UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CENTRO DE CIÊNIAS EXATAS E NATURAIS

Shyrleny Suely Abreu Cota

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DO TIPO ONDA-PETROVSKY COM MEMÓRIA

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM-PA

2009

Shyrleny Suely Abreu Cota

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DO TIPO ONDA-PETROVSKY COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos.**

Belém-PA

2009

Shyrleny Suely Abreu Cota

FALTA DE DECAIMENTO EXPONENCIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DO TIPO ONDA-PETROVSKY COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau ou título de **Mestre**, na área de concentração **Matemática**, à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Aprovada em 19/06/2009

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos.(Orientador)
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
Universidade Federal do Pará

Belém

Dedicatória

À minha mãe

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos...

... À Deus, por tudo o que me proporciona;

... À minha família, pelo amor, compreensão e apoio;

... Ao professor Mauro de Lima Santos, pela orientação;

... A todos os meus amigos do curso de mestrado, em especial ao Rafael, Rômulo e Dalmí Gama, pelo apoio, força, companheirismo e incentivo.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade e a falta de decaimento exponencial de soluções associadas ao seguinte sistema do tipo onda-Petrovsky com acoplamento linear dado por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^{\infty} g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty),$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty),$$

$$u = v = \Delta v = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,\infty),$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \ \text{ em } \ \Omega$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

Palavras-chaves: Soluções fortes e falta de decaimento exponencial.

Abstract

The main purpose of this work is to study existence, uniqueness and lack of exponential of the following problem

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty),$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \text{ in } \Omega \times (0,\infty),$$

$$u = v = \Delta v = 0 \text{ on } \Gamma \times (0,\infty),$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ in } \Omega$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ.

Key Words: Strong solutions and lack of exponential decay

Introdução

O propósito deste trabalho é estudar existência, unicidade e o não decaimento exponencial do sistema do tipo onda-Petrovsky com memória e acoplamento linear dado por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty) \tag{1}$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty) \tag{2}$$

$$u = v = \Delta v = 0 \;\text{ sobre }\; \Gamma \times (0,\infty) \tag{3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \;\text{ em }\; \Omega \tag{4}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

O modelo acima pode ser usado para descrever a evolução de um sistema constituido de uma membrana elástica e uma placa elástica sujeitas a uma força elástica que atrai uma a outra com coeficiente $\alpha > 0$. Note que o termo $\int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds$, age sobre a membrana elástica como um estabilizador.

Mostraremos que o sistema acoplado acima é dissipativo, mas o correspondente semigrupo não é exponencialmente estável.

Os sistemas fracamente acoplados do tipo

$$u_{tt} - \Delta u + \beta u_t + \alpha v = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty),$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty),$$

$$u = v \;=\; 0 \;\text{ sobre }\; \Gamma \times (0,\infty),$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \;\text{ em }\; \Omega$$

foram estudados por diferentes autores, por exemplo [4, 5, 12].

O que diferencia nosso trabalho dos citados acima e suas referências está no fato de que o mecanismo dissipativo utilizado é o efeito memória que age somente na primeira equação, tornando o problema mais interessante e novo na literatura.

No primeiro capítulo apresentaremos os principais resultados utilizados na dissertação. No segundo capítulo, usando técnicas de semigrupos, mostraremos a existência e a unicidade de soluções globais fortes para o sistema $(1)-(4)$. E finalmente, no terceiro capítulo, usando o teorema devido a Gearhart, mostraremos a falta de decaimento exponencial do sistema $(1)-(4)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados importantes sobre a teoria de semigrupos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Teoria de Semigrupos

1.1.1 Exponencial de operadores lineares e contínuos

A função exponencial de operadores lineares e contínuos está bem definido. De fato, seja X um espaço de Banach, e denotamos por L um operador linear e contínuo em X, isto é,

$$L : X \to X.$$

A composição dos operadores $L \circ L$ está bem definida e é linear e contínua. Denotamos por

$$\mathcal{L}(X) = \{L : X \to X; L \text{ é linear e contínua}\}$$

É simples verificar que $\mathcal{L}(X)$ é um espaço vetorial. Sobre este espaço podemos definir a norma

$$\|L\|_{\mathcal{L}} = sup\|L(x)\|_X; \|x\|_X \leq 1$$

que faz $\mathcal{L}(X)$ um espaço normado completo. Da definição, concluímos que

$$\|L \circ L(x)\|_X \leq \|L\|_{\mathcal{L}}\|L(x)\| \leq \|L\|_{\mathcal{L}}^2\|x\|.$$

Tomando supremos, encontramos

$$\|L \circ L\|_{\mathcal{L}} \leq \|L\|_{\mathcal{L}}^2.$$

Portanto, denotando $L^k = L \circ L \circ L \circ ... \circ L$, k - vezes, temos

$$\|L^k\|_{\mathcal{L}} \leq \|L\|_{\mathcal{L}}^k.$$

Podemos então mostrar que a série

$$I + L + \frac{1}{2!}L^2 + \frac{1}{3!}L^3 + ... + \frac{1}{k!}L^k + ...$$

é convergente, portanto podemos definir exponencial de um operador como

$$e^L = I + L + \frac{1}{2!}L^2 + \frac{1}{3!}L^3 + ... + \frac{1}{k!}L^k + ...$$

Tomando $t \in \mathbb{R}$ segue

$$e^{Lt} = It + Lt + \frac{1}{2!}L^2t^2 + \frac{1}{3!}L^3t^3 + ... + \frac{1}{k!}L^kt^k + ...$$

Derivando com relação a t, temos

$$\frac{d}{dt}e^{Lt} = Le^{Lt}$$

Estes operadores definidos por matrizes e por operadores lineares e contínuos são chamados de semigrupos, pois verificam as seguintes propriedades:

Definição 1.1 *Uma família de operadores $T(s) : X \to X, s \in \mathbb{R}$ satisfazendo*
(i) $T(0) = I$
(ii) $T(s) \circ T(t) = T(s+t)$
é chamado de semigrupo.

1.1.2 Operadores lineares não limitados

Em dimensão finita, todo operador linear é contínuo. Isto não é mais verdade nos espaços de dimensão infinita. Os operadores diferenciais são exemplos de operadores não limitados. De fato, denotemos por $\mathcal{A}$ o operador definido como $\mathcal{A} = \frac{d}{dx}$. O maior espaço X que podemos considerar é $X = L^2(\mathbb{R})$. Isto é, $\mathcal{A} : L^2 \to L^2$. Tomar $X = H^1(\mathbb{R})$ não serve porque neste caso, $\mathcal{A} : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, portanto $\mathcal{A}$ não opera em

$X = H^1(\mathbb{R})$. Observe que $\mathcal{A}$ não está definido em todo $L^2(\mathbb{R})$. O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por $D(\mathcal{A}) = \{w \in L^2(\mathbb{R}); \mathcal{A}w \in L^2(\mathbb{R})\} = H^1(\mathbb{R})$.

Como regra geral podemos afirmar que os operadores lineares não limitados não estão definidos sobre todo o espaço. Usando os mesmos argumentos podemos mostrar que todo operador diferencial é um operador não limitado. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1 : *Encontre o domínio do operador* $\mathcal{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ *sobre* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *e mostre que não é um operador limitado.*

O maior espaço X que podemos considerar definido o operador $\mathcal{A}$ é $X = L^2(\mathbb{R}_+)$. Isto é,

$$\mathcal{A} : L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+) \qquad .$$

O domínio de $\mathcal{A}$ é dado por

$$D(\mathcal{A}) = \{w \in L^2(\mathbb{R}_+); \mathcal{A}w \in L^2(\mathbb{R}_+)\} = H^2(\mathbb{R}_+)$$

Finalmente, definamos a sequência f_m de funções

$$f_m(x) = \sqrt{me^{-mx}}$$

É simples verificar que f_m é uma sequência limitada em $L^2(\mathbb{R}_+)$, pois

$$\|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty ne^{-2nx}dx = \frac{1}{2}$$

Poe outro lado,

$$\|\mathcal{A}f_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_0^\infty n^3e^{-2nx}dx = \frac{n^2}{2} \to \infty$$

O que mostra que $\mathcal{A}$ é não limitado.

1.1.3 Semigrupos C_0

Teorema 1.1 : *Um semigrupo* $e^{\mathcal{A}t}$ *é uniformemente contínuo se, e só se,* $\mathcal{A}$ *é limitado.*

Definição 1.2 : *Diz-se que um semigrupo* $T(t)$ *é fortemente contínuo, ou de classe* C_0, *se* $lim_{t\to 0}T(t)x = x, emX$.

Definição 1.3 : *Diz-se que um semigrupo* $T(t)$ *é limitado, se existe* $M \geq 1$, *tal que* $\|T(t)\| \leq M$. *Se* $M = 1$, *diz-se que* $T(t)$ *é um semigrupo de contrações.*

Definição 1.4 *: Diz-se que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo T, se*

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X; lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} \ \ existe \ em \ \ X\},$$

e para cada $x \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\mathcal{A}x = lim_{t\to 0}\tfrac{T(t)x-x}{t} = \tfrac{d}{dT}T(t)x|_{t=0}.$$

Assim, podemos reescrever o domínio do operador da seguinte forma:

$$D(\mathcal{A}) = \{w \in X; \mathcal{A}w \in X\}$$

Exemplo 1.2 *: Seja S um semigrupo com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$. Mostre que o operador $T(t) = S(t)e^{\alpha t}$ é um semigrupo.*

Demonstração 1.1 *Usando a definição, temos:*

$$T(0) = s(0) \Rightarrow T(0) = I.$$

Por outro lado,

$T(t+s) = S(t+s)e^{\alpha(t+s)} = S(t) \circ S(s)e^{\alpha(t+s)}$

$T(t) \circ T(s) = S(t)e^{\alpha t} \circ S(s)e^{\alpha s} = S(t) \circ S(s)e^{\alpha(t+s)}$

De onde concluímos que $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$. Portanto, T é um semigrupo de operadores.

■

Exemplo 1.3 *: Mostre que o operador $S(t)f(x) = f(x+at)e^{\alpha t}$ é um semigrupo de família de operadores $L^2(\mathbb{R})$ e encontre seu gerador infinitesimal.*

Demonstração 1.2 *Usando a definição, temos:*

$$S(0)f(x) = f(x) \Rightarrow S(0) = I, \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

Por outro lado,

$$S(t+s)f(x) = f(x + a(t+s))e^{\alpha(t+s)}$$

$$S(t) \circ S(s) = S(t)f(x+as)e^{\alpha s} = f(x+as+at)e^{\alpha s}e^{\alpha t} = f(x+a(s+t))e^{\alpha(s+t)}$$

De onde concluímos que

$$S(t) \circ S(s)f(x) = S(t+s)f(x), \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow S(t) \circ S(s) = S(t+s)$$

Portanto, S é um semigrupo de família de operadores de $L^2(\mathbb{R})$. Calculemos o gerador infinitesimal

$$\begin{aligned}
lim_{h\to 0}\frac{S(h)f(x)-f(x)}{h} &= lim_{h\to 0}\frac{f(x+ah)e^{\alpha h}-f(x)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}\frac{f(x+ah)e^{\alpha h}-f(x)e^{\alpha h}+f(x)e^{\alpha h}-f(x)}{h}\\
&= lim_{h\to 0}e^{\alpha h}\frac{f(x+ah)-f(x)}{h}+f(x)lim_{h\to 0}\frac{e^{\alpha h}-1}{h}\\
&= af'(x)+\alpha f(x) = \mathcal{A}f(x), \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

O limite acima existe se, e só se, $f \in H^1(\mathbb{R})$. Portanto, denotando por $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de S, temos que

$$D(\mathcal{A}) = H^1(\mathbb{R})$$

e ainda

$$\mathcal{A}(f) = a\frac{d}{dx}f + \alpha I f, \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{A} = a\frac{d}{dx} + \alpha I.$$

O operador $\mathcal{A}$ é um operador linear, mas não é limitado.

■

Definição 1.5 *: Dizemos que $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se existe uma constante positiva μ e $M \geq 1$ tal que*

$$\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Aqui $\|\cdot\|$ denota a norma em $\mathcal{L}(X,X)$.

1.1.4 O problema de Cauchy

Definição 1.6 *: Diz-se que a equação $U_t = \mathcal{A}U$, $U(0) = U_0$ é autonoma quando $\mathcal{A}$ é um operador independente de t.*

Se a equação não é autonoma, isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$, então a solução do problema

$$U_t = \mathcal{A}(t)U, U(0) = U_0$$

não define um semigrupo. Para ver isto, basta considerar o caso unidimensional

$$y' = a(t)y, y(t) = y_0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

Mostremos que o operador

$$S(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$$

é um semigrupo se, e só se, $a(t) = a(0) = constante$. De fato, da propriedade

$$S(t+s) = S(t)S(s) \Rightarrow e^{\int_0^{t+s} a(s)ds} = e^{\int_0^t a(s)ds} e^{\int_0^s a(s)ds}$$

Segue que

$$\int_0^{t+s} a(s)ds = \int_0^t a(s)ds + \int_0^s a(s)ds$$

Usando a propriedade da integral, temos

$$\int_t^{t+s} a(s)ds = \int_0^s a(s)ds \Rightarrow \frac{1}{s}\int_t^{t+s} a(s)ds = \frac{1}{s}\int_0^s a(s)ds$$

Tomando o limite quando $h \to 0$, temos que $a(t) = a(0)$ para todo $t > 0$.

Definição 1.7 *: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Diremos que um operador $\mathcal{A}$ é dissipativo se*

$$Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} \leq 0, \forall U \in \mathcal{H}$$

Teorema 1.2 *: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $S(t)$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$. Então, S é um semigrupo de contrações se, e somente se, $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

1.1.5 Teorema de Hille-Yosida

Definição 1.8 *: Seja $\mathcal{A}$ um operador em X, um espaço de Banach. Chama-se de conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ ao conjunto*

$$\varrho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; w \mapsto (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} w \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Chama-se de espectro de $\mathcal{A}$ ao conjunto $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \varrho(\mathcal{A})$.

Definição 1.9 *: Seja $\mathcal{A}$ um operador num espaço de Banach X. Chamaremos de* ***cota superior do espectro*** *de $\mathcal{A}$ ao valor*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Definição 1.10 *: Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ de classe C_0. Diremos que $\omega_0(\mathcal{A})$ é o **tipo do semigrupo** gerado por $\mathcal{A}$ se*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t\mapsto\infty} \frac{ln\|e^{\mathcal{A}t}\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\|e^{\mathcal{A}t}\|}{t}.$$

*Dizemos que o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ de classe C_0 possui a **propriedade do crescimento determinada pelo espectro** se $\omega_\sigma(A) = \omega_0(\mathcal{A})$.*

Teorema 1.3 *: Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $S(t)$ o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$. Então, S é um semigrupo de contrações se, e só se, $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Demonstração 1.3 *Suponhamos que $S(t)$ seja de contrações, então $\|S(t)\| \leq 1$, e ainda*

$$\langle S(h)w - w, w\rangle_{\mathcal{H}} = \langle S(h)w, w\rangle_{\mathcal{H}} - \langle w, w\rangle_{\mathcal{H}} \leq \|w\|^2_{\mathcal{H}} - \|w\|^2_{\mathcal{H}} = 0$$

Dividindo por h e tomando o limite $h \to 0$ para $w \in D(\mathcal{A})$, temos que

$$\langle \mathcal{A}w, w\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$$

Reciprocamente, para $w \in D(A)$, temos que a função $U(t) = S(t)w$ verifica

$$U_t = \mathcal{A}U, U(0) = w$$

Aplicando o produto interno com U na equação acima, obtemos

$$\langle U_t, U\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq 0$$

De onde segue

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \|w\|_{\mathcal{H}}$$

Lembrando a definição de U, temos

$$\|S(t)w\|_{\mathcal{H}} \leq \|w\|_{\mathcal{H}} \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 1.$$

Portanto, o semigrupo é de contrações.

■

Teorema 1.4 ***(Hille - Yosida)****: Um operador $\mathcal{A}$ linear, não limitado é um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações se, e somente se,*

- *$\mathcal{A}$ é fechado e $D(\mathcal{A}) = X$*
- *O conjunto resolvente $\varrho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, é válido*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

1.1.6 Teorema de Lummer Phillips

Estudaremos outra caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos de contrações.

Teorema 1.5 ***(Teorema de Lummmer Phillips)****: Seja $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio denso em X*

- *Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

- *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre X, então $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Lema 1.1 *: Seja $S : X \to X$ um operador linear e contínuo com inversa contínua. Seja $B \in \mathcal{L}(B)$ tal que*

$$\|B\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}$$

então $S + B$ é linear, contínua e inversível.

Corolário 1.1 *: Seja $\mathcal{A}$ um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se $0 \in \rho(\mathcal{A})$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.*

Demonstração 1.4 *Pela hipótese sabemos que $\mathcal{A}$ é inversível. Note que*

$$\lambda I - \mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I) \tag{1.1}$$

Pelo lema acima, tomando $B = \lambda \mathcal{A}^{-1}$ e $S = -I$, para $|\lambda| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, temos que $(\lambda \mathcal{A}^{-1} - I)$ é inversível. Portanto, de (1.1), encontramos que $\lambda I - \mathcal{A}$ é inversível, por ser a composição de operadores inversíveis. Logo, do Teorema de Lummer Phillips, encontramos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

■

O seguinte teorema caracteriza um operador fechado.

Teorema 1.6 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em $\mathcal{H}$. Se $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, então $\mathcal{A}$ é fechado.*

O seguinte teorema caracteriza a densidade do domínio do operador $\mathcal{A}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 1.7 *Seja $\mathcal{A}$ dissipativo tal que $Im(I - \mathcal{A}) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*

Teorema 1.8 ***(Stone)***: *$\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se, e somente se, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto $(\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*)$.*

1.1.7 Espectro de um semigrupo e estabilidade exponencial

Corolário 1.2 *: Suponhamos que $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq 0\} \subset \varrho(\mathcal{A})$e que*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty, \forall Re\lambda \geq 0$$

Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq -\epsilon\} \subset \varrho(\mathcal{A})$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty, \forall Re\lambda \geq -\epsilon$$

Corolário 1.3 *: Suponhamos que $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda \geq 0\} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e que*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty, \forall Re\lambda \geq 0.$$

Então, o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável.

Como consequência dos resultados anteriores caracterizamos a estabilidade exponencial de um semigrupo de contrações.

Teorema 1.9 *: Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 de contrações definido num espaço de Hilbert. Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}; \ e; \ \overline{lim_{|\beta| \to \infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty$$

onde $\varrho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$.

Demonstração 1.5 *Como o semigrupo é de contrações, então é válido que*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \frac{1}{Re\lambda}, \forall Re\lambda > 0$$

Da hipótese, encontramos

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < C, \forall Re\lambda \geq 0$$

Do corolário anterior, segue o resultado. O recíproco deste teorema é imediato.

$\blacksquare$

O próximo resultado dá uma condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo é determinada pela cota superior do espectro.

Teorema 1.10 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos que*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \omega_\sigma(\mathcal{A})$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe M_ϵ tal que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M_\epsilon, \quad \forall Re\lambda \geq \omega_\sigma(\mathcal{A}) + \epsilon.$$

Observação 1.1 *O teorema 1.10 nos diz que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando esta propriedade é válida, diz-se que o semigrupo possui a **propriedade do crescimento determinada pelo espectro** (PCDE).*

O seguinte resultado mostra que se $\mathcal{A}$ gera um semigrupo analítico e se a cota superior do espectro é negativa, então temos decaimento exponencial, ver Pazy [7].

Teorema 1.11 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$. Se $\omega_\sigma(S) < 0$, então existe constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.*

Demonstração 1.6 *: Sendo $\mathcal{A}$ um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, existem constantes $\omega \geq 0, M \geq 1, \delta > 0$ e uma vizinhança V de $\lambda \neq \omega$ tal que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \Sigma = \{\lambda; |arq(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup V$$

e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad para\ \lambda \in \Sigma.$$

Além disso,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\tau e^{\lambda t} R(\lambda; \mathcal{A}) d\lambda \tag{1.2}$$

onde Γ é formado por $\Gamma_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : p \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta\}$ e $\Gamma_2 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta\}$ e é orientado de tal forma que

$Im\lambda$ cresça ao longo de Γ. A convergência em (1.2) para $t > 0$ é na topologia uniforme do operador. Por hipótese, temos que $R(\lambda; \mathcal{A})$ é analítico numa vizinhança de

$$\Delta = \{\lambda; Re\lambda > \sigma_1, |arq(\lambda - \omega)| \geq \theta\}$$

onde $0 > \sigma_1 > \omega_\sigma(S)$. Do Teorema de Cauchy segue que Γ em (1.2) pode ser mudado sem variar o valor da integral para a trajetória Γ' onde Γ' é composta por

$$\Gamma'_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\},$$

$$\Gamma'_2 = \{Re\lambda = \sigma_1 : |Im\lambda| \leq (\omega - \sigma_1)|tan\theta|\},$$

$$\Gamma'_3 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\},$$

e é orientada de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de Γ'. Portanto,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda; \mathcal{A}) d\lambda$$

Estimando $\|S(t)\|$ sobre $\Gamma'_i, i = 1, 2, 3$ encontramos para $t \geq 1$ e alguma constante M_1, que $\|S(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$. Desde que $\|S(t)\| \leq M_2$ para $0 \leq t \leq 1$, então temos $\|S(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$ para $t \geq 0$. Donde segue a conclusão.

■

Observação 1.2 *Na prova do Teorema 1.11(ver Pazy [7], Teorema 4.3), temos decaimento exponencial da forma $\|S(t)\| \leq M_1 e^{-\sigma_1 t}$ para todo $\omega_\sigma(S) < \sigma_1 < 0$. Em particular, para $\sigma_1 = \omega_\sigma(S) + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ muito pequeno, temos decaimento exponencial com taxa dada pela cota superior do espectro. Desta forma, temos a propriedade do crescimento determinada pelo espectro. Em outras palavras temos o seguinte resultado:*

Teorema 1.12 *Se $S(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, então S possui a propriedade do crecimento determinada pelo espectro.*

1.2 Outros resultados

Definição 1.11 *(**Lax-Milgran**): Seja $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert munido com a norma $\|.\|_\mathcal{V}$, $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $l : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ um funcional linear e contínuo, ou seja, $l \in \mathcal{V}'$, sendo $\mathcal{V}'$ o dual de $\mathcal{V}$. Considerando que $a(.,.)$ é contínua, isto é,*

$$\exists C > 0 : |a(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|_\mathcal{V}\|\eta\|_\mathcal{V}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{V}$$

e coerciva ($\mathcal{V}$ - elíptica), ou seja,

$$\exists c > 0 : a(\xi, \xi) \geq c\|\xi\|_{\mathcal{V}}^2, \forall \xi \in \mathcal{V}$$

Então existe uma única solução para o seguinte problema: encontre $u \in \mathcal{V}$ tal que

$$a(u, \eta) = l(\eta)$$

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução global

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução do seguinte sistema acoplado de equações do tipo onda-Petrovsky com memória dada por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \tag{2.1}$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \tag{2.2}$$

$$u = v = \Delta v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty) \tag{2.3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega \tag{2.4}$$

Note que neste caso o operador não é autonomo e, portanto, não é possível aplicar a teoria dos semigrupos. Para transformar (2.1) numa equação autonoma, Dafermos [1] e Fabrizio [2], introduzem os espaços de memória, isto é,

$$\eta = u(.,t) - u(.,t-s) \tag{2.5}$$

Note que

$$\eta_t = u_t(.,t) - u_t(.,t-s) e \eta_s = u_s(.,t-s)$$

Somando as duas relações acima, temos:

$$\eta_t + \eta_s = u_t(.,t)$$

De (2.5), temos $\eta = 0$, quando $s = 0$, para todo $t \geq 0$. Esta pode ser considerada como condição de contorno, enquanto

$$\eta_t \mid_{t=0} = u_t(.,0) - u_t(.,-s) = u_1 - u_t(.,-s) := v(s)$$

onde $v(s)$ é chamada de história de u_t.

De (2.5), também temos:

$$\Delta\eta = \Delta u(.,t) - \Delta u(.,t-s) \tag{2.6}$$

Consideremos agora o problema com história

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0$$

Usando (2.6), temos:

$$\int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty g(\tau)[\Delta u(.,t) - \Delta\eta(.,\tau)]d\tau = \int_0^\infty g(\tau)d\tau\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)d\tau$$

De onde a equação original pode ser reescrita da seguinte forma:

$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)d\tau\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)d\tau + \alpha v = 0$

$u_{tt} - (1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau)\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)d\tau + \alpha v = 0$

Fazendo $\beta = 1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau$, podemos, então, transformar a equação (2.1) numa equação autônoma. Assim, o sistema completo pode ser reescrito

$$u_{tt} - \beta\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)d\tau + \alpha v = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \tag{2.7}$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \tag{2.8}$$

$$\eta_s + \eta_t - u_t = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty) \tag{2.9}$$

$$u = v = \Delta v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty) \tag{2.10}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega \tag{2.11}$$

$$\eta(x,0) = \eta_0(x) = u_0 - u_0(x,-s) \text{ em } \Omega \tag{2.12}$$

Seja $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$. Definamos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$

$$U=\begin{pmatrix}u\\ \varphi\\ v\\ \psi\\ \eta\end{pmatrix}\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\ \varphi\\ v\\ \psi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_t\\ u_{tt}\\ v_t\\ v_{tt}\\ \eta_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_t\\ \beta\Delta u+\int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)-\alpha v\\ v_t\\ -\Delta v^2-\alpha u\\ u_t-\eta_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & I & 0 & 0 & 0\\ \beta\Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \int_0^\infty g(\tau)\Delta d\tau\\ 0 & 0 & 0 & I & 0\\ -\alpha I & 0 & -\Delta^2 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0 & -(.)_s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ \varphi\\ v\\ \psi\\ \eta\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & I & 0 & 0 & 0\\ \beta\Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \mathcal{T}\\ 0 & 0 & 0 & I & 0\\ -\alpha I & 0 & -\Delta^2 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0 & -(.)_s\end{pmatrix}}_{:=\mathcal{A}}\cdot\begin{pmatrix}u\\ \varphi\\ v\\ \psi\\ \eta\end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{T}$ está definido como

$$\mathcal{T}\eta=\int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\tau)d\tau,\quad \forall\eta\in D(\mathcal{T})$$

Espaços Funcionais

Denotemos por $L^2_\mu(0,\infty;H^1_0(\Omega))$ o espaço das funções de quadrado integrável, com peso μ e com valores no espaço $H^1_0(\Omega)$, isto é,

$$L^2_\mu(0,\infty;H^1_0(\Omega))=\{f;\textstyle\int_0^\infty\mu(s)\int_\Omega|\nabla f|^2dxds<\infty\}$$

Este espaço munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2_\mu}=\int_0^\infty\mu(s)\int_\Omega\nabla f(x,s).\nabla g(x,s)dxds$$

é um espaço de Hilbert.

Denotamos por $\mathcal{H}$ o espaço

$$\mathcal{H}=H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)\times V_1\times L^2(\Omega)\times L^2_\mu(0,\infty;H^1_0(\Omega))$$

onde $V_1 = \{v \in H^2(\Omega) : v = \Delta v = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma\}$. Em $\mathcal{H}$ considere o seguinte produto interno

$$\begin{aligned}\langle U, V\rangle &= \beta\int_\Omega \nabla u_1.\nabla v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2 dx + \int_\Omega \Delta u_3 \Delta v_3 dx + \int_\Omega u_4 v_4 dx \\ &+\alpha\int_\Omega (u_1 v_3 + u_3 v_1) dx + \int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega \nabla u_5(x,s)\nabla v_5(x,s) dx ds\end{aligned}$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T$.

Portanto, $D(\mathcal{T}) = \{\eta \in L^2_g(0,\infty; H^1_0(\Omega)); \eta_s \in L^2_g(0,\infty; H^1_0(\Omega)), \eta(0) = 0\}$ e $D(\mathcal{A}) = \{(u,\varphi,v,\psi,\eta)^T \in \mathcal{H}; \beta u - \int_0^\infty g(\tau)\eta(\tau)d\tau \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \varphi \in H^1_0(\Omega), v \in V_1 \cap H^4(\Omega), \psi \in V_1, \eta \in D(\mathcal{A})\}$

Hipótese sobre o núcleo

$$g(t) > 0, \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g(t) \leq g^{'}(t) \leq -k_1 g(t), |g^{''}(t)| \leq k_2 g(t) \qquad (2.13)$$

Para demonstrar a existência de solução do problema transformado usaremos o seguinte teorema:

Lema 2.1 *: Suponha que o núcleo g satisfaz as condições* (2.13)*. Então, o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ de contração de classe C_0 sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração 2.1 *: O sistema* $(2.7) - (2.12)$ *é equivalente a*

$$\frac{d}{dt}U = \mathcal{A}U, U(0) = U_0, U \in D(\mathcal{A})$$

onde $U = (u,\varphi,v,\psi,\eta)^T$, $U_0 = (u_0, u_1, v_0, \eta_0)^T$

É suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo. Mostremos que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. De fato, do produto interno em $\mathcal{H}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle &= \langle \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \\ v_t \\ v_{tt} \\ \eta_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ v \\ v_t \\ \eta \end{pmatrix} \rangle \\ &= \beta\int_\Omega \nabla u_t.\nabla u dx + \int_\Omega u_{tt} u_t dx + \int_\Omega \Delta v_t \Delta v dx + \int_\Omega v_{tt} v_t dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\alpha\int_\Omega (u_t v + v_t u)dx + \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla\eta_t(x,\tau)\nabla\eta(x,\tau)dxd\tau \\
= & -\beta\int_\Omega u_t\Delta u dx + \int_\Omega [\beta\Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau) - \alpha v]u_t dx \\
& + \int_\Omega \Delta v_t\Delta v dx + \int_\Omega (-\Delta_2 v - \alpha u)v_t dx + \alpha\int_\Omega u_t v dx \\
& +\alpha\int_\Omega v_t u dx + \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla(u_t - \eta_\tau(x,\tau)).\nabla\eta(x,\tau)dxd\tau \\
= & -\beta\int_\Omega u_t\Delta u dx + \beta\int_\Omega u_t\Delta u dx + \int_\Omega\int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)u_t dx \\
& -\alpha\int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega \Delta v_t\Delta v dx - \int_\Omega \Delta^2 v v_t dx - \alpha\int_\Omega v_t u dx \\
& +\alpha\int_\Omega u_t v dx + \alpha\int_\Omega v_t u dx + \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla u_t.\nabla\eta(x,\tau)dxd\tau \\
& - \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla\eta_\tau(x,\tau)\nabla\eta(x,\tau)dxd\tau \\
= & \int_\Omega\int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\tau)u_t dx + \int_\Omega \Delta v_t\Delta v dx - \int_\Omega \Delta^2 v v_t dx \\
& - \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega u_t\Delta\eta(x,\tau)dxd\tau - \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \eta_\tau\Delta\eta(x,\tau)dxd\tau \\
= & \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla\eta_\tau.\nabla\eta(x,\tau)dxd\tau = \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(\tau)\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dxd\tau
\end{aligned}
$$

da hipótese sobre a função g concluímos que

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle \leq -\frac{k_1}{2}\int_0^\infty\int_\Omega |\nabla\eta|^2 dxd\tau \leq 0$$

de onde segue que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Portanto, pelo Corolário 1.1, é suficiente verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isto, seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$ e considere a equação resolvente

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F$$

onde $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$. Para $\lambda = 0$, temos:

$$-\varphi = f_1 \tag{2.14}$$

$$-\beta\Delta u + \alpha v - \mathcal{T}\eta = f_2 \tag{2.15}$$

$$-\psi = f_3 \tag{2.16}$$

$$\Delta^2 v + \alpha u = f_4 \tag{2.17}$$

$$-\varphi + \eta_s = f_5 \tag{2.18}$$

De (2.14) *e* (2.16), *temos*

$$\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \eta \in L_g^2(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \Rightarrow \eta \in D(\mathcal{T})$$

De (2.15) *e* (2.17)

$$-\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx + \alpha \int_\Omega v \phi dx = \int_\Omega F_1 \phi dx, F_1 = f_2 + \mathcal{T}\eta$$

$$\int_\Omega \Delta v \Delta \sigma dx + \alpha \int_\Omega u \sigma dx = \int_\Omega f_4 \sigma dx$$

Logo, obtemos o seguinte problema variacional: determinar $u \in H_0^1(\Omega)$ *e* $v \in V_1$ *solução do problema*

$$b((u, \phi), (v, \sigma)) = \mathcal{X}(\phi, \sigma), \forall \phi \in H_0^1(\Omega) e \forall \sigma \in V_1$$

onde

$$b((u, \phi), (v, \sigma)) = -\beta \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx + \alpha \int_\Omega v \phi dx + \int_\Omega \Delta v \Delta \sigma dx$$
$$+\alpha \int_\Omega u \sigma dx$$

e

$\mathcal{X}(\phi, \sigma) = \int_\Omega F_1 \phi dx + \int_\Omega f_4 \sigma dx$

- $b(. \ , .)$ *é bilinear, contínua e elíptica em* $(H_0^1(\Omega))^2 \times (V_1)^2$
- $\mathcal{X}(.,.)$ *é linear e contínua em* $H_0^1(\Omega) \times V_1$

Pelo lema de Lax - Milgran segue que existe $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times V_1$ *solução do problema variacional. Usando regularidade elíptica segue que* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *e* $v \in V_1 \cap H^4(\Omega)$. *Portanto,* $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T \in D(\mathcal{T})$. *Logo,* $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

■

Podemos resumir o resultado de existência e unicidade de solução no seguinte teorema:

Teorema 2.1 *: Sejam* $(u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0)^T \in D(\mathcal{A})$. *Então, existe uma única solução forte do sistema* $(7) - (12)$ *satisfazendo*

$$u \in C(0, \infty; V_2) \cap C^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0, \infty; L^2(\Omega))$$

$$v \in C(0,\infty;V_1)\cap C^1(0,\infty;H_0^1(\Omega))\cap C^2(0,\infty;L^2(\Omega))$$

$$\eta \in C(0,\infty;D(\mathcal{T})\cap C^1(0,\infty;L_g^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)))$$

onde $V_2 = \{u \in H_0^1(\Omega); \beta u - \int_0^\infty g(\tau)\eta(\tau)d\tau \in H_0^1 \cap H^2, \eta \in D(\mathcal{T})\}$

Demonstração 2.2 *: É consequência imediata do lema anterior.*

■

Capítulo 3

Falta de decaimento exponencial

Neste capítulo provaremos que o operador resolvente não é uniformemente limitado. Isto significa que o semigrupo $S(t)$ sobre $\mathcal{H}$, neste caso, não é exponencialmente estável. Simplificaremos os cálculos supondo que o núcleo é da forma $g(s) = e^{-\mu s}$, $s \in \mathbb{R}^+$, com $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Usaremos condições necessarias e suficientes para que o C_0-semigrupo seja exponencialmente estável no espaço de Hilbert. Este resultado foi obtido por Gearhart e Huang independentemente.

Para estudar o comportamento assintótico do semigrupo associado a (2.7) $-$ (2.9), considere o problema espectral:

$$\begin{cases} -\Delta w_m = \lambda w_m \ \text{ em } \ \Omega \\ \quad w_m = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

onde

$$lim_{m\to\infty}\lambda_m = +\infty.$$

O seguinte teorema descreve o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1 *: Assuma que o núcleo é da forma $g(s) = e^{\mu s}$, $s \in \mathbb{R}^+$, com $\mu \in \mathbb{R}^+$. O semigrupo $S(t)$ sobre $\mathcal{H}$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração 3.1 *Para provar que o semigrupo $S(t)$ sobre $\mathcal{H}$ não é exponencialmente estável encontraremos uma sequência de funções limitadas $F_m = \{f_{1,m}, f_{2,m}, f_{3,m}, f_{4,m}, f_{5,m}\} \in \mathcal{H}$ para as quais as correspondentes soluções da equação resolvente não são limitadas. Considere a equação*

$$i\lambda U_m - \mathcal{A}U_m = F_m$$

Para simplificar a notação, omitiremos o indice m. Assim,

$$\begin{cases} i\lambda u - \varphi = f_1 \\ i\lambda\varphi - \beta\Delta u + \alpha v - \mathcal{T}\eta = f_2 \\ i\lambda v - \psi = f_3 \\ i\lambda\psi - \Delta^2 v + \alpha u = f_4 \\ i\lambda\eta - \varphi + \eta_s = f_5 \end{cases} \tag{3.2}$$

Considerando $f_1 = f_3 = f_5 = 0$ *e* $f_2 = f_4 = w_m$*, obtemos* $\varphi = i\lambda u$ *e* $\psi = i\lambda v$*. Então, o sistema* (3.2) *fica*

$$\begin{cases} -\lambda^2 u - \beta\Delta u + \alpha v - \mathcal{T}\eta = w_m \\ -\lambda^2 v - \Delta^2 v + \alpha u = w_m \\ i\lambda\eta + \eta_s - i\lambda u = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Consideremos soluções da forma

$$u = aw_m, v = bw_m, \varphi = cw_m, \psi = dw_m, \eta(x,s) = \gamma(s)w_m$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *e* $\gamma(s)$ *depende de* λ *e será determinado explicitamente no que segue. De* (3.3)*, obtemos* a *e* b *satisfazendo:*

$$\begin{cases} -\lambda^2 aw_m - \beta_0\Delta aw_m + \alpha bw_m - \int_0^\infty g(s)\Delta\gamma(s)w_m ds = w_m \\ -\lambda^2 bw_m + \Delta^2 bw_m + \alpha aw_m = w_m \\ i\lambda\gamma w_m - i\lambda aw_m + \gamma(s)w_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda^2 aw_m + \beta_0 a\lambda_m w_m + \alpha bw_m - \int_0^\infty g(s)\gamma(s)\lambda_m w_m ds = w_m \\ -\lambda^2 bw_m + b\lambda_m^2 w_m + \alpha aw_m = w_m \\ i\lambda\gamma w_m - i\lambda aw_m + \gamma(s)w_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda^2 a + \beta_0 a\lambda_m + \alpha b + \lambda_m \int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = 1 \\ -\lambda^2 b + \lambda_m^2 b + \alpha a = 1 \\ \gamma_s + i\lambda\gamma - i\lambda a = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Resolvendo (3.4)*, obtemos que*

$$\gamma(s) = Ce^{-i\lambda s} + a. \tag{3.5}$$

Desde que $\eta(0) = 0$, então $C = -a$ e (3.5) fica

$$\gamma(s) = a - ae^{-i\lambda s}. \tag{3.6}$$

Então, de (3.6), temos

$$\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = \int_0^\infty g(s)(a - ae^{-i\lambda s})ds = aa_0 - a\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}ds \tag{3.7}$$

onde

$$a_0 = \int_0^\infty g(s)ds$$

Agora escolhendo $\lambda = \lambda_m$ e usando as equações $(3.4)_1$ e $(3.4)_2$, obtemos:

$$a = \tfrac{1}{\alpha},$$
$$b = \tfrac{\lambda_m(\lambda_m-\beta)}{\alpha^2}\tfrac{\lambda_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \tfrac{1}{\alpha},$$
$$c = i\tfrac{\lambda_m}{\alpha},$$
$$d = i\lambda_m(\tfrac{\lambda_m(\lambda_m-\beta)}{\alpha^2}\tfrac{\lambda_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \tfrac{1}{\alpha}).$$

Assim,

$$\varphi = cw_m = i\tfrac{\lambda_m}{\alpha}w_m$$

e

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \tfrac{\lambda_m^2}{\alpha^2}.$$

Por isso, temos

$$lim_{m\to\infty}\|U_m\|^2_{\mathcal{H}} \geq lim_{m\to\infty}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = lim_{m\to\infty}\tfrac{\lambda_m^2}{\alpha^2} = \infty$$

o que completa a demostração.

■

Bibliografia

[1] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015 - 1020, 1999.*

[2] C. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970) 297-308.*

[3] M. Fabrizio, *Mathematical problems in linear viscoelasticity. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 12, Philadelphia, 1992.*

[4] L. Gearhart, *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces,* Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[5] F. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space,* Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43 - 56, 1985.

[6] F. Alabau, P. Cannarsa e V. Komornik *, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations J. Evol. Equ., 2, 127 - 150, 2002.*

[7] A. Pazy,. *Semigroups of linear operators and aplications to partial differenial equation, Springer, New York, 1983.*

[8] J. PRÜSS, *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. AMS 28, 847-857, (1984).

[9] J. E. M. RIVERA, *Estabilização de semigrupos e aplicações, Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.*

[10] M. L. SANTOS, M. P. C ROCHA., S. C. GOMES, *Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative. Applicable Analysis, v. 86, p. 1293 - 1302, 2007.*

[11] Z. LIU E S. ZHENG,. *Semigroups associated with dissipative systems,* In CRC Reseach Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, 1999.