UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Carlos de Jesus Gomes da Silva

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O SISTEMA DE VON KÁRMÁN DAS PLACAS COM MEMÓRIA

BELÉM

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Carlos de Jesus Gomes da Silva

Existência de soluções para o sistema de von Kármán das placas com memória

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

João Carlos de Jesus Gomes da Silva

Existência de soluções para o sistema de von Kármán das placas com memória

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 08 de julho de 2010.

Conceito:______________

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
PPGME - UFPA

Prof. Dr. Jorge Ferreira
UFRPE

Dedicatória

Ao Senhor DEUS, por iluminar todos os dias de minha vida.

A minha esposa, Maricilda Câmara Corrêa (in memoriam), cuja existência foi marcada pela alegria, pelo entusiasmo e por acreditar na vida, sendo a minha maior incentivadora. Tenho absoluta certeza de que ela está orgulhosa por eu haver concluído este curso. Minha gratidão a ela é indelével, e sua ausência me faz sentir como se tivesse perdido uma parte da minha história.

Aos meus pais, João Cavalcante (in memoriam) e Maria José, que, com amor e dedicação, apoiaram-me intensamente em todos os momentos da minha vida.

Aos meus filhos, Lorena e Lucas, os melhores presentes que Deus me deu! Obrigado, por existirem e me permitirem a honra de ser vosso pai!

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, que, com compreensão, atenção, dedicação e competência, aceitou orientar-me neste trabalho.

Aos amigos Luiz Corrêa e Graça Corrêa, padrinhos do meu filho, minha sincera gratidão, pela amizade, pelo incentivo e por haverem aceitado ser meus avalistas, para que eu pudesse ser liberado com meu salário da SEDUC, enquanto estivesse cursando esta Pós-Graduação.

As minhas cunhadas, Iracilda e Gracilda, minha gratidão, pela amizade, pelo incentivo e pela colaboração.

A minha irmã Socorro, minha gratidão, pela dedicação, pois sempre esteve comigo nos momentos difíceis por que passei no decorrer deste curso.

A minha grande amiga Lurdes, minha gratidão, pela amizade e pela colaboração ao cuidar do meu filho, na ausência física da mãe.

A todos os professores e funcionários do PPGME, que, direta ou indiretamente, deram suas contribuições.

Aos amigos e colegas do Mestrado, que, com horas de alegria e tristeza, superamos juntos as dificuldades que encontramos.

Finalmente, a todos que, com uma palavra, com um gesto, com um pensamento, levavam-me sempre a acreditar que tudo na vida é possível. Basta acreditar em si mesmo, ter persistência e força para lutar e VENCER!

Resumo

Nas últimas décadas, vários tipos de equações diferenciais parciais foram utilizadas como modelos matemáticos que descrevem propriedades físicas, químicas, biológicas e da engenharia, veja Lagnese [5] para detalhes. Entre eles, os estudos de modelos matemático de vibração associados as estruturas flexíveis, foram consideravelmente estimulados nos últimos anos por um número crescente de questões de preocupação prática, (veja [2,3,4,6,7,8]). Investigação sobre sistemas distribuídos concentrou-se principalmente sobre a existência, unicidade e estabilização de modelos dinâmicos tais como cordas, membranas, placas e vigas (veja [2,3,4,5,6,7,8]).

Neste trabalho estamos considerando a equação dinâmica de von Kármán para placas viscoelásticas na presença de um efeito memória na fronteira. Mostramos a existência e unicidade de soluções fraca e forte para este sistema.

Abstract

For the last several decades, various types of equations have been employed as some mathematical model describing physical, chemical, biological and engineering systems (see [5]). Among them, the mathematical models of vibrating, flexible structures has been considerably stimulated in recent years by an increasing number of questions of practical concern (see [2,3,4,6,7,8]). Research on stabilization of distributed parameter systems has largely focused on the stabilization of dynamic models of individual structural members such as strings, membranes, plates and beams (see [2,3,4,5,6,7,8]).

In this work we consider the dynamic von Kármán system with boundary conditions of memory type. We show the existence and uniqueness of weak and global solutions of this system.

Conteúdo

Introdução

O sistema de von Kármán com damping friccional no domínio ou na fronteira (ou em parte da fronteira) foi estudado por M. Horn and I. Lasiecka em [2,3], M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru em [4] and J. Puel and M. Tucsnak [8]. Eles provaram que o sistema de von Kármán com damping friccional é exponencialmente estável.

O sistema (2.2)-(2.8) que veremos mais adiante, foi estudado por Rivera e Menzala [6]. Eles provaram a existência de solução global fraca e forte do sistema de von Kármán com memória e também a estabilidade exponencial e polinomial do referido sistema. Posteriormente, Rivera, Portillo and Santos [7] mostraram que o sistema (2.2)-(2.8) com memória na fronteira é exponencialmente e polinomialmente estável, com taxas de decaimento que depende do comportamento da função relaxamento.

Para um perfeito significado físico do problema estudado o leitor poderá consultar Lagnese [5]. Este trabalho foi dividido da seguinte forma. No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados preliminares importantes para a solução do problema proposto. No segundo capítulo demonstraremos a existência e unicidade de soluções fraca e forte para o modelo de von Kármán. Para isto usamos o método de Faedo-Galerkin.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos, os quais serão utilizados no próximo capítulo.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp(\varphi)$. Simbolicamente, temos que

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Usando a definição concluímos que $supp(\varphi)$ é o menor fechado do qual φ se anula e valem as seguintes relações

1. $supp(\varphi + \psi) \subset supp(\varphi) \cup supp(\psi)$
2. $supp(\varphi\psi) \subset supp(\varphi) \cap supp(\psi)$
3. $supp(\lambda\varphi) = \lambda\, supp(\varphi), \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam definidamente continuamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente continuamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω, desde que munidos com a noção de convergência dado a seguir.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denotamos por* $|a| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial de ordem* $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, ..., 0)$, *temos por definição* $D^0\varphi = \varphi$.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_n) \subset K, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi_n$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado espaço das funções testes.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1.2. *Sendo* Ω *limitado, obtemos* $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *para todo* p, *tal que* $1 < p < \infty$, *com imersão contínua e densa. De fato, dado* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \to 0.$$

Notemos que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \quad (K \text{ compacto de } \Omega).$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0.\end{aligned}$$

A imersão anterior é densa.

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \to T(\varphi) \ \textit{em} \ \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotada por (T, φ).

A sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $((T_\nu, \varphi))_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para (T, φ) em

$\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta notação de convergência será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequêcia são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis ($L^1_{loc}(\Omega)$), vale ressaltar que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.1.1 *Temos que uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)|dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u" e usando o *Lema Du Bois Raymond*, temos que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 *(Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Com a noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),\ 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para as distribuições quaisquer em $\mathcal{D}(\Omega)$, por L. Schwartz.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$\mathcal{D}^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

tal que

$$(\mathcal{D}^{\alpha}T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(T, \mathcal{D}^{\alpha}\varphi),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima, que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observe que a aplicação

$$\mathcal{D}^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v\to\infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v\to\infty} \mathcal{D}^{\alpha}T_v = \mathcal{D}^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3 *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é,*

$$\mathcal{D}^{\alpha}T_u = T_{\mathcal{D}^{\alpha}u},\ \ \forall |\alpha| \leq k.$$

É uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como espaços de Sobolev.

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Foi observada na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $\mathcal{D}^{\alpha}u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permanecam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados Espaços de Sobolev.

Dados um inteiro $m > 0$ *e* $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $\mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolos temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha,\ com\ |\alpha| \leqslant m\}.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach . O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

Em caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \mathcal{D}^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha,\ com\ |\alpha| \leq m\}.$$

1.2.2 O Traço em $H^1(\Omega)$

As funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dado $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \to \varphi \quad em \quad H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{k|\Gamma}.$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0 denominado operador traço, que é contínuo e linear, cujo o núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples, escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega);\ \varphi|_\Gamma = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}|\Gamma\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $m = 2$, $W^{-m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,q}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1 *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ se, e somente se, existirem $g_\alpha \in l^p(\Omega)$ tais que $T = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha g_\alpha$.*

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, ..., u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

De posse destes dois resultados concluímos que se $u \in H^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

1.3 Equações de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações integrais de Volterra.

Definição 1.3.1 *Uma equação integral de Volterra linear de primeira ordem é toda equação da* *forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds, \tag{1.1}$$

sendo $g(t)$ e $k(t,s)$ funções dadas.

Teorema 1.3.1 *Seja $k(t,s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T, T > 0$ e g(t) uma função contínua em $0 \leq s \leq T$. Então existe uma única solução contínua $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfazendo,*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

Demonstração: Existência

A prova é baseada nas aproximações sucessivas de Picard. Para isto, seja a seguinte sequência de funções

$$\{f_0, f_2, f_2, ..., f_n, ..\}.$$

Sendo

$$\begin{aligned} f_0(t) &= g(t), \\ f_1(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds, \\ \vdots &= \vdots \\ f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds, \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, ...$ Desta forma

$$\begin{aligned} f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds, \\ f_{n-1}(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-2}(s)ds. \end{aligned}$$

Portanto

$$f_n(t) + f_{n-1}(t) = \int_0^t k(t,s)[f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)]ds.$$

Definindo a sequência $\varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$ com $\varphi_0(t) = g(t)$, temos

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Logo

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t).$$

Sejam G, K constantes positivas, tais que

$$|g(t)| \leq G \quad \text{e} \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k(s,t)| \leq K \quad \text{e} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Mostraremos que

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{G(Kt)^n}{n!} \quad \text{com} \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{e} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

A demonstração será feita por indução. Para $n = 0$, temos

$$|\varphi_0(t)| = |g(t)| \leq G = \frac{G(Kt)^0}{0!}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para $n = l$. Resta mostrar que é válida para $n = l+1$. Por hipótese, temos,

$$|\varphi_l(t)| \leq \frac{G(Kt)^l}{l!}.$$

Para $n = l + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi_{l+1}(t)| &= \left| \int_0^t k(t,s)\varphi_l(s)ds \right| \\
&\leq \int_0^t |k(t,s)||\varphi_l(s)|ds \\
&\leq \int_0^t K \frac{G(Ks)^l}{(l)!} \\
&\leq \frac{GK^{l+1}}{(l)!} \int_0^t s^l ds.
\end{aligned}$$

Assim

$$|\varphi_{l+1}(t)| \leq \frac{G(Ks)^{l+1}}{(l+1)!},$$

o que conclui a demonstração. ■

Portanto, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{G(Kt)^i}{i!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(KT)^n}{n!} = Ge^{KT}.$$

Desta forma pelo teste de M. de Weierstrass, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$ é absoluta e uniformemente convergente. Denotando $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$, concluimos que f é contínua. De fato, seja $t_0 \in [0, T]$.

Então

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t \to t_0} (\varphi_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t_0) = f(t_0),$$

o que mostra a continuidade de f. A função f é solução da equação integral de Volterra dada em (1.1). Com efeito,

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) + \int_0^t k(t,s) \left(\sum_{n=1}^{m} \varphi_{n-1}(s) \right) ds.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando a convegência uniforme, obtemos

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s) \lim_{m \to \infty} (\varphi_{n-1}(s)) ds,$$

ou

$$f(t) - g(t) = \int_0^t k(t,s) f(s) ds,$$

isto é,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s) f(s) ds.$$

Unicidade

Suponha que existam funções f_1, f_2 contínuas satisfazendo (1.1). Portanto

$$|f_1(t) - f_2(t)| = \left| \int_0^t k(t,s)(f_1(s) - f_2(s)) ds \right|. \tag{1.2}$$

Pela continuidade de f_1 e f_2, existe $C > 0$ tal que

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq C, \; \forall \, 0 \leq t \leq T.$$

Logo, substituindo em (1.2) vem

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq KCt, \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Repetindo este processo n-vezes em (1.2), obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{C(Kt)^n}{n!}, \;\; 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo $n \to \infty$, vem que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(Kt)^n}{n!} = 0.$$

Assim, concluimos que

$$f_1(t) = f_2(t). \; \blacksquare$$

1.4 Equação Resolvente

Vimos pelo teorema anterior que dada $g \in C[0,T]$ existe uma única $f \in C[0,T]$, tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds = g(t).$$

Desta forma, podemos considerar o seguinte operador

$$K : C[0,T] \to C[0,T]$$

$$f \mapsto K[f] = f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

O operador K é linear e bijetivo. De fato,

K é linear.

$$\begin{aligned}
K[f_1(t) - \lambda f_2(t)] &= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s)(f_1(s) + \lambda f_2(s))ds \\
&= f_1(t) - \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s) f_1(s) ds + \lambda \int_0^t k(t,s) f_2(s)) ds \\
&= f_1(t) + \int_0^t k(t,s) f_1(s) ds + \lambda \left(f_2(t) + \int_0^t k(t,s) f_2(s) ds \right) \\
&= K[f_1] + \lambda K[f_2]
\end{aligned}$$

K é bijetivo.

A sobretividade segue do fato que, dada $g \in C[0,T]$, pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0,T]$ tal que $K[f] = g$. Concluimos a injetividade de maneira análoga, pois $K[f] = 0$ pode ser interpretada como a equação $K[f] = g$ sendo $g \equiv 0$ e pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0,T]$ que satisfaz esta equação, a saber $f(x) = 0$. A função $k(t,s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra. Notemos que, como foi definido $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_0(s)ds$, vem que

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) &= \int_0^t k(t,s)\varphi_1(s)ds \\
&= \int_0^t k(t,s) \int_0^s k(s,\tau) g(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) g(\tau) d\tau ds \\
&= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) ds g(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em $0 \leq \tau \leq s \leq t$. Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t,\tau) g(\tau)) d\tau,$$

sendo

$$k_2(t,\tau) = \int_\tau^t k(t,s) k(s,\tau) ds g(\tau) ds.$$

Indubitavelmente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t,s)g(s)ds \ \text{ com } \forall n \geq 1,$$

daí

$$k_1(t,s) = k(t,s),$$

$$k_n(t,s) = \int_s^t k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)d\tau, \ \ n \geq 2.$$

Como

$$f_n(t) = \sum_{t=0}^{n} \varphi_i t,$$

temos

$$f_n(t) = \int_0^t \tau_n(t,s)g(s)ds,$$

sendo $\tau_n(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i(t,s)$. Usando a continuidade da função k temos, $|k(t,s)| \leq K$ analogamente podemos mostrar que $|k_n(t,s)| \leq \dfrac{K^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Daí segue que a série $\tau(t,s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n(t,s)$ é absoluta e, portanto, uniformemente convergente. A função $\tau(t,s)$ é chamada de núcleo resolvente de $k(t,s)$.

Teorema 1.4.1 *Se $k(t,s)$ e $g(t)$ são contínuas, então a única solução contínua de* (1.1) *é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t,s)g(s)ds.$$

Demonstração: Das relações anteriores

$$\int_0^t \tau(t,s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} k_i(t,s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente pode-se permutar a ordem da soma com integração, obtendo

$$\int_0^t \tau(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t k_i(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t \tau(t,s)g(s)ds. \ \blacksquare$$

Observação 1.4.1. *O teorema anterior mostra que o operador inverso K^{-1} tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja*

$$K^{-1} : C[0,T] \to C[0,T]$$

$$g \mapsto K^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t \tau(t,s)g(s)ds.$$

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enuciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca) *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Temos que $u \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle u_\nu, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in E'.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela) *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Temos que $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco $\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle, \quad \forall u \in E.$$

Lema 1.5.1 *Seja f uma função real positiva de classe C^1. Se existirem constantes positivas c_0, c_1 e γ tais que*

$$f'(t) \leq -c_0 f(t) + c_1 e^{-\gamma_0 t},$$

então

$$f(t) \leq ce^{-\gamma t}.$$

Demonstração:

Definindo

$$F(t) = f(t) + \frac{2c_1}{\gamma}$$

temos que

$$F'(t) = f'(t) - 2c_1 e^{-\gamma t} \leq -c_0 f(t) - c_1 e^{-\gamma t}.$$

Tomando $\gamma_0 = min\{c_0, \frac{\gamma}{2}\}$, obtemos

$$\gamma_0 F(t) \leq c_1 f(t) + c_1 e^{-\gamma t}.$$

Segue que

$$F'(t) \leq -\gamma_0 F(t).$$

Logo

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq -\gamma_0.$$

Integrando de 0 a t. obtemos

$$\frac{F(t)}{F(0)} \leq e^{-\gamma_0 t} \Rightarrow F(t) \leq F(0)e^{-\gamma_0 t}.$$

Como $F(0) = f(0) + \dfrac{2c_1}{\gamma}$ e $f(t) \leq F(t)$

$$f(t) \leq ce^{-\gamma_0 t},$$

com $c = f(0) + \dfrac{2c_1}{\gamma}$. ■

Lema 1.5.2 *Seja f uma função real positiva de classe C^1, satisfazendo*

$$f'(t) \leq -k_0[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}},$$

com $p > 1$ e $k_0, k_1 > 0$. Então, existe uma constante $k_2 > 0$, tal que

$$f(t) \leq k_2 \frac{pf(0) + 2k_1}{(1+t)^p}.$$

Demonstração:

Tomamos $h(t) = \dfrac{2k_1}{p(1+t)^p}$ e $g(t) = f(t) + h(t)$. Nestas cndições temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - \frac{2k_1}{(1+t)^{p+1}} \leq -k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{k_0(1+t)^{p+1}} \right\} \\ &\leq k_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\} \end{aligned}$$

Seja $a_0 = min \left\{ 1, \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \dfrac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} \right\}$. Assim,

$$g'(t) \leq -k_0 a_0 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}.$$

Como existe uma constante positiva a_1, tal que

$$[f(t) + g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq a_1 \left\{ [f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\},$$

concluímos

$$g'(t) \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1} [g(t)]^{1+\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{g'(t)}{[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}} \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1}.$$

Integrando de 0 a t, temos

$$g(t) \leq \frac{p^p g(0)}{\left\{ p + \dfrac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}^t} \leq \frac{p^{p-1}[pf(0) + 2k_1]}{a_2^p (1+t)^p},$$

em que $a_2 = min \left\{ p, \dfrac{k_0 a_0}{a_1} [g(0)]^{\frac{1}{p}} \right\}$. Tomando $k_2 = \dfrac{1}{a^2} \left(\dfrac{p}{a^2} \right)^{p-1}$, segue o resultado.

Lema 1.5.3 (Lema de Gronwall) *Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \, exp \left[\int_a^t \psi(s)ds \right], \quad \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\psi(t)$ *é limitada e se* $\alpha = 0$*, então* $\varphi = 0$*.*

Capítulo

2

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Seja Ω um aberto limitado conexo do $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ regular, tal que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \quad \text{com} \quad \overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset \quad \text{e} \quad \Gamma_0 \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

Denotamos por $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ o vetor unitário normal exterior a Γ e por $\eta = (-\nu_2, \nu_1)$ o vetor tangente unitário orientado positivamente em Γ. Finalmente, pelo $[.,.]$ denotamos o operador dado por

$$[u, v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

As equações que descrevem as pequenas vibrações de uma placa homogênea isotrópica de densidades uniformes h são dadas por:

$$u_{tt} - h\Delta u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s)ds = [u, v] \quad \text{sobre} \quad \Omega\times]0, \infty[, \tag{2.2}$$

$$\Delta^2 v = -[u, u] \quad \text{sobre} \quad \Omega\times]0, \infty[, \tag{2.3}$$

com condições iniciais

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y); \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.4}$$

e condições de fronteiras:

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times]0, \infty[, \tag{2.5}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times]0, \infty[, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{B}_1 u - \mathcal{B}_1 \left\{ \int_0^t g(t-s) u(s) ds \right\} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0, \infty[, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{B}_2 u - h \frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} - \mathcal{B}_2 \left\{ \int_0^t g(t-s) u(s) ds \right\} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times]0, \infty[, \tag{2.8}$$

onde

$$\mathcal{B}_1 u = \Delta u + (1-\mu) B_1 u,$$

$$\mathcal{B}_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1-\mu) \frac{\partial B_2 u}{\partial \eta}$$

sendo B_1 e B_2 determinados por

$$B_1 u = 2\nu_1 \nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$B_2 u = (\nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_1 \nu_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}.$$

Em (2.2), $u = u(x, y, t)$ denota a posição da placa e $v = v(x, y, t)$ é a função strees de Airy's. Podemos interpretar a equação (2.2) dizendo que as tensões a qualquer momento depende do comportamento completo das tensões que o material sofreu.

Denotamos por $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uma função real positiva e por μ uma constante tal que $0 < \mu < 1/2$.

Assumiremos que g satisfaz as seguintes condições:

$$g, g', g'' \in L^1(0, \infty),\ \alpha = 1 - \int_0^\infty g(s) ds > 0, \tag{2.9}$$

$$g(t) \geq 0,\ g'(t) \leq 0. \tag{2.10}$$

Para estudar a existência de solução da equação (2.2), introduziremos os seguintes espaços funcionais:

$$V = \{ v \in H^1(\Omega); v = 0 \ \text{em} \ \Gamma_0 \}$$

$$W=\{w\in H^2(\Omega); w=\frac{\partial w}{\partial\nu}=0 \text{ em } \Gamma_0\}.$$

Com $0<\mu<\frac{1}{2}$, definimos a forma bilinear $a(.,.)$, onde

$$a(u,v)=\int_\Omega\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right\}dA$$

LEMA 2.1 - *Sejam u e v funções em $H^4(\Omega)\cap W$. Então, temos:*

$$\int_\Omega(\Delta^2u)vdA=a(u,v)+\int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2u)v-(\mathcal{B}_1u)\frac{\partial v}{\partial\nu}\right\}d\Gamma_1$$

Demonstração:

Da Fórmula de Green's, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\Delta uvdx-\int_\Omega\nabla u.\nabla vdx &= \int_\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}vd\Gamma\\
\int_\Omega\Delta(\Delta u)vdx-\int_\Omega\nabla\Delta u.\nabla vdx &= \int_\Gamma\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}vd\Gamma\\
\int_\Omega\nabla\Delta u.\nabla vdx &= \int_\Omega\Delta u.\Delta vdx-\int_\Gamma\Delta u\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma.
\end{aligned}$$

Recordando a definição de B_1, B_2 e usando,

$$\int_\Omega\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right\}dA-2\int_\Omega\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}dA=\int_{\Gamma_1}\left\{\left(\frac{\partial B_2u}{\partial\eta}\right)v-(B_1u)\frac{\partial v}{\partial\nu}\right\}d\Gamma_1$$

De onde os resultados seguem. ∎

Neste capítulo, mostraremos a existência, unicidade e regularidade da solução do sistema (2.2)-(2.8). Faremos isto da seguinte maneira, primeiro usando o metódo de Galerkin, provamos a existência de solução fraca (Definição 2.1), usando regularidade elíptica e estimativa de segunda ordem, então mostramos que o problema de valor inicial e de fronteira (2.2)-(2.8) do tipo memória, possui uma solução de regularidade.

Para simplificar nossa análise, apresentamos os seguintes operadores binários

$$\begin{aligned} g\Box\partial^2 u &= \int_0^t g(t-s)a(u(t)-u(s),u(t)-u(s))ds \\ g\Box\nabla u &= \int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(x,t)-\nabla u(x,s)|^2 dAds \\ g\Box u &= \int_0^t g(t-s)|u(x,t)-u(x,s)|^2 dAds \end{aligned}$$

LEMA 2.2 - *Para qualquer* $v \in C^1(0,T;H^2(\Omega))$, *temos:*

$$\begin{aligned} a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) &= -\frac{1}{2}g(t)a(v,v)+\frac{1}{2}g'\Box\partial^2 v \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 v-\left(\int_0^t gds\right)a(v,v)\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla v(s)ds.\nabla v_t dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dA+\frac{1}{2}g'\Box\nabla v \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\nabla v-\left(\int_0^t gds\right)\int_\Omega|\nabla v|^2 dA\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_0^t g(t-s)v(x,s)dsv_t(x,t)dA &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |v|^2 dA+\frac{1}{2}g'\Box v \\ &-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box v-\left(\int_0^t gds\right)\int_\Omega|v|^2 dA\right\}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Da simetria $a(u, v) = a(v, u)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(g\Box\partial^2 v) &= \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)a(v(t)-v(s), v(t)-v(s))ds \\
&= \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)\{a(v(t), v(t)) - 2a(v(t), v(s)) + a(v(s), v(s))\}ds \\
&= \int_0^t g'(t-s)a(v(t)-v(s), v(t)-v(s))ds + 2\int_0^t g(t-s)a(v, v_t)ds \\
&\quad -2\int_0^t g(t-s)a(v_t, v(s))ds \\
&= g'\Box\partial^2 v - 2\int_0^t g(t-s)a(v_t, v(s))ds + 2\int_0^t g(t-s)a(v, v_t)ds \\
&= g'\Box\partial^2 v - 2\int_0^t g(t-s)a(v_t, v(s))ds + \frac{d}{dt}\int_0^t g(s)a(v, v)ds - g(t)a(v, v)
\end{aligned}$$

logo

$$2\int_0^t g(t-s)a(v_t, v(s))ds = g'\Box\partial^2 v - g(t)a(v, v) + \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds a(v, v)\right\} - \frac{d}{dt}(g\Box\partial^2 v)$$

daí

$$2a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) = g'\Box\partial^2 v - g(t)a(v, v) + \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g(s)ds a(v, v)\right\} - \frac{d}{dt}(g\Box\partial^2 v)$$

portanto

$$a\left(\int_0^t g(t-s)v(s)ds, v_t\right) = -\frac{1}{2}g(t)a(v, v) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 v - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 v - \left(\int_0^t g ds\right)a(v, v)\right\}.$$

O que prova a primeira identidade. As provas das outras duas identidades são análogas a primeira. ■

LEMA 2.3 - *Sejam u, v e w funções em $H^2(\Omega)$ tal que $v \in H_0^2(\Omega)$, onde Ω é um aberto limitado conexo de $\mathbb{R}^2$. Então, temos que*

$$\int_\Omega w[v, u]dA = \int_\Omega v[w, u]dA.$$

Demonstração:

Suponhamos que $u, w \in C^4(\Omega)$ tal que $v \in C_0^2(\Omega)$ e seja Ω um aberto limitado conexo de $\mathbb{R}^2$, assim sendo podemos afirmar que:

$$w[u,v] = v[w,u]$$

onde

$$w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

integrando por partes em Ω, temos:

$$\int_\Omega w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dA = \int_\Omega v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dA$$

daí, concluimos que

$$\int_\Omega w[v,u]dA = \int_\Omega v[w,u]dA. \ \blacksquare$$

A definição de solução fraca que usamos neste trabalho é determinado a seguir.

DEFINIÇÃO 2.1 - *Dizemos que o par (u,v) é uma solução fraca do sistema (2.2)-(2.8) se $u \in C^1([0,T];V) \cap C^0([0,T];W)$, $v \in C^0([0,T];H_0^2(\Omega))$ e satisfaz as seguintes identidades:*

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega (-u_t\theta_t - h\nabla u_t.\nabla\theta_t)dA + \int_0^T a(u,\theta)dt - \int_0^T a(g*u,\theta)dt = \\ &\int_0^T \int_\Omega [u,\theta]v dA dt + \int_\Omega u_1\theta(.,0)dA + h\int_\Omega \nabla u_1.\nabla\theta(.,0)dA\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\int_\Omega \Delta v \Delta\psi dA = -\int_\Omega [u,\psi]u dA \tag{2.12}$$

para qualquer função $\theta \in C^1([0,T],W)$ tal que $\theta(.,T) = 0$, $\theta_t(.,T) = 0$ e $\psi \in C_0^2(\Omega)$.

Para obter a energia do sistema (2.2)-(2.8) vamos multiplicar a equação (2.2) por u_t e integrar em Ω, obtendo:

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - h\int_\Omega \Delta u_{tt}u_t dx + \int_\Omega \Delta^2 u u_t dx - \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dx$$
$$= \int_\Omega [u,v]u_t dx. \tag{2.13}$$

Estudando separadamente cada termo da equação (2.13), temos que

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx \tag{2.14}$$

aplicando a Fórmula de Green's, teremos

$$\begin{aligned} -h\int_\Omega \Delta u_{tt}u_t dx &= h\int_\Omega \nabla u_{tt}.\nabla u_t dx - h\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu}u_t d\Gamma_1 \\ &= \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx - h\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu}u_t d\Gamma_1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

usando o LEMA 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Delta^2 u)u_t dx &= a(u,u_t) + \int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \int_{\Gamma_1}\left\{(\mathcal{B}_2 u)u_t - (\mathcal{B}_1 u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Novamente, usando a Fórmula de Green's, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s) ds u_t dx = &-\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t) ds \\ &-\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_2\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}u_t d\Gamma_1 \\ &+\int_{\Gamma_1}\mathcal{B}_1\left\{\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right\}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

e finalmente, usando o LEMA 2.3, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [u,v]u_t dx &= \int_\Omega [u,u_t]v dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}([u,u])v dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(\Delta^2 v) v dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta v_t \Delta v dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Delta v \Delta v dx \\
&= -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

substituindo (2.14) a (2.18) em (2.13), segue se que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) - \int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds \\
&+\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx + \int_{\Gamma_1}\left\{\mathcal{B}_2 u - h\frac{\partial u_{tt}}{\partial \nu} - \mathcal{B}_2\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right)\right\} u_t d\Gamma_1 \\
&\qquad - \int_{\Gamma_1}\left\{\mathcal{B}_1 u - \mathcal{B}_1\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds\right)\right\}\frac{\partial u_t}{\partial \nu} d\Gamma_1 = 0
\end{aligned}$$

usando as condições de fronteira (2,7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx \\
&\qquad - \int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds = 0
\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

usando o LEMA 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)a(u(s),u_t)ds &= a\left(\int_0^t g(t-s)u(s)ds, u_t\right) \\
&= -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\} \tag{2.20}$$

substituindo (2.19) em (2.20), teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx &= -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\}
\end{aligned}$$

assim sendo segue-se que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\} = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega u_t^2 dx + h\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx + a(u,u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx\right. \\
&\left.+g\Box\partial^2 u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\} = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u
\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left(u_t^2 + h|\nabla u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v|^2\right)dx + g\Box\partial^2 u + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\} = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u$$

daí

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}g(t)a(u,u) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u$$

de (2.10) temos que $g(t) \geq 0,\ g'(t) \leq 0$, assim sendo

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

portanto concluimos que o sistema é dissipativo.

Sendo

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega}\left(u_t^2 + h|\nabla u_t|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v|^2\right)dx + g\Box\partial^2 u + \left(1 - \int_0^t g(s)ds\right)a(u,u)\right\}$$

a energia modificada do sistema.

TEOREMA 2.1 - *Suponhamos que g satisfaz as condições* (2.9) *e* (2.10)*. Então para quaisquer dados iniciais* $(u_0, u_1) \in W \times V$*,* $h > 0$ *e* $T > 0$*, existe uma única solução fraca para a equação (2.2).*

Demonstração:

A idéia principal aqui é usar o Método de Galerkin.

Consideremos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base ortogonal de W. Seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço denso de W gerado pelos primeiros autovetores de $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Problema aproximado

Determinar

$$u^m(.,t) = \sum_{i=1}^{m} h_{i,m}(t)w_i(.)$$

$$v^m(.,t) = (\Delta^2)^{-1}\left(-[u^m, u^m]\right).$$

Solução:

$$\int_{\Omega} u_{tt}^m w_j dA + h\int_{\Omega}\nabla u_{tt}^m \nabla w_j dA + a(u^m, w_j) - a(g * u^m, w_j) = \int_{\Omega}[u^m, w_j]v^m dA \tag{2.21}$$

$$u^m(.,0) = u_{0,m} \text{ e } u_t^m(.,0) = u_{1,m}$$

onde

$$u_{0,m} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\int_{\Omega} u_0 w_i dA\right\}w_i,\ \ u_{1,m} = \sum_{i=1}^{m}\left\{\int_{\Omega} u_1 w_i dA\right\}w_i$$

Denotando por $A = (a_{ij})$ a matriz dada por

$$a_{ij} = \left(\int_\Omega w_i w_j dA + h \int_\Omega \nabla w_i . \nabla w_j dA \right)$$

Como A é uma matriz definida positivamente, segue do Teorema de EDO's que (2.21) tem solução local u^m. O passo seguinte é estender a solução u^m a todo intervalo $[0, T]$, para todo $T > 0$. Isto será feito usando as estimativas a priori.

Estimativas a priori

Multiplicando a equação (2.21) por $h_j'(t)$ e somando em $j = 1, 2, 3, ..., m$, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}^m \sum_{j=1}^m h_j'(t) w_j dA + h \int_\Omega \nabla u_{tt}^m . \nabla \left(\sum_{j=1}^m h_j'(t) w_j \right) dA + a\left(u^m, \sum_{j=1}^m h_j'(t) w_j\right) \\ - \;\; & a\left(g * u^m, \sum_{j=1}^m h_j'(t) w_j\right) = \int_\Omega \left[u^m, \sum_{j=1}^m h_j'(t) w_j\right] v^m dA \end{aligned}$$

substituindo $\sum\limits_{j=1}^m h_j'(t) w_j = u_t^m$, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}^m u_t^m dA + h \int_\Omega \nabla u_{tt}^m . \nabla u_t^m dA + a(u^m, u_t^m) - a(g * u^m, u_t^m) = \int_\Omega [u^m, u_t^m] v^m dA. \tag{2.22}$$

Estudando separadamente cada termo da equação (2.22), temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_{tt}^m u_t^m dA &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega u_t^m u_t^m dA \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t^m|^2 dA \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} h \int_\Omega \nabla u_{tt}^m \nabla u_t^m dA &= \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \nabla u_t^m . \nabla u_t^m dA \\ &= \frac{h}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$a(u^m, u_t^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u^m, u^m) \tag{2.25}$$

usando o LEMA 2.2, temos

$$\begin{aligned}
-a(g * u^m, u_t^m) &= -a\left(\int_0^t g(t-s)u^m(s)ds, u_t^m\right) \\
&= \frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) - \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u^m - \left(\int_0^t g ds\right)a(u^m,u^m)\right\} \tag{2.26}$$

e finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [u^m, u_t^m]v^m dA &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}\left([u^m,u^m]\right)v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt}(\Delta^2 v^m)v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta v_t^m \Delta v^m dA \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Delta v^m \Delta v^m dA \\
&= -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v^m|^2 dA
\end{aligned} \tag{2.27}$$

substituindo (2.23) a (2.27) em (2.22), encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) - \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m \\
+ \ &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u^m - \left(\int_0^t g ds\right)a(u^m,u^m)\right\} = -\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v^m|^2 dA
\end{aligned}$$

assim sendo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + \frac{h}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{g\Box\partial^2 u^m - \left(\int_0^t g ds\right)a(u^m,u^m)\right\} \\
+ \ &\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v^m|^2 dA = -\frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m
\end{aligned}$$

logo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_\Omega |u_t^m|^2 dA + h\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dA + a(u^m,u^m) + g\Box\partial^2 u^m - \Big(\int_0^t g ds\Big)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v^m|^2 dA\Big\}\\
= \; & -\frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m
\end{aligned}
$$

daí

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_\Omega \Big(|u_t^m|^2 + h|\nabla u_t^m|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v^m|^2\Big) dA + g\Box\partial^2 u^m + \Big(1 - \int_0^t g ds\Big)a(u^m,u^m)\Big\}\\
= \; & -\frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m
\end{aligned}
$$

portanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t,u^m,v^m) = -\frac{1}{2}g(t)a(u^m,u^m) + \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m \le 0$$

pois de (2.10), temos $g(t) \ge 0, \ g'(t) \le 0$.

Integrando sobre $]0,t[$, obtemos:

$$E(t,u^m,v^m) \le E(0,u^m,v^m)$$

como $E(0,u^m,v^m)$ é limitada, segue-se que existe $k > 0$ tal que

$$E(t) \le k, \ \ \forall m \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ \forall t \in [0,T].$$

Daí, segue-se que

$$u^m \to u \quad \text{em} \quad C^0([0,T];W) \cap C^1([0,T];V)$$

$$v^m \to v \quad \text{em} \quad C^0([0,T];H_0^2(\Omega)).$$

Multiplicando a equação (2.21) por $\beta \in C^2([0,T])$ tal que $\beta(T) = 0$ e integrando sobre $[0,T]$, temos:

$$\int_0^T \int_\Omega (u^m w_j \beta_{tt} + h\nabla u^m.\nabla w_j \beta_{tt}) dAdt + \int_0^T a(u^m, w_j)\beta dt - \int_0^T a(g * u^m, w_j)\beta dt =$$
$$\int_0^T \int_\Omega [u^m, w_j] v^m \beta dA - \int_\Omega u_{0,m}.w_j \beta_t(0) dA + \int_\Omega u_{1,m}.w_j \beta_t(0) dA$$
$$- \quad h\int_\Omega \nabla u_{0,m}.\nabla w_j \beta_t(0) dA + h\int_\Omega \nabla u_{1,m}.\nabla w_j \beta(0) dA \tag{2.28}$$

como

$$[u^m, w_j] \rightharpoonup [u, w_j] \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$

$$v^m \to v \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$

logo,

$$[u^m, w_j] v^m \rightharpoonup [u, w_j] v \quad \text{em} \quad L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$$

fazendo $m \to \infty$ na equação (2.28) e usando o fato que o conjunto $\{w_j\beta; j \in \mathbb{N}, \beta \in C^2([0,T])\}$ é denso em W, segue-se que o par (u,v) é solução fraca do sistema (2.2)-(2.8). ■

Para demonstrarmos a unicidade, supomos que (u_1, v_1) e (u_2, v_2) com $u = u_1 - u_2$ e $v = v_1 - v_2$ sejam soluções distintas do sistema (2.2)-(2.8) com as condições iniciais nula.

Então usando o mesmo argumento para obter a primeira estimativa, obtemos:

$$0 \le E(t; u, v) \le 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \text{e} \quad v_1 = v_2$$

com ista fica demonstrado a unicidade. ■

LEMA 2.4 - *Suponhamos que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$, então qualquer solução do problema*

$$a(v,w) = \int_\Omega f w dA + \int_{\Gamma_1} g w d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} h \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_1$$

satisfaz

$$v \in H^4(\Omega)$$

e também

$$\Delta^2 v = f$$

$$v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad sobre \quad \Gamma_0$$

$$\mathcal{B}_1 v = h, \quad \mathcal{B}_2 v = g \quad sobre \quad \Gamma_1$$

Demonstração:

Ver [9]. ■

LEMA 2.5 - *Suponhamos que* $u, v \in H^2(\Omega)$ *e* $w \in H_0^2(\Omega)$. *Então, temos a seguinte desigualdade*

$$\left| \int_\Omega [u,w] v dA \right| \leq \; c \left(\|u\|_{H^1(\Omega)} . \|w\|_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|u\|_{H^2(\Omega)} . \|w\|_{H^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^2(\Omega)}$$

Demonstração:

Visto que $[u, v]$ é um operador contínuo temos para $\epsilon > 0$:

$$\|[u,v]\|_{-2} \leq C \|u\|_{2-\epsilon} \|v\|_{1+\epsilon}.$$

Denotamos por $\|.\|_{-j}$ a norma do espaço dual $H^{-j}(\Omega)$.

Usando interpolação, para $\epsilon = \frac{1}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega [u,w] v dA \right| &\leq c \|[u,w]\|_{-2} \|v\|_2 \\ &\leq c \|u\|_{2-\epsilon} \|w\|_{1+\epsilon} \|v\|_2 \\ &\leq c \|u\|_{\frac{3}{2}} \|w\|_{\frac{3}{2}} \|v\|_2 \\ &\leq c (\|u\|_1 \|w\|_1)^{\frac{1}{2}} (\|u\|_2 \|w\|_2)^{\frac{1}{2}} \|v\|_2. \ \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 2.2 - *Se os dados iniciais* $(u_0, u_1) \in (W \cap H^4(\Omega)) \times (W \cap H^3(\Omega))$ *então a solução do sistema (2.2)-(2.8) tem a seguinte regularidade:*

$$u \in C^1 \left([0,T]; V \cap H^3(\Omega) \right) \cap C^0 \left([0,T]; W \cap H^4(\Omega) \right).$$

Demonstração:

Derivando a equação (2.21)em relação a t, obtemos,

$$\int_{\Omega} u_{ttt}^m w_j dA + h\int_{\Omega} \nabla u_{ttt}^m \nabla w_j dA + a(u_t^m, w_j) - a(g * u_t^m, w_j) =$$
$$\int_{\Omega}[u_t^m, w_j]v^m dA + \int_{\Omega}[u^m, w_j]v_t^m dA + g(t)a(u_{0,m}, w_j) \tag{2.29}$$

multiplicando a equação (2.29) por $h_j^{''}(t)$ e somando em j e usando o LEMA 2.2, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left\{E(t, u_t^m, v_t^m) - \frac{1}{2}\int_{\Omega}[u_t^m, u_t^m]v^m dA\right\} = \frac{1}{2}g'\Box\partial^2 u^m - \frac{1}{2}g(t)a(u^m, u^m)$$
$$-\frac{3}{2}\int_{\Omega}[u_t^m, u_t^m]v_t^m dA + g(t)a(u_{0,m}, u_{tt}^m) \tag{2.30}$$

usando integração, por partes, teremos

$$\int_0^t g(s)a(u_{0,m}, u_{tt}^m)ds = g(s)a(u_{0,m}, u_t^m)\Big|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t g'(s)a(u_{0,m}, u_t^m)ds$$

de onde segue

$$\int_0^t g(s)a(u_{0,m}, u_{tt}^m)ds \leqslant C_\epsilon E(0, u_t^m, v_t^m) + \epsilon \left\|u_t^m\right\|_{H^2(\Omega)}^2 + C\int_0^t \left\|u_t^m\right\|_{H^2(\Omega)}^2 ds$$

usando o LEMA 2.5, a primeira estimativa e a desigualdade

$$\int_{\Omega}[u_t^m, u_t^m]v_t^m dA \leq \|u_t^m\|_{H^1(\Omega)}.\|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}.\|v_t^m\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|u_t^m\|_{H^2(\Omega)}.\|v_t^m\|_{H^2(\Omega)}$$

logo de (2.30)

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq C.E(0, u_t^m, v_t^m) + C\int_0^t E(s, u_t^m, v_t^m)ds$$

usando o Lema de Gronwall, obtemos:

$$E(t, u_t^m, v_t^m) \leq C, \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\text{ e }\; \forall t \in [0, T]$$

portanto

$$u_{tt}^m \quad \text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

$$u_t^m \quad \text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$$
$$v_t^m \quad \text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

de onde vem que

$$u_{tt}^m \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{tt} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$$

$$u_t^m \overset{\star}{\rightharpoonup} u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$$

$$v_t^m \overset{\star}{\rightharpoonup} v_t^m \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$$

integrando por partes a equação (2.11), ou seja

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t\theta_t - h\nabla u_t.\nabla\theta_t)dAdt + \int_0^T a(u,\theta)dt - \int_0^T a(u,\theta)dt \int_0^T a(g*u,\theta)dt =$$
$$\int_0^T \int_\Omega [u,\theta]vdAdt + \int_\Omega u_1\theta(.,0)dA + h\int_\Omega \nabla u_1.\nabla\theta(.,0)dA$$

obtemos:

$$a(u - g*u, w) = -\int_\Omega \{(u_{tt} - h\Delta u_{tt})w - [u,v]w\}dA - h\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_{tt}}{\partial\nu} wd\Gamma_1, \quad \forall w \in W.$$

Do LEMA 2.4, temos:

$$u - g*u \in L^\infty(0,T;H^4(\Omega))$$

usando a Equação Resolvente de Volterra, obtemos:

$$u \in L^\infty(0,T;H^4(\Omega))$$

portanto (u,v) é solução forte para o sistema (2.2)-(2.8).

O que conclui a prova do nosso resultado. ■

Conclusão

Nos últimos anos importantes progressos foram obtidos para a estabilização do sistema de von Kárman em especial para análise da estabilização de estruturas dinâmicas. Pesquisas nestas áreas foram dirigidas para problemas em estruturas modernas em engenharias que necessitam de ativos feedbacks para estabilizar estruturas que podem ser instável na ausência de controles (veja [5] para detalhes). Sendo assim a existência de solução do problema estudado aqui é de fundamental importância para análise de problemas de estabilização.

Bibliografia

[1] C. C. S. Tavares and M. L. Santos, *On the Kirchhoff plates equations with thermal effects and memory boundary conditions. Applied Mathematics and Computation 213 (2009) 25–38.*

[2] M. Horn and I. Lasiecka, *Uniform decay of weak solutions to a von Kármán plate with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations, 7 (1994), 885-908.*

[3] M. Horn and I. Lasiecka, *Global stabilization of a dynamical von Kármán plate with Nonlinear Boundary Feedback. Appl. Math. Optimization, 31 (1995), 57-84.*

[4] M. Horn, A. Favini, I. Lasiecka and D. Tataru, *Global existence, uniqueness and regularity to a von Kármán system with nonlinear boundary dissipation. Differential and Integral Equations, 9 (1996), 267-294.*

[5] J. E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates. SIAM. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).*

[6] J. E. Muñoz Rivera and G. P. Menzala, *Decay rates of solutions of a von Kármán system for viscoelastic plates with memory. Quarterly of Applied Mathematics, v. LVII, n. 1, (1999), p. 181-200.*

[7] J. E. Muñoz Rivera, H. Portillo Oquendo and M. L. Santos, *Asymptotic behavior to a von Kármán plate with boundary memory conditions. Nonlinear Analysis 62, (2005), 1183-1205.*

[8] J. Puel and M. Tucsnak, *Boundary stabilization for the von Kármán equations. SIAM J. Control Optim. 33(1), (1996), 255-273.*

[9] J. L. Lions and E. Megenes, *Non-Homogeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, New York 1972, Vol. I .*