UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dissertação de Mestrado

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condições de fronteira de Neumann

Amanda Suellen Sena Corrêa

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Amanda Suellen Sena Corrêa

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condições de fronteira de Neumann

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM

2010

Corrêa, Amanda Suellen Sena

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condições de fronteira de Neumann / (Amanda Suellen Sena Corrêa); orientador, Giovany de Jesus Malcher Figueiredo. - 2010.

92 f. il. 28cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2010.

1.Equações Diferenciais Elípticas. I .Figueiredo, Giovany de Jesus Malcher, orient. II.Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. III. Título

CDD 22. ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Amanda Suellen Sena Corrêa

Multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condições de fronteira de Neumann

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 24 de Março de 2010.

Conceito:_______________

Banca Examinadora

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto -
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

Dedicatória

Aos meus pais, Sunamita e Tadeu.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que tem derramado inúmeras bençãos em minha vida e que graças a ele tenho obtido sucesso em minha carreira acadêmica.

Aos meu pais e meu irmão que sempre me deram o apoio necessário para que eu alcançasse meus objetivos.

Ao estimado orientador Giovany Figueiredo pelas orientações que me foram concedidas e pelos ensinamentos que obtive com este profissional dedicado e competente.

Aos professores Marco Aurélio e Geraldo Araújo por terem aceito gentilmente participar da banca examinadora e pelas sugestões que enriqueceram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Pablo e Rúbia por suas valiosas contribuições.

Aos meus queridos amigos Cláudia (maninha), Rafael (maninho), Gelson e Marcelo Jorge pela grande amizade, apoio e pelas contribuições e aos demais colegas Denilson, João, Marco, Elifaleth, Rômulo, Adam e Dalmi pelos momentos que compartilhamos.

Ao Valdinho por todos os momentos de alegria, carinho e companheirismo.

À capes pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação mostraremos a existência de uma solução ground-state e a existência de uma solução nodal para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + & |u|^{p-2}u &= & Q(x)f(u) \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}, \\ & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} &= & 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde Δ_p é o operador p-Laplaceano, $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo condições que serão definidas ao longo deste trabalho.

Palavras-chave: Equação Elíptica Quasilinear. p-Laplaceano. Método Variacional.

Abstract

In this work we will show the existence of a ground-state solution and the existence of a nodal solution for the following class of the problems:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta_p u + \ |u|^{p-2}u & = & Q(x)f(u) \ \ in \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 \ \ on \ \ \partial\Omega. \end{array}\right. \qquad (P)$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator, $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous functions that satisfy conditions which will be stated later.

Key-words: Elliptic quasilinear equation. p-Laplacian. Variational method.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho apresentaremos os resultados mostrados no artigo de Alves, Carrião e Medeiros [2] sobre a existência e multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas quasilineares em domínio exterior com condições de fronteira de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + & |u|^{p-2}u & = & Q(x)f(u) \quad em \quad \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}, \\ & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} & = & 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $2 \leq p < N$ e $\Delta_p u$ é o operador p-Laplaceano, isto é,

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

Q é uma função contínua satisfazendo

$$Q(x) > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}, \qquad \lim_{|x| \to \infty} Q(x) = \bar{Q} > 0, \tag{1}$$

e a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar de classe C^1 satisfazendo as seguintes hipóteses:

(f_1) Existem $2 \leq p < q+1 < \eta + 1 < p^* = Np/(N-p)$ verificando

$$\lim_{|s| \to 0} \frac{|f'(s)|}{|s|^{q-1}} = 0, \qquad \limsup_{|s| \to \infty} \frac{|f'(s)|}{|s|^{\eta-1}} < +\infty.$$

(f_2) Existe $\theta \in (p, \eta+1]$ tal que $0 < \theta F(s) \leq sf(s)$, $\forall \ s \neq 0$, sendo $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

(f_3) A função $s \to f(s)/s^{p-1}$ é crescente em $(0, +\infty)$.

Mais precisamente, mostraremos a existência de duas soluções para o problema (P). A primeira é uma solução positiva ground-state, ou seja, uma solução $u_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ que é positiva e que realiza o mínimo

$$I(u_1) = min\left\{I(u) : u \neq 0 \ \text{ é uma solução de } (P)\right\}.$$

A segunda solução de (P) que iremos mostrar é uma solução nodal, ou seja, uma solução que muda de sinal.

Em [3], Benci e Cerami estudaram o problema (P) assumindo que $p = 2$, $Q \equiv 1$ e $f(u) = |u|^{\eta-1}u$ com $1 < \eta < (N+2)/(N-2)$. Eles mostraram que (P), com a condição de Dirichlet, não tem uma solução ground-state. Contudo, Esteban [8] provou que o mesmo problema com a condição de Neumann tem uma solução ground-state.

Em [7], Cao estudou o problema (P) para $p = 2$, $f(u) = |u|^{\eta-1}u$ e Q satisfazendo a condição (1). O autor mostrou que o problema possui ao menos duas soluções, onde a primeira solução está relacionada com o problema de minimização

$$I(\Omega) = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) : \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} Q(x)|u|^{\eta+1} = 1 \right\}$$

e a segunda solução é nodal.

Neste trabalho, usaremos técnicas variacionais, como o Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale, para obter uma solução ground-state positiva. Em relação a solução nodal, aplicaremos o teorema da função implícita.

Estamos inicialmente interessados em encontrar soluções fracas para (P). Por uma solução fraca, entendemos uma função $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ que verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi + |u|^{p-2} u \phi) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x) f(u) \phi, \ \forall \ \phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}).$$

Afim de obter tais soluções, note que a equação em (P) nada mais é do que a equação de Euler-Lagrange do funcional $I : W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u|^p + |u|^p) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x) F(u),$$

onde $F(u) = \int_0^u f(t)dt$. Além disso, $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}), \mathbb{R})$ com derivada dada por

$$I'(u)\phi = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi + |u|^{p-2} u \phi - Q(x) f(u) \phi \right), \ \forall \ u, \phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}).$$

Sendo assim, as soluções fracas de (P) são exatamente os pontos críticos de I, isto é, as funções $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ tais que $I'(u) = 0$.

Um ponto principal neste trabalho é uma versão de um lema de compacidade global para estudar o comportamento de sequências Palais-Smale, o qual é uma adaptação dos autores de [2] para o p-Laplaceano de um resultado de Benci e Cerami [3].

Como é bem conhecido, as imersões $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$, $p \leq s \leq p^*$, são contínuas e não compactas por isso, em geral, a condição Palais-Smale não se verifica. Entretanto, demonstraremos que a mesma ocorre para o funcional associado ao problema (P), abaixo de um nível fixado. Lembramos que o funcional $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}), \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível c se toda sequência $(PS)_c$, ou seja, $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ possui uma subsequência convergente.

Nosso trabalho será estruturado da seguinte maneira:

No capítulo 1, demonstraremos alguns lemas técnicos necessários para provarmos os teoremas principais e mostraremos também que o problema limite tem uma solução ground-state.

No capítulo 2, mostraremos a existência de solução ground-state positiva para o problema (P). O principal resultado a ser demonstrado neste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1 *Suponha que f satisfaz $(f_1), (f_2)$, e (f_3), $p \geq 2$ e a função Q satisfaz (1) e*

$$Q(x) \geq \bar{Q} - Ce^{-m|x|}, \quad |x| \to \infty, \tag{2}$$

onde C é uma constante positiva e $m > p(q+1)/((q+1)-p)$. Então (P) tem uma solução ground-state positiva.

No capítulo 3, provaremos a existência de solução nodal para o problema (P). Para este resultado, necessitaremos da seguinte hipótese:

(f_4) Existe $\eta \leq \sigma \leq p^* - 1$ verificando

$$f'(t)t + (1-p)f(t) \geq C|t|^{\sigma-1}t, \ \forall\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Segue abaixo o resultado principal que será obtido nesse capítulo:

Teorema 0.2 *Suponha que f satisfaz $(f_1), (f_2), (f_3)$, e (3), $p \geq 2$, e a função Q satisfaz (1) e*

$$Q(x) \geq \bar{Q} + Ce^{-\gamma|x|}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

onde C é uma constante positiva e $\gamma < q/(q+1)$. Então, (P) tem uma solução nodal.

A solução nodal obtida pertence ao seguinte conjunto fechado:

$\mathcal{M} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) : u^+ \not\equiv 0, u^- \not\equiv 0, I'(u^+)u^+ = 0 = I'(u^-)u^- \right\}.$

No Apêndice A, mostraremos que o funcional associado ao problema (P) é de classe C^1.

No Apêndice B, enunciaremos os principais resultados utilizados durante o nosso estudo.

No Apêndice C, faremos uma caracterização do nível minimax do funcional I, adequada aos nossos propósitos.

No corpo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$\bar{B}_r(x)$: fecho da bola aberta de centro x e raio r,

$\bar{\Omega}$: fecho do conjunto Ω,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int_\Omega f$: denota $\int_\Omega f(x)dx$,

$|f|_s = |f|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$|f|_{s(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})} = |f|_{L^s(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})} = \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |f(x)|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s \leq \infty$,

$\|u\|^p = \|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})} = \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u|^p dx \right)$,

$A(h) = o(|h|)$ desde que $|\frac{A(h)}{|h|}| \rightarrow 0$ quando, $|h| \rightarrow 0$,

$A(h) = O(|h|)$ desde que $|\frac{A(h)}{|h|}|$ é limitado.

Capítulo 1

Lemas Técnicos e Solução Ground-State para o problema limite

Neste capítulo demonstraremos alguns lemas técnicos que servirão de auxílio na demonstração dos principais teoremas deste trabalho e mostraremos também que o problema limite possui uma solução ground-state.

Notemos primeiramente que a condição de crescimento dada por (f_1) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$|f(s)| \leq \epsilon |s|^q + C_\epsilon |s|^\eta, \ \forall \ s \in \mathbb{R}\,.$$

De fato, como $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{|f'(s)|}{|s|^{q-1}} = 0$ então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|s| < \delta$ tem-se

$$|f'(s)| < \epsilon |s|^{q-1}. \tag{1.1}$$

E de $\limsup\limits_{|s|\to \infty} \dfrac{|f'(s)|}{|s|^{\eta-1}} < +\infty$ temos que dado $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|s| > M$ tem-se

$$|f'(s)| < l' |s|^{\eta-1}, \tag{1.2}$$

onde $l' = \epsilon + l$ e $l = \limsup\limits_{|s|\to \infty} \dfrac{|f'(s)|}{|s|^{\eta-1}}$.

Agora, analisemos o caso em que $\delta \leq |s| \leq M$.

Sendo $f \in C^1$ então f' é contínua e como toda função contínua, assumindo valores reais, definida num compacto é limitada existe $k > 0$ tal que

$$|f'(s)| \leq k |s|^{\eta-1}. \tag{1.3}$$

De (1.1), (1.2), (1.3) obtemos

$$|f'(s)| < \epsilon|s|^{q-1} + (l' + k)|s|^{\eta-1}, \ \forall \ |s| \geq 0,$$

ou seja,

$$|f'(s)| < \epsilon|s|^{q-1} + (l' + k)|s|^{\eta-1}, \ \forall \ s \in \mathbb{R}\,.$$

Como

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t f'(s)ds\right| &\leq \int_0^t |f'(s)|ds \\ &\leq \int_0^t \epsilon|s|^{q-1}ds + \int_0^t (l'+k)|s|^{\eta-1}ds \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq \epsilon\int_0^t |s|^{q-1}ds + (l'+k)\int_0^t |s|^{\eta-1}ds \\ |f(t)| &\leq \frac{\epsilon}{q}|t|^q + C_\epsilon|t|^\eta, \quad \forall \ t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Na argumentação que vamos usar e que aparece em [2] é muito importante o estudo do seguinte problema limite:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \bar{Q}f(u) \quad em \ \ \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{P_∞}$$

onde $I_\infty : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é o funcional relacionado a (P_∞) dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p + |u|^p) - \int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}F(u).$$

Com argumentos semelhantes encontrados no Apêndice A, prova-se que $I_\infty \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ com

$$I'_\infty(u)w = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p-2}|u|w - \int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f(u)w, \ \forall \ w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e, portanto, pontos críticos de I_∞ são soluções fracas de (P_∞). Uma condição necessária para que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ seja ponto crítico de I_∞ é que $I'_\infty(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari:

$$\mathcal{N}_\infty = \Big\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\} : I'_\infty(u)u = 0 \Big\}.$$

Lema 1.1 *O funcional I_∞ verifica a Geometria do Passo da Montanha, isto é,*

(i) Existem $r, \rho > 0$ tais que $I_\infty(u) \geq r$, $\|u\| = \rho$,

(ii) Existe $e \in B^c_\rho(0)$ tal que $I_\infty(e) < 0$.

Demonstração: (i) Usando a condição de crescimento da função f temos

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &= \frac{\|u\|^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}F(u) \\ &\geq \frac{\|u\|^p}{p} - \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}|u|^{q+1} - C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}|u|^{\eta+1} \\ &\geq \frac{\|u\|^p}{p} - C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q+1} - C_2 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\eta+1}. \end{aligned}$$

Pela imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$, com $p \leq r \leq p^*$, resulta

$$I_\infty(u) \geq \frac{\|u\|^p}{p} - K_1\|u\|^{q+1} - K_2\|u\|^{\eta+1}.$$

Seja $\rho > 0$ a ser fixado posteriormente. Para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|u\| = \rho$, temos

$$I_\infty(u) \geq \frac{\rho^p}{p} - K_1\rho^{q+1} - K_2\rho^{\eta+1}.$$

Vamos escolher $\rho > 0$ de tal forma que

$$\frac{\rho^p}{p} - K_1\rho^{q+1} - K_2\rho^{\eta+1} > 0$$

ou ainda,

$$\rho^{\eta+1}\left[\frac{1}{\rho^{\eta+1-p}p} - \frac{K_1}{\rho^{\eta-q}} - K_2\right] > 0.$$

Como $\rho^{\eta+1} > 0$ então devemos ter

$$\frac{1}{\rho^{\eta+1-p}p} - \frac{K_1}{\rho^{\eta-q}} - K_2 > 0.$$

Assim,

$$\frac{1}{\rho^{\eta-q}}\left[\frac{1}{\rho^{q+1-p}p} - K_1\right] > K_2.$$

Se $\dfrac{1}{\rho^{\eta-q}} > K_2$ e $\dfrac{1}{\rho^{q+1-p}p} > K_1$ encontramos

$$\rho_1 < \left(\frac{1}{K_2}\right)^{\frac{1}{\eta-q}} \quad \text{e} \quad \rho_2 < \left(\frac{1}{pK_1}\right)^{\frac{1}{(q+1-p)}}.$$

Basta então tomarmos

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}min\{\rho_1, \rho_2\}$$

e, portanto, existem números reais positivos r e ρ tais que

$$I_\infty(u) \geq r > 0, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\ com\ \ \|u\| = \rho.$$

(ii) Da condição (f_2) temos

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \forall\ s \neq 0.$$

Assim, podemos supor

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \forall\ s > 0.$$

Com isto,

$$\int_1^s \frac{\theta}{t} dt \leq \int_1^s \frac{f(t)}{F(t)} dt,$$

mostrando que

$$F(s) \geq C|s|^\theta, \forall\ s > 1, \tag{1.4}$$

onde $C = F(1) > 0$. Considerando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\varphi > 0$ e $t > 0$ temos

$$I_\infty(t\varphi) = \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}F(t\varphi),$$

e portanto

$$I_\infty(t\varphi) = \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}F(t\varphi) \leq \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - Ct^\theta \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}|\varphi|^\theta.$$

Desde que $p < \theta$, passando ao limite de $t \to +\infty$ obtemos $I_\infty(t\varphi) \to -\infty$, de onde concluímos que existe $t_0 > 0$ tal que $e = t_0\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $I_\infty(e) < 0$.

■

Em vista do Lema 1.1, podemos aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale (Lema B.6 no Apêndice B) e concluir que existe uma sequência (u_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_\infty(u_n) \to c_\infty \ \text{ e } \ I'_\infty(u_n) \to 0,$$

com

$$0 < c_\infty = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \le t \le 1} I_\infty(\gamma(t)).$$

Usando um raciocínio semelhante ao encontrado no Apêndice C, temos a seguinte caracterização para c_∞, a qual é mais adequada para a resolução do problema (P_∞), dada por

$$c_\infty = \inf_{u \in W^{1,p} \setminus \{0\}} \sup_{t \ge 0} I_\infty(tu) = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I_\infty(u).$$

O próximo Lema descreverá propriedades importantes de uma sequência Palais-Smale para o funcional I_∞.

Lema 1.2 *Seja (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para I_∞. Então*

a) (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

b) $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, a menos de subsequência.

c) $I'_\infty(u) = 0$.

Demonstração: Note que $I'_\infty(u_n) \to 0$ em $(W^{1,p}(\mathbb{R}^N))'$ implica que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\theta} I'_\infty(u_n)u_n &\le \frac{1}{\theta} |I'_\infty(u_n)u_n| \\ &\le \frac{1}{\theta} \|I'_\infty(u_n)\| \|u_n\| \\ &\le k\|u_n\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

onde $k > 0$. Desde que $I_\infty(u_n) \to c$, existe $C > 0$ tal que $I_\infty(u_n) \le C$, logo

$$I_\infty(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\infty(u_n)u_n \le C + k\|u_n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando a condição (f_2), temos

$$\begin{aligned} C + k\|u_n\| &\ge I_\infty(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_\infty(u_n)u_n \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} \left[\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right] \\ &\ge \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1\|u_n\|^p \leq C + k\|u_n\|, \tag{1.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C_1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) > 0$. Suponhamos por contradição que, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to +\infty$. Então, multiplicando (1.5) por $\frac{1}{\|u_n\|}$, para n suficientemente grande obtemos

$$C_1\|u_n\|^{p-1} \leq k$$

o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto, a sequência (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Sendo $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach reflexivo então, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Usando o Lema B.5 (ver Apêndice B), temos

$$u_n(x) \to u(x) \quad q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N.$$

Podemos usar o Lema de Brézis-Lieb (Lema B.3 no Apêndice B) e concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\omega &\to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\omega, \ \forall\ \omega \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p-2}u_n\omega &\to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}u\omega, \ \forall\ \omega \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\
\int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(u_n)\omega &\to \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(u)\omega, \ \forall\ \omega \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)
\end{aligned}$$

e, portanto, usando a unicidade do limite

$$I'_\infty(u) = 0.$$

■

Observe que o Lema 1.2 não nos permite concluir que o ponto crítico u é não trivial. O próximo Lema descreve um comportamento da sequência Palais-Smale para o funcional I_∞ e será usado para obtermos uma solução não trivial para o problema (P_∞).

Lema 1.3 *Seja I_∞ o funcional associado a (P_∞) e (u_n) uma sequência $(PS)_d$ para I_∞ com $u_n \rightharpoonup 0$. Então somente um dos itens abaixo ocorrem:*

a) $u_n \to 0$ *em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *ou*

b) Existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ *e constantes* $R, \beta > 0$ *tais que*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponha que $b)$ não ocorre. Assim, para todo $R > 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_n|^p = 0$$

e desde que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue-se de um resultado devido a Lions (Lema B.7 no Apêndice B) que

$$u_n \to 0 \quad em \quad L^s(\mathbb{R}^N) \quad com \quad s \in (p, p^*).$$

Dado $\epsilon > 0$, da condição de crescimento da função f obtemos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} f(u_n) u_n \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} |u_n|^{q+1} + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} |u_n|^{\eta+1}$$

e, portanto, sendo ϵ arbitrário, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} f(u_n) u_n \to 0.$$

Relembrando que $I'_\infty(u_n)u_n = o_n(1)$, segue-se que

$$u_n \to 0 \quad em \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto $a)$ ocorre.

■

Teorema 1.1 *Sob as hipóteses* $(f_1) - (f_3)$*, o problema* (P_∞)*, possui uma solução ground-state positiva* $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Se o limite fraco u da sequência $(PS)_c$ para o funcional I_∞ for não trivial então do Lema 1.2, u é solução fraca do problema (P_∞). Portanto,

$$I'_\infty(u)\varphi = 0, \ \forall \ \varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

ou ainda,

$$I'_\infty(u)u^- = \|u^-\|^p = 0,$$

assim $u(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Por Li Gongbao [10] (Teorema 1.11),

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \ \ e \ \ u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \ \ com \ \ 0 < \alpha < 1.$$

Da desigualdade de Harnack [9], $u(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N$. Considerando $u \equiv 0$ não podemos ter $u_n \not\to 0$, pois da continuidade do funcional I_∞ e da unicidade do limite teríamos $c = c_\infty = 0$ o que é absurdo. Assim, do Lema 1.3, existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ e constantes positivas β e R tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0.$$

Definindo $v_n(x) = u_n(x+y_n)$, da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação, segue-se que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, da reflexividade deste espaço, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, usando as imersões compactas de Sobolev e fazendo mudança de variável temos

$$\int_{B_R(0)} |v|^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |v_n|^p = \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R(y_n)} |u_n|^p \geq \beta > 0,$$

consequentemente, $v \neq 0$. Observe também que

$$I_\infty(v_n) = I_\infty(u_n) = c + o_n(1)$$

e além disso, para todo $\psi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|\psi\| \leq 1$, segue-se que

$$|I'_\infty(v_n(x))\psi(x)| = |I'_\infty(u_n(x+y_n))\psi(x)| = |I'_\infty(u_n(z))\psi(z-y_n)|,$$

de onde encontramos

$$\|I'_\infty(v_n)\| \leq \|I'_\infty(u_n)\| = o_n(1).$$

Portanto, (v_n) é uma sequência $(PS)_c$ para I_∞ e v é solução positiva do problema (P_∞) com $v \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos que esta solução é ground-state. De fato, desde que v é solução não trivial, segue-se que $I'_\infty(v)v = 0$ implicando que $v \in \mathcal{N}_\infty$ e assim $c_\infty \leq I_\infty(v)$. Além disso,

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(v) \\ &= I_\infty(v) - \frac{1}{p} I'_\infty(v)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v)v - \bar{Q}F(v)\right] \end{aligned}$$

e do Lema de Fatou (Lema B.1 no Apêndice B),

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(v) \\ &\leq \liminf_{n\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} f(v_n)v_n - \bar{Q}F(v_n)\right] \\ &= \liminf_{n\to 0} I_\infty(v_n) \\ &= c_\infty \end{aligned}$$

mostrando que $I_\infty(v) = c_\infty$.

■

O primeiro lema técnico nos dá um comportamento no infinito para toda solução positiva do problema (P_∞) e indicaremos a referência para ver a demonstração.

Lema 1.4 *Toda solução positiva $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ do problema (P_∞) com $p \geq 2$ tem o seguinte comportamento assintótico:*

$$\lim_{|x|\to\infty} \bar{u}(x) = 0,$$

$$C_1 e^{-a|x|} \leq \bar{u}(x) \leq C_2 e^{-b|x|} \quad em \quad \mathbb{R}^N,$$

onde, C_1, C_2 são constantes positivas e $0 < b < 1 < a$. Mais ainda, os números a, b podem ser escritos da forma $a = 1 + \delta$ e $b = 1 - \delta$ para $\delta > 0$.

Demonstração: Ver [11].

Lema 1.5 *Seja $F \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ uma função convexa e par tal que $F(0) = 0$ e $f(s) = F'(s)$ para todo $s \in [0, \infty)$. Então, para todos u, $v \geq 0$,*

$$|F(u - v) - F(u) - F(v)| \leq 2(f(u)v + f(v)u).$$

Demonstração: De fato, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $0 < v \leq u$.

Pela convexidade de F temos

$$\frac{F(v) - F(0)}{v - 0} \leq \frac{F(u) - F(0)}{u - 0}.$$

Tomando o limite superior em ambos os membros da desigualdade acima e usando a hipótese que $F(0) = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{u \to 0} \frac{F(v)}{v} &\leq \limsup_{u \to 0} \frac{F(u) - F(0)}{u - 0} \\ &= F'(0) \\ &= f(0) \\ &\leq f(u), \end{aligned}$$

de onde concluímos,

$$F(v) \leq v f(u). \tag{1.6}$$

Por outro lado, sendo F uma função convexa de classe C^2 então $f' = F'' \geq 0$ e assim f é não decrescente. Considerando a função

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto h(t) = F(u - tv) \end{aligned}$$

temos

$$\int_0^1 h'(t)dt = h(1) - h(0) = F(u - v) - F(u)$$

e

$$h'(t) = F'(u - tv)(-v) = f(u - tv)(-v).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |F(u - v) - F(u)| &= \left| \int_0^1 h'(t)dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |h'(t)|dt \\ &= \int_0^1 |f(u - tv)(-v)|dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$|F(u - v) - F(u)| \leq \int_0^1 |f(u - tv)|| - v|dt.$$

Desde que $u > v \geq tv$, temos $u - tv \geq 0$ e como a função f é não decrescente segue-se que $f(u - tv) \geq 0$, e assim

$$\begin{aligned} |F(u-v) - F(u)| &\leq \int_0^1 f(u-tv)v dt \\ &= v\int_0^1 f(u-tv)dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Como $tv > 0$ temos que $u \geq u - tv$ e portanto,

$$f(u-tv) \leq f(u).$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(u-tv)dt &\leq \int_0^1 f(u)dt \\ &= f(u). \end{aligned}$$

Logo, substituindo esta última desigualdade acima em (1.7) resulta

$$|F(u-v) - F(u)| \leq vf(u). \tag{1.8}$$

Usando a desigualdade triangular juntamente com (1.6) e (1.8) segue-se que

$$\begin{aligned} |F(u-v) - F(u) - F(v)| &\leq |F(u-v) - F(u)| + |F(v)| \\ &\leq vf(u) + vf(u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(u-v) - F(u) - F(v)| \leq 2vf(u).$$

Caso 2: $0 < u \leq v$.

Usando a convexidade de F temos

$$\frac{F(u) - F(0)}{u - 0} \leq \frac{F(v) - F(0)}{v - 0}.$$

Tomando o limite superior em ambos os membros da última desigualdade

$$\begin{aligned} \limsup_{v \to 0} \frac{F(u)}{u} &\leq \limsup_{v \to 0} \frac{F(v) - F(0)}{v - 0} \\ &= F'(0) \\ &= f(0) \\ &\leq f(v), \end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{F(u)}{u} \leq f(v).$$

Logo,

$$F(u) \leq uf(v).$$

Com os mesmos argumentos usados anteriormente temos que

$$|F(v-u) - F(v)| \leq u \int_0^1 f(v - tu)dt.$$

Note que

$$v - tu < v.$$

Como a função f é não decrescente temos

$$f(v - tu) \leq f(v).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(u - tv)dt &\leq \int_0^1 f(v)dt \\ &= f(v). \end{aligned}$$

Daí,

$$|F(v-u) - F(v)| \leq uf(v).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |F(v-u) - F(v) - F(u)| &\leq |F(v-u) - F(v)| + |F(u)| \\ &\leq uf(v) + uf(v) \\ &= 2uf(v). \end{aligned}$$

Sendo F uma função par então $F(u-v) = F(v-u)$ e com isto temos

$$|F(u-v) - F(u) - F(v)| \leq 2uf(v).$$

Logo,

$$|F(u-v) - F(u) - F(v)| + |F(u-v) - F(u) - F(v)| \leq 2vf(u) + 2uf(v)$$

e assim,

$$\begin{aligned}|F(u-v)-F(u)-F(v)| &\leq 2|F(u-v)-F(u)-F(v)| \\ &\leq 2(vf(u)+uf(v)).\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$|F(u-v)-F(u)-F(v)| \leq 2(f(u)v+f(v)u).$$

■

Observação 1.1 *Note que, se f satisfaz $(f_1),(f_2)$, e (f_3), a primitiva F de f verifica as hipóteses do lema anterior.*

Lema 1.6 *Seja $B \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $g_n : B \to \mathbb{R}$ com $g_n \in L^t(B)$ $(p^* \geq t \geq p)$, $|g_n|_{L^t(B)} \leq C$, e $g_n(x) \to 0$ q.t.p em B.*
(I) Suponha que f satisfaz (f_1). Então,

$$\int_B |F(g_n+w)-F(g_n)-F(w)| = o_n(1),$$

para cada $w \in L^{\eta+1}(B) \cap L^{q+1}(B)$ onde F é a primitiva de f.
(II) Assuma que f satisfaz $(f_1),(f_2)$ e (f_3). Então,

$$\int_B |f(g_n+w)-f(g_n)-f(w)|^r = o_n(1), \quad para\ r \in \left(\frac{p}{q}, \frac{p^*}{\eta}\right)$$

e $w \in L^p(B) \cap L^{p^*}(B)$.

Demonstração: Mostraremos somente (I) pois os mesmos argumentos podem ser usados na demonstração de (II).
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$F(g_n+w)-F(g_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}F(g_n+tw)\right) dt.$$

Então pela Regra da Cadeia e do fato que $f = F'$ obtemos

$$\begin{aligned}F(g_n+w)-F(g_n) &= \int_0^1 F'(g_n+tw)w dt \\ &= \int_0^1 f(g_n+tw)w dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |F(g_n + w) - F(g_n)| &= \left|\int_0^1 f(g_n + tw)w dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f(g_n + tw)||w|dt. \end{aligned}$$

Pela condição de crescimento da função f,

$$|f(g_n + tw)||w| \leq \epsilon|g_n + tw|^q|w| + C_\epsilon|g_n + tw|^\eta|w|.$$

Assim,

$$\int_0^1 |f(g_n + tw)||w|dt \leq \int_0^1 \left[\epsilon|g_n + tw|^q|w| + C_\epsilon|g_n + tw|^\eta|w|\right] dt.$$

Portanto,

$$|F(g_n + w) - F(g_n)| \leq \epsilon|w| \int_0^1 |g_n + tw|^q dt + C_\epsilon|w| \int_0^1 |g_n + tw|^\eta dt. \tag{1.9}$$

Como $t \in [0, 1]$ então,

$$\begin{aligned} |g_n + tw| &\leq |g_n| + t|w| \\ &\leq |g_n| + |w| \\ |g_n + tw|^q &\leq (|g_n| + |w|)^q. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_n + tw|^q dt &\leq \int_0^1 (|g_n| + |w|)^q dt \\ &= (|g_n| + |w|)^q \\ &\leq 2^q(|g_n|^q + |w|^q). \end{aligned}$$

Daí, por (1.9) temos que

$$\begin{aligned} |F(g_n + w) - F(g_n)| &\leq \epsilon|w|2^q(|g_n|^q + |w|^q) + C_\epsilon|w|2^\eta(|g_n|^\eta + |w|^\eta) \\ &= 2^q\epsilon|g_n|^q|w| + 2^q\epsilon|w|^{q+1} + C_\epsilon 2^\eta|g_n|^\eta|w| + C_\epsilon 2^\eta|w|^{\eta+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|F(g_n + w) - F(g_n)| \leq \delta_1 \ |g_n|^q|w| + \delta_1 \ |w|^{q+1} + C_{\delta_1} \ |g_n|^\eta|w| + C_{\delta_1}|w|^{\eta+1},$$

onde $\delta_1 = 2^q\epsilon$ e $C_{\delta_1} = C_\epsilon 2^\eta$.

Novamente usando a condição de crescimento da função f temos

$$\begin{aligned}
|F(s)| &= \left|\int_0^s f(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^s |f(t)|dt \\
&\leq \int_0^s (\epsilon|t|^q + C_\epsilon|t|^\eta)dt \\
&= \epsilon\frac{|s|^{q+1}}{q+1} + C_\epsilon\frac{|s|^{\eta+1}}{\eta+1}.
\end{aligned}$$

Com isto,

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{q+1}\ |s|^{q+1} + \frac{C_\epsilon}{\eta+1}\ |s|^{\eta+1}. \tag{1.10}$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}
|F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| \leq (&\delta_1\ |g_n|^q|w| + \delta_1\ |w|^{q+1} + C_{\delta_1}\ |g_n|^\eta|w| + C_{\delta_1}\ |w|^{\eta+1}) \\
&+ \frac{\epsilon}{q+1}\ |w|^{q+1} + \frac{C_\epsilon}{\eta+1}\ |w|^{\eta+1}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Usando a desigualdade de Young em (1.11) obtemos

$$\begin{aligned}
|F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| &\leq \delta_1(\delta\ |g_n|^{q+1} + C(\delta)\ |w|^{q+1}) + \delta_1\ |w|^{q+1} \\
&+ C_{\delta_1}(\delta\ |g_n|^{\eta+1} + C(\delta)|w|^{\eta+1}) \\
&+ C_{\delta_1}\ |w|^{\eta+1} + \frac{\epsilon}{q+1}\ |w|^{q+1} + \frac{C_\epsilon}{\eta+1}\ |w|^{\eta+1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)| &\leq \delta_1\delta|g_n|^{q+1} + \left(\delta_1 C(\delta) + \delta_1 + \frac{\epsilon}{q+1}\right)|w|^{q+1} \\
&+ C_{\delta_1}\delta|g_n|^{\eta+1} + \left(C_{\delta_1}C(\delta) + C_{\delta_1} + \frac{C_\epsilon}{\eta+1}\right)|w|^{\eta+1}.
\end{aligned}$$

Considere a função $G_{\delta,n}$ dada por

$$G_{\delta,n}(x) = max\left\{|F(g_n+w) - F(g_n) - F(w)|(x) - C_{\delta_1}\delta|g_n|^{\eta+1}(x) - \delta_1\delta|g_n|^{q+1}(x), 0\right\}$$

que satisfaz

$$G_{\delta,n}(x) \longrightarrow 0 \quad q.t.p \ em \ \ B.$$

Da definição de $G_{\delta,n}(x)$ segue-se que

$$\begin{aligned}
0 \leq G_{\delta,n}(x) &\leq \delta_1\delta|g_n|^{q+1} + \left(\delta_1 C(\delta) + \delta_1 + \frac{\epsilon}{q+1}\right)|w|^{q+1} \\
&+ C_{\delta_1}\delta|g_n|^{\eta+1} + \left(C_{\delta_1}C(\delta) + C_{\delta_1} + \frac{C_\epsilon}{\eta+1}\right)|w|^{\eta+1} \\
&- C_{\delta_1}\delta|g_n|^{\eta+1} - \delta_1\delta|g_n|^{q+1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$0 \leq G_{\delta,n} \leq C_3|w|^{q+1} + C_4|w|^{\eta+1},$$

onde $C_3 = \delta_1 C(\delta) + \delta_1 + \dfrac{\epsilon}{q+1}$ e $C_4 = C_{\delta_1}C(\delta) + C_{\delta_1} + \dfrac{C_\epsilon}{\eta+1}$. Desde que $w \in L^{q+1}(B) \cap L^{\eta+1}(B)$ temos

$$0 \leq G_{\delta,n} \leq C_3|w|^{q+1} + C_4|w|^{\eta+1} \in L^1(B).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_B G_{\delta,n}(x)dx \longrightarrow 0.$$

Novamente usando a definição de $G_{\delta,n}$ segue-se que

$$|F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq G_{\delta,n} + C_{\delta_1}\delta|g_n|^{\eta+1} + \delta_1\delta|g_n|^{q+1}.$$

Assim,

$$\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq \int_B G_{\delta,n} + C_{\delta_1}\delta\int_B |g_n|^{\eta+1} + \delta_1\delta\int_B |g_n|^{q+1}.$$

Relembrando que $|g_n|_{L^t(B)} \leq C$ temos

$$\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq \int_B G_{\delta,n} + C_5\delta + C_6\delta.$$

Logo,

$$\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq \int_B G_{\delta,n} + C_7\delta,$$

onde $C_7 = C_5 + C_6$.

Consequentemente,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq C_7\delta,$$

para todo $\delta > 0$. Fazendo $\delta \to 0$ segue-se que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| \leq 0$$

implicando

$$\int_B |F(g_n + w) - F(g_n) - F(w)| = o_n(1).$$

■

O resultado seguinte é um Lema técnico devido a C. O. Alves [1]. Na sua demonstração o autor usou argumentos encontrados em Brézis e Lieb [6]. Tal Lema será utilizado como ferramenta para provarmos o lema de compacidade global.

Lema 1.7 *Seja $B \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $g_n : B \to \mathbb{R}^K$ $(K \geq 1)$ com $g_n \in (L^p(B))^k$ $(p \geq 2)$, $g_n(x) \to 0$ q.t.p em B e $A(y) = |y|^{p-2}y$ para todo $y \in \mathbb{R}^K$. Então, se $|g_n|_{(L^p(B))^k} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_B |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{(p-1)}} dx = o_n(1)$$

para cada $w \in (L^p(B))^k$ fixado.

Demonstração: Para $1 \leq i \leq k$, sejam $A_i(y)$ e $w_i(x)$ a i-ésima componente dos vetores $A(y)$ e $w(x)$, respectivamente, onde $A_i(y) = |y|^{p-2}y_i$.

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$A_i(g_n + w) - A_i(g_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} A_i(g_n + tw) \right) dt.$$

Seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ tal que $\gamma(t) = g_n + tw$. Assim,

$$A_i(g_n + w) - A_i(g_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} A_i(\gamma(t)) dt.$$

Usando a Regra da Cadeia obtemos

$$A_i(g_n + w) - A_i(g_n) = \int_0^1 \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |A_i(g_n + w) - A_i(g_n)| &= \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{j=1}^K \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t)) \right| |\gamma_j'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^K \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t)) \right| |w_j| dt. \end{aligned}$$

Como $|w_j| \leq |w|$ então,

$$|A_i(g_n + w) - A_i(g_n)| \leq C_1|w| \int_0^1 \sum_{j=1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t)) \right| dt. \tag{1.12}$$

Provaremos agora que para todo $y \in \mathbb{R}^K$ temos

$$\sum_{j=1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| \leq C|y|^{p-2}.$$

Inicialmente observe que

$$\sum_{j=1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y_i} A_i(y) \right| + \sum_{j=i+1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right|.$$

Agora, analisemos cada uma das parcelas acima

$$\sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} |y|^{p-2} y_i \right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left| (p-2)|y_j||y|^{p-4} y_i \right|.$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_i} A_i(y) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y_i} \left(|y|^{p-2} y_i \right) \right| = \left| |y_i|(p-2)|y|^{p-4} y_i + |y|^{p-2} \right|.$$

$$\sum_{j=i+1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| = \sum_{j=i+1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} |y|^{p-2} y_i \right| = \sum_{j=i+1}^{K} \left| (p-2)|y|^{p-4} |y_j| y_i \right|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| &= \sum_{j=1}^{i-1} \left| (p-2)|y_j||y|^{p-4} y_i \right| + \left| (p-2)|y_i||y|^{p-4} y_i + |y|^{p-2} \right| \\
&+ \sum_{j=i+1}^{K} \left| (p-2)|y|^{p-4} |y_j| y_i \right| \\
&\leq (p-2)|y|^{p-4} \sum_{j=1}^{i-1} |y_j||y_i| + (p-2)|y|^{p-4}|y_i|^2 + |y|^{p-2} \\
&+ (p-2)|y|^{p-4} \sum_{j=i+1}^{K} |y_j||y_i|.
\end{aligned}$$

Como $|y_i| \leq |y|$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{K} \left| \frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y) \right| &\leq (p-2)|y|^{p-4}(i-1)|y|^2 + (p-2)|y|^{p-4}|y|^2 + |y|^{p-2} \\
&+ (p-2)|y|^{p-4}(K-i)|y|^2 \\
&= C|y|^{p-2}.
\end{aligned}$$

De (1.12) segue que

$$|A_i(g_n+w)-A_i(g_n)| \leq C_2|w|\int_0^1 |\gamma(t)|^{p-2}dt.$$

Sendo $\gamma(t)=g_n+tw$, então

$$\begin{aligned}
|A_i(g_n+w)-A_i(g_n)| &\leq C_2|w|\int_0^1 |g_n+tw|^{p-2}dt \\
&\leq C_2|w|\int_0^1 (|g_n|+|t||w|)^{p-2}dt.
\end{aligned}$$

Desde que $t\in[0,1]$, temos

$$\begin{aligned}
|A_i(g_n+w)-A_i(g_n)| &\leq C_2|w|\int_0^1 (|g_n|+t|w|)^{p-2}dt \\
&\leq C_2|w|\int_0^1 (|g_n|+|w|)^{p-2}dt \\
&= C_2|w|(|g_n|+|w|)^{p-2} \\
&\leq 2^{p-2}C_2(|w|^{p-1}+|g_n|^{p-2}|w|).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
|A(g_n+w)-A(g_n)|_S &= |A_1(g_n+w)-A_1(g_n)|+\cdots+|A_k(g_n+w)-A_k(g_n)| \\
&\leq KC_2 2^{p-2}(|w|^{p-1}+|g_n|^{p-2}|w|).
\end{aligned}$$

Como quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^K$ são equivalentes resulta

$$\begin{aligned}
|A(g_n+w)-A(g_n)| &\leq C_3(|w|^{p-1}+|g_n|^{p-2}|w|) \\
&= C_3|w|^{p-1}+C_3|g_n|^{p-2}|w|. \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

No caso em que $p=2$ temos

$$|A(g_n+w)-A(g_n)| \leq C_3|w|. \qquad (1.14)$$

No caso $p>2$, para cada $\epsilon_0>0$, usando a desigualdade de Young com os expoentes conjugados $p-1$ e $\dfrac{p-1}{p-2}$ temos

$$\begin{aligned}
|g_n|^{p-2}|w| &= \epsilon_0|g_n|^{p-2}\frac{1}{\epsilon_0}|w| \\
&\leq \frac{1}{\frac{p-1}{p-2}}(\epsilon_0|g_n|^{p-2})^{\frac{p-1}{p-2}}+\frac{1}{p-1}(\frac{1}{\epsilon_0}|w|)^{p-1}
\end{aligned}$$

ou

$$|g_n|^{p-2}|w| \leq \frac{p-2}{p-1}\epsilon_0^{\frac{p-1}{p-2}}|g_n|^{p-1} + \frac{1}{(p-1)\epsilon_0^{p-1}}|w|^{p-1}. \tag{1.15}$$

Logo, substituindo (1.15) em (1.13) resulta

$$|A(g_n+w)-A(g_n)| \leq C_3|w|^{p-1} + C_3C(\delta)|w|^{p-1} + C_3\delta|g_n|^{p-1}.$$

Assim,

$$|A(g_n+w)-A(g_n)| \leq (C_3 + C_3C(\delta))|w|^{p-1} + C_3\delta|g_n|^{p-1}$$

ou

$$|A(g_n+w)-A(g_n)| \leq C_4|w|^{p-1} + C_3\delta|g_n|^{p-1}, \tag{1.16}$$

onde $C_4 = C_3 + C_3C(\delta)$.

Para cada $\delta > 0$, consideremos a sequência de funções $G_{\delta,n}$ dada por

$$G_{\delta,n}(x) = max\left\{|A(g_n(x)+w(x)) - A(g_n(x)) - A(w(x))| - C_3\delta|g_n(x)|^{p-1}, 0\right\}.$$

Como a função dada por $A(y) = |y|^{p-2}y$ é contínua e por hipótese $g_n(x) \to 0$ q.t.p em B, então

$$G_{\delta,n}(x) \to 0 \text{ q.t.p em B},$$

e portanto

$$|G_{\delta,n}(x)|^{\frac{p}{p-1}} \to 0 \text{ q.t.p em B}.$$

Além disso,

$$0 \leq G_{\delta,n} \leq max\left\{|A(g_n+w)-A(g_n)| + |A(w)| - C_3\delta|g_n|^{p-1}, 0\right\}$$

e de (1.16) segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq G_{\delta,n} &\leq max\left\{|A(g_n+w)-A(g_n)| + |A(w)| - C_3\delta|g_n|^{p-1}, 0\right\} \\ &\leq C_4|w|^{p-1} + C_3\delta|g_n|^{p-1} + |w|^{p-1} - C_3\delta|g_n|^{p-1} \\ &= (C_4+1)|w|^{p-1} \\ &= C_5|w|^{p-1}, \forall\, p > 2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Por (1.14) e (1.17)

$$0 \leq G_{\delta,n} \leq C_5|w|^{p-1},\ 2 \leq p < N,$$

e portanto

$$|G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}} \quad \leq \quad C_5^{\frac{p}{p-1}}|w|^p,$$

onde temos que $C_5^{\frac{p}{p-1}}|w|^p \in L^1(B)$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta

$$\int_B |G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}}dx \to 0. \tag{1.18}$$

Segue da definição de $G_{\delta,n}$ que

$$|A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)| \leq G_{\delta,n} + C_3\delta|g_n|^{p-1}.$$

Com isto,

$$\begin{aligned} |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} &\leq (G_{\delta,n} + C_3\delta|g_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p}{p-1}}|G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}} + 2^{\frac{p}{p-1}}C_3^{\frac{p}{p-1}}\delta^{\frac{p}{p-1}}|g_n|^p. \end{aligned}$$

Fazendo $C_6 = 2^{\frac{p}{p-1}}$ e $C_7 = (2C_3)^{\frac{p}{p-1}}$ temos

$$|A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C_6|G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}} + C_7\delta^{\frac{p}{p-1}}|g_n|^p.$$

Logo,

$$\int_B |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C_6 \int_B |G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}} + C_7\delta^{\frac{p}{p-1}} \int_B |g_n|^p.$$

Como $|g_n|_{(L^p(B))^k} \leq C$, obtemos

$$0 \leq \int_B |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C_6 \int_B |G_{\delta,n}|^{\frac{p}{p-1}} + C_8\delta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Daí, usando (1.18) segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_B |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} \leq C_8\delta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Passando ao limite quando $\delta \to 0$, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_B |A(g_n + w) - A(g_n) - A(w)|^{\frac{p}{p-1}} \leq 0,$$

de onde concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_B |A(g_n+w)-A(g_n)-A(w)|^{\frac{p}{p-1}}=0.$$

$\blacksquare$

O Lema seguinte é de fundamental importância para a compreensão do comportamento de sequências Palais-Smale.

Lema 1.8 *(Lema de compacidade global) Suponha que f satisfaz (f_1), (f_2), e (f_3). Seja (u_n) uma sequência em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ verificando*

$$I(u_n)\to c,\qquad I'(u_n)\to 0,$$

e $u_0\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tal que $u_n\rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$. Então uma das alternativas ocorrem

(a) $u_n\to u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ ou

(b) existem $k\in\mathbb{N}$, $(y_n^j)\subset\mathbb{R}^N$ com $|y_n^j|\to\infty$, $j=1,...,k$, e soluções não triviais $u^1,...,u^k$ do problema (P_∞), tal que

$$\left\|u_n-u_0-\sum_{j=1}^k u^j(\cdot-y_n^j)\right\|\to 0,\qquad I(u_n)\to I(u_0)+\sum_{j=1}^k I_\infty(u^j).$$

Demonstração: Vamos inicialmente mostrar que (u_n) é limitada.

Como $I'(u_n)\to 0$ em $(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}))'$, então

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n &\leq \frac{1}{\theta}|I'(u_n)u_n|\\
&\leq \frac{1}{\theta}\|I'(u_n)\|_{(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}))'}\|u_n\|\\
&\leq k\|u_n\|,\quad \textit{para todo } n\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

onde $k>0$. Desde que $I(u_n)\to c$, existe $C>0$ tal que $I(u_n)\leq C$, logo

$$I(u_n)-\frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n\leq C+k\|u_n\|,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Assim, por (f_2),

$$\begin{aligned}
C+k\|u_n\| &\geq I(u_n)-\frac{1}{\theta}I'(u_n)u_n\\
&= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p+\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}Q(x)\left[\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n-F(u_n)\right]\\
&\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^p.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1\|u_n\|^p \leq C + k\|u_n\|, \tag{1.19}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C_1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) > 0$. Suponhamos por contradição que, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to +\infty$. Então, multiplicando (1.19) por $\frac{1}{\|u_n\|}$, para n suficientemente grande obtemos

$$C_1\|u_n\|^{p-1} \leq k,$$

o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto a sequência (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$. Sendo $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ um espaço de Banach reflexivo, então existe $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}).$$

Mostraremos que $I'(u_0) = 0$.

Usando um argumento diagonal (Lema B.5 no Apêndice B) temos que

(a) $u_n(x) \to u_0(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$.

(b) $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$.

Sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I segue-se que

$$I'(u_n)v \to 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I'(u_n)v &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |u_n|^{p-2}u_n v - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)f(u_n)v \\ &= o_n(1). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Consideremos a sequência

$$g_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x).$$

Da afirmação (b) temos

$$g_n(x) \to g(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega},$$

onde $g(x) = |\nabla u_0(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}(x)$.

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |g_n|^{\frac{p}{p-1}} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{p}{p-1}}.\end{aligned}$$

Para cada i, temos

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq \left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right|^2\right)^{1/2} = |\nabla u_n|,$$

de onde segue que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq |\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n| = |\nabla u_n|^{p-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |g_n|^{\frac{p}{p-1}} &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right)^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} (|\nabla u_n|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_n|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_n|^p \\ &= \|u_n\|^p.\end{aligned}$$

Do fato que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |g_n|^{\frac{p}{p-1}} \leq k^p, \forall\ n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$g_n \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Pelo mesmo raciocínio temos que $g \in L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$. Desde que $\dfrac{p}{p-1} > 1$, segue do Lema de Brézis-Lieb (Lema B.3 no Apêndice B) que para cada i,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla v,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}). \tag{1.21}$$

Mostraremos agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_n|^{p-2}u_n v \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_0|^{p-2}u_0 v,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Para isto, consideremos a sequência

$$h_n(x) = |u_n(x)|^{p-2}u_n(x).$$

Por (a) resulta

$$h_n(x) \to h(x)\ q.t.p\ em\ \ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega},$$

onde $h(x) = |u_0(x)|^{p-2}u_0(x)$.
Temos que $h_n \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e $h \in L^{\frac{p}{p-1}}$. Como $\dfrac{p}{p-1} > 1$, decorre do Lema de Brézis-Lieb (Lema B.3 no Apêndice B)

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} h_n v \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} hv,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_n|^{p-2}u_n v \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_0|^{p-2}u_0 v,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}). \tag{1.22}$$

Agora resta-nos mostrar que,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u_n)v \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u_0)v,\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}). \tag{1.23}$$

Como $u_n(x) \to u_0(x)\ \ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$, então pela continuidade da função f e Q resulta

$$Q(x)f(u_n(x)) \to Q(x)f(u_0(x))\ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}.$$

Assim,

$$Q(x)f(u_n(x))v(x) \to Q(x)f(u_0(x))v(x)\ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega},\ \forall\ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Da condição de crescimento da função f temos

$$\begin{aligned} |Q(x)f(u_n(x))v(x)| &= Q(x)|f(u_n(x))v(x)| \\ &\leq Q(x)\epsilon|u_n(x)|^q v(x) + Q(x)C_\epsilon|u_n(x)|^\eta v(x). \end{aligned}$$

Consideremos as sequências $z_n(x) = |u_n(x)|^q$ e $z_n^{'}(x) = |u_n(x)|^\eta$. Temos que

$$z_n(x) \to z(x)\ q.t.p\ em\ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega},$$

onde $z(x) = |u_0(x)|^q$ e

$$z_n^{'}(x) \to z^{'}(x) \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega},$$

onde $z^{'}(x) = |u_0(x)|^{\eta}$. Note que usando as imersões contínuas temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |z_n|^{\frac{q+1}{q}} &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n|^{q+1} \\ &\leq k, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \text{ e para algum } k > 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |z_n^{'}|^{\frac{\eta+1}{\eta}} &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n|^{\eta+1} \\ &\leq k, \ \forall \ n \in \mathbb{N} \text{ e para algum } k > 0. \end{aligned}$$

Decorre do Lema de Brézis-Lieb (Lema B.3 no Apêndice B) que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)\epsilon |u_n|^q v \to \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)\epsilon |u|^q v, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)C_\epsilon |u_n|^\eta v \to \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)C_\epsilon |u|^\eta v, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)f(u_0(x))v = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)f(u_n(x))v, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n|^{p-2} u_n v - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u_n) v \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_0|^{p-2} u_0 v - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u_0) v \\ &= I'(u_0)v. \end{aligned} \tag{1.24}$$

De (1.20), (1.24) e da unicidade do limite temos

$$I'(u_0)v = 0, \ \ \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

Portanto,

$$I'(u_0) = 0.$$

Defina a função

$$\Psi_m^1(x) = u_m(x) - u_0(x),\ \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}.$$

Então, do fato que $u_m \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ temos

$$\Psi_m^1(x) \rightharpoonup 0 \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

Como $u_m \to u_0$ q.t.p em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ então,

$$\Psi_m^1(x) \to 0 \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}.$$

Provaremos agora que

$$I(\Psi_m^1) = I(u_m) - I(u_0) + o_n(1).$$

Da afirmação (a)

$$u_m(x) \to u_0(x) \ \ q.t.p \ \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega},$$

e do fato que (u_n) é limitada segue do Teorema de Brézis-Lieb (Lema B.6 no Apêndice B)

$$\|u_m - u_0\|^p = \|u_m\|^p - \|u_0\|^p + o_m(1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I(\Psi_m^1) &= \frac{1}{p}\|\Psi_m^1\|^p - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(\Psi_m^1) \\ &= \frac{1}{p}\|u_m - u_0\|^p - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_m - u_0) \\ &= \frac{1}{p}(\|u_m\|^p - \|u_0\|^p + o_m(1)) - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_m - u_0). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.6 resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(\Psi_m^1) = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(u_m) - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(u_0) + o_m(1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(u_m - u_0) = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(u_m) - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} F(u_0) + o_m(1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(\Psi_m^1) &= \frac{1}{p}(\|u_m\|^p - \|u_0\|^p + o_m(1)) - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_m) + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_0) + o_m(1) \\ &= \frac{1}{p}\|u_m\|^p - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_m) - \frac{1}{p}\|u_0\|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x)F(u_0) + o_m(1) \\ &= I(u_m) - I(u_0) + o_m(1). \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$I'(\Psi_m^1) = o_m(1) \ \ em \ \ (W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}))'.$$

Observe que $\|I'(\Psi_m^1)\| = o_n(1)$ é equivalente a

$$\|I'(\Psi_m^1)\| = \|I'(\Psi_m^1) - I'(u_m) + I'(u_0)\| = o_n(1).$$

Assim, para todo $\Phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ com $\|\Phi\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\left|\left[I'(\Psi_m^1) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\Phi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left[|\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1 - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right]\nabla\Phi\right. \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left[|\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1 - |u_m|^{p-2}u_m + |u_0|^{p-2}u_0\right]\Phi \\
&- \left.\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)\left[f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)\right]\Phi\right|.
\end{aligned}$$

Da desigualdade triangular resulta

$$\begin{aligned}
&\left|\left[I'(\Psi_m^1) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\Phi\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left||\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1 - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right||\nabla\Phi| \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left||\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1 - |u_m|^{p-2}u_m + |u_0|^{p-2}u_0\right||\Phi| \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi| &= \int_{\bar{B}_R} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi| \\
&+ \int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\backslash\bar{B}_R} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi|.
\end{aligned}$$

Desde que $Q(x)$ é uma função contínua segue-se que Q é limitada em $\bar{B}_R$ e assim existe uma constante $C_1 > 0$ de tal forma que

$$\int_{\bar{B}_R} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi| \leq C_1 \int_{\bar{B}_R} |f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi|.$$

Por hipótese temos que $\lim\limits_{|x|\to\infty} Q(x) = \bar{Q}$. Assim, para R suficientemente grande existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\backslash\bar{B}_R} Q(x)|f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi| \leq C_2 \int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\backslash\bar{B}_R} |f(\Psi_m^1) - f(u_m) + f(u_0)||\Phi|.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)||\Phi| &\leq C_1\int_{\bar{B}_R}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)||\Phi| \\
&+ C_2\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)||\Phi|.
\end{aligned}
$$

Tomando $C = max\,\{C_1, C_2\}$ temos

$$
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)||\Phi| \leq C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)||\Phi|.
$$

Da desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
&\Big|[I'(\Psi_m^1)-I'(u_m)+I'(u_0)]\Phi\Big| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\Big||\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m+|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|\nabla\Phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\Big||\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1-|u_m|^{p-2}u_m+|u_0|^{p-2}u_0\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|\Phi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|\Phi|^s\right)^{\frac{1}{s}},\ \text{com}\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.
\end{aligned}
$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev e o fato que $\|\Phi\| \leq 1$ resulta

$$
\begin{aligned}
&\Big|[I'(\Psi_m^1)-I'(u_m)+I'(u_0)]\Phi\Big| \\
&\leq K\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\Big||\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m+|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{(p-1)/p} \\
&+K\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\Big||\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1-|u_m|^{p-2}u_m+|u_0|^{p-2}u_0\Big|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{(p-1)/p} \\
&+KC\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}
$$

Pelo item (II) do Lema 1.6 juntamente com o Lema 1.7 temos

$$
\|I'(\Psi_m^1)-I'(u_m)+I'(u_0)\| \to 0,
$$

ou seja,

$$
I'(\Psi_m^1) = o_m(1).
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
I(\Psi_m^1) &= I(\Psi_m^1)-\frac{1}{\theta}I'(\Psi_m^1)\Psi_m^1+o_m(1) \\
&= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|\Psi_m^1\|^p+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)\left[\frac{1}{\theta}f(\Psi_m^1)\Psi_m^1-F(\Psi_m^1)\right]+o_m(1).
\end{aligned}
$$

Sendo

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)>0 \text{ e por } (f_2),\ \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\left[\frac{1}{\theta}f(\Psi_m^1)\Psi_m^1-F(\Psi_m^1)\right]\geq 0,$$

então

$$\begin{aligned} I(\Psi_m^1) &= \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|\Psi_m^1\|^p+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\left[\frac{1}{\theta}f(\Psi_m^1)\Psi_m^1-F(\Psi_m^1)\right]+o_m(1) \\ &\geq \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)\|\Psi_m^1\|^p+o_m(1) \\ &= C\|\Psi_m^1\|^p+o_m(1), \end{aligned}$$

onde $C=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)>0$.

Suponhamos que $u_n \not\to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$, ou seja,

$$\Psi_m^1 \not\to 0 \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Assim, para n suficientemente grande, existe uma constante $C_1>0$ de tal forma que $\|\Psi_m^1\|^p\geq C_1,\ \forall\ m\in\mathbb{N}$. Logo,

$$I(\Psi_m^1)\geq C\|\Psi_m^1\|^p+o_m(1)\geq CC_1+o_m(1),$$

mostrando que para n suficientemente grande, existe $\alpha>0$ tal que

$$I(\Psi_m^1)\geq\alpha>0. \tag{1.25}$$

Agora, vamos decompor o $\mathbb{R}^N$ em hipercubos unitários N - dimensionais Q_i com vértices tendo coordenadas inteiras e considere

$$d_m=max|\Psi_m^1|_{L^p(U_i)}^p,$$

onde $U_i=Q_i\cap(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$.

Note que

$$\begin{aligned} I(\Psi_m^1) &= I(\Psi_m^1)-\frac{1}{p}I'(\Psi_m^1)\Psi_m^1+o_n(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\left[\frac{1}{p}f(\Psi_m^1)\Psi_m^1-F(\Psi_m^1)\right]+o_n(1) \\ &\leq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(\Psi_m^1)\Psi_m^1+o_n(1). \end{aligned}$$

Usando a condição de crescimento da função f obtemos

$$I(\Psi_m^1) \leq C\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^{q+1} + C \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^{\eta+1}.$$

Desde que (Ψ_m^1) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ temos

$$C|\Psi_m^1|_{\eta+1}^{\eta+1} \geq I(\Psi_m^1) + o_n(1) + o_\epsilon(1). \tag{1.26}$$

Usando a decomposição do $\mathbb{R}^N$ indicada anteriormente temos que

$$\begin{aligned} |\Psi_m^1|_{\eta+1}^{\eta+1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^{\eta+1} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{\eta+1} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{2} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{\eta-1}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

e da definição de d_m

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{\eta-1} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{2} \leq d_m^{\eta-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^{2}.$$

Das imersões de Sobolev temos que existe $c > 0$ tal que

$$|\Psi_m^1|_{\eta+1_{(Q_i)}}^2 \leq c\|\Psi_m^1\|_{W^{1,p}(Q_i)}^2, \text{ para cada } i.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} d_m^{\eta-1} \sum_{i\in\mathbb{N}} |\Psi_m^1|_{L^{\eta+1}(Q_i)}^2 &\leq d_m^{\eta-1} c \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\Psi_m^1\|_{W^{1,p}(Q_i)} \\ &= c d_m^{\eta-1} \|\Psi_m^1\|. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Daí, combinando (1.25),(1.26), (1.27) e (1.28)

$$\begin{aligned} c d_m^{\eta-2} &\geq |\Psi_m^1|_{\eta+1}^{\eta+1} \\ &\geq \frac{1}{c} I(\Psi_m^1) + o_m(1) + o_\epsilon(1) \\ &\geq \alpha + o_m(1) + o_\epsilon(1), \end{aligned}$$

e portanto existe $\gamma > 0$ tal que

$$d_m \geq \gamma > 0.$$

Agora vamos denotar por y_m^1 o centro do hipercubo Q_i no qual

$$|\Psi_m^1|_{\eta+1(Q_i)} = d_m.$$

Provaremos que, a menos de subsequência, $|y_m^1| \to +\infty$.

De fato, suponha por contradição que (y_m^1) é limitada em $\mathbb{R}^N$. Daí, existe um $R > 0$ tal que $|y_m^1| \leq R$. Logo,

$$\int_{B_R(0)} |\Psi_m^1|^{\eta+1} \geq \int_{Q_i(y_m^1)} |\Psi_m^1|^{\eta+1} = d_m^{\eta+1} \geq \gamma^{\eta+1} > 0. \tag{1.29}$$

Por outro lado,

$$\Psi_m^1 \rightharpoonup 0 \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

implicando que

$$\Psi_m^1 \to 0 \ \ em \ \ L_{loc}^{\eta+1}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$\int_{B_R(0)} |\Psi_m^1|^{\eta+1} \to 0,$$

o que contradiz (1.29). Logo, (y_m^1) não é limitada e, a menos de subsequência $|y_m^1| \to +\infty$. Considere a sequência $z_m(x) = \Psi_m^1(x + y_m^1)$, e da invariância do $\mathbb{R}^N$ por translação temos que

$$\|z_m\|_{\mathbb{R}^N} = \|\Psi_m^1\|_{\mathbb{R}^N},$$

e portanto (z_m) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Assim, existe $u^1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$z_m \rightharpoonup u^1 \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e, a menos de subsequência,

$$z_m \to u^1 \ \ em \ \ L_{loc}^s(\mathbb{R}^N), \ \ com \ \ p \leq s < p^*.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} |u^1|^{\eta+1} &= \liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(0)} |z_m|^{\eta+1} = \liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(0)} |\Psi_m^1(x + y_m^1)|^{\eta+1} \\
&= \liminf_{m\to\infty} \int_{B_R(y_m^1)} |\Psi_m^1(x)|^{\eta+1} \geq \liminf_{m\to\infty} d_m^{\eta+1} \geq \gamma^{\eta+1} > 0,
\end{aligned}$$

isto é, $u^1 \not\equiv 0$.

Mostraremos agora que u^1 é solução não nula de (P_∞).

Note que, sendo $\Psi_m^1 \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ então $\Psi_m^1(\cdot + y_m^1) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}_m)$, onde

$$\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}_m = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x + y_m^1 \in \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}\right\}.$$

Consideremos $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$ e, portanto, desde que $|y_m^1| \to +\infty$ temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que o suporte de v está contido em $\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}_m$ para todo $m \geq m_0$.

Agora, notemos que

$$I_\infty(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)) = \frac{\|\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)\|^p}{p} - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}F(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))$$

e

$$\begin{aligned} I'_\infty(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))v &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)|^{p-2}\nabla(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))\nabla v \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1(\cdot + y_m^1)|^{p-2}(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))v \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))v. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x + y_m^1$ temos então

$$\begin{aligned} I'_\infty(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))v &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1\nabla v(z - y_m^1) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1 v(z - y_m^1) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(\Psi_m^1)v(z - y_m^1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I'_\infty(\Psi_m^1(\cdot + y_m^1))v = I'_\infty(\Psi_m^1)\bar{v}_n, \text{ com } \bar{v}_n = v(\cdot - y_m^1).$$

Observemos que, para n suficientemente grande, o suporte de $\bar{v}_n$ está contido em $\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$, ou seja, existe n_0 tal que

$$\bar{v}_n \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}),\ \forall\ n \geq n_0.$$

Logo, para cada $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v\|_{\mathbb{R}^N} \leq 1$,

$$\|\bar{v}_n\| = \|v_n(\cdot + y_m^1)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \|v_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1.$$

Vamos agora mostrar que $I'_\infty(\Psi_m^1) = o_n(1)$. De fato, basta mostrarmos que

$$I'_\infty(\Psi_m^1) = I'(u_m) - I'(u_0) + o_m(1).$$

Para todo $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ com $\|\phi\| \leq 1$ temos

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[I'_\infty(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Psi^1_m|^{p-2}\nabla\Psi^1_m\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m\phi - \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(\Psi^1_m)\phi\right. \\
&- \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\phi - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |u_m|^{p-2}u_m\phi + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)f(u_m)\phi \\
&\left.+ \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |u_0|^{p-2}u_0\phi - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)f(u_0)\phi\right|.
\end{aligned}
$$

Como $\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ então

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[I'_\infty(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Psi^1_m|^{p-2}\nabla\Psi^1_m\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m\phi - K_1\int_{\mathbb{R}^N} f(\Psi^1_m)\phi\right. \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\nabla\phi - \int_{\mathbb{R}^N} |u_m|^{p-2}u_m\phi + \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)f(u_m)\phi \\
&\left.+ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p-2}u_0\phi - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)f(u_0)\phi\right|,
\end{aligned}
$$

e assim,

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[I'_\infty(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla\Psi^1_m|^{p-2}\nabla\Psi^1_m - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right]\nabla\phi\right. \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m - |u_m|^{p-2}u_m + |u_0|^{p-2}u_0\right]\phi \\
&\left.- K_2\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(\Psi^1_m) - f(u_m) + f(u_0)\right]\phi\right|.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade triangular resulta

$$
\begin{aligned}
&\left|\left[I'_\infty(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u_0)\right]\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla\Psi^1_m|^{p-2}\nabla\Psi^1_m - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m + |u_0|^{p-2}u_0\right| |\nabla\phi| \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \left||\Psi^1_m|^{p-2}\Psi^1_m - |u_m|^{p-2}u_m + |u_0|^{p-2}u_0\right| |\phi| \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} K_2|f(\Psi^1_m) - f(u_m) + f(u_0)||\phi|.
\end{aligned}
$$

Da desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
&\left|[I'(\Psi^1_m) - I'(u_m) + I'(u_0)]\Phi\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla\Psi^1_m|^{p-2}\nabla\Psi^1_m - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$+\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1-|u_m|^{p-2}u_m+|u_0|^{p-2}u_0\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\Phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+K_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\Phi|^s\right)^{\frac{1}{s}},\ \text{com}\ \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev e o fato que $\|\Phi\|\leq 1$ resulta

$$\begin{aligned}
&\left|[I'(\Psi_m^1)-I'(u_m)+I'(u_0)]\Phi\right|\\
&\leq K\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1-|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m+|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{(p-1)/p}\\
&+K\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left||\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1-|u_m|^{p-2}u_m+|u_0|^{p-2}u_0\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{(p-1)/p}\\
&+KK_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}|f(\Psi_m^1)-f(u_m)+f(u_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Pelo item (II) do Lema 1.6 juntamente com o Lema 1.7 temos

$$\|I'_\infty(\Psi_m^1)-I'(u_m)+I'(u_0)\|\to 0,$$

e com isto podemos concluir que $I'_\infty(\Psi_m^1)=o_n(1)$, ou ainda,

$$I'_\infty(\Psi_m^1)v=o_n(1).$$

Desde que $\Psi_m^1(x)\to u^1(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$ e $\dfrac{\partial\Psi_m^1(x)}{\partial x_i}\to\dfrac{\partial u^1(x)}{\partial x_i}$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$, do Lema de Brézis-Lieb (Lema B.3 no Apêndice B), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Psi_m^1|^{p-2}\nabla\Psi_m^1\nabla v &\to \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^1|^{p-2}\nabla u^1\nabla v,\\
\int_{\mathbb{R}^N}|\Psi_m^1|^{p-2}\Psi_m^1 v &\to \int_{\mathbb{R}^N}|u^1|^{p-2}u^1 v,\\
\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f(\Psi_m^1)v &\to \int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f(u^1)v,\ \forall\ v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

Pela unicidade do limite, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^1|^{p-2}\nabla u^1\nabla v+\int_{\mathbb{R}^N}|u^1|^{p-2}u^1v=\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f(u^1)v,\ \forall\ v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{1.30}$$

Agora dado $\omega\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, por densidade existe $(v_n)\subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n\to\omega\ \text{em}\ W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.31}$$

Assim, por (1.30),

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u^1|^{p-2}\nabla u^1\nabla v_n+\int_{\mathbb{R}^N}|u^1|^{p-2}u^1v_n=\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f(u^1)v_n,$$

e por (1.31)

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^1|^{p-2}\nabla u^1 \nabla\omega + \int_{\mathbb{R}^N} |u^1|^{p-2}u^1\omega = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}f(u^1)\omega, \ \forall\ \omega \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Considere agora

$$\Psi_m^2(x) = \Psi_m^1(x+y_m^1) - u^1(x).$$

Se ocorrer $\|\Psi_m^2(\cdot - y_m^1)\| \to 0$, então

$$\|u_n - u_0 - u^1\| \to 0 \quad e \quad I(u_n) \to I(u_0) + I_\infty(u^1),$$

e a demonstração está concluída para $k = 1$. Caso contrário, podemos repetir o procedimento acima, obtendo sequências da forma

$$\Psi_m^j(x) = \Psi_m^{j-1}(x + y_m^{j-1}) - u^{j-1}(x), \quad j \geq 2$$

e sequências de pontos (y_m^j) tais que

$$\|y_m^j\| \to +\infty, \text{ quando } m \to +\infty$$

e

$$\Psi_m^{j-1}(x + y_m^{j-1}) \rightharpoonup u^{j-1}(x) \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$$

onde cada u^j é solução de (P_∞).

Além disso, usaremos indução matemática para mostrar que

$$\begin{aligned} \|\Psi_m^j\|^p &= \|\Psi_m^{j-1}\|^p - \|u_m^{j-1}\|^p + o_n(1) \\ &= \|u_m\|^p - \|u_0\|^p - \sum_{i=1}^{j-1} \|u^i\|^p + o_n(1) \end{aligned} \tag{1.32}$$

e

$$\begin{aligned} I(\Psi_m^j) &= I(\Psi_m^{j-1}) - I(u^{j-1}) + o_n(1) \\ &= I(u_m) - I_\infty(u_0) - \sum_{i=1}^{j-1} I_\infty(u^i) + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.33}$$

Primeiramente observemos do Teorema de Brézis-Lieb (Lema B.6 no Apêndice B), que para $j \geq 2$, temos

$$\|\Psi_m^j\|_{\mathbb{R}^N}^p = \|\Psi_m^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p - \|u^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p + o_n(1).$$

Decorre disto que

$$I(\Psi_m^j) = \frac{1}{p}\|\Psi_m^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p - \frac{1}{p}\|u_m^{j-1}\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)F(\Psi_m^{j-1}(x+y_m^{j-1}) - u^{j-1}).$$

Do Lema 1.6 temos

$$I(\Psi_m^j) = \frac{1}{p}\|\Psi_m^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p - \frac{1}{p}\|u_m^{j-1}\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)F(\Psi_m^{j-1}(x+y_m^{j-1})) + \int_{\mathbb{R}^N} Q(x)F(u^{j-1}),$$

de onde segue que

$$I(\Psi_m^j) = I(\Psi_m^{j-1}) - I_\infty(u^{j-1}) + o_n(1).$$

Para $j=1$ vimos anteriormente que

$$\|\Psi_m^j\|_{\mathbb{R}^N}^p = \|u_m\|^p - \|u_0\|^p + o_n(1)$$

e

$$I(\Psi_m^j) = I(u_m) - I_\infty(u_0) + o_n(1).$$

Supondo que vale para $j-1$, então

$$\begin{aligned}
\|\Psi_m^j\|_{\mathbb{R}^N}^p &= \|\Psi_m^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p - \|u_m^{j-1}\| + o_n(1)\\
&= \|u_m\|^p - \|u_0\|^p - \sum_{i=1}^{j-2}\|u^1\|_{\mathbb{R}^N}^p - \|u_m^{j-1}\|_{\mathbb{R}^N}^p + o_n(1)
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\|\Psi_m^j\|_{\mathbb{R}^N}^p = \|u_m\|^p - \|u_0\|^p - \sum_{i=1}^{j-1}\|u^1\|_{\mathbb{R}^N}^p + o_n(1). \tag{1.34}$$

De modo análogo

$$\begin{aligned}
I(\Psi_m^j) &= I(\Psi_m^{j-1}) - I_\infty(u^{j-1}) + o_n(1)\\
&= I(u_m) - I_\infty(u_0) - \sum_{i=1}^{j-2} I_\infty(u^i) - I_\infty(u^{i-1}) + o_n(1)
\end{aligned}$$

e assim

$$I(\Psi_m^j) = I(u_m) - I_\infty(u_0) - \sum_{i=1}^{j-1} I_\infty(u^i) + o_n(1).$$

Portanto, demonstramos por indução que vale (1.32) e (1.33).

Mostraremos agora que existe no máximo um número k de procedimentos tais que

$$\|\Psi_m^{k+1}\|_{\mathbb{R}^N}^p = o_n(1) \quad e \quad I(\Psi_m^{k+1}) = o_n(1),$$

ou seja,

$$\|u_m\|^p = \|u_0\|^p + \sum_{i=1}^{k} \|u^1\|^p + o_n(1)$$

e

$$I(u_m) = I(u_0) + \sum_{i=1}^{k} I_\infty(u^1) + o_n(1).$$

De fato, desde que u^j é solução de (P_∞) temos que

$$\|u^j\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q} f(u^j) u^j,$$

e de (f_1)

$$\|u^j\|^p \leq \bar{Q}\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u^j|^{q+1} + \bar{Q}C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u^j|^{\eta+1}.$$

Das imersões contínuas de Sobolev,

$$\|u^j\|^p \leq \bar{Q}C\epsilon \|u^j\|^{q+1} + \bar{Q}CC_\epsilon \|u^j\|^{\eta+1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{Q}CC_\epsilon} &\leq \|u^j\|^{q+1-p} + \|u^j\|^{\eta+1-p} \\ &\leq 2max\left\{\|u^j\|^{q+1-p}, \|u^j\|^{\eta+1-p}\right\}. \end{aligned}$$

Logo, $\|u^j\| \geq \bar{C}$, para algum $\bar{C} > 0$.

Portanto, de (1.34) e desde que (u_m) é limitada, teríamos

$$\begin{aligned} \|\Psi_m^j\|^p &\leq C - \|u_0\|^p - \sum_{i=1}^{j} \bar{C} + o_n(1) \\ &= C - \|u_0\|^p - (j-1)\bar{C} + o_n(1). \end{aligned}$$

Daí, para j suficientemente grande, $\|\Psi_m^j\|^p < 0$, o que é um absurdo. Logo, o Lema está demonstrado.

■

Note que existe $\xi > 0$ verificando

$$I_\infty(u) \geq \xi \ \ \forall\ u \in \mathcal{N}_\infty,$$

onde $\mathcal{N}_\infty = \left\{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : I'_\infty(u)u = 0\right\}$.

Corolário 1.1 *O funcional I satisfaz a condição $(P.S)_c$ para todo*

$$0 < c < c_\infty,$$

onde c_∞ é o nível do passo da montanha do funcional energia associado a (P_∞).

Demonstração: Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ tal que

$$I(u_n) \to c < c_\infty \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Como (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$, então passando a uma subsequência se necesssário, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$.
Conforme a demonstração feita no lema de compacidade global temos que $I'(u_0) = 0$. Assim, concluímos de (f_2) que

$$\begin{aligned} I(u_0) &= I(u_0) - \frac{1}{p} I'(u_0) u_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left[\frac{1}{p} Q(x) f(u_0) u_0 - Q(x) F(u_0) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Se $u_n \not\to u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$, então pelo lema de compacidade global obtemos $k \in \mathbb{N}$ e soluções não triviais $u^1, ..., u^k$ de (P_∞) satisfazendo

$$\lim_{n \to \infty} I(u_n) = c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j) \geq k c_\infty \geq c_\infty,$$

o que contraria a hipótese. Portanto, $u_n \to u_0$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$.

■

Capítulo 2

Existência de solução ground-state

Neste capítulo, mostraremos a existência de uma solução ground-state positiva para o problema (P). Para isto, provaremos que o funcional I verifica a Geometria do Passo da Montanha.

Vamos agora enunciar o principal resultado deste capítulo:

Teorema 2.1 *Suponha que f satisfaz $(f_1), (f_2)$, e (f_3), $p \geq 2$ e a função Q satisfaz (1) e*

$$Q(x) \geq \bar{Q} - Ce^{-m|x|}, \quad |x| \to \infty,$$

onde C é uma constante positiva e $m > p(q+1)/((q+1)-p)$. Então (P) tem uma solução ground-state positiva.

Lema 2.1 *O funcional I verifica a geometria do passo da montanha, isto é,*

(i) Existem $r, \rho > 0$ tal que $I(u) \geq r$, $\|u\| = \rho$,

(ii) Existe $e \in B_\rho^c(0)$ tal que $I(e) < 0$.

Demonstração: (i) De (f_1) temos

$$|F(s)| \leq \epsilon |s|^{q+1} + C_\epsilon |s|^{\eta+1}.$$

Assim

$$Q(x)|F(s)| \leq Q(x)\epsilon |s|^{q+1} + Q(x)C_\epsilon |s|^{\eta+1}.$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima temos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(s) &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)|F(s)|\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\epsilon|s|^{q+1}+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)C_\epsilon|s|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(u)\geq -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\epsilon|u|^{q+1}-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)C_\epsilon|u|^{\eta+1}$$

implicando em

$$\begin{aligned}I(u) &= \frac{\|u\|^p}{p}-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(u)\\ &\geq \frac{\|u\|^p}{p}-\epsilon\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)|u|^{q+1}-C_\epsilon\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)|u|^{\eta+1}\\ &= \frac{\|u\|^p}{p}-\epsilon\left[\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} Q(x)|u|^{q+1}+\int_{\bar{B}_R} Q(x)|u|^{q+1}\right]\\ &- C_\epsilon\left[\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} Q(x)|u|^{\eta+1}+\int_{\bar{B}_R} Q(x)|u|^{\eta+1}\right].\end{aligned}$$

Usando o fato que a função Q é contínua e $\lim\limits_{|x|\to\infty} Q(x)=\bar{Q}$ resulta

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \frac{\|u\|^p}{p}-C_1\left[C_3\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} |u|^{q+1}+C_4\int_{\bar{B}_R} |u|^{q+1}\right]\\ &- C_2\left[C_5\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} |u|^{\eta+1}+C_6\int_{\bar{B}_R} |u|^{\eta+1}\right].\end{aligned}$$

Considerando $C=max\,\{C_3,C_4\}$ e $C'=max\,\{C_5,C_6\}$ temos

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \frac{\|u\|^p}{p}-C_1\left[C\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} |u|^{q+1}+C\int_{\bar{B}_R} |u|^{q+1}\right]\\ &- C_2\left[C'\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\setminus\bar{B}_R} |u|^{\eta+1}+C'\int_{\bar{B}_R} |u|^{\eta+1}\right]\\ &= \frac{\|u\|^p}{p}-C_1\left[C\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u|^{q+1}\right]-C_2\left[C'\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u|^{\eta+1}\right].\end{aligned}$$

Da imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$, com $p\leq r\leq p^*$

$$I(u)\geq\frac{\|u\|^p}{p}-K_1\|u\|^{q+1}-K_2\|u\|^{\eta+1}.$$

Seja $\rho>0$ a ser fixado posteriormente. Para todo $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ com $\|u\|=\rho$, temos

$$I(u)\geq\frac{\rho^p}{p}-K_1\rho^{q+1}-K_2\rho^{\eta+1}.$$

Vamos escolher $\rho > 0$ de tal forma que

$$\frac{\rho^p}{p} - K_1\rho^{q+1} - K_2\rho^{\eta+1} > 0$$

ou ainda,

$$\rho^{\eta+1}\left[\frac{1}{\rho^{\eta+1-p}p} - \frac{K_1}{\rho^{\eta-q}} - K_2\right] > 0.$$

Sendo $\rho^{\eta+1} > 0$ então devemos ter

$$\frac{1}{\rho^{\eta+1-p}p} - \frac{K_1}{\rho^{\eta-q}} - K_2 > 0.$$

Daí,

$$\frac{1}{\rho^{\eta-q}}\left[\frac{1}{\rho^{q+1-p}p} - K_1\right] > K_2.$$

Se $\dfrac{1}{\rho^{\eta-q}} > K_2$ *e* $\dfrac{1}{\rho^{q+1-p}p} > K_1$ encontramos

$$\rho_1 < \left(\frac{1}{K_2}\right)^{\frac{1}{\eta-q}} \quad \text{e} \quad \rho_2 < \left(\frac{1}{pK_1}\right)^{\frac{1}{(q+1-p)}}.$$

Basta então tomarmos

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2} min\left\{\rho_1, \rho_2\right\}$$

e, portanto, existem números reais positivos r e ρ tais que

$$I(u) \geq r > 0, \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})\ com\ \ \|u\| = \rho.$$

(ii) Da condição (f_2) temos

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \forall\ s \neq 0.$$

Assim, podemos supor

$$\frac{\theta}{s} \leq \frac{f(s)}{F(s)}, \forall\ s > 0.$$

Com isto,

$$\int_1^s \frac{\theta}{t} dt \leq \int_1^s \frac{f(t)}{F(t)} dt,$$

mostrando que

$$F(s) \geq C|s|^\theta, \forall\ s > 1, \tag{2.1}$$

onde $C = F(1) > 0$.

Fixando uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$, $\varphi > 0$, temos

$$I(t\varphi) = \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)F(t\varphi),$$

com $t > 0$.

De (2.1) concluímos para $t > 1$ que

$$I(t\varphi) = \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)F(t\varphi) \leq \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - Ct^\theta \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)|\varphi|^\theta, \tag{2.2}$$

onde $\theta \in (p, \eta + 1]$.

Fazendo $t \to +\infty$ em (2.2) resulta que $I(t\varphi) \to -\infty$, pois $p < \theta$. Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $I(t_0\varphi) < 0$. Façamos $e = t_0\varphi$ e daí, $e \in B_\rho^c(0)$ com $I(e) < 0$.

Usando a versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição Palais-Smale (Lema B.6 no Apêndice B), existe uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ satisfazendo

$$I(u_n) \to c_1, \quad I'(u_n) \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

onde,

$$c_1 = inf\left\{\sup_{t\geq 0}\ I(tu); u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\backslash\{0\}\right\}.$$

Conforme o Apêndice C podemos ainda usar a seguinte caracterização para c_1

$$c_1 = \inf_{u\in\mathcal{N}} I(u),$$

onde $\mathcal{N} = \left\{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\backslash\{0\} : I'(u)u = 0\right\}$ é a variedade de Nehari.

■

O próximo resultado estabelece a relação entre os níveis c_1 e c_∞.

Proposição 2.1 *Assuma que Q satisfaz* (1) *e* (2). *Então*

$$0 < c_1 < c_\infty.$$

Demonstração: Seja $\bar{u}$ a solução ground-state do problema (P_∞) e defina $u_n(x) = \bar{u}(x - x_n)$, $x_n = (0, ..., n)$. Pela definição de c_1, temos

$$c_1 \leq \sup_{t\geq 0} I(tu_n).$$

Mostraremos agora que para cada $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ existe um único $\gamma_n \in (0, +\infty)$ tal que $\gamma_n u_n \in \mathcal{N}$. Além disso, o valor máximo de $I(tu_n)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = \gamma_n$. De fato, considere a função

$$\begin{aligned} g \; : \; \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ t \quad &\longmapsto g(t) = I(tu_n) \end{aligned}$$

Note que $g(0) = 0$, $g(t) < 0$ para t suficientemente grande e $g(t) > 0$ para t suficientemente pequeno. Assim, existe $\gamma_n > 0$ tal que

$$g(\gamma_n) = \max_{t \geq 0} g(t),$$

ou seja,

$$I(\gamma_n u_n) = \max_{t \geq 0} I(tu_n).$$

Consequentemente, $g'(\gamma_n) = 0$ o que mostra que $\gamma_n u_n \in \mathcal{N}$.

Vamos agora mostrar a unicidade de γ_n.

Sejam $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2} \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \gamma_{n_1} < \gamma_{n_2}$ com $g'(\gamma_{n_1}) = 0$ e $g'(\gamma_{n_2}) = 0$.

Assim,

$$\|u_n\|^p = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) \frac{f(\gamma_{n_1} u_n)}{(\gamma_{n_1} u_n)^{p-1}} u_n^p$$

e

$$\|u_n\|^p = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) \frac{f(\gamma_{n_2} u_n)}{(\gamma_{n_2} u_n)^{p-1}} u_n^p.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left[\frac{f(\gamma_{n_2} u_n)}{(\gamma_{n_2} u_n)^{p-1}} - \frac{f(\gamma_{n_1} u_n)}{(\gamma_{n_1} u_n)^{p-1}} \right] Q(x) u_n^p = 0. \tag{2.3}$$

Como a função $s \mapsto \dfrac{f(s)}{s^{p-1}}$ é crescente em $(0, +\infty)$ então supondo que $\gamma_{n_2} > \gamma_{n_1}$ temos

$$\frac{f(\gamma_{n_2} u_n)}{(\gamma_{n_2} u_n)^{p-1}} - \frac{f(\gamma_{n_1} u_n)}{(\gamma_{n_1} u_n)^{p-1}} > 0.$$

Sendo $Q(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$ segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left[\frac{f(\gamma_{n_2} u_n)}{(\gamma_{n_2} u_n)^{p-1}} - \frac{f(\gamma_{n_1} u_n)}{(\gamma_{n_1} u_n)^{p-1}} \right] Q(x) u_n^p > 0$$

contradizendo (2.3). Portanto, γ_n é único.

Observe que

$$\begin{aligned}
c_1 &\leq I(\gamma_n u_n)\\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\gamma_n\nabla u_n|^p+|\gamma_n u_n|^p)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)F(\gamma_n u_n)\\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\gamma_n\nabla u_n|^p+|\gamma_n u_n|^p)+\frac{1}{p}\int_{\bar{\Omega}}(|\gamma_n\nabla u_n|^p+|\gamma_n u_n|^p)-\frac{1}{p}\int_{\bar{\Omega}}(|\gamma_n\nabla u_n|^p+|\gamma_n u_n|^p)\\
&- \int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)+\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)F(\gamma_n u_n).
\end{aligned}$$

Assim, como $(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cup\bar{\Omega}=\mathbb{R}^N$, então

$$\begin{aligned}
c_1 &\leq I(\gamma_n u_n)\\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\gamma_n\nabla u_n|^p+|\gamma_n u_n|^p)-\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)+\int_{\bar{\Omega}}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)\\
&- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)F(\gamma_n u_n)-\frac{1}{p}t_n\gamma_n^p\\
&= I_\infty(\gamma_n u_n)-\frac{1}{p}t_n\gamma_n^p+\int_{\bar{\Omega}}\bar{Q}F(\gamma_n u_n)+\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n),
\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $t_n=\int_{\bar{\Omega}}(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p)$.

Como $\gamma_n u_n\in\mathcal{N}$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p)=\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p.\tag{2.5}$$

Afirmação: (γ_n) é limitada.

Suponhamos que (γ_n) não seja limitada. Assim, existiria uma subsequência $(\gamma_{n_j})\subset(\gamma_n)$ tal que $|\gamma_{n_j}|\to\infty$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(x)Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p.
\end{aligned}$$

Como $u_n(x)=\bar{u}(x-x_n)$ então

$$\|\bar{u}(x-x_n)\|^p=\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(x)Q(x)\frac{f(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))}{(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))^{p-1}}(\bar{u}(x-x_n))^p.$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - x_n$ obtemos

$$\|\bar{u}\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}}(z + x_n) Q(z + x_n) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p. \tag{2.6}$$

Sendo por hipótese $\lim\limits_{|x| \to \infty} Q(x) = \bar{Q} > 0$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que $|Q(x) - \bar{Q}| < \epsilon$ para $|x| > R$, e assim,

$$\chi_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}}(z + x_n)(\bar{Q} - \epsilon) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p < \chi_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}}(z + x_n) Q(x) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p, \quad |x| > R. \tag{2.7}$$

Como $|x_n| \to \infty$ então $|z + x_n| > R$ para algum n e de (2.6) e (2.7) segue-se

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(z + x_n) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p \\ &> \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (\bar{Q} - \epsilon) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou (Lema B.1 no Apêndice B) resulta

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \liminf (\bar{Q} - \epsilon) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p \\ &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (\bar{Q} - \epsilon) \frac{f(\gamma_n \bar{u})}{(\gamma_n \bar{u})^{p-1}} \bar{u}^p \\ &< \|\bar{u}\|^p, \end{aligned}$$

o que é uma contradição pois $\bar{u}$ é ground-state.

Assim, existe uma subsequência, que continuaremos denotando por (γ_n), tal que

$$\gamma_n \to \gamma_0.$$

Mostraremos que $\gamma_0 = 1$. De fato, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}}(x)(|\nabla u_n|^p + |u_n|^p).$$

Usando o fato que $u_n(x) = \bar{u}(x - x_n)$, fazendo a mudança de variável $z = x - x_n$ e sendo o $\mathbb{R}^N$ invariante por translação obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}}(x)(|\nabla \bar{u}(x - x_n)|^p + |\bar{u}(x - x_n)|^p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})}(z + x_n)[|\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p]. \end{aligned}$$

Observe que

$$\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(z+x_n)[|\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p] \to |\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p \ \ q.t.p\ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(z+x_n)[|\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p]\right| \leq |\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\nabla u_n|^p+|u_n|^p) \to \int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p). \tag{2.8}$$

Mostraremos agora a seguinte convergência

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p \to \int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}\frac{f(\gamma_0\bar{u})}{(\gamma_0\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p.$$

Podemos escrever,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p &= \int_{\mathbb{R}^N}\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x)Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x)Q(x)\frac{f(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))}{(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))^{p-1}}(\bar{u}(x-x_n))^p.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - x_n$ e usando o fato que $\mathbb{R}^N$ é invariante por translação resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x)Q(x)\frac{f(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))}{(\gamma_n\bar{u}(x-x_n))^{p-1}}(\bar{u}(x-x_n))^p = \int_{\mathbb{R}^N}\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x_n+z)Q(x_n+z)\frac{f(\gamma_n\bar{u})}{(\gamma_n\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p.$$

Como $|x_n| \to \infty$ então,

$$\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x_n+z)Q(x_n+z)\frac{f(\gamma_n\bar{u})}{(\gamma_n\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p \to \bar{Q}\frac{f(\gamma_0\bar{u})}{(\gamma_0\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p \ \ q.t.p\ \ em \ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x_n+z)Q(x_n+z)\frac{f(\gamma_n\bar{u})}{(\gamma_n\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p\right| \leq h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $h(x)$ foi obtida usando o fato que a função característica, a função Q e γ_n são limitadas e do crescimento da função f.

Novamente usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N}\lim\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x_n+z)Q(x_n+z)\frac{f(\gamma_n\bar{u})}{(\gamma_n\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p = \lim\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})}(x_n+z)Q(x_n+z)\frac{f(\gamma_n\bar{u})}{(\gamma_n\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\frac{f(\gamma_n u_n)}{(\gamma_n u_n)^{p-1}}u_n^p \to \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}\frac{f(\gamma_0 \bar{u})}{(\gamma_0 \bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p.$$

Consequentemente de (2.5), (2.8) e pela unicidade do limite resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p) = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}\frac{f(\gamma_0 \bar{u})}{(\gamma_0 \bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p. \tag{2.9}$$

Como $\bar{u}$ é solução de (P_∞) então

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p) \;\; = \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \bar{Q}\frac{f(\bar{u})}{(\bar{u})^{p-1}}\bar{u}^p.$$

Portanto de (2.9) e (f_3) temos que $\gamma_0 = 1$.

De (f_1) e (2.4)

$$c_1 \leq I_\infty(\bar{u}) - t_n\left(\frac{\gamma_n^p}{p} - O(\epsilon)\right) + s_n = c_\infty - t_n\left(\frac{\gamma_n^p}{p} - O(\epsilon)\right) + s_n,$$

onde

$$s_n = C_1\int_{\bar{\Omega}}|u_n|^{\eta+1} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n).$$

Afirmação: $\dfrac{s_n}{t_n} \to 0.$

Considerando por um momento esta afirmação teremos que $c_1 < c_\infty$.

Com efeito,

$$t_n = \int_{\bar{\Omega}}(|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \geq \int_{\bar{\Omega}}|u_n|^p,$$

e mostraremos que $\int_{\bar{\Omega}}|u_n|^p \geq C_2 e^{-pan}$ e $\int_{\bar{\Omega}}|u_n|^{\eta+1} \leq C_3 e^{-bn(\eta+1)}$.

Pelo Lema 1.4 temos

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}}|u_n|^p &= \int_{\bar{\Omega}}|\bar{u}(x-x_n)|^p \\
&\geq \int_{\bar{\Omega}}[C_1 e^{-a|x-x_n|}]^p \\
&= \int_{\bar{\Omega}} C_1^p e^{-ap|x-x_n|}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular $|x - x_n| \leq |x_n| + |x|$ obtemos

$$C_1^p e^{-ap|x-x_n|} \;\; \geq \;\; C_1^p e^{-ap|x|}e^{-apn}.$$

Integrando ambos os membros desta última desigualdade

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}} C_1^p e^{-ap|x-x_n|} &\geq C_1^p e^{-apn} \int_{\bar{\Omega}} e^{-ap|x|} \\
&\geq C_1^p e^{-apn} \int_{\bar{\Omega}} K,
\end{aligned}$$

onde K é o mínimo que a função contínua $\dfrac{1}{e^{ap}}$ assume em $\bar{\Omega}$.
Portanto, $\int_{\bar{\Omega}} |u_n|^p \geq C_2 e^{-pan}$.
Usando agora a desigualdade triangular $|x - x_n| \geq |x_n| - |x|$ e o Lema 1.4 temos

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}} |u_n|^{\eta+1} &= \int_{\bar{\Omega}} |\bar{u}(x - x_n)|^{\eta+1} \\
&\leq C_2^{\eta+1} \int_{\bar{\Omega}} e^{-b(\eta+1)|x-x_n|} \\
&\leq C_2^{\eta+1} e^{-b(\eta+1)n} \int_{\bar{\Omega}} e^{b(\eta+1)|x|} \\
&\leq C_2^{\eta+1} e^{-b(\eta+1)n} \int_{\bar{\Omega}} K_1,
\end{aligned}$$

onde K_1 é o máximo que a função contínua $\dfrac{1}{e^{b(\eta+1)}}$ assume em $\bar{\Omega}$.
Portanto,

$$\int_{\bar{\Omega}} |u_n|^{\eta+1} \leq C_3 e^{-b(\eta+1)n}. \tag{2.10}$$

Para estimar $s_n = C_1 \int_{\bar{\Omega}} |u_n|^{\eta+1} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n)$, fixemos $r_n \in (0, n)$ e observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n) = \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| > r_n\}} (\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n) + \int_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| \leq r_n\}} (\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n).$$

Note agora que,

$$\begin{aligned}
F(\gamma_n u_n) &\leq \epsilon |\gamma_n u_n|^{q+1} + C_\epsilon |\gamma_n u_n|^{\eta+1} \\
&= \epsilon \gamma_n^{q+1} |u_n|^{q+1} + C_\epsilon \gamma_n^{\eta+1} |u_n|^{\eta+1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$(\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n) \leq (\bar{Q} - Q) \epsilon \gamma_n^{q+1} |u_n|^{q+1} + (\bar{Q} - Q) C_\epsilon \gamma_n^{\eta+1} |u_n|^{\eta+1}. \tag{2.11}$$

Usando (2) temos

$$\bar{Q} - Q \leq C e^{-m r_n}. \tag{2.12}$$

Substituindo (2.12) em (2.11)

$$(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) \leq Ce^{-mr_n}\epsilon\gamma_n^{q+1}|u_n|^{q+1} + Ce^{-mr_n}C_\epsilon\gamma_n^{\eta+1}|u_n|^{\eta+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) &\leq Ce^{-mr_n}\epsilon\gamma_n^{q+1}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}}|u_n|^{q+1}\\ &+ Ce^{-mr_n}C_\epsilon\gamma_n^{\eta+1}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}}|u_n|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Observando que $(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}\subset\mathbb{R}^N$ e fazendo mudança de variável podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}}|u_n|^{q+1} &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{q+1}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}|^{q+1}.\end{aligned}$$

Podemos então concluir que

$$\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|>r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) \leq C_4e^{-mr_n}. \tag{2.13}$$

Vamos agora estimar

$$\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n).$$

Da condição (f_1)

$$\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) \leq C\epsilon\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}|u_n|^{q+1} + CC_\epsilon\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}|u_n|^{\eta+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) &\leq C\epsilon\int_{\mathbb{R}^N}|\bar{u}|^{q+1} + CC_\epsilon\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}|u_n|^{\eta+1}\\ &= o_\epsilon(1) + CC_\epsilon\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}|u_n|^{\eta+1}\\ &\leq o_\epsilon(1) + C\int_{\{|x|<r_n\}}|u_n|^{\eta+1}.\end{aligned}$$

Temos então, para n suficientemente grande, pelo Lema 1.4 e fazendo mudança de variável

$$\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})\cap\{|x|\leq r_n\}}(\bar{Q}-Q)F(\gamma_n u_n) \leq C_5e^{-b(q+1)(n-r_n)}n^N + o_\epsilon(1). \tag{2.14}$$

Como $t_n \geq C_2e^{-pan}$ então

$$\frac{s_n}{t_n} \leq \frac{s_n e^{pan}}{C_2}.$$

Sabendo que

$$s_n = C_1 \int_{\bar{\Omega}} |u_n|^{\eta+1} + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (\bar{Q} - Q) F(\gamma_n u_n),$$

e usando as estimativas (2.10), (2.13) e (2.14) obtemos

$$s_n \leq C_1 C_3 e^{-bn(\eta+1)} + C_4 e^{-mr_n} + C_5 n^N e^{-(n-r_n)(q+1)b} e^{pan}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{t_n} &\leq \frac{s_n e^{pan}}{C_2} \\ &\leq \frac{C_1 C_3 e^{pan}}{e^{bn(\eta+1)} C_2} + \frac{C_4 e^{pan}}{e^{mr_n} C_2} + \frac{C_5 n^N e^{pan}}{C_3 e^{(n-r_n)(q+1)b}}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{s_n}{t_n} \leq C_8 \left\{ \frac{e^{pan}}{e^{bn(\eta+1)}} + \frac{e^{pna}}{e^{mr_n}} + \frac{e^{pan} n^N}{e^{(n-r_n)(q+1)b}} \right\}.$$

Como $a/b \to 1$ quando $\delta \to 0$ (ver Lema 1.4), então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$m > \frac{pab(q+1)}{b(q+1) - p(a+\epsilon)}.$$

Fazendo $r_n = n(1 - p(a+\epsilon)/b(q+1))$, obtemos $s_n/t_n \to 0$ e assim $c_1 < c_\infty$.

■

Demonstraremos a seguir o resultado que nos garante a existência de solução ground-state positiva para o nosso problema.

Demonstração do Teorema 2.1: Como o funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, então existe uma sequência $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ tal que

$$I(u_n) \to c_1 \quad e \quad I'(u_n) \to 0.$$

Pelo Corolário 1.1 e a Proposição 2.1 existe $u_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u_1$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$. Sendo $I \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}), \mathbb{R})$ então

$$I(u_n) \to I(u_1).$$

Pela unicidade do limite resulta

$$I(u_1) = c_1 = \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u).$$

Desde que

$$I(u_1) = c_1 > 0 \quad \text{e} \quad I'(u_1) = 0,$$

podemos concluir que u_1 é uma solução ground-state não nula para o problema (P).

Vamos agora mostrar que u_1 é não negativa.

Primeiramente note que como estamos interessados em encontrar solução positiva, podemos supor que $f(s) = 0, \ \forall \ s \leq 0$.

Usando u_1^- como função teste temos,

$$I'(u_1)u_1^- = 0. \tag{2.15}$$

Observe que

$$I'(u_1)u_1^- = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla u_1^- + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_1|^{p-2}u_1 u_1^- - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u_1)u_1^-.$$

Do fato que $u_1 = u_1^+ - u_1^-$ temos,

$$\begin{aligned} I'(u_1)u_1^- &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |-\nabla u_1^-|^{p-2}|-\nabla u_1^-|^2 + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |-u_1^-|^{p-2}|-u_1^-|^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(-u_1^-)u_1^- \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |-\nabla u_1^-|^{p-2}|\nabla u_1^-|^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |-u_1^-|^{p-2}|u_1^-|^2 - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(-u_1^-)u_1^- \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_1^-|^p - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_1^-|^p \end{aligned}$$

De (2.15) resulta

$$-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |\nabla u_1^-|^p - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} |u_1^-|^p = 0,$$

ou ainda,

$$|\nabla u_1^-|_p^p + |u_1^-|_p^p = 0,$$

e, portanto,

$$\|u_1^-\|^p = 0.$$

Assim,

$$u_1 = u_1^+ \geq 0.$$

Por [10] (Teorema 1.11), temos que $u_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ e $u_1 \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$. Da desigualdade de Harnack concluímos que $u_1 > 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$.

Logo, u_1 é uma solução ground-state positiva do problema (P).

$\blacksquare$

Capítulo 3

Existência de solução nodal

Neste capítulo, segundo ainda [2], mostraremos a existência de solução nodal para o problema (P) utilizando para este fim o teorema da função implícita.

O principal Teorema deste capítulo que nos garante a existência de solução nodal é:

Teorema 3.1 *Suponha que f satisfaz $(f_1), (f_2), (f_3)$, e (3), $p \geq 2$, e a função Q satisfaz (1) e*

$$Q(x) \geq \bar{Q} + Ce^{-\gamma|x|}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N,$$

onde C é uma constante positiva e $\gamma < q/(q+1)$. Então, (P) tem uma solução nodal.

Iniciaremos considerando o seguinte conjunto fechado

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) : u^+ \not\equiv 0, u^- \not\equiv 0, I'(u^+)u^+ = 0 = I'(u^-)u^- \right\}.$$

Vamos mostrar que de fato o conjunto $\mathcal{M}$ é fechado.

Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ tal que $u_n \to u$. Como $(u_n) \subset \mathcal{M}$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u_n^\pm|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n^\pm|^p = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u_n)^\pm u_n^\pm.$$

Usando o fato que ${u_n}^\pm \to u^\pm$ então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u^\pm|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u^\pm|^p = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u)^\pm u^\pm,$$

e, portanto, $I'(u^\pm)u^\pm = 0$.

Devemos agora mostrar que $u^\pm \not\equiv 0$. Temos que $I(u_n^+) \geq c$ e $I(u_n^-) \geq c$.

Se $u^{\pm} \equiv 0$ teríamos $I(u_n^{\pm}) \to I(u^{\pm})$, e assim $I(u_n^{\pm}) \to 0$, com isto $0 \geq c$ o que é absurdo.

Assim $u \in \mathcal{M}$ e, portanto, o conjunto $\mathcal{M}$ é fechado.

Usando um argumento de contradição, podemos mostrar que existe uma constante $\mu_1 > 0$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |u^{\pm}|^{\eta+1} > \mu_1, \ \forall \ u \in \mathcal{M}. \tag{3.1}$$

Note que para todo $u \in \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} I'(u)u &= I'(u)(u^+ - u^-) \\ &= I'(u)u^+ - I'(u)u^- \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, das imersões contínuas de Sobolev e de (f_2)

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u) - \frac{1}{\theta} I'(u)u \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) \|u\|^p \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |u|^{\eta+1}\right)^{p/\eta+1} \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) C \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |u^+|^{\eta+1}\right)^{p/\eta+1}, \end{aligned}$$

e usando a condição (3.1) temos

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right) C \mu_1^{p/\eta+1}, \ \ \forall \ u \in \mathcal{M},$$

mostrando que I é limitado inferiormente em $\mathcal{M}$.

Portanto, considere o número real

$$\hat{c} = \inf_{u \in \mathcal{M}} I(u).$$

Lema 3.1 *Existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{M}$ satisfazendo*

$$I(u_n) \to \hat{c}, \quad I'(u_n) \to 0.$$

Demonstração: Como o funcional I é limitado inferiormente em $\mathcal{M}$, então usando o Princípio Variacional de Ekeland obtemos uma sequência minimizante $(u_n) \subset \mathcal{M}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \hat{c} &\leq I(u_n) \leq \hat{c} + \frac{1}{n}, \\ I(v) &\geq I(u_n) - \frac{1}{n}\|v - u_n\|, \quad \forall\, v \in \mathcal{M}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Desde que $(I(u_n))$ é convergente e $I(u) \geq C\|u\|^p$, segue-se que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$. Para cada $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ e $n \in \mathbb{N}$, introduziremos as funções $h_n^{\pm} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} h_n^{\pm}(t,s,\ell) &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla(u_n + t\varphi + su_n^+ + \ell u_n^-)^{\pm}|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |(u_n + t\varphi + su_n^+ + \ell u_n^-)^{\pm}|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f((u_n + t\varphi + su_n^+ + \ell u_n^-)^{\pm})(u_n + t\varphi + su_n^+ + \ell u_n^-)^{\pm}. \end{aligned}$$

Considere o seguinte funcional

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u^{\pm}|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u^{\pm}|^p - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u^{\pm}) u^{\pm}.$$

Usando o mesmo raciocínio que se encontra no Apêndice A mostra-se que o funcional J é de classe C^1.

Seja $\Psi : \mathbb{R}^3 \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ uma função definida por

$$\Psi(t,s,\ell) = u_n + t\varphi + su_n^+ + \ell u_n^-.$$

Sendo $h_n^{\pm}(t,s,\ell) = J \circ \Psi$, então $h_n^{\pm} \in C^1$.

Afirmação: $h_n^{\pm}(0,0,0) = 0, (\partial h_n^+/\partial \ell)(0,0,0) = 0$ e $(\partial h_n^-/\partial s)(0,0,0) = 0$.

De fato, como

$$\begin{aligned} h_n^{\pm}(0,0,0) &= J(u_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |\nabla u_n^{\pm}|^p + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n^{\pm}|^p - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} Q(x) f(u_n^{\pm}) u_n^{\pm}, \end{aligned}$$

e usando o fato que $(u_n) \subset \mathcal{M}$ resulta,

$$h_n^{\pm}(0,0,0) = 0.$$

Mostraremos agora que $(\partial h_n^+/\partial \ell)(0,0,0) = 0$.

Temos

$$\begin{aligned}
(\partial h_n^+/\partial \ell)(0,0,0) &= \frac{\partial (J\circ \Psi)}{\partial \ell}(0,0,0)\\
&= J^{'}\Psi(0,0,0)\frac{\partial \Psi}{\partial \ell}(0,0,0)\\
&= J^{'}(u_n){u_n}^-,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
(\partial h_n^+/\partial \ell)(0,0,0) &= p\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\nabla u_n^+|^{p-2}\nabla u_n^+\nabla u_n^- + p\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|u_n^+|^{p-2}u_n^+u_n^-\\
&- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)f(u_n^+)u_n^- - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)f'(u_n^+)u_n^+u_n^-\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga, pode-se mostrar que $(\partial h_n^-/\partial s)(0,0,0)=0$.

Mais ainda, relembrando que $(u_n)\subset\mathcal{M}$ temos

$$\begin{aligned}
(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0) &= J'(u_n)u_n^+\\
&= p\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\nabla u_n^+|^p + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|u_n^+|^p\right) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)f(u_n^+)u_n^+\\
&- \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)f'(u_n^+)(u_n^+)^2\\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)(p-1)f(u_n^+)u_n^+ - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)f'(u_n^+)(u_n^+)^2,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0) = -\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2+(1-p)f(u_n^+)u_n^+).$$

Note que usando a condição (3) obtemos

$$Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2+(1-p)f(u_n^+)u_n^+)\geq Q(x)C|u_n^+|^{\sigma-1}(u_n^+)^2,$$

e assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2+(1-p)f(u_n^+)u_n^+)\geq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)C|u_n^+|^{\sigma+1}.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)C|u_n^+|^{\sigma+1} &= CC_1\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega)\cap\bar B_R}|u_n^+|^{\sigma+1} + C_2\int_{(\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega)\cap\bar B_R^c}|u_n^+|^{\sigma+1}\\
&\geq K\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|u_n^+|^{\sigma+1}.
\end{aligned}$$

De (3.1) resulta

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)C|u_n^+|^{\sigma+1} \geq K\mu_1.$$

O que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 + (1-p)f(u_n^+)u_n^+) \geq K',$$

onde $K' = K\mu_1$.

Portanto,

$$\liminf \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 + (1-p)f(u_n^+)u_n^+) \geq K'.$$

Desta forma temos então que

$$\left(\frac{\partial h_n^+}{\partial s}\right)(0,0,0) < -C_1, \ \forall\ n \geq n_0,$$

para alguma constante positiva C_1. Usando argumentos similares, temos

$$\left(\frac{\partial h_n^-}{\partial \ell}\right)(0,0,0) < -C_1, \ \forall\ n \geq n_0.$$

Portanto, pelo Teorema da Função Implícita, existem funções $s_n(t),\ \ell_n(t)$ de classe C^1 definidas em algum intervalo $(-\delta_n,\delta_n)$, $\delta_n > 0$, tal que $s_n(0) = \ell_n(0) = 0$, e

$$h_n^{\pm}(t, s_n(t), \ell_m(t)) = 0, \quad t \in (-\delta_n, \delta_n).$$

Isto mostra que para todo $t \in (-\delta_n,\delta_n)$,

$$v_n = u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^- \in \mathcal{M}.$$

Mostraremos agora que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|s_n'(0)| \leq C, \quad |\ell_n'(0)| \leq C.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} |s_n'(0)| &= \left|\frac{(\partial h_n^+/\partial t)(0,0,0)}{(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0)}\right| = \left|\frac{J'(\Psi(0,0,0))\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(0,0,0)}{(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0)}\right| = \left|\frac{J'(u_n)\varphi}{(\partial h_n^+/\partial s)(0,0,0)}\right| \\ &= \frac{p\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\nabla u_n^+|^{p-2}\nabla u_n^+\nabla\varphi + |u_n^+|^{p-2}u_n^+\varphi) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)u_n^+ + f(u_n^+))\varphi}{\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 + (1-p)f(u_n^+)u_n^+)\right|}. \end{aligned}$$

Como,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 + (1-p)f(u_n^+)u_n^+) \geq K',$$

então,

$$\frac{1}{|\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)(u_n^+)^2 + (1-p)f(u_n^+)u_n^+)|} \leq \frac{1}{K'} = C.$$

Assim, obtemos

$$|s_n'(0)| \leq \frac{1}{C}\left|p\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}(|\nabla u_n^+|^{p-2}\nabla u_n^+\nabla\varphi + |u_n^+|^{p-2}u_n^+\varphi) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)(f'(u_n^+)u_n^+ + f(u_n^+))\varphi\right|.$$

Da limitação de (u_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ segue-se que $(s_n'(0))$ é limitada.

Analogamente podemos concluir que $|\ell_n'(0)| \leq C$.

De (3.2), temos

$$I(u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|t\varphi + s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-\| \quad \forall\ t \in (-\delta_n, \delta_n),$$

o que implica

$$I(u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-) - I(u_n) \geq -\frac{1}{n}\|t\varphi\| - \frac{1}{n}\|s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-\|.$$

Assim,

$$\frac{I(u_n + t\varphi + s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-) - I(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n}\|\varphi\| - \frac{1}{n}\left\|\frac{s_n(t)u_n^+ + \ell_n(t)u_n^-}{t}\right\|.$$

Passando ao limite de $t \to 0$ nesta última expressão obtemos

$$I'(u_n)\varphi \quad \geq \quad -\frac{1}{n}\|\varphi\| - \frac{1}{n}\|s_n'(0)u_n^+ + \ell_n'(0)u_n^-\|.$$

Então, para todo $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$I'(u_n)\varphi \geq -\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\|s_n'(0)u_n^+ + \ell_n'(0)u_n^-\|.$$

Substituindo φ por $-\varphi$ na última desigualdade encontramos

$$\begin{aligned} |I'(u_n)\varphi| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\|s_n'(0)u_n^+ + \ell_n'(0)u_n^-\| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{C_3}{n}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Passando ao limite de $n \to \infty$ em (3.3) segue que $\|I'(u_n)\| \to 0$.

■

Proposição 3.1 *Suponha que Q satisfaz (1), (2), e (4). Então*

$$0 < \hat{c} < c_1 + c_\infty.$$

Demonstração: Seja $\bar{u}$ a solução ground-state do problema (P_∞). Defina $\bar{u}_n(x) = \bar{u}(x - x_n)$ e $u_n = \alpha u_1 - \beta \bar{u}_n$, onde u_1 é a solução ground-state positiva do problema (P), $x_n = (0, ..., 0, n)$, $\alpha, \beta > 0$. Considere as funções

$$\begin{aligned} h^{\pm}(\alpha, \beta, n) &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \left(|\nabla(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^{\pm}|^p + |(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^{\pm}|^p \right) \\ &- \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf((\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^{\pm})(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n)^{\pm}. \end{aligned}$$

Sendo u_1 a solução ground-state do problema (P), então $I'(u_1)u_1 = 0$, o que equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u_1|^p + u_1^p) = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf(u_1)u_1. \tag{3.4}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \left(\left| \frac{1}{p} \nabla u_1 \right|^p + \left| \frac{1}{p} u_1 \right|^p \right) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf\left(\frac{1}{p} u_1\right) \frac{1}{p} u_1 \\ &= \frac{1}{p^p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla u_1|^p + u_1^p) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf\left(\frac{1}{p} u_1\right) \frac{1}{p} u_1. \end{aligned}$$

Usando (3.4) nesta última igualdade juntamente com a condição (f_3) e o fato que $Q(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p^p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf(u_1)u_1 - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf\left(\frac{1}{p} u_1\right) \frac{1}{p} u_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q \left(\frac{f(u_1)}{(u_1)^{p-1}} - \frac{f((1/p)u_1)}{((1/p)u_1)^{p-1}} \right) \left(\frac{u_1}{p} \right)^p > 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|p \nabla u_1|^p + |pu_1|^p) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Qf(pu_1)pu_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q \left(\frac{f(u_1)}{(u_1)^{p-1}} - \frac{f(pu_1)}{(pu_1)^{p-1}} \right) (pu_1)^p < 0. \end{aligned}$$

Vamos agora provar que para n suficientemente grande temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \left(\left| \frac{1}{p} \nabla \bar{u}_n \right|^p + \left| \frac{1}{p} \bar{u}_n \right|^p \right) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x) f\left(\frac{1}{p} \bar{u}_n\right) \frac{1}{p} \bar{u}_n > 0.$$

De fato, note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\left(\left|\frac{1}{p}\nabla\bar{u}_n\right|^p+\left|\frac{1}{p}\bar{u}_n\right|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n\\
&=\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\left(\left|\frac{1}{p}\nabla\bar{u}_n\right|^p+\left|\frac{1}{p}\bar{u}_n\right|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n+\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)\\
&-\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)-\int_{\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n+\int_{\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n,
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\left(\left|\frac{1}{p}\nabla\bar{u}_n\right|^p+\left|\frac{1}{p}\bar{u}_n\right|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n-\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)\\
&+\int_{\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x - x_n$ e usando o fato que $z + x_n \to +\infty$ juntamente com a condição (1) resulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}\left(\left|\frac{1}{p}\nabla\bar{u}_n\right|^p+\left|\frac{1}{p}\bar{u}_n\right|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f\left(\frac{1}{p}\bar{u}\right)\frac{1}{p}\bar{u}+o_n(1)-\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)\\
&+\int_{\bar{\Omega}}Q(x)f\left(\frac{1}{p}\bar{u}_n\right)\frac{1}{p}\bar{u}_n.
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito em (3.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}|^p\right)-\int_{\mathbb{R}^N}\bar{Q}f\left(\frac{1}{p}\bar{u}\right)\frac{1}{p}\bar{u}>0.$$

Agora, note que

$$\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)=\frac{1}{p^p}\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\bar{\Omega}}(x)[|\nabla\bar{u}_n|^p+|\bar{u}_n|^p].$$

Fazendo mudança de variável resulta

$$\int_{\bar{\Omega}}\left(\frac{1}{p^p}|\nabla\bar{u}_n|^p+\frac{1}{p^p}|\bar{u}_n|^p\right)=\frac{1}{p^p}\int_{\mathbb{R}^N}\chi_{\bar{\Omega}}(z+x_n)[|\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p].$$

Como

$$\chi_{\bar{\Omega}}(z+x_n)[|\nabla\bar{u}|^p+|\bar{u}|^p]\to 0\ \ q.t.p\ \ em\ \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\chi_{\bar{\Omega}}(z+x_n)[|\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p] \leq |\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\bar{\Omega}} \left(\frac{1}{p^p} |\nabla \bar{u}_n|^p + \frac{1}{p^p} |\bar{u}_n|^p \right) = \frac{1}{p^p} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\bar{\Omega}}(z+x_n)[|\nabla \bar{u}|^p + |\bar{u}|^p] \to 0.$$

De modo similar

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{Q} f \left(\frac{1}{p} \bar{u}_n \right) \frac{1}{p} \bar{u}_n \to 0.$$

Assim, temos o resultado desejado.

Raciocinando de maneira análoga obtemos para n suficientemente grande

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|p \nabla \bar{u}_n|^p + |p \bar{u}_n|^p) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x) f(p \bar{u}_n) p \bar{u}_n < 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \alpha u_1(x) - \beta \bar{u}_n(x) \\ &= \alpha u_1(x) - \beta \bar{u}(x - x_n). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.4 temos que $\bar{u}(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, de onde concluímos que

$$u_n(x) = \alpha u_1(x) + o_n(1).$$

Da mesma forma, fazendo a mudança de variável $z = x - x_n$ temos

$$u_n(z + x_n) = \alpha u_1(z + x_n) - \beta \bar{u}(z).$$

Como $u_1(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ temos

$$u_n(z + x_n) = -\beta \bar{u}(z) + o_n(1),$$

ou seja,

$$u_n(x) = -\beta \bar{u}_n(x) + o_n(1).$$

Assim, existe $n_0 > 0$ tal que

$$h^+ (1/p, \beta, n) > 0, \quad h^+ (p, \beta, n) < 0,$$

para $n \geq n_0$ e $\beta \in [1/p, p]$. Agora, para todo $\alpha \in [1/p, p]$, temos

$$h^{-}(\alpha, 1/p, n) > 0, \quad h^{-}(\alpha, p, n) < 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio devido a Miranda [12], obtemos α^*, β^* tal que
$1/p \leq \alpha^*,\ \beta^* \leq p$,

$$h^{\pm}(\alpha^*, \beta^*, n) = 0 \quad \textit{para} \quad n \geq n_0,$$

isto é,

$$\alpha^* u_1 - \beta^* \bar{u}_n \in \mathcal{M}$$

para $n \geq n_0$.

Da definição de $\hat{c}$ é suficiente mostrar que

$$\sup_{\frac{1}{p} \leq \alpha, \beta \leq p} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) < c_1 + c_\infty,$$

para algum $n \geq n_0$, pois $\sup\limits_{\frac{1}{p} \leq \alpha, \beta \leq p} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) = I(\alpha^* u_1 - \beta^* \bar{u}_n)$.

De fato, como

$$I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla \alpha u_1 - \beta \nabla \bar{u}_n|^p + |\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n|^p) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x) F(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n),$$

segue-se do Lema 1.5 e do Lema B.2 (ver Apêndice B) que

$$I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) \leq I_1 + I_2 - I_3,$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\nabla(\alpha u_1)|^{p-2} \nabla(\alpha u_1) - |\nabla(\beta \bar{u}_n)|^{p-2} \nabla(\beta \bar{u}_n))(\nabla(\alpha u_1) - \nabla(\beta \bar{u}_n)), \\
I_2 &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} (|\alpha u_1|^{p-2} \alpha u_1 - |\beta \bar{u}_n|^{p-2} \beta \bar{u}_n)(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n), \\
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q F(\alpha u_1) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q F(\beta \bar{u}_n) - 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} Q(x)(f(\alpha u_1) \beta \bar{u}_n + \alpha u_1 f(\beta \bar{u}_n)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) &\leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\alpha u_1)|^p - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\alpha u_1)|^{p-2} \nabla(\alpha u_1) \nabla(\beta \bar{u}_n) \\
&- \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\beta \bar{u}_n)|^{p-2} \nabla(\beta \bar{u}_n) \nabla(\alpha u_1) + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla(\beta \bar{u}_n)|^p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\alpha u_1|^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\alpha u_1|^{p-2}(\alpha u_1)(\beta\bar u_n)\\
&- \quad \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\beta\bar u_n|^{p-2}(\beta\bar u_n)(\alpha u_1) + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\beta\bar u_n|^p\\
&+ \quad 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(f(\alpha u_1)\beta\bar u_n + \alpha u_1 f(\beta\bar u_n)) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}QF(\alpha u_1) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}QF(\beta\bar u_n).
\end{aligned}
$$

Podemos então afirmar que

$$
\begin{aligned}
I(\alpha u_1 - \beta\bar u_n) \quad &\leq \quad I(\alpha u_1) + I_\infty(\beta\bar u_n) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(Q-\bar Q)F(\beta\bar u_n) + \int_{\bar\Omega}\bar Q F(\beta\bar u_n)\\
&- \quad \frac{1}{p}\int_{\bar\Omega}(|\nabla(\beta\bar u_n)|^p + |\beta\bar u_n|^p) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\nabla(\alpha u_1)|^{p-2}\nabla(\alpha u_1)\nabla(\beta\bar u_n)\\
&- \quad \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\nabla(\beta\bar u_n)|^{p-2}\nabla(\beta\bar u_n)\nabla(\alpha u_1) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\alpha u_1|^{p-2}(\alpha u_1)(\beta\bar u_n)\\
&- \quad \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}|\beta\bar u_n|^{p-2}(\beta\bar u_n)(\alpha u_1) + 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}Q(x)(f(\alpha u_1)\beta\bar u_n + \alpha u_1 f(\beta\bar u_n)).
\end{aligned}
$$

Como u_1 é uma solução de (P) e $\bar u_n$ está relacionada com a ground-state do problema (P_∞), temos

$$
\begin{aligned}
I(\alpha u_1 - \beta\bar u_n) \quad &\leq \quad I(\alpha u_1) + I_\infty(\beta\bar u_n) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(Q-\bar Q)F(\beta\bar u_n)\\
&+ \quad C_1\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(f(\alpha u_1)\beta\bar u_n + \alpha u_1 f(\beta\bar u_n)) + \int_{\bar\Omega}\bar Q F(\beta\bar u_n).
\end{aligned}
$$

Notando que $I(\alpha u_1)$ e $I_\infty(\beta\bar u_n)$ são limitadas para todo $\alpha,\beta > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\sup_{1/p\leq\alpha,\beta\leq p} I(\alpha u_1 - \beta\bar u_n) \quad &\leq \quad \sup_{\alpha\geq 0} I(\alpha u_1) + \sup_{\beta\geq 0} I_\infty(\beta\bar u_n) - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(Q-\bar Q)F\left(\frac{1}{p}\bar u_n\right)\\
&+ \quad C_1\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(f(\alpha u_1)\beta\bar u_n + \alpha u_1 f(\beta\bar u_n)) + \int_{\bar\Omega}\bar Q F(p\bar u_n). \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Vamos agora provar que

$$
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(Q-\bar Q)F\left(\frac{1}{p}\bar u_n\right) \geq Ce^{-\gamma n}. \qquad (3.7)
$$

Por (4) temos

$$
Q(z+x_n) - \bar Q > Ce^{-\gamma|z|}e^{-\gamma n},
$$

e assim,

$$
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar\Omega}(Q(z+x_n)-\bar Q)F\left(\frac{1}{p}\bar u_n\right) > Ce^{-\gamma n}.
$$

Usando o Lema 1.4 juntamente com a condição de crescimento da função f obtemos

$$
\int_{\bar\Omega}\bar Q F(p\bar u_n) \leq p\frac{\epsilon}{q+1}C_2^{q+1}e^{-b(q+1)n}\int_{\bar\Omega}\bar Q e^{b(q+1)|x|} + p\frac{C_\epsilon}{\eta+1}C_2^{\eta+1}e^{-b(\eta+1)n}\int_{\bar\Omega}\bar Q e^{b(\eta+1)|x|}.
$$

Com isto, concluímos que

$$\int_{\bar{\Omega}} \bar{Q}F(p\bar{u}_n) \leq \epsilon e^{-b(q+1)n} + C_2 e^{-nb(\eta+1)} \leq C e^{-b(q+1)n}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, usando novamente a condição de crescimento da função f segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} f(\alpha u_1)\beta\bar{u}_n \leq \epsilon\alpha^q\beta \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} u_1^q\bar{u}_n + C_\epsilon\alpha^\eta\beta \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} u_1^\eta\bar{u}_n.$$

Podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} u_1^q\bar{u}_n = \int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n + \int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|\geq n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n$$

Usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{q+1}{q}$ e $q+1$ temos

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n \leq \left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^{q+1}\right)^{q/(q+1)} \left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} \bar{u}_n^{q+1}\right)^{1/(q+1)}.$$

Como $(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\} \subset \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$, então

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} u_1^{q+1}\right)^{q/(q+1)} \left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} \bar{u}_n^{q+1}\right)^{1/(q+1)}.$$

Sendo $\bar{u}_n = \bar{u}(x-x_n)$, então

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n \leq C_1\left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} (\bar{u}(x-x_n))^{q+1}\right)^{1/(q+1)}.$$

Pelo Lema 1.4 resulta que

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n \leq C_1C_2^{q+1}\left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} e^{-b|x-x_n|(q+1)}\right)^{1/(q+1)}.$$

Sabendo que $|x_n - x| \geq |x_n| - |x| = n - |x|$, segue-se

$$\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n \leq C_3e^{-bn}\left(\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} e^{b|x|(q+1)}\right)^{1/(q+1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})\cap\{|x|<n/(q+1)\}} u_1^q\bar{u}_n &\leq C_3e^{-bn}\left(\int_{\{|x|<n/(q+1)\}} e^{b|x|(q+1)}\right)^{1/(q+1)} \\ &= C_4e^{-bn}\left(\int_0^{n/(q+1)} e^{b(q+1)r}r^{N-1}dr\right)^{1/(q+1)}.\end{aligned}$$

Relembrando que para todo $t > 0$ fixado temos

$$\int e^{tr} r^{N-1} dr = e^{tr} P(r),$$

onde

$$P(r) = \frac{r^{N-1}}{t} - \frac{(N-1)}{t^2} r^{N-2} + \frac{(N-1)(N-2)}{t^3} r^{N-3} + ... + (-1)^{N+1} \frac{(N-1)!}{t^N}.$$

Assim, fazendo $t = b(q+1)$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^{n/(q+1)} e^{b(q+1)r} r^{N-1} dr &= e^{bn} P(n/(q+1)) \\ &= C_5 e^{bn} + C_6. \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{n/(q+1)} e^{b(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{1/(q+1)} &= (C_5 e^{bn} + C_6)^{1/(q+1)} \\ &\leq 2^{1/(q+1)} (C_5^{1/(q+1)} e^{bn/(q+1)} + C_6^{1/(q+1)}) \\ &= K_1 e^{bn/(q+1)} + K_2. \end{aligned}$$

Temos assim que

$$\begin{aligned} C_4 e^{-bn} \left(\int_0^{n/(q+1)} e^{b(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{1/(q+1)} &\leq C_4 K_1 e^{-bn} e^{bn/(q+1)} + K_2 C_4 e^{-bn} \\ &\leq C_7 (e^{-bn} e^{bn/(q+1)} + e^{-bn}) \\ &\leq C_8 e^{-bn(q/(q+1))}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| < n/(q+1)\}} u_1^q \bar{u}_n \leq C_8 e^{-bn(q/(q+1))}. \tag{3.9}$$

Fazendo $A_n = (\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| \geq n/(q+1)\}$ e raciocinando de maneira análoga temos

$$\begin{aligned} \int_{A_n} u_1^q \bar{u}_n &\leq \left(\int_{A_n} u_1^{q+1} \right)^{q/(q+1)} \left(\int_{A_n} (\bar{u}_n(x - x_n))^{q+1} \right)^{1/(q+1)} \\ &\leq \left(\int_{A_n} u_1^{q+1} \right)^{q/(q+1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\bar{u}_n(x - x_n))^{q+1} \right)^{1/(q+1)} \\ &\leq C_9 \left(\int_{A_n} e^{-b(q+1)|x|} \right)^{q/(q+1)} \\ &= C_{10} \left(\int_{n/(q+1)}^{\infty} e^{-b(q+1)r} r^{N-1} dr \right)^{q/(q+1)}, \end{aligned}$$

e assim

$$\int_{A_n} u_1^q \bar{u}_n \leq C_{11} e^{-bn(\frac{q}{q+1})}. \tag{3.10}$$

Combinando (3.9) e (3.10) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} u_1^q \bar{u}_n \leq C_{12} e^{-bn(\frac{q}{q+1})}.$$

Por outro lado, sendo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} f(\alpha u_1)\beta \bar{u}_n &\leq C\left(\int_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| < n/(q+1)\}} |u_1|^q |\bar{u}_n| + \int_{A_n} |u_1|^q |\bar{u}_n|\right) \\
&+ C\left(\int_{(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap \{|x| < n/(q+1)\}} |u_1|^\eta |\bar{u}_n| + \int_{A_n} |u_1|^\eta |\bar{u}_n|\right),
\end{aligned}$$

então usando as estimativas acima temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} f(\alpha u_1)\beta \bar{u}_n &\leq C_{13} e^{-bn(\frac{q}{q+1})} + C_{14} e^{-bn(\frac{q}{q+1})} + C_{15} e^{-bn(\frac{\eta}{\eta+1})} + C_{16} e^{-bn(\frac{\eta}{\eta+1})} \\
&\leq C e^{-bn(\frac{q}{q+1})}, \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

de maneira similar

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} \alpha u_1 f(\beta \bar{u}_n) \leq C e^{-bn(\frac{q}{q+1})}.$$

Relembrando que $\gamma < q/(q+1)$, e substituindo (3.7), (3.8), e (3.11) em (3.6), com a e b próximos de 1, temos para n suficientemente grande que

$$\sup_{1/p \leq \alpha, \beta \leq p} I(\alpha u_1 - \beta \bar{u}_n) < \sup_{\alpha \geq 0} I(\alpha u_1) + \sup_{\beta \geq 0} I_\infty(\beta \bar{u}_n) = c_1 + c_\infty.$$

Então

$$\hat{c} < c_1 + c_\infty.$$

■

Lema 3.2 *Seja $(u_n) \subset \mathcal{M}$ a sequência obtida no Lema 3.1. Então (u_n) possui uma subsequência convergindo fortemente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$.*

Demonstração: Como (u_n) é uma sequência $(PS)_{\hat{c}}$ então podemos mostrar que a mesma é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$. Denotemos por u o limite fraco de (u_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega})$.

Pelo Lema 1.8 temos que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ ou existem k funções u^j com $1 \leq j \leq k$ satisfazendo o Lema 1.8.

Do fato que

$$I(u_n) \to I(u) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j)$$

e

$$I(u_n) \to \hat{c},$$

então pela unicidade do limite resulta

$$\hat{c} = I(u) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(u^j).$$

Sendo $I(u) \geq 0$, se fosse $k \geq 2$ teríamos

$$\hat{c} \geq 2c_\infty > c_\infty + c_1$$

o que contraria o fato que $0 < \hat{c} < c_1 + c_\infty$.

Portanto, $k \leq 1$.

Suponha que $u \equiv 0$. Neste caso, sendo $\hat{c} > 0$, temos que $k = 1$ e portanto

$$u_n \to u^1(\cdot - y_n^1) \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}).$$

Por outro lado, como $u_n \in \mathcal{M}$ e $|y_n^1| \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(u^1)^\pm|^{\eta+1} dx \geq \frac{\mu}{2} > 0.$$

Logo, $(u^1)^\pm \in \mathcal{N}_\infty$.

Assim,

$$c_1 + c_\infty > \hat{c} = I_\infty(u^1) = I_\infty((u^1)^+) + I_\infty((u^1)^-) \geq 2c_\infty,$$

contradizendo o fato que $c_1 < c_\infty$. Então $u \not\equiv 0$.

Se (u_n) não convergisse fortemente para u, então $u^1 \not\equiv 0$. Novamente $I_\infty(u^1) \geq c_\infty$.

Logo,

$$\hat{c} \geq I(u) + I_\infty(u^1) \geq c_1 + c_\infty$$

o que contradiz a desigualdade $\hat{c} < c_1 + c_\infty$.

Assim, não existe k e (u_n) converge fortemente para u em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$. ∎

Demonstração do Teorema 3.1: Pelo Lema 3.2, existe $u \in \mathcal{M}$ tal que

$$I(u) = \hat{c}, \qquad I'(u) = 0,$$

assim, u é solução nodal de (P).

$\blacksquare$

Apêndice A

Regularidade do funcional I

Definição A.1 *Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que φ tem uma derivada de Gateaux, $f \in X'$, em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + tv) - \varphi(u) - f(th)] = 0.$$

A derivada de Gateaux de φ em u é denotada por $\varphi'(u)$.

Definição A.2 *Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Dizemos que φ possui uma derivada de Fréchet, $f \in X'$, em $u \in A$ se,*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|}|\varphi(u + h) - \varphi(u) - f(h)| = 0.$$

Definição A.3 *Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$, se a derivada de Fréchet de φ existe e é contínua em A.*

Observação A.1 *A derivada de Gateaux é dada por*

$$\varphi'(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u + th) - \varphi(u)].$$

Observação A.2 *Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.*

Proposição A.1 *Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ um funcional onde A é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X. Se φ possui derivada de Gateaux contínua em A, então $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Consideremos $u \in A$ e $\varphi'(u)$ a derivada de Gateaux de φ em u. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h)| &= |\varphi'(u+\theta h)(h) - \varphi'(u)(h)| \\ &\leq \|\varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u)\|_{X'}\|h\|. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Como φ possui derivada de Gateaux contínua em A, então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$ temos

$$\|\varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u)\|_{X'} < \epsilon.$$

Segue então de (A.1) que

$$|\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(h)| < \epsilon\|h\|$$

de onde concluímos que φ possui uma derivada de Frechet e esta é contínua.

■

Mostraremos agora que o funcional I relacionado ao problema (P) é de classe $C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

Para isto, consideraremos os funcionais $I_1, I_2, I_3 : W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$ definidos por $I_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u|^p$, $I_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |u|^p$, $I_3(u) = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} Q(x)F(u)$.

Proposição A.2 *O funcional* $I = I_1 + I_2 - I_3 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

Demonstração: É suficiente provarmos que a derivada de Gateaux de I_1, I_2 e I_3 existem e são contínuas.

Observemos inicialmente que o funcional $I = I_1 + I_2 - I_3$ está bem definido.

De fato,

(1) Para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ temos que $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ e portanto,

$I_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u|^p < \infty$;

(2) Para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ temos que $|u| \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ e portanto

$I_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |u|^p < \infty$;

(3) Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(u) &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(u)\right| \\ \leq & \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} \left|Q(x)\left(\int_0^u f(t)dt\right)\right|.\end{aligned}$$

Relembrando que $|f(t)| \leq \epsilon|t|^q + C_\epsilon|t|^\eta$ e considerando $u \geq 0$ temos

$$\begin{aligned}Q(x)\left|\int_0^u f(t)dt\right| &\leq Q(x)\int_0^u |f(t)|dt \\ &\leq Q(x)\left[\epsilon\int_0^u |t|^q dt + C_\epsilon\int_0^u |t|^\eta dt\right] \\ &= Q(x)\epsilon\frac{|u|^{q+1}}{q+1} + Q(x)C_\epsilon\frac{|u|^{\eta+1}}{\eta+1}.\end{aligned}$$

Agora, considerando $u < 0$ temos de forma análoga que

$$Q(x)\left|\int_0^u f(t)dt\right| \leq Q(x)\epsilon\frac{|u|^{q+1}}{q+1} + Q(x)C_\epsilon\frac{|u|^{\eta+1}}{\eta+1}.$$

Da imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ com $1 \leq r \leq p^*$ resulta

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)F(u)dx &\leq Q(x)\left|\int_0^u f(t)dt\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\epsilon\frac{|u|^{q+1}}{q+1} + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)C_\epsilon\frac{|u|^{\eta+1}}{\eta+1} < \infty.\end{aligned}$$

De $(1), (2)$ e (3) concluímos que o funcional I está bem definido.

Afirmação A.1 *O funcional* $I_1 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

Demonstração: **Existência da derivada de Gateaux de** I_1

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(s) = \dfrac{1}{p}|\nabla u + st\nabla v|^p$. Observe que

(i) $f'(s) = |\nabla u + st\nabla v|^{p-2}(\nabla u + st\nabla v)t\nabla v$;

(ii) $f(1) = \dfrac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p$;

(iii) $f(0) = \dfrac{1}{p}|\nabla u|^p$.

Sendo f contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que
$$f(1) - f(0) = f'(\gamma),$$
isto é,
$$\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p = t|\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t\nabla v)\nabla v.$$
Assim,
$$\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} = |\nabla u + \gamma t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \gamma t\nabla v)\nabla v.$$
Logo,
$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - \frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x) \ \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$$
e
$$\left|\frac{\frac{1}{p}|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - \frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p}{t}\right| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|,$$
onde $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$.

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos
$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.$$
Concluímos então que
$$\begin{aligned} I_1'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v, \end{aligned}$$
mostrando que existe a derivada de Gateaux do funcional $I_1(u)$, sendo
$$I_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v, \ \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}).$$

Continuidade da derivada de Gateaux de I_1

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$. Assim,

$$|\nabla u_n| \to |\nabla u| \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}).$$

Com isto, existe uma subsequência de (u_n) que ainda denotaremos por (u_n) e uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tais que

$$|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega} \tag{A.2}$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x) \;\; q.t.p \;\; em \;\; \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}. \tag{A.3}$$

Para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v - \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right) \nabla v \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right| |\nabla v|, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $p/(p-1)$ e p obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right| |\nabla v| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p} \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$|I_1'(u)v - I_1'(u)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p} \|v\|.$$

Como

$$\sup_{\|v\|\leq 1} |I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| = \|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(W^{1,p})'},$$

então,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(W^{1,p})'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p} \tag{A.4}$$

Segue de (A.2) que

$$\Big||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\Big|^{p/(p-1)} \to 0 \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega},$$

e por (A.3),

$$\Big||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\Big|^{p/(p-1)} \leq 2^{p/(p-1)}(g^p + |\nabla u|^p), \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}\,,$$

onde $g^p, |\nabla u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ e portanto $2^{p/(p-1)}(g^p + |\nabla u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$.
Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}\Big||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\Big|^{p/(p-1)}dx = 0.$$

De (A.4) concluímos

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(W^{1,p})'} \to 0 \ quando \ \ n \to \infty,$$

ou seja,

$$I_1'(u_n) \to I_1'(u) \ em \ \ (W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}))'.$$

Portanto, $I_1 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

■

Afirmação A.2 *O funcional* $I_2 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

Demonstração: **Existência da derivada de Gateaux de** I_2

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \dfrac{1}{p}|u + stv|^p$. Observe que:

(i) $f'(s) = |u + stv|^{p-2}(u + stv)tv$;

(ii) $f(1) = \dfrac{1}{p}|u + tv|^p$;

(iii) $f(0) = \dfrac{1}{p}|u|^p$.

Como f é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ então pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\gamma),$$

assim,

$$\frac{1}{p}|u+tv|^p - \frac{1}{p}|u|^p = |u+\gamma tv|^{p-2}(u+\gamma tv)tv.$$

Daí,

$$\frac{\frac{1}{p}|u+tv|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t} = |u+\gamma tv|^{p-2}(u+\gamma tv)v.$$

Com isto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}|u(x)+tv(x)|^p - \frac{1}{p}|u(x)|^p}{t} = |u(x)|^{p-2}u(x)v(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}$$

e

$$\left|\frac{\frac{1}{p}|u+tv|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t}\right| \leq (|u|+|v|)^{p-1}|v|,$$

onde $(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}\frac{\frac{1}{p}|u+tv|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t} = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|u|^{p-2}uv.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_2'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv)-I_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}\frac{\frac{1}{p}|u+tv|^p - \frac{1}{p}|u|^p}{t} = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|u|^{p-2}uv. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Gateaux do funcional I_2 existe e é dada por

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}}|u|^{p-2}uv, \forall \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega}).$$

Continuidade da derivada de Gateaux do funcional I_2

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$. Assim, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ e consequentemente existe uma subsequência de (u_n), que ainda denotaremos por (u_n), e uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ tais que

$$u_n(x) \to u(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega} \tag{A.5}$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}. \tag{A.6}$$

Para toda $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u_n|^{p-2} u_n v - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} |u|^{p-2} uv \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left(|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right) v \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right| |v|, \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder com os expoentes $p/(p-1)$ e p obtemos

$$|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \ \leq \ \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p} |v|_p.$$

Da imersão contínua $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ segue-se que

$$|I_1'(u)v - I_1'(u)v| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p} \|v\|.$$

Como

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| = \|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(W^{1,p})'},$$

então

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{p/(p-1)} \right)^{p-1/p}. \tag{A.7}$$

Segue de (A.5) que

$$\left| |u_n(x)|^{p-2} u_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{p/(p-1)} \to 0 \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$$

e por (A.6),

$$\left| |u_n(x)|^{p-2} u_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{p/(p-1)} \leq 2^{p/(p-1)} (g^p + |u|^p), \forall \ n \in \mathbb{N},$$

onde $g^p, |u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ e portanto $2^{p/(p-1)}(g^p + |u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$.

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}} \left| |u_n(x)|^{p-2} u_n(x) - |u(x)|^{p-2} u(x) \right|^{p/(p-1)} dx = 0.$$

De (A.7) concluímos

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(W^{1,p})'} \to 0 \quad quando \quad n \to \infty,$$

ou seja,

$$I_2'(u_n) \to I_2'(u) \; em \; (W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}))'.$$

Portanto, $I_2 \in C^1(W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}), \mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Existência da derivada de Gateaux do funcional I_3

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$. Seja $k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $k(s) = Q(x)F(u + stv)$. Temos que

(i) $k'(s) = Q(x)f(u + stv)tv$;

(ii) $k(1) = Q(x)F|u + tv|$;

(iii) $k(0) = Q(x)F(u)$.

Como k é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, então pelo Teorema do Valor Médio existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$k(1) - k(0) = k'(\gamma),$$

ou seja,

$$Q(x)\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = Q(x)f(u + \gamma tv)v.$$

Note que

$$\left| Q(x)\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| = Q(x)|f(u + \gamma tv)||v|,$$

e da condição de crescimento da função f obtemos

$$|f(u + \gamma tv)| \leq 2^q \epsilon(|u|^q + |v|^q) + 2^\eta C_\epsilon(|u|^\eta + |v|^\eta).$$

Daí,

$$\left| Q(x)\frac{F(u+tv) - F(u)}{t} \right| \leq Q(x)2^q \epsilon(|u|^q + |v|^q)|v| + Q(x)2^\eta C_\epsilon(|u|^\eta + |v|^\eta)|v|,$$

onde, $Q(x)2^q \epsilon(|u|^q + |v|^q)|v| + Q(x)2^\eta C_\epsilon(|u|^\eta + |v|^\eta)|v| \in L^1(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$.

Temos,

$$\lim_{t\to 0} Q(x)\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = Q(x)f(u)v.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} \lim_{t\to 0} Q(x)\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u)v.
\end{aligned}$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned}
I_3'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+tv)-I_3(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)\frac{F(u+tv)-F(u)}{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u)v,
\end{aligned}$$

e assim, existe a derivada de Gateaux do funcional I_3 que é dada por

$$I_3'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u)v, \ \forall \ \ v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}).$$

Continuidade da derivada de Gateaux do funcional I_3

Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$. Assim, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ e consequentemente existe uma subsequência de (u_n), que ainda denotaremos por (u_n), e uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega})$ tais que

$$u_n(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega} \tag{A.8}$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}. \tag{A.9}$$

Da continuidade de f resulta

$$Q(x)f(u_n(x)) \to Q(x)f(u(x)) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$$

consequentemente,

$$Q(x)f(u_n(x))v(x) \to Q(x)f(u(x))v(x) \ \ q.t.p \ em \ \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}.$$

Do crescimento da função f temos

$$|Q(x)f(u_n(x))v(x)| \leq Q(x)\epsilon|u_n(x)|^q|v(x)| + Q(x)C_\epsilon|u_n(x)|^\eta|v(x)|,$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u_n)v \to \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u)v,$$

isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u_n)v - \int_{\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}} Q(x)f(u)v\right| \leq \epsilon, \ \forall \ \ n \geq n_0.$$

Tomando $\|v\| \leq 1$ resulta

$$\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\| \leq \epsilon, \forall \ n \geq n_0.$$

Mostrando que

$$I_3'(u_n) \to I_3'(u_n).$$

$\blacksquare$

Apêndice B

Resultados básicos

Neste apêndice enunciaremos os principais lemas e teoremas utilizados ao longo deste trabalho e indicaremos as referências para a consulta das demonstrações.

Teorema B.1 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) : \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) \right\}$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Ver [4].

Lema B.1 *(Lema de Fatou) Seja u_n uma sequência de funções integráveis não negativas, então*

$$\int \liminf u_n \leq \liminf \int u_n.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema B.2 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:*

(a) $f_n(x) \to f(x) \quad q.t.p \quad \Omega$;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e q.t.p em Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema B.3 *(Desigualdade de Hölder) Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *onde* $1 < p < \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } |fg|_{L^1(\Omega)} \leq |f|_{L^p(\Omega)}|g|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema B.2 *Para todos,* $v, w \in \mathbb{R}^N$ *com* $N \geq 1$ *e* $p \geq 2$,

$$(|v|^{p-2}v - |w|^{p-2}w)(v - w) \geq |v - w|^p.$$

Demonstração: Ver [14].

Teorema B.4 *Sejam* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tais que*

$$f_n \to f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então existe uma subsequência $\left(f_{n_j}\right) \subset (f_n)$ *tal que*

(i) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω;

(ii) $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p em* $\Omega \ \forall \ j$, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5].

Teorema B.5 *Seja* H *um espaço de Banach reflexivo. Se* (u_n) *é uma sequência limitada em* H, *então existem uma subsequência* (u_{n_j}) *de* (u_n) *e* $u \in H$ *tais que*

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H.$$

Demonstração: Ver [5].

Lema B.3 *(Brézis-Lieb) Sejam* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *com* $p > 1$. *Suponhamos que* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω *e que exista* $C > 0$ *tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p \leq C, \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\int_\Omega f_n\varphi \to \int_\Omega f\varphi, \forall \ \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Ver [13].

Teorema B.6 *(Brézis-Lieb) Seja* Ω *um subconjunto aberto do* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Se*

(a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω,

então $|u_n|_p^p = |u|_p^p + |u_n - u|_p^p + o_n(1)$.

Demonstração: Ver [15].

Lema B.4 *(Desigualdade de Young) Sejam* p *e* q *números reais satisfazendo* $1 < p < \infty$ *e* $(1/p) + (1/q) = 1$. *Então para todos* A *e* B *não negativos e para todo* $\delta > 0$, *vale a desigualdade*

$$AB \leq C(\delta)A^p + \delta B^q.$$

Demonstração: Ver [9].

Lema B.5 *Seja* $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ *uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I. *Então existe uma subsequência* (u_{n_j}) *tal que*

(a) $u_{n_j}(x) \to u(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$

(b) $\nabla u_{n_j}(x) \to \nabla u(x)$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$.

Demonstração: De fato, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I, então (u_n) é limitada, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ é reflexivo, temos que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \ \ em \ \ W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}),$$

e usando a imersão compacta $W^{1,p}(B_R) \hookrightarrow L^s(B_R)$ com $p \leq s < p^*$, obtemos

$$u_n \to u \ \ \text{em} \ \ L^s(B_R).$$

Em particular,

$$u_{n|B_R} \to u_{|B_R} \ \ em \ \ L^p(B_R), \ \forall \ R > 0.$$

Assim, fixando $R = 1$, existe uma subsequência $(u_{1n}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{1n}(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ B_1.$$

Usando agora a imersão compacta na sequência u_{1n} e fixando $R = 2$, existe uma subsequência $(u_{2n}) \subset u_{1n}$ tal que

$$u_{2n}(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ B_2.$$

Seguindo este mesmo raciocínio, fixando $k \in \mathbb{N}$ existe $(u_{kn}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{kn}(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ B_k.$$

Agora vamos mostrar que a sequência (u_{jj}) é tal que

$$u_{jj}(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}.$$

Considere $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, onde $S_n = \{x \in B_k : u_{kn}(x) \not\to u(x)\}$, então $|S| = 0$.
Seja $x \in (\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) \backslash S$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$ e $u_{j_0 n(x)} \to u(x)$.
Como $(u_{jj}(x))$ é uma subsequência de $(u_{j_0 n}(x))$ para $j \geq j_0$, podemos concluir que

$$u_{jj}(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}.$$

Denotando ainda tal subsequência por (u_n) obtemos que

$$u_n(x) \to u(x) \ \ q.t.p \ em \ \ \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega},$$

o que prova (a).

Vamos agora demonstrar o item (b).

Seja $\Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ tal que $0 \leq \Phi \leq 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}$ e

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & , se \ \ x \in B_{\rho/2}(0) \subset \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega} \\ 0 & , se \ \ x \notin B_{\rho}(0) \subset \mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega} \end{cases}$$

Considere agora $P_n =< |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u >$.

Daí

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(0)} |\nabla u_n - \nabla u|^p &\le \int_{B_\rho(0)} P_n = \int_{B_\rho(0)} P_n \Phi \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} P_n \Phi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^p \Phi - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u \Phi \\
&- \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n \Phi + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u|^p \Phi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(0)} |\nabla u_n - \nabla u|^p &\le \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^p \Phi - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u \Phi + o_n(1) \\
&= I'(u_n)(u_n \Phi) - I'(u_n)(u\Phi) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |u_n|^p \Phi \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} f(u_n) u_n \Phi + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} |u_n|^{p-2} u \Phi + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}} f(u_n) u \Phi \\
&= I'(u_n)(u_n \Phi) - I'(u_n)(u\Phi) + o_n(1) \\
&= o_n(1),
\end{aligned}$$

pois f tem crescimento subcrítico e Φ tem suporte compacto.

Logo

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad em \quad L^p(B_\rho).$$

Assim

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad q.t.p \ em \quad B_\rho.$$

Como ρ é arbitrário

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \quad q.t.p \ em \quad \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}.$$

■

Lema B.6 *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \ge \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = r$

(H_2) Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $I(e) < 0$.

Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ *tal que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0 \quad em \quad X'$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Ver [15].

Lema B.7 *(Lema de Lions) Seja* $r > 0$ *e* $p \leq s < p^*$*. Se* (u_n) *é limitada em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *e se*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^s \to 0,$$

então $u_n \to 0$ *em* $L^t(\mathbb{R}^N)$ *para* $p < t < p^*$.

Demonstração: Ver [13].

Apêndice C

Caracterização do nível minimax

Neste apêndice mostraremos uma caracterização adequada para o nível do passo da montanha que nos permite a resolução do nosso problema.

Lema C.1 *Considere* $c_1 = \inf\limits_{u \in \mathcal{N}} I(u)$, $c_2 = \inf\limits_{u \in W^{1,p} \setminus \{0\}} \max\limits_{t \geq 0} I(tu)$ *e* $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$, *onde* $\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1] \times W^{1,p}) : \gamma(0) = 0 \ e \ \ I(\gamma(1)) < 0 \right\}$. *Então* $c_1 = c_2 = c$.

Demonstração: Provaremos que $c_1 = c_2$. Seja $u \in \mathcal{N}$. Então $u \not\equiv 0$ e $I'(u)u = 0 \Longleftrightarrow I(u) = \max\limits_{t \geq 0} I(tu)$. Assim, $c_2 \leq \max\limits_{t \geq 0} I(tu) = I(u), \ \ \forall \ u \in \mathcal{N}$ e portanto $c_2 \leq \inf\limits_{u \in \mathcal{N}} I(u)$.
Logo, $c_2 \leq c_1$.
Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega}) \backslash \{0\}$ e $\bar{t} > 0$ tal que $\bar{t}u \in \mathcal{N}$. Assim, $c_1 \leq I(\bar{t}u) = \max\limits_{t \geq 0} I(tu)$ e daí $c_1 \leq \inf\limits_{u \in W^{1,p}} \max\limits_{t \geq 0} I(tu)$.
Portanto, $c_1 \leq c_2$.
Considere agora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ e seja $\bar{t}$ suficientemente grande tal que $I(\bar{t}u) < 0$.
Seja $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N \backslash \bar{\Omega})$ tal que $\gamma_0(t) = t\bar{t}u$.
Temos que $\gamma_0(0) = 0$ e $I(\gamma_0(1)) = I(\bar{t}u) < 0$.
Logo, $\gamma_0 \in \Gamma$.
Seja $\tilde{t} > 0$ tal que

$$I(\gamma_0(\tilde{t})) = \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma_0(t))$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
c \leq I(\gamma_0(\tilde{t})) &= \max_{0\leq t\leq 1} I(\gamma_0(t)) \\
&= \max_{0\leq t\leq 1} I(t\tilde{t}u) \\
&\leq \max_{t\geq 0} I(tu)
\end{aligned}
$$

e portanto

$$c \leq c_2 = c_1.$$

A variedade de Nehari $\mathcal{N}$ separa $W^{1,p}(\mathbb{R}^N\backslash\bar{\Omega})$ em duas componentes. Portanto, podemos mostrar que, para $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão em diferentes componentes.

De fato, argumentando como no Lema 2.1, existe $\delta > 0$ tal que $I'(u)u > 0$ quando $0 < \|u\| < \delta$. Isto mostra que a componente contendo a origem também contém uma bola pequena com centro na origem. Portanto, para todo u nesta componente, concluímos que $I(u) \geq 0$, pois $I'(tu)u \geq 0$ para t pequeno.

Assim, temos que $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão em componentes diferentes, mostrando que γ intersecta $\mathcal{N}$.

Logo, $c_2 = c_1 \leq c$.

Portanto, $c_1 = c_2 = c$.

$\blacksquare$

Bibliografia

[1] Alves, C.O., *Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian*. Nonlinear Analysis, 51(2002)7 1187-1206.

[2] Alves, C.O., Carrião P.C. and Medeiros E.S. *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions*. Abstract Appl. Anal. 3 (2004) 251-268.

[3] Benci V. and Cerami G. *Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 99 (1987) 283-300.

[4] Bartle, Robert G., *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[5] Brézis, Haïm, *Análisis Funcional*, Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[6] Brézis, Haïm and Lieb E, *A Relation between pointwise convergence of functions and convergence of functional*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[7] Cao, D.M., *Multiple solutions for a Neumann problem in an exterior domain*, Comm. Partial Diferencial Equations 18 (1993) 687-700.

[8] Esteban, M.J., *Nonsymmetric ground states of symmetric variacional problems*, Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991) 259-274.

[9] Gilbard, D. and Truginger N. S, *Elliptic partial differential equation of second order*, Springer-Verlag, 1998.

[10] Gongbao, Li, *Some properties of weak solutions of nonlinear scalar field equations*, Annales Acad. Sci. Fenincae, series A. vol 14 (1989) 27-36.

[11] Gongbao, Li and Yan S., *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989)8-9, 1291-1314.

[12] Miranda, C., *Un'osservazione su un teorema di Brouwer*, Boll. Un. Mat. Ital. 3 (1940) 5-7.

[13] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problémes elliptiques*, Université de Nancy, (1993).

[14] Yang, J.F, *Positive solutions of quasilinear elliptic obstacle problems with critical exponents*,Nonlinear Analysis 25 (1995) 1283-1306.

[15] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.