos

$$\omega(x) \leq h(x)\overline{f}(u(x))dx \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

Portanto $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\omega \in \partial\Phi(u)$ de onde concluimos que

$$\omega(x) \;\; \in \;\; [h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)] \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N.$$

■

## 2.3 Lema 2.3

Nesta seção demonstraremos que o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ sob certas condições e para tal usaremos os Lema 2.1 e 2.2.

**Lema 2.3** *Seja $h$ satisfazendo a hipótese $(H)$ e $0 \leq q \leq 2^* - 1$. Então $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ desde que satisfaça as condições abaixo :*

*(i)* $0 \leq q \leq 1$ *e* $0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$

*(ii)* $1 < q < 2^* - 1$ *e* $0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$

onde $M_\lambda = \min\limits_{t \in [0,\infty)} g(t), \quad g(t) = \frac{S}{N} t^2 - \lambda(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1})|h|_\alpha t^{q+1}$.

**Demonstração**: Seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$I_{\lambda,a}(u_n) \to c \quad , \quad m(u_n) \to 0.$$

Recorde que

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda \Phi(u) - \Psi(u),$$

onde

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u) dx, \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx.$$

Observe que

$$Q'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx \quad e \quad \Psi'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} \varphi dx.$$

Considere $(w_n) \subset \partial I_{\lambda,a}(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ tal que $m(u_n) = |w_n|_*$, existe $(\rho_n) \subset \partial \Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ satisfazendo

$$w_n \;=\; Q'(u_n) - \lambda \rho_n - \Psi'(u_n), \tag{2.23}$$

o que implica

$$\langle w_n, \varphi \rangle \;=\; Q'(u_n)\varphi - \lambda \langle \varphi_n, \varphi \rangle - \psi'(u_n)\varphi, \; \forall \; \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos agora que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ . Em primeiro lugar, de (2.17) temos

$$\Phi^0(u_n,\varphi) \ \ \leq \ \ \int_{\{\varphi<0\}} h(x)\underline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx + \int_{\{\varphi>0\}} h(x)\overline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx,$$

para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Daí, como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$, por definição de $\partial\Phi(u_n)$ temos

$$\langle \rho_n, \varphi\rangle \ \ \leq \ \ \Phi^0(u_n;\varphi) \leq \int_{\{\varphi<0\}} h(x)\underline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx + \int_{\{\varphi>0\}} h(x)\overline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx$$

Vamos considerar que $\varphi \leq 0$ então,

$$\int_{\{\varphi>0\}} h(x)\overline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx = 0$$

Logo,

$$\langle \rho_n, \varphi\rangle \leq \Phi^0(u_n;\varphi) \leq \int_{\{\varphi<0\}} h(x)\underline{f}(u_n(x))\varphi(x)dx$$

e desde que

$$\underline{f}(u_n)\varphi \ \ = \ \ \lim_{\delta\to 0^+} f(u_n-\delta)\varphi = \lim_{\delta\to 0^+} H(u_n-\delta-a)(u_n^+)^q.\varphi = H(u_n-a)(u_n^+)^q,$$

e $H \leq 1$ temos

$$\underline{f}(u_n)\varphi \ \ \leq \ \ (u_n^+)^q\varphi,$$

desde que, $(u_n^+)^q \geq 0$ e $\varphi \leq 0$. Então,

$$\underline{f}(u_n)\varphi \ \ \leq \ \ (u_n^+)^q\varphi \leq 0$$

Logo,

$$\langle \rho_n, \varphi\rangle \ \ \leq \ \ \Phi^0(u_n,\varphi) \leq \int_{\{\varphi<0\}} h(x)\underline{f}(u_n)\varphi dx \leq 0.$$

Portanto,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle \;\; \leq \;\; \Phi^0(u_n, \varphi) \leq 0 \qquad \text{para} \;\; \varphi \leq 0.$$

De (2.23) temos

$$\begin{aligned} \left\langle w_n, u_n^- \right\rangle &= Q'(u_n).u_n^- - \left\langle \lambda \rho_n, u_n^- \right\rangle - \Psi'(u_n).u_n^- \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n.\nabla u_n^- dx + \lambda \left\langle \rho_n, -u_n^- \right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n^- dx. \end{aligned}$$

Iremos fazer os cálculos das parcelas.

Pela ortogonalidade das sequências de funções $u_n^+ \; e \; u_n^-$, a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n^- dx = 0.$$

Além disso, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n.\nabla u_n^- dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla (u_n^+ - u_n^-).\nabla u_n^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^+.\nabla u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^-.\nabla u_n^- dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^-|^2 dx = -\|u_n^-\|^2. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lambda \left\langle \rho_n, -u_n^- \right\rangle \leq \lambda \Phi^0(u_n, -u_n^-) \;\; \leq \;\; 0 \qquad \text{para} \;\; -u_n^- \leq 0.$$

Logo,

$$\left\langle w_n, u_n^- \right\rangle \;\; \leq \;\; -\|u_n^-\|^2 + \lambda \Phi^0(u_n, -u_n^-) \leq -\|u_n^-\|^2.$$

Daí,

$$\left\langle w_n, u_n^- \right\rangle \leq -\|u_n^-\|^2.$$

Além disso,

$$\|u_n^-\|^2 \;\; \leq \;\; -\left\langle w_n, u_n^- \right\rangle = (-\left\langle w_n, u_n^- \right\rangle) \leq |\left\langle w_n, u_n^- \right\rangle| \leq |w_n|_*.\|u_n^-\|.$$

Assim,

$$\|u_n^-\|^2 \leq |w_n|_*.\|u_n^-\|.$$

Recorde que $|w_n|_* = m(u_n) \to 0$, então existe $C_2 > 0$ tal que $|w_n|_* \leq C_2$. Portanto, $\|u_n^-\| \leq C_2$.

Suponhamos por contradição que

$$\|u_n^-\| \to L > 0$$

e $0 < \epsilon < L$ tal que $|w_n|_* < \epsilon$ para $n$ suficiemente grande. Desde que

$$\|u_n^-\|^2 \leq |w_n|_*.\|u_n^-\|$$

então,

$$\|u_n^-\|^2 - |w_n|_*.\|u_n^-\| \;\; \leq \;\; 0,$$

ou seja,

$$\|u_n^-\|^2 - \epsilon.\|u_n^-\| \leq \|u_n^-\|^2 - |w_n|_*.\|u_n^-\| \leq 0.$$

Agora passando ao limite de $n \to +\infty$ encontramos

$$\lim_{n\to\infty} (\|u_n^-\|^2 - \epsilon.\|u_n^-\|) \;\; = \;\; \lim_{n\to\infty} \|u_n^-\|^2 - \lim_{n\to\infty} \epsilon\|u_n^-\| = L^2 - L\epsilon \leq 0$$

Logo,

$$L \leq \epsilon.$$

O que é uma contradição.

Portanto,

$$\|u_n^-\| \longrightarrow 0.$$

De (2.23) obtemos

$$w_n + \lambda\rho_n \;=\; Q'(u_n) - \Psi'(u_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= Q'(u_n).u_n - \Psi'(u_n).u_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n.\nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\
&\quad -\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad +\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Recorde que $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Logo,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\
&\quad -\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\
&\quad +\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} (u_n^+ - u_n^-) dx.
\end{aligned}$$

Pela ortogonalidade das funções $u_n^+, u_n^-$ a integral

$$\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} u_n^- dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\
&\quad -\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx \\
&= \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N} = \frac{1}{N} \quad e \quad \Phi(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx.$$

Temos,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\Phi(u_n).$$

Desde que $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_c$, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C_3 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= I_{\lambda,a}(u_n) + \frac{1}{2^*}[-\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle] \\
&\leq C_3 + |\frac{1}{2^*}[-\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle]| \\
&\leq C_3 + |\frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle| + |\frac{1}{2^*}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle| \\
&\leq C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}|\langle \rho_n, u_n\rangle|.
\end{aligned}$$

Como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$, conclui-se

$$\langle \rho_n, v\rangle \leq \Phi^0(u_n; v), \quad \forall\ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, da desigualdade (2.17) do Lema 2.2 como $(u_n) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e fazendo $v = u_n$ obtemos

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n<0\}} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx + \int_{\{u_n>0\}} h(x)\overline{f}(u_n)u_n dx.$$

Lembrando que

$$h(x)\underline{f}(u_n) \leq h(x)\overline{f}(u_n) \leq h(x)(u_n^+)^q,$$

temos,

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n<0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n dx + \int_{\{u_n>0\}} h(x)(u_n^+)^q u_n dx.$$

Recorde que $v_n = u_n - u$, logo

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n<0\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx + \int_{\{u_n>0\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx.$$

Como a primeira integral está definida para $\{u_n < 0\}$ então,

$$\int_{\{u_n<0\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx = 0.$$

Assim,

$$\Phi^0(u_n; u_n) \;\leq\; \int_{\{u_n>0\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx - \int_{\{u_n>0\}} h(x)(u_n^+) u_n^- dx.$$

Consequentemente,

$$\Phi_0(u_n; u_n) \;\leq\; \int_{\{u_n>0\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^{q+1} dx.$$

Portanto,

$$|\langle \rho_n, u_n \rangle| \;\leq\; |\Phi^0(u_n; u_n)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_n|^{q+1} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|u_n|^{q+1}| dx.$$

Como $h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, $(u_n^{q+1}) \subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{q+1}{2^*} = 1$ então da desegualdade de Hölder $(h.u_n^{q+1}) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x).|u_n|^{q+1}|dx \quad \leq \quad |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^{q+1}.$$

Assim, das imersões contínuas temos $|u_n|_{2^*}^{q+1} \leq S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}$. Logo,

$$|\langle \rho_n, u_n \rangle| \quad \leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} |h(x).|u_n|^{q+1}| \leq |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq |h|_\alpha S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}$$

e daí,

$$\frac{\lambda}{2^*} |\langle \rho_n, u_n \rangle| \quad \leq \quad \frac{\lambda}{2^*} |h|_\alpha S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \rho_n, u_n \rangle \quad \leq \quad C_3 + C_4 \|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1},$$

onde

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \lambda \Phi(u_n) = I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle .$$

Recordemos que no Lema 2.1,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1}$$

Daí,

$$-\lambda \Phi(u_n) \geq -\frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1} \leq \frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \lambda \Phi(u_n) \quad = \quad I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n - \rho_n, u_n \rangle .$$

Daí,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1} \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1}.$$

Logo,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \left(\frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{q+1}|h|_\alpha + \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{2^*}|h|_\alpha\right)\|u_n\|^{q+1} \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Fazendo

$$C_5 = \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{q+1}|h|_\alpha + \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{2^*}|h|_\alpha = \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{2^*}\right)\left(\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\right),$$

obtemos

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - C_5\|u_n\|^{q+1} \leq C_3 + C_4\|u_n\|. \tag{2.25}$$

Mostraremos agora que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é limitada dividindo nos seguintes casos,

- **Caso** $0 \leq q < 1$

Suponhamos, por contradição, que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada, assim existe uma subsequência que ainda denotaremos por $(u_n)$ tal que

$$\|u_n\| \to \infty \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo de (2.25) temos:

$$\frac{1}{N} \leq \frac{C_5}{\|u_n\|^{-(q+1)}\|u_n\|^2} + \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|} \quad = \quad \frac{C_5}{\|u_n\|^{2-(q+1)}} + \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Agora passando ao limite com $n \to \infty$ na desigualdade acima obtemos:

$$\frac{1}{N} \leq 0,$$

o que é uma contradição, logo $(u_n)$ é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e portanto existe $C_6 > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C_6, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

- **Caso** $q = 1$

Temos,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1} \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha\|u_n\|^2 \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\|u_n\|^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \left(\frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\right)\|u_n\|^2 \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Logo,

$$-\left(\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\right)\|u_n\|^2 \quad \leq \quad C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Temos

$$\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha - \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha = \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^*}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) = \frac{1}{N} - \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} - \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{N} > \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{N}{N(N-1)} > \lambda S^{-1}|h|_\alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{S}{(N-1)|h|_\alpha} > \lambda.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda_2 = \dfrac{S}{2(N-1)|h|_\alpha}$ temos para cada $\lambda \in (0, \lambda_2)$, que

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\right) \quad > \quad 0.$$

e portanto fazendo $C_5 = -\dfrac{1}{N} - \dfrac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha - \dfrac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha$ obtemos

$$C_5\|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Vamos supor, por contradição que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada, então a menos de supsequência

$$\|u_n\| \longrightarrow \infty \quad \textit{quando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Assim

$$C_5 \leq \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ temos

$$C_5 \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $C_5 > 0$. Portanto, $(u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

- **Caso** $1 < q < 2^* - 1$

Observe que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}h(x)F(u_n)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\ &\quad -\frac{1}{q+1}\int|\nabla u_n|^2dx + \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\ &+ \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Note que

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx.$$

Além disso, desde que podemos escrever $\mathbb{R}^N = \{u_n > a\} \cup \{u_n \leq a\}$ temos

$$\begin{aligned} \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx &= \lambda\int_{\{u_n\leq a\}} h(x)\int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\ &+\lambda\int_{\{u_n> a\}} h(x)\int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt = 0, \quad \forall \ \ t \leq a,$$

então,

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx = \lambda\int_{\{u_n> a\}} h(x)\left[\int_0^{a} H(t-a)(t^+)^q dt + \int_a^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt\right] dx$$

e pelo fato de $H(t-a) = 1 \quad \forall \ \ t > a$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx &= \lambda\int_{\{u_n> a\}} h(x)\int_a^{u_n} (t^+)^q dt dx \\ &= \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n> a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Veja que, desde que $1 < q < 2^* - 1 \Leftrightarrow 2 < q+1 < 2^* \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{q+1} > \dfrac{1}{2^*}$ temos,

$$\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \;\; \geq \;\; \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx = 0. \tag{2.28}$$

Portanto, de (2.27) e (2.28) e de (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \;\; &\geq \;\; \frac{q-1}{2(q+1)}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^2dx \\ &\quad -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}}h(x)(u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por outro lado,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \;\; = \;\; I_{\lambda,a}(u_n) + \frac{1}{q+1}[-\langle w_n, u_n\rangle] - \frac{1}{q+1}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle.$$

Sendo $(u_n)$ uma sequência $(PS)_c$ temos que $|I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C_3$ e assim obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \;\; &\leq \;\; C_3 + \frac{1}{q+1}[-\langle w_n, u_n\rangle] - \frac{1}{q+1}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle \\ &\leq \;\; C_3 + \frac{1}{q+1}|\langle w_n, u_n\rangle| - \frac{1}{q+1}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle. \end{aligned}$$

Pela desiqualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \;\; \leq \;\; C_3 + \frac{1}{q+1}|w_n|_*\|u_n\| - \frac{1}{q+1}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle.$$

Lembrando que $m(u_n) = |w_n|_* \to 0$, segue que $|w_n|_*$ é limitada e daí, $|w_n|_* \leq \widehat{C}$. Logo, $\dfrac{1}{q+1}|w_n|_* \leq C_4$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle \;\; \leq \;\; C_3 + C_4\|u_n\| - \frac{1}{q+1}\langle \lambda\rho_n, u_n\rangle. \tag{2.30}$$

Usando novamente $u_n = u_n^+ - u_n^-$, temos

$$\frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, u_n\rangle \;\; = \;\; \frac{\lambda}{q+1}\left\langle \rho_n, u_n^+\right\rangle + \frac{\lambda}{q+1}\left\langle \rho_n, -u_n^-\right\rangle \leq \frac{\lambda}{q+1}\left\langle \rho_n, u_n^+\right\rangle.$$

Como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ pela Lema 2.2 obtemos

$$h(x)\underline{f}(u_n) \leq \quad \rho_n(x) \quad \leq h(x)\underline{f}(u_n) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n^+ dx \leq \quad \langle \rho_n, u_n^+ \rangle \leq \quad \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\overline{f}(u_n)u_n^+ dx.$$

Recordando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)(u_n^+)dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^+ \lim_{\delta\to 0^+} H(u_n - \delta - a)(u_n^+)^q dx.$$

Para $u_n \leq a$ e tomando $\delta \to 0^+$ tal que $u_n - \delta \leq a$. Então,

$$\lim_{\delta\to 0^+} H(u_n - \delta - a) \quad = \quad H(u_n - \delta - a) = 0.$$

Agora para $u_n > a$ com $\delta \to 0^+$ tal que $u_n - \delta > a$. Logo,

$$\lim_{\delta\to 0^+} H(u_n - \delta - a) \quad = \quad H(u_n - a) = 1.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)(u_n^+)^q dx \quad = \quad \int_{\{u_n > a\}} h(x)u_n^+(u_n^+)^q dx = \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \leq \left\langle \rho_n, u_n^+ \right\rangle.$$

Daí,

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \geq -\frac{\lambda}{q+1}\left\langle \rho_n, u_n^+ \right\rangle.$$

Assim de (2.30)

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1}\langle w_n + \lambda\rho_n, u_n\rangle &\leq C_3 + C_4\|u_n\| - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \\ &\leq C_3 + C_4\|u_n\| \\ &\quad -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

De (2.29) e (2.31) temos

$$\begin{aligned} \frac{(q-1)}{2(q+1)}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx &\leq C_3 + C_4\|u_n\| \\ &\quad -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx \end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)}\|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Suponha por contradição que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada então, a menos de subsequência,

$$\|u_n\| \longrightarrow \infty \quad quando \quad n \longrightarrow \infty,$$

daí,

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)} \leq \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ encontramos

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)} \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $\dfrac{(q-1)}{2(q+1)} \geq 0$.

Portanto, $(u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $0 \leq q < 2^* - 1$.

Note que podemos assumir que $u_n \geq 0$. De fato, sendo

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \;\; e \;\; \|u_n^-\| \to 0$$

temos que

$$\lim_{n\to+\infty} I_{\lambda,a}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} I_{\lambda,a}(u_n^+ - u_n^-) = \lim_{n\to+\infty} I_{\lambda,a}(u_n^+)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle w_n, u_n\rangle &= \|u_n\|^2 - \lambda\langle \rho_n, u_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\
&= \|u_n^+ - u_n^-\|^2 - \lambda\left\langle \rho_n, u_n^+ - u_n^-\right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\
&= \left\langle u_n^+ - u_n^-, u_n^+ - u_n^-\right\rangle - \lambda\left\langle \rho_n, u_n^+\right\rangle - \lambda\left\langle \rho_n, -u_n^-\right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\
&= \|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2 - \lambda\left\langle \rho_n, u_n^+\right\rangle - \lambda\left\langle \rho_n, -u_n^-\right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\
&= \|u_n^+\|^2 - \lambda\left\langle \rho_n, u_n^+\right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx + \|u_n^-\|^2 - \lambda\left\langle \rho_n, -u_n^-\right\rangle \\
&= \left\langle w_n, u_n^+\right\rangle + o_n(1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle w_n, u_n\rangle = \left\langle w_n, u_n^+\right\rangle + o_n(1).$$

Dessa forma $(u_n^+)$ é uma sequência $(PS)_c$ e assim podemos considerar $u_n \geq 0$.

Assim, desde que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert e reflexivo, $(u_n)$ é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a menos de uma subsequência existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_n \;\rightharpoonup\; u \; em \; D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$u_n(x) \;\to\; u(x) \; q.t.p. \; em \; \mathbb{R}^N.$$

**Afirmação 2.1** *$(\rho_n)$ é limitada em $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$*

De fato, como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ e $\rho_n(x) \subset [0, h(x)u_n^q(x)]$ $q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N$.

$$|\rho_n(x)| \;\; \leq \;\; |h(x)u_n^q(x)|,$$

então,

$$|\rho_n(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq |h(x)u_n^q(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}. \tag{2.32}$$

De onde segue

$$\begin{aligned}
|\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)u_n^q(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x)u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x)|dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Observe que $h^{\frac{2^*}{2^*-1}} \in L^{\frac{2^*-1}{2^*-(q+1)}}(\mathbb{R}^N)$ $e$ $u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}} \in L^{\frac{\frac{2^*}{2^*q}}{2^*-(q+1)}}(\mathbb{R}^N)$ , $\frac{1}{\frac{2^*-1}{2^*-(q+1)}} + \frac{1}{\frac{2^*}{\frac{2^*q}{2^*-1}}} = 1$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |h^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x)u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x)|dx &\leq |h^{\frac{2^*}{2^*-1}}|_{L^{\frac{\alpha}{2^*/2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} . |u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}}|_{L^{\frac{2^*}{2^*q/2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h^{\frac{2^*}{2^*-1}}|^{\frac{\alpha}{2^*/2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*/2^*-1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}}|^{\frac{2^*}{2^*q/2^*-1}} dx\right)^{\frac{2^*q/2^*-1}{2^*}} \\
&= \left(\left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{\alpha} dx\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \left(\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx\right]^{\frac{1}{2^*}}\right)^{\frac{2^*q}{2^*-1}} \\
&= |h|_{\alpha}^{\frac{2^*}{2^*-1}} |u_n|_{2^*}^{\frac{2^*q}{2^*-1}},
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{2^*}{2^*-(q+1)}$. Logo, teremos

$$|\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \;\; \leq \;\; \left(\int |h^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x)u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x)|dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq \left(|h|_{\alpha}^{\frac{2^*}{2^*-1}} |u_n|_{2^*}^{\frac{2^*q}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} = |h|_{\alpha}|u_n|_{2^*}^q.$$

Pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ existe $\widetilde{c} > 0$ tal que

$$|\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \;\; \leq \;\; |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^q \leq \widetilde{c}|h|_\alpha ||u_n||^q \leq K$$

onde $0 < K = \widetilde{c}|h|_\alpha$, é uma constante a qual existe pois $\|u_n\|$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, $(\rho_n)$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ então $(\rho_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Mostrando a afirmação. Como $(\rho_n)$ e limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ então a menos de subsequência

$$\rho_n \;\; \rightharpoonup \;\; \rho_0 \;\; em \;\; L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \;\; \to \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi dx, \forall \;\; \varphi \in (L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N))^*.$$

Como

$$w_n \;\; = \;\; Q'(u_n) - \lambda\rho_n - \Psi'(u_n),$$

segue-se que

$$\langle \omega_n, v \rangle \;\; = \;\; \langle Q'(u_n), v_n \rangle - \lambda \langle \rho_n, v \rangle - \langle \Psi'(u_n), v \rangle \;\;\; \forall \;\; v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Note que, desde que $(\rho_n) \subset (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$ pelo teorema da Representação de Riesz (apêndice A) existe $(\overline{\rho}_n) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle \rho_n, v \rangle \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\rho}_n v dx, \; \forall \; v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}).$$

Por identificação,

$$\langle \rho_n, v \rangle \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n v dx, \; \forall \; v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}),$$

portanto,

$$\langle \omega_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx, \quad \forall \ \ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Então,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx, \ \forall \ \ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

**Afirmação 2.2** $\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)]$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$.

De fato, desde que $(\rho_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ segue-se

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \ \ em \ D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\rho_n(x) \to \rho_0(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Observe que $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ então

$$\rho_n(x) \in [h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\overline{f}(u_n)] \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Note que

$$\underline{f}(t) = \lim_{\delta \to 0^+} H(t-\delta-a)(t^+)^q.$$

Para $t > a$, tomando $\delta \to 0^+$ tal que $t - \delta > a$ temos

$$H(t-\delta-a) = 1 = H(t-a) \Rightarrow f(t-a) = (t^+)^q.$$

Para $t < a$, tomando $\delta \to 0^+$ tal que $t - \delta < a$ obtemos

$$H(t-\delta-a) = 0 = H(t-a) \Rightarrow f(t-a) = 0.$$

Para $t = a$, tomando $\delta \to 0^+$ tal que $t - \delta = a$ temos

$$H(t-\delta-a) \;=\; H(-\delta) = 0 = H(t-a) \Rightarrow f(t-a) = 0.$$

Conclusão

$$h(x)\underline{f}(t) = \begin{cases} h(x)(t^+)^q & \text{se} \quad a < t \\ 0 & \text{se} \quad a = t \\ 0 & \text{se} \quad a > t \end{cases}$$

Assim com um raciocínio análogo

$$h(x)\overline{f}(t) = \begin{cases} h(x)(t^+)^q & \text{se} \quad a < t \\ h(x)(t^+)^q & \text{se} \quad a = t \\ 0 & \text{se} \quad a > t \end{cases}$$

Dessa forma

$$[h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\overline{f}(u_n)] = \begin{cases} h(x)(u_n^+)^q & \text{se} \quad a < u_n \\ [0, h(x)(u_n^+)^q] & \text{se} \quad a = u_n \\ 0 & \text{se} \quad a > u_n \end{cases}$$

Portanto,

$$\rho_n(x) \in [h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\overline{f}(u_n)] = \begin{cases} \rho_n(x) = h(x)(u_n^+)^q & \text{se} \quad a < u_n \\ \rho_n(x) \in [0, h(x)(u_n^+)^q] & \text{se} \quad a = u_n \\ \rho_n(x) = 0 & \text{se} \quad a > u_n \end{cases}$$

Logo, se

$$\rho_n(x) \to \rho_0(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N,$$

desde que

$$u_n(x) \to u(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N$$

temos:

Para $u(x) > a$, temos que $u_n(x) > a$ quando $n \to +\infty$, daí

$$\rho_0 = h(x)u^q(x) \;\; se \; u(x) > a.$$

Para $u(x) < a$ temos que $u_n(x) < a$ quando $n \to +\infty$, assim temos que

$$\rho_0 = 0 \; se \; u(x) < a.$$

Agora para $u(x) = a$, temos que $0 \leq \rho_n(x) \leq h(x)u_n(x)^q$ quando $n \to +\infty$. Assim

$$0 \leq \rho_0(x) \leq h(x)u(x)^q.$$

Então,

$$\begin{cases} \rho_0(x) = h(x)(u^+)^q & \text{se} \quad a < u \\ \rho_0(x) \in [0, h(x)(u^+)^q] & \text{se} \quad a = u \\ \rho_0(x) = 0 & \text{se} \quad a > u \end{cases}$$

Como

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)] = \begin{cases} h(x)(u^+)^q & \text{se} \quad a < u \\ [0, h(x)(u^+)^q] & \text{se} \quad a = u \\ 0 & \text{se} \quad a > u \end{cases} \tag{2.33}$$

Segue-se que

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\overline{f}(u)] \; q.t.p \; em \; \mathbb{R}^N. \qquad \blacksquare$$

A seguir mostraremos que

$$u_n \;\; \to \;\; u \; em \; D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, considere $v_n = u_n - u$ e assuma que

$$\|v_n\|^2 \;\; \to \;\; l > 0.$$

Temos

$$\langle w_n, v_n \rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n dx. \tag{2.34}$$

Lembrando que

$$0 \le h(x)\underline{f}(u_n) \le h(x)\overline{f}(u_n) \le h(x)(u_n^+)^q$$

e

$$\rho_n(x) \;\in\; \left[h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\overline{f}(u_n)\right] \quad q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N,$$

temos

$$\rho_n \;\le\; [0, h(x)(u_n^+)^q]\ q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N.$$

Isto é,

$$0 \le \rho_n \;\le\; h(x)(u_n^+)^q\ q.t.p.\ em\ \mathbb{R}^N. \tag{2.35}$$

Desde que $\rho_n \subset \partial\Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$, então existe $\overline{\rho}_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que pelo Teorema da Representação de Riesz

$$\langle \rho_n, v_n \rangle = \int \overline{\rho_n}(x) v_n(x) dx, \quad \forall\ \overline{\rho_n} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Por identificação

$$\langle \rho_n, v_n \rangle = \int \rho_n(x) v_n(x) dx, \quad \forall\ \rho_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R})^N.$$

Logo, por (2.35)

$$\int \rho_n(x) v_n(x) dx \le \int h(x) u_n^+(x)^q v_n(x) dx.$$

Sendo assim

$$\langle \rho_n, v_n \rangle \le \int h(x) u_n^+(x)^q v_n(x) dx.$$

Como $v_n = u_n - u = (u_n^+ - u_n^-) - u$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^- - u)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \rho_n, v_n \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx,$$

pois $v_n^+ = u_n^+ - u$.

Assim,

$$\lambda \langle \rho_n, v_n \rangle \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx. \tag{2.36}$$

Usando um raciocínio análogo para $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n dx$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n^+ dx. \tag{2.37}$$

Substituindo (2.36) e (2.37) em (2.34) obtemos,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx.$$

Como $v_n = u_n - u$, tem-se que $u_n = v_n + u$, então,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n + u) \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx,$$

isto é,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx.$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx \ \ \forall \ \ \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\varphi = u$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = o_n(1).$$

Além disso,

$$\langle w_n, v_n \rangle \ \ = \ \ |\langle w_n, v_n \rangle| \leq |w_n|_* \|v_n\|,$$

então,

$$\limsup_{n\to\infty} \langle w_n, u_n \rangle \ \ \leq \ \ \limsup_{n\to\infty} |w_n|_* \|v_n\| = 0$$

pois $|w_n|_* \to 0$ e $\|v_n\|$ é limitada. Logo,

$$\langle w_n, v_n \rangle = o_n(1).$$

Portanto, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx - \langle w_n, v_n \rangle \ \ \leq \ \ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx,$$

segue-se que

$$l + o_n(1) \ \ \leq \ \ \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^{2^*-1}) v_n^+ dx. \tag{2.38}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx \;\; = \;\; \int_{\{u_n>u\}} h(x)(u_n^+)^q(u_n^+ - u)dx + \int_{\{u_n\leq u\}} h(x)(u_n^+)^q(u_n^+ - u)dx.$$

Como $u_n \leq u$, temos que $u_n^+ \leq u$, logo $u_n^+ - u \leq 0$ e sendo $h \geq 0$ e $(u_n^+)^q \geq 0$ temos

$$h(x)(u_n^+)^q.(u_n^+ - u) \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u_n^q(u_n^+ - u)dx \;\; \leq \;\; 0.$$

Logo,

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx \;\; \leq \;\; \lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)(u_n^+)^q(u_n^+ - u)dx. \tag{2.39}$$

Usando um raciocínio análogo segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}v_n^+ dx \;\; \leq \;\; \int_{\{u_n>u\}} (u_n^+)^{2^*-1}(u_n^+ - u)dx. \tag{2.40}$$

Substituindo (2.39) e (2.40) em (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} l + o_n(1) \;\; &\leq \;\; \lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)(u_n^+)^q v_n dx + \int_{\{u_n>u\}} (u_n^+)^{2^*-1}(u_n^+ - u)dx \\ &\leq \;\; \lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)(u_n^+)^q u dx + \int_{\{u_n>u\}} (u_n^+)^{2^*}dx \\ &\quad\;\; - \int_{\{u_n>u\}} (u_n^+)^{2^*-1}u dx. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Lembrando que

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q(u_n^+ - u)dx - \lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)u_n^q(u_n^+ - u)dx \;\; = \;\; \lambda\int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u_n^q(u_n^+ - u)dx,$$

temos

$$\lambda\int_{\{u_n>u\}} h(x)u_n^q(u_n^+-u)dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q u dx$$
$$-\lambda\int_{\{u_n\le u\}} h(x)u_n^{q+1}dx + \lambda\int_{\{u_n\le u\}} h(x)u_n^q u dx. \quad (2.42)$$

De maneira análoga

$$\int_{\{u_n>u\}} u_n^{2^*-1}(u_n^+-u)dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx - \int_{\{u_n\le u\}} u_n^{2^*}dx$$
$$+\int_{\{u_n\le u\}} u_n^{2^*-1}udx. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) e (2.42) em (2.41) resulta que

$$l+o_n(1) \le \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx - \lambda\int_{\{u_n\le u\}} h(x)u_n^{q+1}dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q u dx$$
$$+\lambda\int_{\{u_n\le u\}} h(x)u_n^q u dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx - \int_{\{u_n\le u\}} u_n^{2^*}dx$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx + \int_{\{u_n\le u\}} u_n^{2^*-1}udx. \quad (2.44)$$

**Afirmação 2.3** $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx$ *quando* $n\to+\infty$.

De fato, note que $(u_n^{q+1})\subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ pois,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*}dx \le c^{2^*}\|u_n\|^{2^*}.$$

Pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ existe uma constante $C_2>0$ tal que,

$$|u_n|_{2^*} \le C_2\|u_n\| \quad (2.45)$$

assim,

$$
\begin{aligned}
|u_n^{q+1}|_{L^{2^*/q+1}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx\right)^{\frac{q+1}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{q+1}{2^*}} = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\right]^{q+1} \\
&= |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq C^{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq C_1.
\end{aligned}
$$

Logo, $(u_n^{q+1})$ é uma sequência limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach reflexivo temos a menos de subsequência, que

$$
u_n^{q+1} \rightharpoonup u^{q+1} \;\; em \;\; L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)
$$

e

$$
u_n^{q+1}(x) \;\to\; u^{q+1}(x) \;\; q.t.p \; em \;\; \mathbb{R}^N.
$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb (apêndice A)

$$
\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx \;\to\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx \quad \forall \;\; h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \;\; com \; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{2^*}{q+1}} = 1
$$

mostrando a Afirmação 2.3

De maneira análoga mostramos que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q u dx \;\longrightarrow\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx \text{ quando } \; n \to +\infty. \tag{2.46}
$$

**Afirmação 2.4** $\displaystyle\int_{\{u_n \leq u\}} h(x)u_n^{q+1}dx \longrightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} h(x)u^{q+1}dx$ *quando* $n \to +\infty$.

De fato, observe que a sequência $(u_n^{q+1}) \subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$ pois,

$$
\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx \;=\; \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \leq c^{2^*}\|u_n\|^{2^*}.
$$

De (2.45)

$$
\begin{aligned}
|u_n^{q+1}|_{L^{2^*/q+1}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\{u_n\leq u\}} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}}dx\right)^{\frac{q+1}{2^*}}\\
&= \left(\int_{\{u_n\leq u\}} |u_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{q+1}{2^*}}\\
&= \left[\left(\int_{\{u_n\leq u\}} |u_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\right]^{q+1}\\
&= |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq C_2^{q+1}\|u_n\|^{q+1} \leq K.
\end{aligned}
$$

Logo, $(u_n^{q+1})$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$ segue-se que

$$u_n^{q+1} \rightharpoonup u^{q+1} \;\; em \;\; L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$$

e

$$u_n^{q+1}(x) \to u^{q+1}(x) \;\; q.t.p \; em \;\; \{u_n \leq u\}.$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb

$$\int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u_n^{q+1}dx \to \int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u^{q+1}dx \quad \forall \;\; h \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N) \;\; com \; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{2^*}{q+1}} = 1$$

provando da Afirmação 2.4

De modo análogo prova-se que

$$\int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u_n^q u dx \longrightarrow \int_{\{u_n\leq u\}} h(x)u^{q+1}dx \text{ quando } n \to +\infty. \tag{2.47}$$

**Afirmação 2.5** $\int_{\{u_n\leq u\}} u_n^{2^*}dx \longrightarrow \int_{\{u_n\leq u\}} u^{2^*}dx$ *quando* $n \to +\infty$.

De fato, como a sequência $(u_n)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então

$$u_n \to u \; em \; D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n(x) \;\to\; u(x) \;\; q.t.p \; em \; (\{u_n \leq u\}).$$

Logo,

$$u_n^{2^*}(x) \;\to\; u^{2^*}(x) \;\; q.t.p \; em \; (\{u_n \leq u\}).$$

Como

$$|u_n(x)| \leq u(x) \;\; q.t.p. \; em \; (\{u_n \leq u\}).$$

Logo,

$$|u_n^{2^*}(x)| \leq u^{2^*}(x) \;\; q.t.p. \; em \; (\{u_n \leq u\}).$$

e $u^{2^*} \in L^1(\{u_n \leq u\})$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue ( apêndice A)

$$\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*}(x)dx \;\longrightarrow\; \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*}(x)dx$$

provando a Afirmação 2.5.

**Afirmação 2.6** $\displaystyle\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx \longrightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*} dx \;\; quando \; n \to +\infty.$

De fato, observe que a sequência $(u_n^{2^*-1}) \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$ pois,

$$\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \;=\; \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \leq c^{2^*} \|u_n\|^{2^*}.$$

Segue de (2.45)

$$\begin{aligned} |u_n^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})} &= \left( \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} = \left( \left[ \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} \right]^{\frac{1}{2^*}} \right)^{2^*-1} \\ &\leq C^{2^*-1} \|u_n\|^{2^*-1} \leq K. \end{aligned}$$

Logo, $(u_n^{2^*-1})$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$, então

$$u_n^{2^*-1} \rightharpoonup u^{2^*-1} \ \ em \ \ L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$$

e

$$u_n^{2^*-1}(x) \ \rightarrow \ u^{2^*-1}(x) \ \ q.t.p \ em \ \ \{u_n \leq u\}.$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb

$$\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx \ \rightarrow \ \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*} dx \quad \forall \ \ u \in L^{2^*}(\{u_n \leq u\}) \ \ com \ \frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1.$$

Mostrando a Afirmação 2.6

Usando um raciocínio análogo podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} dx \ quando \ n \to +\infty. \tag{2.48}$$

**Afirmação 2.7** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} + o_n(1).$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |u_n|^{2^*}_{2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx. \tag{2.49}$$

Usando o Teorema de Brézis e Lieb ( apêndice A.1) temos

$$|u_n|^{2^*}_{2^*} - |u|^{2^*}_{2^*} = |u_n - u|^{2^*}_{2^*} + o_n(1).$$

Daí,

$$|u_n|^{2^*}_{2^*} = |u_n - u|^{2^*}_{2^*} + |u|^{2^*}_{2^*} + o_n(1). \tag{2.50}$$

Substituindo (2.50) em (2.49) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx &= |u_n - u|^{2^*}_{2^*} + |u|^{2^*}_{2^*} + o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \\
&= |u_n - u|^{2^*}_{2^*} - \left( \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx - |u|^{2^*}_{2^*} \right) + o_n(1)
\end{aligned}$$

da Afirmação 2.48 resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} dx = |u|_{2^*}^{2^*}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx - |u|_{2^*}^{2^*} = o_n(1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1)$$

pois, $v_n = u_n - u$. Provando a Afirmação 2.7

Das Afirmações 2.3-2.7 temos

- $\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.3 e (2.46))
- $\lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^q u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.4 e (2.47))
- $\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*} dx - \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.5 e 2.6)
- $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + o_n(1)$ (Afirmação 2.7).

Assim, de (2.44)

$$l + o_n(1) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + o_n(1).$$

Logo,

$$l^{\frac{2}{2^*}} + o_n(1) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o_n(1).$$

Desde que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} S \leq \|v_n\|^2$$

então,

$$l^{\frac{2}{2^*}}S + o_n(1) \;\; \leq \;\; \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}} S + o_n(1) \leq \|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Logo,

$$l^{\frac{2}{2^*}}S + o_n(1) \;\; \leq \;\; \|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima encontramos

$$l^{\frac{2}{2^*}}S \;\; \leq \;\; l,$$

dessa maneira,

$$\begin{aligned} l^{2/\frac{2N}{N-2}}.S \leq l \;\; &\Leftrightarrow \;\; Sl^{\frac{N-2}{N}} \leq l \\ &\Leftrightarrow \;\; Sll^{-\frac{2}{N}} \leq l \\ &\Leftrightarrow \;\; \frac{S.l}{l^{\frac{2}{N}}} \leq l \\ &\Leftrightarrow \;\; S \leq l^{\frac{2}{N}} \\ &\Leftrightarrow \;\; S^{\frac{N}{2}} \leq l. \end{aligned}$$

Para mostrarmos que o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ vamos considerar dois casos:
(i)**Caso** $0 \leq q \leq 1$ e $0 < c \leq \dfrac{S^{N/2}}{N} + M_\lambda$.

Desde que

$$w_n \;\; = \;\; Q'(u_n) - \lambda\rho_n - \Psi'(u_n)$$

e recordando que $\langle w_n, u_n\rangle = o_n(1)$ temos,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \;=\; I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle + o_n(1).$$

Lembrando que

$$I_{\lambda,a}(u_n) \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx$$

e

$$\langle w_n, u_n\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\langle \rho_n, u_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle + o_n(1) \;&=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx \\
&\quad -\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{2^*}\langle \rho_n, u_n\rangle + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*}dx + o_n(1) \\
&=\; \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\
&\quad +\frac{\lambda}{2^*}\langle \rho_n, u_n\rangle + o_n(1) \\
&=\; \frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx + \frac{\lambda}{2^*}\langle \rho_n, u_n\rangle + o_n(1).
\end{aligned}$$

Recordando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \;=\; \frac{1}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx.$$

Segue-se

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle + o_n(1) \;&=\; \frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx \\
&\quad +\frac{\lambda}{2^*}\langle \rho_n, u_n\rangle + o_n(1). \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

Usando a definição de $v_n = u_n - u$, o Lema 2.2 e o fato que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx + o_n(1)$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\|u_n\|^2 &= \frac{1}{N}\langle v_n + u, v_n + u\rangle \\ &= \frac{1}{N}\langle v_n, v_n\rangle + \frac{2}{N}\langle v_n, u\rangle + \frac{1}{N}\langle u, u\rangle \\ &= \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{2}{N}\langle v_n, u\rangle + \frac{1}{N}\|u\|^2.\end{aligned}$$

Como $(v_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{2}{N}\langle v_n, u\rangle = \frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx &= \frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u)\nabla u dx \\ &= \frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx\end{aligned}$$

desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então,

$$\frac{2}{N}\langle v_n, u\rangle \;=\; \left(\frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx\right) = o_n(1)$$

daí,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 \;=\; \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{1}{N}\|u\|^2 + o_n(1). \tag{2.52}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n > a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx &= \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n > a\}} h(x)a^{q+1}dx.\end{aligned}$$

Como $\quad h \geq 0 \;\; e \;\; a \geq 0$ resulta que

$$\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)a^{q+1}dx \geq 0,$$

então,

$$\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx \;\; \leq \;\; \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1})dx.$$

Logo,

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx \;\; \geq \;\; -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1})dx. \qquad (2.53)$$

Sendo $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$, pelo Lema 2.2 temos que

$$h(x)\underline{f}(u_n) \leq \rho_n(x) \;\; \leq \;\; h(x)\overline{f}(u_n) \;\; q.t.p. \; em \; \mathbb{R}^N.$$

Então, existe $\overline{\rho}_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que pelo Teorema da Representação Riesz

$$\langle \rho_n, u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\rho}_n u_n dx \;\; \forall \overline{\rho}_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e por identificação

$$\langle \rho_n, u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n dx \;\; \forall \rho_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx \;\; \leq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\overline{f}(u_n)u_n dx,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx \;\; \leq \;\; \langle \rho_n, u_n \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\overline{f}(u_n)u_n dx.$$

Lembrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n \lim_{\delta\to 0} H(u_n-\delta-a)u_n^q dx.$$

Observe que, para $u_n \leq a$ tomando $\delta \to 0^+$ tal que $u_n - \delta \leq a$ segue,

$$\lim_{\delta\to 0^+} H(u_n-\delta-a) = H(t-a) = 0.$$

Agora para $u_n > a$, tomando $\delta \to 0^+$ tal que $u_n - \delta > a$ temos

$$\lim_{\delta\to 0^+} H(u_n-\delta-a) = H(t-a) = 1.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n \lim_{\delta\to 0} H(u_n-\delta-a)u_n^q dx = \int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1} dx.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n dx \;\;=\;\; \int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1} dx \leq \langle \rho_n, u_n\rangle . \tag{2.54}$$

De (2.52),(2.53),(2.54) e (2.51) obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &= I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, u_n\rangle + o_n(1) \\ &\geq \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{1}{N}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{2^*}\int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1}dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1}dx + o_n(1) \end{aligned}$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \;\;\geq\;\; \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{1}{N}\|u\|^2 + \lambda\left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1}dx + o_n(1).$$

Desde que $\dfrac{1}{q+1} > \dfrac{1}{2^*}$ então,

$$\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\{u_n>a\}} h(x)u_n^{q+1}dx \geq \lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\geq \frac{1}{N}\|v_n\|^2+\frac{1}{N}\|u\|^2+\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx+o_n(1)\\ &= \frac{1}{N}\|v_n\|^2+\frac{1}{N}\|u\|^2+\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx+o_n(1). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e das imersões contínuas resulta

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N}\|v_n\|^2+\frac{S}{N}|u|_{2^*}^2+\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)|h|_\alpha|u|_{2^*}^{q+1}+o_n(1).$$

Lembrando que

$$g(t) = \frac{S}{N}t^2+\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)|h|_\alpha t^{q+1},$$

fazendo $t=|u|_{2^*}$ resulta,

$$g(|u|_{2^*}) = \frac{S}{N}|u|_{2^*}^2+\lambda\left(\frac{1}{2^*}-\frac{1}{q+1}\right)|h|_\alpha|u|_{2^*}^{q+1}.$$

Daí,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N}\|v_n\|^2+g(|u|_{2^*})+o_n(1).$$

Como

$$g(|u|_{2^*}) \geq \min g(|u|_{2^*}) = M_\lambda.$$

Teremos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N}\|v_n\|^2+M_\lambda+o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima obtemos

$$c \geq \frac{1}{N}l + M_\lambda \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda.$$

O que é um absurdo pois $0 < c < \dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda$. Portanto, $l = 0$ e assim $u_n \to u \;\; em \;\; D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

**Caso** (ii) $1 < q < 2^* - 1$ e $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Sabemos que

$$I_{\lambda,a}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^{q+1} - a^{q+1})dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n\|^2 &= \frac{1}{2}\langle u_n, u_n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle v_n + u, v_n + u\rangle \\
&= \frac{1}{2}[\langle v_n, v_n\rangle + \langle v_n, u\rangle + \langle u, u\rangle] \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \langle v_n, u\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx + \frac{1}{2}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

De (2.53) obtemos,

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \leq -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^{q+1} - a^{q+1})dx$$

Temos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx = o_n(1),$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx + o_n(1).$$

De (2.54) temos

$$\int_{\{u_n>a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1}dx \leq \langle \rho_n, u_n\rangle .$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, u_n\rangle - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx + o_n(1) \\ & \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, v_n\rangle - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, u\rangle - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \langle w_n, v_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla (v_n + u) \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}(u_n - u) dx \\ &= \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Segue-se

$$\langle w_n, v_n\rangle = \|v_n\|^2 - \lambda \langle \rho_n, v_n\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1).$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, v_n\rangle \;\; & \geq \;\; \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, v_n\rangle - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, u\rangle - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx \\
& \quad -\frac{1}{2^*}\|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{2^*}\langle \rho_n, v_n\rangle + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*}dx + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx + o_n(1) \\
& = \;\; \frac{1}{N}\|v_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\langle \rho_n, v_n\rangle + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}\langle \rho_n, u\rangle \\
& \quad -\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2*-1}udx + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Desde que

$$\rho_n(x) \in [0, h(x)(u_n(x)^+)^q] \;\; q.t.p \;\; x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$, segue do Teorema da Representação Riesz que

$$\langle \rho_n, v_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)v_n(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+(x))^q v_n(x)dx.$$

Logo,

$$-\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\langle \rho_n, v_n\rangle \geq -\lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+(x))^q v_n(x)dx.$$

Além disso, do fato que $q+1 < 2^*$ segue que

$$-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx \;\; \geq \;\; -\frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, v_n\rangle \;\; & \geq \;\; \frac{1}{N}\|v_n\|^2 - \lambda\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q v_n dx \\
& \quad +\frac{1}{2}\|u\| - \frac{1}{q+1}\langle \rho_n, u\rangle - \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1}udx + o_n(1).
\end{aligned}
$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então

$$\langle u, u_n \rangle \to \langle u, u \rangle, \quad \forall \;\; u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$\langle u, u_n \rangle = \langle u, u \rangle + o_n(1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx \;\; = \;\; \|u\|^2 + o_n(1),$$

e desde que $2 < q+1$, temos

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 \;\; = \;\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx + o_n(1) \geq \frac{1}{q+1}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx + o_n(1).$$

Notando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q v_n dx \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q(u_n - u)dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q u dx.$$

Da Afimação 2.3 e de (2.46) temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^{q+1}dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q u dx \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx + o_n(1) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1}dx + o_n(1)\end{aligned}$$

de onde segue

$$-\lambda\left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q v_n dx \;\; = \;\; o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*}\langle w_n, v_n \rangle \;\; &\geq \;\; \frac{1}{N}\|v_n\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{q+1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \lambda \langle \rho_n, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx\right) + o_n(1).\end{aligned}$$

Observando que

$$\langle w_n, u \rangle \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \lambda \langle \rho_n, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx,$$

e desde que

$$\langle w_n, u \rangle \ = \ |\langle w_n, u \rangle| \leq |w_n|_* \|u\| = m(u_n)\|u\|.$$

Segue-se que $\langle w_n, u \rangle = o_n(1)$ e assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle \ \geq \ \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Pela definição de $v_n = u_n - u$

$$\frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle \ = \ \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u \rangle = o_n(1).$$

Passando ao limite na última desigualdade obtemos

$$c \ \geq \ \frac{l}{N}.$$

Além disso, como $l \geq S^{\frac{N}{2}}$ temos

$$c \ \geq \ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

o que é um absurdo pois $c < \dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$. Portanto $l = 0$ daí $u_n \to u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Concluindo assim a demonstração do Lema 2.3 ■

## 2.4 Lema 2.4

**Lema 2.4** *Seja $h$ satisfazendo $(H)$ e $0 \leq q < 2^* - 1$. Se, além disso, $\rho > 0$ é a constante da geometria do passo da montanha dado pelo Teorema 1.1 e no Lema 2.1, então o nível c do Passo da Montanha satisfaz*

*(i)* $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$ *para* $0 \leq q \leq 1$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *e* $a \in (0, a_{*1})$ *para algum* $\lambda_1 > 0$ *e* $a_{*1} > 0$.

*(ii)* $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, *para* $1 < q < 2^* - 1$, $\lambda, a > 0$.

**Demonstração**: Segue da prova do Lema 2.1 que dado $\epsilon > 0$ e fazendo

$$\varphi = \omega_\epsilon = \frac{(N(N-2)\epsilon)^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

com $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ fixo e $x \in \mathbb{R}^N$, então existe $e = t_\epsilon \omega_\epsilon$ para algum $t_\epsilon > 0$ onde

$$\|t_\epsilon \omega_\epsilon\| > r \text{ tal que } I_{\lambda,a}(t_\epsilon \omega_\epsilon) \leq 0$$

e

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \rho \quad \text{quando} \quad \|u\| = r,$$

isto é, a geometria do passo da montanha é satisfeita.

Agora vamos utilizar a seguinte relação entre $S$ e $\omega_\epsilon$ (ver [**?**])

$$\|\omega_\epsilon\|^2 = |\omega_\epsilon|^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} \quad \epsilon > 0. \tag{2.55}$$

Vamos mostrar, primeiramente caso ii).

**Caso** *ii)* $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \quad 1 < q < 2^* - 1$ para $\lambda, a > 0$.

Temos que

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx,$$

com $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ onde $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u) \;=\; \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\|\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx - \frac{1}{2^*}|\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{\widehat{t_\epsilon}^2}{2}\|\omega_\epsilon\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx - \frac{\widehat{t_\epsilon}^{2^*}}{2^*}|\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Usando (2.55) em (2.56) temos

$$I_{\lambda,a}(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) \;=\; \frac{\widehat{t_\epsilon}^2}{2}S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx - \frac{\widehat{t_\epsilon}^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}. \tag{2.57}$$

Mostraremos que

$$\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = I_{\lambda,a}(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon).$$

Desde que $I_{\lambda,a}$ é contínua então $g$ é contínua.

Observe que $g(0) = 0$, isto é,

$$g(0) = I_{\lambda,a}(0\omega_\epsilon) = 0$$

e existe $t_0 \in (0,\infty)$ tal que $g(t_0) > 0$.

Da definição de $g$ temos que

$$g(t_0) = I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon)$$

logo,

$$I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon) > 0 \; para \; t_0 \in (0,+\infty).$$

Além disso,

$$I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon) \to -\infty \; quando \; t \to +\infty.$$

Agora vamos restringir a função $g$ ao intervalo $[0,\overline{t}]$.

Considere a função $g : [0,\overline{t}] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = I_{\lambda,a}(tw_\epsilon)$.

Desde que a função $g$ é contínua, num intervalo compacto e assume valores reais, então atinge o máximo.

Logo existe $\widehat{t_\epsilon} \in [0, \bar{t}]$ tal que

$$g(\widehat{t_\epsilon}) = \max_{t \in [0,\bar{t}]} g(t).$$

Pela geometria do passo da montanha, sabemos que existe $\bar{t} \in (0, +\infty)$, tal que $g(t) \leq 0$. Logo,

$$g(\widehat{t_\epsilon}) = \max_{t \geq 0} g(t).$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) = \max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon). \tag{2.58}$$

De (2.57) e (2.58) obtemos

$$\begin{aligned}\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &= \frac{\widehat{t_\epsilon}^2}{2} S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx - \frac{\widehat{t_\epsilon}^{2^*}}{2^*} S^{\frac{N}{2}} \\ &= \left( \frac{\widehat{t_\epsilon}^2}{2} - \frac{\widehat{t_\epsilon}^{2^*}}{2^*} \right) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx.\end{aligned}$$

Fazendo $\vartheta(t) = \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*} \right), t \geq 0$ temos,

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = \vartheta(\widehat{t_\epsilon}) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx. \tag{2.59}$$

De fato, derivando a função $\vartheta$, tem-se $\vartheta'(t) = t - t^{2^*-1}$. Note que $(0, +\infty) = (0, 1] \cup [1, +\infty)$.

Temos que, para todo $t \in (0, 1]$ como $1 < 2^* - 1$ tem-se que $t > t^{2^*}$. Assim, $\vartheta'(t) > 0$ logo, a função $\vartheta$ é crescente no intervalo $(0, 1]$.

Agora, para todo $t \in [1, +\infty)$, como $1 < 2^* - 1$ obtemos $t < t^{2^*-1}$. Assim, a derivada $\vartheta'(t) < 0$ para todo $t \in [1, +\infty)$. Logo, a função $\vartheta$ é decrescente no intervalo $t \in [1, +\infty)$.

Portanto, 1 é o ponto de máximo para a função $\vartheta$. Note que $\vartheta'(1) = 0$ e

$$\vartheta(1) = \frac{1^2}{2} - \frac{1^{2^*}}{2^*}.$$

Como $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ obtemos

$$\vartheta(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{2N}{N-2}} = \frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N} = \frac{N-N+2}{2N} = \frac{1}{N}.$$

Portanto,

$$\max \vartheta(t) \quad = \quad \vartheta(1) = \frac{1}{N}. \tag{2.60}$$

De (2.60) em (2.59) obtemos

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \max \vartheta(\widehat{t_\epsilon}) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx \\ &= \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx.\end{aligned}$$

Pela geometria do passo da montanha e por (2.58), existe $t_0 > 0$ tal que $\widehat{t_\epsilon} \geq t_0$ para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Queremos mostrar que para o mesmo $\epsilon$ tem-se que $\omega_\epsilon(0) > \dfrac{a}{t_0}$. Note que,

$$\omega_\epsilon(x) = \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \qquad x \in \mathbb{R}^N \quad (\epsilon > 0).$$

Tomando $x = 0$ temos

$$\omega_\epsilon(0) = \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Assim,

$$\omega_\epsilon(0) \quad = \quad \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon)^{\frac{N-2}{2}}} = N(N-2)^{\frac{N-2}{4}}.\epsilon^{\frac{N-2}{4}}.\epsilon^{-\frac{N-2}{2}} = N(N-2)^{\frac{N-2}{4}}.\epsilon^{-\frac{N+2}{4}}.$$

Como $N \geq 3$, obtemos

$$-N \leq -3 \Leftrightarrow \frac{2-N}{4} \leq -\frac{1}{4},$$

ou seja, quando $\epsilon \to 0$, $\quad \omega_\epsilon(0) > \dfrac{a}{t_0}$ com $t_0 > 0$.

Queremos mostrar, agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t_0\omega_\epsilon)dx.$$

Recorde que $F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) = \int_0^{\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon} f(t)dt$ e desde que, $f$ é uma função não decrescente tem-se para $x \geq y$ temos

$$f(y) \leq f(x)$$

daí,

$$\int_0^y f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt.$$

Como $h \geq 0$ e $h \not\equiv 0$ então, existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ de medida positiva tal que $\int_A h > 0$ e como $\widehat{t_\epsilon} \geq t_0$ temos que $t_0\omega_\epsilon \leq \widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon$.

Assim,

$$\int_0^{\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon} f(t)dt \quad \geq \quad \int_0^{t_0\omega_\epsilon} f(t)dt$$

pela definição da $F$ temos,

$$F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) \quad \geq \quad F(t_0\omega_\epsilon)$$

então,

$$h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon) \quad \geq \quad h(x)F(t_0\omega_\epsilon),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t_0\omega_\epsilon)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{t_0w_\epsilon} H(t-a)t^q dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_a^{t_0w_\epsilon} t^q dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\left[\frac{(t_0w_\epsilon)^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1}\right]dtdx \\
&\geq \int_{\mathbb{A}} h(x)\frac{(t_0w_\epsilon)^{q+1}}{q+1}dx > 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t_\epsilon}\omega_\epsilon)dx \;\; \leq \;\; -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t_0\omega_\epsilon)dx < 0. \qquad (2.61)$$

De (2.60) e (2.61) temos

$$\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;\; \leq \;\; \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Consequentemente $c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Do Teorema do Passo da Montanha temos $c \geq \rho$ então,

$$\rho \leq c \;\; < \;\; \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \;\; se \;\; 1 < q < 2^* - 1 \;\; \text{para} \;\; \lambda,\; a > 0.$$

Mostraremso agora o item i)

**Caso**$(i)$ $\rho \leq c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$ *para* $0 \leq q \leq 1$ $(\lambda, a) \in (0, \lambda_1) \times (0, a_{*1})$ para algum $\lambda_1 > 0$ *e* $a_{*1} > 0$

Dividiremos o item $(i)$ em dois casos

- **Caso** $q = 1$

De modo semelhante ao caso em que $1 < q < 2^* - 1$ temos

$$\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;\; < \;\; \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Neste momento lembremos que a função $M_\lambda$ foi definida por

$$M_\lambda = \begin{cases} -\widehat{M}\lambda^{\frac{2}{1-q}} & se \quad 0 \leq q < 1 \\ 0 & se \quad q = 1. \end{cases}$$

Desde que $q = 1$ então $M_\lambda = 0$ assim

$$\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;\; < \;\; \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + 0,$$

ou seja,

$$\max_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \quad < \quad \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda.$$

Consequentemente $c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$. Pelo Teorema do Passo da Montanha $\rho \leq c$ então,

$$\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda \quad \textit{quando} \;\; q = 1.$$

- **Caso** $0 \leq q < 1$

Observe que

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Seja $t > 0$ e fazendo $u = tw_\epsilon$, assim

$$I_{\lambda,a}(tw_\epsilon) = \frac{t^2}{2}\|w_\epsilon\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}|w_\epsilon|_{2^*}^{2^*}.$$

Novamente de (2.55)

$$I_{\lambda,a}(tw_\epsilon) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(tw_\epsilon)dx = \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(tw_\epsilon)dx.$$

De (2.60)

$$I_{\lambda,a}(tw_\epsilon) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(tw_\epsilon)dx.$$

Existe $t_0 > 0$ e para $t \in [0, t_0]$

$$I_{\lambda,a}(tw_\epsilon) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$$

para algum $\epsilon > 0$. Agora, tome $\epsilon > 0$ tal que $\omega_\epsilon(0) > \dfrac{a}{t_0}$. Assim para $t \geq t_0,\ \Omega_a = \{t_0\omega_\epsilon > a\} \subset \{t\omega_\epsilon > a\}$ e

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\|t\omega_\epsilon\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(t\omega_\epsilon)^{2^*}dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\omega_\epsilon\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}|\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Usando (2.55) obtemos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \frac{t^2}{2}S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}. \\
&= \Big(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\Big)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\vartheta(t) = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^{2^*}}{2^*}$ obtemos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx. \tag{2.62}$$

Note que

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \geq \lambda\int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx.$$

Assim,

$$-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \leq -\lambda\int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx. \tag{2.63}$$

Logo, de (2.63) em (2.62) temos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \\
&= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\Omega_a} h(x)\int_0^{t\omega_\epsilon} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\
&= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\Omega_a} h(x)\left(\int_0^a H(t-a)(t^+)^q dt + \int_a^{t\omega_\epsilon} H(t-a)(t^+)^q dt\right)dx \\
&\leq \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda\int_{\Omega_a} h(x)\int_a^{t\omega_\epsilon} (t^+)^q dtdx \\
&= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)((t\omega_\epsilon)^{q+1} - (a)^{q+1})dx.
\end{aligned}$$

Usando, o fato que

$$\max_{t\geq 0}\vartheta(t) = \vartheta(1) = \frac{1}{N} \quad (\max_{t\geq 0}\vartheta(t) \geq \vartheta(t) \geq \vartheta(t_0)),$$

obtemos para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \max_{t\geq 0} \vartheta(t) S^{\frac{N}{2}} - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}\right) dx \\ &\leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - (a)^{q+1}\right) dx. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Observe que

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}\right) dx \leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1}\right) dx.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}\right) dx &= -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{t_0}{t_0}a\right)^{q+1}\right) dx \\ &= -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)(t\omega_\epsilon)^{q+1} dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left(\frac{t_0}{t_0}a\right)^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $t > t_0$ assim

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)(t\omega_\epsilon)^{q+1} dx \leq -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)(t_0\omega_\epsilon)^{q+1} dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}\right) dx &\leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)(\omega_\epsilon)^{q+1} dx \\ &\quad + \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Obtemos,

$$-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}\right) dx \leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1}\right) dx. \tag{2.65}$$

De (2.65) em (2.64) temos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)(t\omega_\epsilon)^{q+1}dx + \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} dx.$$

Logo,

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1}\right) dx.$$

Agora afirmamos que existe $\lambda_3 > 0$ satisfazendo

$$\lambda c_1 > \widehat{M}\lambda^{\frac{2}{1-q}} \quad para \quad \lambda \in (0, \lambda_3). \tag{2.66}$$

onde

$$c_1 = c_1(a) = \left(\frac{t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1}\right) dx\right)$$

e $\widehat{M}$ é uma constante positiva que depende de $q, N$ $e$ $|h|_\alpha$.

Como $c_1(0) > 0$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \xi < c_1(0)$.

Considerando

$$\theta(a) = c_1(a) - \xi$$

e sendo $c_1 : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, segue que $\theta : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $a_{*1} > 0$ tal que

$$\theta(a) > 0 \quad \forall\, a \in (0, a_{*1}),$$

isto é,

$$c_1(a) - \xi > 0 \Leftrightarrow c_1(a) > \xi \ \ \forall\, a \in (0, a_{*1}).$$

Tomando

$$\lambda < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}}\right)^{\frac{1-q}{1+q}} \equiv \lambda_3 < \left(\frac{c_1}{\widehat{M}}\right)^{\frac{1-q}{1+q}} \quad para\ todo\ a \in (0, a_{*1})$$

temos,

$$\lambda < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}}\right)^{\frac{1-q}{1+q}},$$

ou seja,

$$\lambda^{\frac{1+q}{1-q}} < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}}\right)$$

daí,

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{1-q}}}{\lambda} < \frac{\xi}{\widehat{M}}$$

como $c_1(a) > \xi$

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{1-q}}}{\lambda} < \frac{\xi}{\widehat{M}} < \frac{c_1(a)}{\widehat{M}}.$$

Logo,

$$\lambda^{\frac{2}{1-q}}\widehat{M} < \lambda c_1(a).$$

Mostrando que (2.66) é verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1}\int_{\Omega_a} h(x)\left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1}\right)dx \\ &= \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \lambda c_1(a) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \lambda^{\frac{2}{1-q}}\widehat{M} = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - M_\lambda, \end{aligned}$$

isto é,

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;<\; \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \;\; para \;\; t \geq t_0.$$

Fazendo $\lambda_1 = mim\{\lambda_2, \lambda_3\}$ encontramos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;<\; \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \;\; para\ todo \;\; \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Daí,

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \;<\; \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \;\; para\ todo \;\; \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Concluímos assim a demonstração do lema. ∎

Capítulo

3

# Resultado Principal

Neste capítulo mostraremos um resultado de existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o problema (P) usando o Princípio Variacional de Ekeland, o Teorema Min-Max de Ky-Fan e o Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano .
Iniciaremos enunciando os seguintes teoremas.

**Teorema 3.1** *(Princípio Variacional de Ekeland)(ver [16]) Seja* $(X, d) \equiv X$ *um espaço métrico completo e* $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e um funcional semicontínuo inferiormente (l.s.c). Assim dado* $\epsilon > 0$, *existe* $u_\epsilon \in X$ *tal que*

$$I(u_\epsilon) \leq \inf I + \epsilon \quad e \quad I(u_\epsilon) < I(u) + \epsilon d(u_\epsilon, u) \quad com\ u \neq u_\epsilon.$$

**Teorema 3.2** *( Min-max de Ky-Fan)(ver [13]) Seja* $X$ *um espaço de Hilbert e* $A, B \subset X$ *conjuntos convexos. Se* $F : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz*

$$\{v \in X | - F(u, v) < c\} \quad for \quad convexo\ \forall \ \ u \in A,\ c \in \mathbb{R},$$

$$\{u \in X | F(u, v) < c\} \quad for \quad convexo\ \forall \ \ v \in B,\ c \in \mathbb{R},$$

$$F(., v)\ \acute{e}\ semicontinua\ inferiormente\ em\ A, \quad \forall\ v \in B,$$

$$-F(u, .)\ \acute{e}\ \ l.s.c\ em\ B \cap X_n \ \ \forall \ \ u \in A,$$

*onde*

$$X_n \subset X, \quad dim X_n < \infty$$

*existe* $\tilde{v} \in B$ *e* $\lambda > \sup_A \inf_B F(u,v)$ *tal que* $\{u \in A; F(u,\tilde{v}) \leq \lambda\}$ *é compacto. Então,*

$$\sup_B \inf_A F(u,v) \quad = \quad \inf_A \sup_B F(u,v).$$

Enunciaremos e demostraremos agora o resultado principal da nossa dissertação.

Recordemos, primeiramente o problema (P) o qual é dado por

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x) H(u-a) u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função integrável em $\mathbb{R}^N$,

$$h \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \qquad onde \;\; \alpha = \frac{2^*}{2^* - (q+1)}. \tag{H}$$

$H$ é a função Heaviside, isto é,

$$H(x) = \begin{cases} 0 \;\; se \;\; x \leq 0 \\ 1 \;\; se \;\; x > 0 \end{cases}$$

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$.

**Teorema 3.3** *Seja $h$ satisfazendo $(H)$ e assuma $0 \leq q < 2^* - 1$, $\lambda$ $a > 0$. Então,*

*i) Se $0 \leq q \leq 1$ existem $\lambda_* > 0$ e $a_* > 0$, tal que para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e $a \in (0, a_*)$ existe uma função positiva $u_i = u_i(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N), i = 1, 2$ satisfazendo*

$(i)_1$ $-\triangle u_i = \lambda h(x) H(u_i - a) u_i^q + u_i^{2^*-1}$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$

$(i)_2$ $med(\{u_i > a\}) > 0$

$(i)_3$ $I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1)$

*$(ii)$ Se $1 < q < 2^* - 1$, então existe uma função positiva $u_0 = u_0(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$(ii)_1$ $-\triangle u_0 = \lambda h(x) H(u_0 - a) u_0^q + u_0^{2^*-1}$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$

$(ii)_2$ $med(\{u_0 > a\}) > 0$

$(ii)_3$ $I_{\lambda,a}(u_0) > 0.$

**Demonstração**: Vamos considerar primeiramente

**Caso** (i) $0 \leq q \leq 1$.

**Primeira solução :(Teorema do Passo da Montanha)**

Seja $\lambda_0, \lambda_1, a_{*1}$ dados pelos Lemas 2.1 e 2.3. Tomando $\lambda_* = min\{\lambda_0, \lambda_1\}$ então $\lambda \in (0, \lambda_*)$, $a \in (0, a_{*1})$. Vimos pelo Lema 2.1 que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e satisfaz a geometria do passo da montanha. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha existe uma sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_n) \ \to \ c \quad e \quad m(u_n) \to 0,$$

onde $(w_n) \subset \partial I_{\lambda,a}(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ com $m(u_n) = |w_n|_*$ satisfazendo

$$w_n = Q'(u_n) - \lambda \rho_n - \Psi'(u_n)$$

com $(\rho_n) \subset \partial \Phi(u_n)$.

Usando um argumento análogo da prova do Lema 2.3 concluímos que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u_1 \ \ em \ D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(x) \to u_1(x) \ \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N,$$

para algum $u_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $u_1 \geq 0$.

Utilizando o raciocínio feito no Lema 2.3 temos

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \ \ em \ D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

$$\rho_n(x) \to \rho_0(x) \ \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N$$

para algum $\rho_0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\rho_0 \geq 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi dx \ \ \forall \ \ \varphi \in (L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N))^*$$

e assim para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em (2.23) obtemos

$$\langle w_n, \varphi \rangle = Q'(u_n)\varphi - \langle \lambda \rho_n, \varphi \rangle - \Psi'(u_n)\varphi.$$

Desde que $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ então $(\rho_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$. Pelo Teorema da Representação Riesz

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \ \ para \ todo \ \ \varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \ \ para \ todo \ \ \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle w_n, \varphi\rangle &= Q'(u_n)\varphi - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n\varphi dx - \Psi'(u_n)\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\nabla\varphi dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\rho_n\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{2^*-1}\varphi dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como, $u_n \rightharpoonup u_1$, e $|w_n|_* = m(u_n) \to 0$. passando ao limite em (3.1) obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_1\nabla\varphi dx - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\rho_0\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N}(u_1^+)^{2^*-1}\varphi dx.$$

Logo, $u_1$ é solução fraca para a equação

$$-\Delta u_1 = \lambda\rho_0 + u_1^{2^*-1}.$$

Assim,

$$-\Delta u_1 - u_1^{2^*-1} = \lambda\rho_0.$$

Desde que $\rho_0 \in (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ pelo Teorema de Agnom-Douglas-Niremberg (apêndice A) existe uma única $u_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,2^*}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

**Prova de** $(i)_1$ $-\triangle u_1 = \lambda h(x)H(u_1 - a)u_1^q + u_1^{2^*-1}$ *q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$.

Pelo Lema 2.2 temos que

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \ \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$\lambda\rho_0(x) \in \lambda[h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \ \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$-\Delta u_1 - u_1^{2^*-1} \in \lambda[h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \ \ q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Além disso, o Lema 2.3 mostra que $u_n \to u_1$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e pela continuidade de $I_{\lambda,a}$ temos $I_{\lambda,a}(u_n) \to I_{\lambda,a}(u_1)$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = c > 0 \tag{3.3}$$

e $u_1 \not\equiv 0$.

Consideremos agora o conjunto,

$$\Gamma_a(u_1) \;\;=\;\; \{x \in \mathbb{R}^N; u_1(x) = a\}.$$

Afirmamos que

$$med(\Gamma_a(u_1)) \;\;=\;\; 0. \tag{3.4}$$

Suponha por contradição que $med(\Gamma_a(u_1)) > 0$ então do Teorema de Morrey-Stampacchia ([21])

$$-\Delta u_1(x) \;\;=\;\; 0 \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Gamma.$$

De (3.2) temos,

$$-u_1^{2^*}(x) \;\;\in\;\; \lambda[h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \; q.t.p. \; em \; \Gamma.$$

Observe que

$$0 \leq \underline{f}(u_1) \;\;\leq\;\; \overline{f}(u_1) \leq u_1^q(x) \; q.t.p. \; em \; \Gamma.$$

Então,

$$0 \leq \lambda h(x)\underline{f}(u_1) \;\;\leq\;\; \lambda h(x)\overline{f}(u_1) \leq \lambda h(x) u_1^q(x) \; q.t.p. \; em \; \Gamma.$$

Assim,

$$0 \leq \lambda h(x)\underline{f}(u_1) \quad \leq -u_1^{2^*-1}(x) \leq \lambda h(x)\overline{f}(u_1) \leq \lambda h(x)u_1^q(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Gamma,$$

ou seja,

$$0 \leq -u_1^{2^*-1}(x) \quad \leq \lambda h(x)u_1^q(x) \; q.t.p. \;\; em \;\; \Gamma.$$

Como $u_1(x) = a$ para $x$ em $\Gamma$ obtemos

$$0 \quad \leq -a^{2^*-1} \quad \leq \lambda h(x)(a)^q \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Gamma.$$

Logo,

$$a^{2^*-1} \quad \leq 0 \quad \leq \lambda h(x)(a)^q + a^{2^*-1} \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Gamma,$$

isto é,

$$0 \in [a^{2^*-1}, \lambda h(x)a^q + a^{2^*-1}] \;\; q.t.p. \; em \; \Gamma.$$

O que é uma contradição.

Logo, $med(\Gamma_a(u_1)) = 0$.

De (3.2), (3.4) e (2.33) podemos concluir que

$$-\Delta u_1 \quad = \quad h(x)H(u_1 - a)u_1^q + u_1^{2^*-1} \;\; q.t.p. \; em \; \mathbb{R}^N$$

**Prova de** $(i)_2$ $med(\{u_1 > a\}) > 0$.

De fato, suponha por contradição que $med(\{u_1 > a\}) = 0$.

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_1) = 0$$

logo,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx$$

é diferenciável.

Daí,

$$I'_{\lambda,a}(u_1)u_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx. - \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx$$

assim $u_1$ é ponto crítico de $I'_{\lambda,a}(u_1) = 0$.

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Além disso, usando a definição de $S$, temos,

$$S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|u_1\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Lembremos que $S$ é a melhor constante de imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned}
S\left(\int_{\mathbb{R}^N} \|u_1\|^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} \\
S\left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\
S\left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*}\right)^{2.\frac{N-2}{2N}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\
S\left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{N}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\
S &\leq \frac{|u_1|_{2^*}^{2^*}}{(|u_1|_{2^*}^{2^*})^{\frac{N-2}{N}}} = (|u_1|_{2^*}^{2^*})^{1-\frac{N-2}{N}} \\
S &\leq (|u_1|_{2^*}^{2^*})^{\frac{2}{N}} \\
S^{\frac{2}{N}} &\leq (|u_1|_{2^*}^{2^*}) = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_1)dx - \frac{1}{2^*}\|u_1\|_{2^*}^{2^*}.$$

Daí,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx.$$

Como,

$$\|u_1\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx.$$

Temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_1) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx \\ &= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*}\,dx \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, $I_{\lambda,a}(u_1) \geq \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Observe que a última desigualdade contradiz o Lema 2.3 em que $I_{\lambda,a}(u_1) = c < \dfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Portanto, $med(\{u_1 > a\}) > 0$.

Provamos assim que $u_1$ é uma solução do problema $(P)$.

**Segunda solução:(Princípio Variacional de Ekeland)**

**Prova de** $I_{\lambda,a}(u_2) < 0$.

Para mostrarmos a existência de $u_2$ definimos uma função auxiliar.

$$\upsilon_\tau(x) = \begin{cases} \tau a, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2\tau a(1-|x|), & \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $\tau > (q+2)^{\frac{1}{q+1}}$.

Note que $\upsilon_\tau \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}
\|\upsilon_\tau\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \upsilon_\tau|^2 dx &= \int_{\{|x|\leq 1\}} |\nabla \upsilon_\tau|^2 dx + \int_{\{|x|>1\}} |\nabla \upsilon_\tau|^2 dx \\
&= \int_{\{|x|\leq \frac{1}{2}\}} |\nabla(\tau a)|^2 dx + \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |\nabla.(2\tau a(1-|x|))|^2 dx + \int_{\{|x|\geq 1\}} |\nabla 0|^2 dx \\
&= \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |\nabla 2\tau a(1-|x|)|^2 dx \\
&= \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} (2\tau a)^2 |\nabla 1 - \nabla |x||^2 dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |\nabla 1 - \nabla |x|^2| dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |-\nabla |x||^2 dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |\nabla |x||^2 dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$x = \alpha_N r,\ \alpha_N \in S^{N-1} \quad \Rightarrow \quad dx = r^{N-1} ds(\alpha) dr,$$

temos $|x| = r$. Logo $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{x_1}{r}$, implicando em $|\nabla r| = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
||\upsilon_\tau||^2 &= 4\tau^2 a^2 \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} |\nabla(|x|)|^2 dx \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_{\{|x|\leq 1\}} |\nabla(|x|)|^2 dx \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_0^1 \int_{S^{N-2}} |\nabla |\alpha_N r||^p r^{N-1} dsrdr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_0^1 \int_{S^{N-2}} r^{N-1} ds\alpha dr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \alpha_N \int_0^1 r^{N-1} dr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \alpha_N \frac{1}{N} = 4\tau^2 a^2 \omega_N.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||\upsilon_\tau||^2 \leq 4\tau^2\omega_N \tag{3.5}$$

onde $\omega_N$ é a aréa da esfera unitária e $\alpha_N$ é o volume da bola unitária. Se

$$\begin{aligned} a < \frac{\sqrt{r}}{2\tau\sqrt{\omega_N}} = a_1 &\Leftrightarrow 2\tau a\sqrt{\omega_N} < \sqrt{r} \\ &\Leftrightarrow 4\tau a^2\omega_N < r \end{aligned}$$

então,

$$\|\upsilon_\tau\| \leq r^{\frac{1}{2}} < r,$$

onde $r$ é dado pela geometria do passo da montanha, temos $\upsilon_\tau \in B_r$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\upsilon_\tau)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} f(t)dtdx \\ &= \int_{\{|x|\leq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} f(t)dtdx + \int_{\{\frac{1}{2}\leq|x|\leq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} f(t)dtdx \\ &\quad + \int_{\{|x|\geq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} f(t)dtdx. \end{aligned}$$

Recorde que $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx &= \int_{\{|x|\leq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &\quad + \int_{\{\frac{1}{2}\leq|x|\leq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \\ &\quad + \int_{\{|x|\geq 1\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} f(t) = H(t-a)(t^+)^q dtdx. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx &\geq \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx\\
&= \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)\int_0^{a} H(t-a)(t^+)^q dtdx\\
&\quad+\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)\int_a^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx\\
&\geq \int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)\int_a^{\tau_a} (t^+)^q dtdx\\
&= \frac{1}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)((\tau a)^{q+1}-a^{q+1})dx\\
&= \frac{1}{q+1}((\tau a)^{q+1}-a^{q+1})\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx \geq \frac{a^{q+1}(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx. \tag{3.6}$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) = \frac{1}{2}\|\upsilon_\tau\|^2-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx-\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\upsilon_\tau^+)^{2^*}dx$$

Desde que

$$\frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(\upsilon_\tau^+)^{2^*}dx\geq 0,$$

pois $\upsilon_\tau\geq 0$ temos

$$I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) \leq \frac{1}{2}\|\upsilon_\tau\|^2-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\int_0^{\upsilon_\tau} H(t-a)(t^+)^q dtdx.$$

De (3.5)e (3.6)

$$I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) \leq 4\omega_N\tau^2a^2-\lambda a^{q+1}\frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx,$$

ou seja,

$$I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) \leq a^{q+1}\left(4\omega_N\tau^2 a^{1-q} - \lambda\frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx\right).$$

Note que

$$4\omega_N\tau^2 a^{1-q} - \lambda\frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx \leq 0$$

se e somente se,

$$4\omega_N\tau^2 a^{1-q} \leq \lambda\frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx$$

isto é,

$$a^{1-q} \leq \frac{1}{4\omega_N\tau^2}.\lambda\frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx.$$

Fazendo

$$C_{2,\tau} = \frac{1}{4\omega_N\tau^2} \quad e \quad C_{1,\tau} = \frac{(\tau^{q+1}-1)}{q+1}\int_{\{|x|\leq\frac{1}{2}\}} h(x)dx.$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) < 0 \; se \; a^{1-q} < \lambda\frac{C_{1,\tau}}{C_2,\tau} = a_2^{1-q}.$$

Observe que

$$a_1 = \frac{\sqrt{r}}{2\tau\sqrt{\omega_N}}, \quad a_2 = \left(\frac{\lambda C_{1,\tau}}{C_{2,\tau}}\right)^{\frac{1}{q-1}} \quad e \quad a_{*1} > 0.$$

Considerando $a_*(\lambda) = min\{a_1, a_2, a_{*1}\}$. Note que no Lema 2.3, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, além disso $\upsilon_\tau \in B_r$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $I_{\lambda,a}(\upsilon_\tau) < 0$ segue-se

$$\inf_{\overline{B_r}} I_{\lambda,a}(u) \leq \inf_{B_r} I_{\lambda,a}(u) < 0$$

daí,

$$-\infty < \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < 0 \; para \; a \in (0, a_*).$$

Seja $I_{\lambda,a} : \overline{B}_r \to \mathbb{R}$ pelo Princípio Variacional de Ekeland existe $u_\epsilon \in \overline{B}_r$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) \leq \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} + \epsilon \quad e \quad I_{\lambda,a}(u) < I_{\lambda,a}(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\| \;\; u \neq u_\epsilon \;\; \forall\; u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{3.7}$$

Considerando $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \quad \epsilon \quad < \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a} - \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a}$$

temos

$$\epsilon + \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a}.$$

De (3.7) obtemos

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) \quad < \quad \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a}.$$

Assim $u_\epsilon \in B_r^0$, pois caso contrário, se $u_\epsilon \notin B_r^0$ então $u_\epsilon \in \partial B_r$ daí,

$$\inf_{u_\epsilon \in \partial B_r} I_{\lambda,a}(u_\epsilon) < I_{\lambda,a}(u_\epsilon).$$

Seja $\|u_\epsilon\| = d$ e $\delta < r - d > 0$ suficientemente pequeno $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$ tal que $u_\delta = u_\epsilon + \delta v \in \overline{B}_r$.
De fato

$$\|u_\delta\| = \|u_\epsilon + \delta v\| \leq \|u_\epsilon\| + \delta\|v\| \leq d + \delta < r.$$

De (3.7)

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_\epsilon) \quad &< \quad I_{\lambda,a}(u_\delta) + \epsilon\|u_\delta - u_\epsilon\| \\ &< \quad I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) + \epsilon\delta\|v\|. \end{aligned}$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) + \epsilon\delta\|v\| - I_{\lambda,a}(u_\epsilon) > 0.$$

Daí,

$$\limsup_{\delta \to 0}(-\epsilon\|v\|) \quad \leq \quad \limsup_{\delta \to 0} \frac{I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) - I_{\lambda,a}(u_\epsilon)}{\delta} \leq I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon; v).$$

Logo,

$$-\epsilon\|v\| \leq I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon;v).$$

Desde que $u_\epsilon, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 1.1 tem-se

$$I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon;v) \;\;=\;\; \max_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle w, v\rangle \quad \forall \quad u_\epsilon, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$-\epsilon\|v\| \;\;\leq\;\; I^0_{\lambda,a}(u_\epsilon, v) = \max_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v\rangle .$$

Assim,

$$-\epsilon\|v\| \;\;\leq\;\; \max_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v\rangle .$$

Trocando $v$ por $-v$ obtemos

$$-\epsilon\|v\| \;\;\leq\;\; \max_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, -v\rangle = -\min_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, -v\rangle .$$

Assim,

$$-\epsilon\|v\| \;\;\leq\;\; -\min_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v\rangle .$$

Daí,

$$\min_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v\rangle \;\;\leq\;\; \epsilon\|v\| \;\;\forall\; v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Como $\|v\| \leq 1$, concluímos que

$$\min_{\omega\in\partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v\rangle \;\;\leq\;\; \epsilon.$$

Portanto,

$$\sup_{\|v\|\leq 1} \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon.$$

Pelo Teorema Min-max Ky-Fan obtemos

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \sup_{\|v\|\leq 1} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon,$$

como

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \sup_{\|v\|\leq 1} \langle \omega, v \rangle = \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} |w|_*.$$

Logo,

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} |w|_* < \epsilon.$$

Isto, juntamente com (3.7), implica que existe $(u_n) \in \overline{B}_r$ fazendo $\epsilon = \frac{1}{n}$ tal que

$$\inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < I_{\lambda,a}(u_n) < \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} + \frac{1}{n}.$$

Passando ao limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \longrightarrow \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} = \widehat{c}$$

e

$$m(u_n) = |w|_* \longrightarrow 0.$$

Logo $(u_n)$ é uma sequência $(PS)_c$.

Portanto, pelo Lema 2.3 existe uma função $u_2 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e a menos de subsequência de $u_n$ tal que

$$u_n \longrightarrow u_2 \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

como $I_{\lambda,a}$ é $Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ então

$$I_{\lambda,a}(u_n) \longrightarrow I_{\lambda,a}(u_2).$$

Pela unicidade do limite

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a}.$$

Como $\inf\limits_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < 0$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_2) < 0. \tag{3.8}$$

**Prova de** $(i)_3$ De (3.3) e (3.8) segue que

$$I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1).$$

**Prova de** $(i)_2$ $med(\{u_2 > a\}) > 0$. De fato suponhamos por contradição que $med(\{u_2 > a\}) = 0$.

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$$

pois,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_2)dx = 0$$

quando $med(\{u_2 > a\}) = 0$. Daí, $I_{\lambda,a}(u_2)$ se torna um funcional diferenciável e $u_2$ é ponto crítico de $I_{\lambda,a}$, então $I'_{\lambda,a}(u_2) = 0$.

Logo

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx.$$

Como

$$S(\int_{\mathbb{R}^N} |u_2|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx = \int u_2^{2^*}.$$

Assim,

$$S \leq (|u_2|_{2^*}^{2^*})^{\frac{2}{N}} \Leftrightarrow S^{\frac{N}{2}} \leq |u_2|_{2^*}^{2^*}.$$

Temos,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \frac{1}{2}\|u_2\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$$

pois $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_2)dx = 0$ e como $\|u_2\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$, obtemos,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*})\int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx \geq \frac{1}{N}S^{\frac{1}{N}}.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_2) \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \ \text{ e } \ I_{\lambda,a}(u_2) = c.$$

então $c \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ e pelo Lema 2.3 temos $c \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$, o que é uma contradição, portanto $med(\{u_2 > a\}) > 0$.

Seguindo as mesmas idéias feita para a demonstração da primeira solução, segue que $u_2$ é também uma solução do problema (P ) e usando os mesmos argumentos explorados para que $u_1$ satisfizesse $(i)_1$, temos também $u_2$ satisfaz $(i)_1$. A demonstração para o caso $1 < q < 2^* - 1$, segue o mesmo raciocínio da demonstração de $u_1$.

Finalizando a prova do Teorema. $\blacksquare$

Apêndice

$\mathcal{A}$

# Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos alguns lemas e teoremas. Esses resultados foram usados para obter soluções do problema (P) no capítulo 2 e no capítulo 3.

**Teorema A.1** *(Brézis e Lieb)(ver [24]) Seja $\Omega$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se*

*(i) $(u_n)$ é limitada em $L^p(\Omega)$*

*(ii) $u_n \to u$ q.t.p em $\Omega$, então*

$$\lim_{n \to +\infty} \Big( |u_n|^p_{L^p(\Omega)} - |u_n - u|^p_{L^p(\Omega)} \Big) \ = \ |u|^p_{L^p(\Omega)}$$

**Lema A.1** *(Brésiz e Lieb )(ver [12]) Seja $\Omega$ um subconjunto de aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p$. Suponha que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\Omega$ e que existe $C > 0$, tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

*Então,*

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \ \longrightarrow \ \int_\Omega f \varphi dx, \ \ \forall \ \varphi \in L^q(\Omega),$$

*onde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

**Lema A.2** *(Lema de Fatou)(ver [17]) Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções mensurável e* $g, h$ *são funções integráveis então*

*a)*$f_n \leq g$ *q.t.p. para todo* $n \Rightarrow \int \limsup f_n \geq \limsup \int f_n$.

*b)*$f_n \geq h$ *q.t.p. para todo* $n \Rightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

**Teorema A.2** *(Teorema da Convergência Dominada de Lesbeque)(ver [11]) Seja* $(f_n)$ *uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para função mensurável* $f$*. Se existe uma função integrável* $g$ *tal que*

$$|f_n| \leq g \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}$$

*então* $f$ *é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema A.3** *(Desigualdade de Hölder)(ver [11]) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^p(\Omega)$*, onde* $1 \leq p < +\infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \ e \ \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder é a sequinte. Sejam* $f_1, f_2, f_3. \cdots, f_k$ *funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k \ \ com \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

*Então o produto*

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$$

*e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^s(\Omega)$ para todo $p \leq s \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$\|f\|_{L^s(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \text{ com } \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \ (0 \leq \alpha \leq 1).$$

**Teorema A.4** *(Teorema da Representação de Riesz)(ver [11]) Seja $1 < p < \infty$ e $\varphi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega g f d\mu, \ \forall \ f \in L^p(\Omega).$$

*Além disso, $\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$.*

**Teorema A.5** *(Teorema de Agnom- Douglas - Niremberg)(ver [19])*

*Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ que é solução fraca do da equação,*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \text{ em } \Omega \\ u & = & 0, \ \ \partial\Omega \end{array} \right.$$

*Além disso, existe uma constante $C$ independente de $f$ e $u$ tal que $||u||_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_{p.}$.*

**Teorema A.6** *(ver [11]) Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo.Se $(x_n)$ é uma sequência limitada em $X$, então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que*

$$x_n \rightharpoonup x \ \text{ em } X.$$

**Teorema A.7** *(ver [11]) Sejam $(f_n)$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

*Então, a menos de subsequência,*

*(1) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em $\Omega$*

*(2) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em $\Omega$, onde $g \in L^p(\Omega)$.*

**Teorema A.8** *(Teorema do Valor Médio)(ver [20]) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f$ *for derivável em* $(a, b)$*, então existe* $\lambda \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(\lambda) \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Lema A.3** *(ver [23]) O Gradiente Generalizado de uma função* $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ $(\partial f(x))$ *é sempre um conjunto diferente do vazio.*

**Teorema A.9** *(Teorema de Hahn- Banach, 2º Forma Geométrica) (ver[11]) Sejam* $A, B \subset X$ *convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que* $A$ *é fechado e* $B$ *é compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa no sentido estrito os conjuntos* $A$ *e* $B$*.*

Apêndice

$\mathcal{B}$

# Funcionais Diferenciáveis

**Definição B.1** *(ver [24], pg 07) Seja $X$ um espaço normado e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $J$ é Gâteaux diferenciável em $u$ quando,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + th) - J(u)}{t}$$

*existe.*

**Definição B.2** *(ver [24], pg 07) Seja $X$ um espaço normado e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que $J$ é Frechet diferenciável em $u \in X$ se existir $L : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear tal que*

$$\frac{J(u + h) - J(u) - L(h)}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|h\| \to 0.$$

**Proposição B.1** *(ver [24], pg 08) Se a diferencial de $J$ no sentido de Gateaux é contínua em $X$, então $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

**Afirmação B.1** *O funcional $\Psi$ é de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

De fato, seja a função

$$\begin{array}{rcl} \Psi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \Psi(u) = \dfrac{1}{2^*} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx. \end{array}$$

Inicialmente, vamos mostrar que a função $\Psi$ está bem definido. De fato, desde que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $u^+ \leq |u|$ então

$$\Psi(u) = \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}(u^+)^{2^*}dx \leq \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}dx = \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*} < +\infty.$$

Mostraremos que $\Psi$ é Gateaux diferenciável. Sem perder a generalidade podemos supor que $u \geq 0$, $u^+ = u$.

Além disso, considere $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(s) = \dfrac{1}{2^*}(u + stv)^{2^*}$ para todo $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, com $t$ fixado.

Desde que a função $f$ é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$ do Teorema do Valor Médio, existe $\theta$ tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\theta)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^*}(u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*}u^{2^*} = (u + \theta tv)^{2^*-1}tv$$

Passando ao limite na expressão acima com $t \to 0$, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^*}(u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*}u^{2^*}}{t} = \lim_{t\to 0}(u + \theta tv)^{2^*-1}.v$$

Note que $|(u+\theta tv)^{2^*-1}v| = (|u+\theta tv|)^{2^*-1}|v| \leq (|u|+|v|)^{2^*-1}|v|$, pois $|t| < 1$ e com $\theta \in (0,1)$ implica que $|\theta|.|t| < 1$. Logo,

$$|(u + \theta tv)^{2^*-1}v| \leq (|u| + |v|)^{2^*-1}|v|.$$

Observe que $|v| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $(|u|+|v|)^{2^*-1} \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1$ assim pela desigualdade de Hölder

$$|v|(|u| + |v|)^{2^*-1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{2^*}(u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*}u^{2^*}}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N}uvdx.$$

Note que o primeiro membro da iqualdade é justamente a derivada de Gateâux de $\Psi$. Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1}.vdx$ é o candidato natural para ser $\Psi'(u)v$.

Vamos mostrar que $\Psi'(u)$ é contínua no dual $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_n \ \rightarrow \ u \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

pela imersão contínua de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$u_n \ \rightarrow \ u \ \ em \ \ L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

então a menos de subsequência

$$u_n(x) \ \rightarrow \ u(x) \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N \tag{B.1}$$

e existe $g \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n(x)| \ \leq \ g(x) \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N. \tag{B.2}$$

Decorre de (B.1) e (B.2) que

$$u_n^{2^*-1}(x) \ \rightarrow \ u^{2^*-1}(x) \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N$$

$$|u_n^{2^*-1}(x)| \ \leq \ |g^{2^*-1}(x)| \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N.$$

Assim se $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tem-se que

$$u_n^{2^*-1}(x)v(x) \ \rightarrow \ u^{2^*-1}(x)v(x) \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n^{2^*-1}(x)v(x)| \ \leq \ |g^{2^*-1}v| \ \ q.t.p. \ \ \text{em} \ \ \mathbb{R}^N.$$

Observe que $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $g^{2^*-1} \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1$, assim pela desigualdade de Hölder

$$|g^{2^*-1}||v| \ \in \ L^1(\mathbb{R}^N)$$

de onde segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx \ \to \ \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx \ \ \textit{quando } n \to +\infty.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\Big|\Psi'(u_n)v - \Psi'(u)v\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}) v dx\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}||v| dx.
\end{aligned}$$

Como $(u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ pela desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}||v| dx \ \leq \ |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} |v|_{2^*}.$$

Usando as imersões contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Obtemos

$$|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} |v|_{2^*} \leq C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|.$$

Desde que $\|v\| \leq 1, \ \forall \ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue-se

$$C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\| \leq C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \Big|\Psi'(u_n)v - \Psi'(u)v\Big| \ \leq \ C|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que

$$u_n \to u \ \ em \ \ L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

então,

$$u_n^{2^*-1} \to u^{2^*-1} \ \ em \ \ L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ quando \ n \to +\infty.$$

Mostrando que $\Psi'(u)$ é contínua no $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, o funcional $\Psi \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Afirmação B.2** *O funcional $Q$ é de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

De fato, seja a função

$$\begin{array}{rcl} Q : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & Q(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \end{array}$$

Além disso,

$$Q'(u)v = \langle u, v \rangle \qquad \forall \ v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Primeiro mostraremos que $Q$ é Gáteâux diferenciável. Sejam $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{Q(u+tv) - Q(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+tv, u+tv \rangle - \frac{1}{2}\langle u, u \rangle}{t}$$

ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = \lim_{t \to 0} \frac{t\langle u, v \rangle - t^2 \langle u, u \rangle}{t} = \langle u, v \rangle .$$

Assim, $\langle u, v\rangle$ é o candidato natural para ser $Q'(u)v$. Observe que $Q$ é diferenciável a Fréchet, pois

$$\frac{Q(u+v)-Q(u)-\langle u,v\rangle}{\|v\|} = \frac{\frac{1}{2}\langle u+v,u+v\rangle-\frac{1}{2}\|u\|^2-\langle u,v\rangle}{\|v\|} = \frac{\|v\|}{2}.$$

Passando ao limite $\|v\| \to 0$ obtemos

$$\lim_{\|v\|\to 0}\left(\frac{Q(u+v)-Q(u)-\langle u,v\rangle}{\|v\|}\right) = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|}{2} = 0.$$

Mostrando que $Q$ é diferenciável a Fréchet. Afirmamos que $Q$ é contínua. Observe que $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{B.3}$$

Para mostrar que $Q'$ é contínuo, devemos verificar que

$$Q'(u_n) \to Q'(u) \quad \text{em} \quad (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$$

isto é,

$$\|Q'(u_n)-Q'(u)\|_* = \sup_{\|v\|\le 1} |\langle Q'(u_n)-Q'(u), v\rangle| \to 0.$$

Dado $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \le 1$ temos

$$\begin{aligned}
|\langle Q'(u_n)-Q'(u), v\rangle| &= |\langle Q'(u_n), v\rangle - \langle Q'(u), v\rangle| \\
&= |\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| \\
&= |\langle u_n - u, v\rangle| \\
&\le \|u_n - u\|\|v\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$| \langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle | \quad \leq \quad \|u_n - u\| \|v\|$$

para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$.

Donde segue que

$$F \sup_{\|v\| \leq 1} | \langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle | \quad \leq \quad \|u_n - u\|.$$

Passando ao limite $n \to \infty$, obtemos de (B.3)

$$\sup_{\|v\| \leq 1} | \langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle |_* \quad = \quad 0.$$

Mostrando que $Q \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R})^N, \mathbb{R})$.

# *Bibliografia*


[1] Alves C. O e Bertone A. M., *A discontinuous problem involving the p-Laplacian operator and critical expoenent in* $\mathbb{R}$, Electronic J. Diff. Eqs, Vol. 2003 (2003), No. 42, pp. 1-10.

[2] Alves C. O. ; Bertone A. M. e Gonçalves J. V., *A variational approach to discontinuous problems with Critical Sobolev exponents,* J. Math. Anal. App., 265 (2002) 103-127.

[3] Ambrosetti A. Calahorrano M. e Dobarro F., *Global branching for discontinuous problems,* Comm. Math., 31 (1990)213-222.

[4] Ambrosetti A. and Turner R., *some discontinuous variational problemss,* Differential Integral Equations., 1, N$^o$ 3(1988) 341-349.

[5] Arcoya A. and Calahorrano M.,*some discontinuous variational problems with a quasilinear operador,* J. Math. Anal. 187 (1994), 1059-1072.

[6] Badiale M.,*Critical exponent and discontinuous nonlinearities,* Differential Integral Equations 6 (1993), 1173-1185.

[7] Badiale M.,*Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities,* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993), 331-342.

[8] Badiale M.,*Some existence results for sublinear elliptio problems in* $\mathbb{R}^N$, Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996), 183-202.

[9] Badiale M. and Tarantello. G,*Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities,* Nonlinear Analysis, 26 (1997), 639-677.

[10] Bertone A. M., *Problemas elípticos com não linearidades descontínuas: princínpios variacionais e o método de sub e supersoluções,* tese de doutorado, UFPb, 1998

[11] Brézis H., *Análisis Funcional,* Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[12] Brézis H. e Lieb.E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals,* Proc. Amer. Math. Soc, 88(1983), 486-490 .

[13] Brézis H. Nirenberg L. e Stampacchia G., *Remarks on Ky Fan's min-max theorem,* Boll. Un. Math. Ital. 6 (1972), 293-300.

[14] Chang K.C., *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations,* J. Math. Anal. 80 (1981), 102-129.

[15] Clarke F.H., *Generalized gradients and applications,* Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247-262.

[16] Ekeland I., *On the variational principle,* J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.

[17] Fenandez P. J., *Medida e Integração,* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976

[18] Grossinho M. R. e Tersian S.A., *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations,* 2001

[19] Kavian O., *Introduction a la Théorie des Points Critiques,* Springer-Verlag, 1993.

[20] Lima E. L. *Curso de Análise,* Vol 1, (10ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 2002.

[21] Morry C. B. *Multiple integrals in calculus of variational,* Springe, Berlim, 1966.

[22] Nascimento R. G., *Problemas elípticos não-locais do tipo p-kirchhoff,* Campinas, tese de doutorado, S. P. 2008

[23] Santos J. A., *Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações,* dissertação de mestrado, CCT-UFCG, 2007.

[24] Willem M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.