RÔMULO LUIZ OLIVEIRA DA SILVA

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS PARABÓLICOS COM FONTE NÃO LOCAL E FLUXO NA FRONTEIRA

BELÉM
2009

RÔMULO LUIZ OLIVEIRA DA SILVA

SOBRE UMA CLASSE DE PROBLEMAS PARABÓLICOS COM FONTE NÃO LOCAL E FLUXO NA FRONTEIRA

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Paulo Marquês Lopes

BELÉM

2009

RÔMULO LUIZ OLIVEIRA DA SILVA

SOBRE UMA CLASSE DE PROLEMAS PARABÓLICOS COM FONTE NÃO LOCAL E FLUXO NA FRONTEIRA.

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de **Mestre**, na área de concentração **Matemática**, à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Aprovada em 03/06/2009

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Paulo Marquês Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Pará (UFPa)

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará (UFPa)

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará (UFPa)

BELÉM

Dedicatória

Aos meus pais, pela força e incentivo que me proporcionaram

Agradecimentos

Várias pessoas me ajudaram a concluir esta dissertação.

Do fundo do meu coração meus sinceros agradecimentos...............

.......Ao senhor Deus, por ter me dado a força necessária para ter chegado ao fim de mais uma jornada em minha vida.

.......A Toda minha família, ferramenta que me possibilitou, sem medir esforços, dar passos consideráveis não desanimando nos momentos difíceis.

.......Ao professor, orientador, colega e amigo Paulo Marques Lopes, mais conhecido como PM, por sua infinita compreensão, força de vontade, determinação e paciência.

.......Ao professor Mauro de Lima Santos, por sua dedicação e competência frente ao PPGME-UFPa, fornecendo aos mestrandos as melhores condições possíveis para realizações de seus trabalhos.

.......Aos amigos do mestrado, que em todos os momentos me apoiaram, Dalmi Gama, Adam Oliveira, Leandro Ribeiro, Daise W., M.Jeremias, Beth e Faleth Sabino, Laila Fontineli, Silvério, Shyrleny e Rafael Abreu.

Numa folha qualquer
Eu desenho um sol amarelo
E com cinco ou seis retas
É fácil fazer um castelo.....

Corro o lápis em torno
Da mão e me dou uma luva
E se faço chover
Com dois riscos Tenho um guarda-chuva.....

Se um pinguinho de tinta
Cai num pedacinho
Azul do papel
Num instante imagino
Uma linda gaivota
A voar no céu......

Vai voando
Contornando a imensa
Curva Norte e Sul
Vou com ela
Viajando Havaí
Pequim ou Istambul
Pinto um barco a vela
Branco navegando
É tanto céu e mar
Num beijo azul......

De uma América a outra
Eu consigo passar num segundo
Giro um simples compasso
E num círculo eu faço o mundo.......

Toquinho / Vinicius de Moraes

Resumo

Neste trabalho usaremos uma tecnica de ponto fixo para provar a existência de solução fraca para o seguinte problema misto de evolução

$$(PM)\begin{cases} u_t - \Delta u = -\left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1} & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,.) = 0 & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_0, \\ \partial_n u(t,.) = \left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_2} & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ u(0,.) = u_0(.) & \text{em } \Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega u(.,x)dx \geq 0 & \text{em } (0,T), \end{cases}$$

onde p_1, p_2 são números reais maiores ou iguais a 1, Ω é um domínio conexo, limitado e Lipschitz de R^N, Γ_0 e Γ_1 são dois subconjuntos disjuntos da fronteira $\partial\Omega$ e mensuráveis com respeito a medida de $\partial\Omega$, satisfazendo $\overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega$ com $|\Gamma_0| > 0$, o vetor normal exterior à fronteira $\partial\Omega$ é denotado por $\partial_n u(t,.)$. Em seguida, usando técnicas usuais, mostraremos que de fato a solução fraca obtida é única e é máximal com relação ao tempo. Trataremos também de um resultado qualitativo para a integral da solução, isto é, mostraremos que $\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx$ é positiva quando Ω é um intervalo em $\mathbb{R}$. Para terminar estudaremos um sistema acoplado de equações, associado a (PM), mostrando um resultado de existência e unicidade de solução máximal fraca para este sistema.

Palavras chaves: Equação parabólica; Solução Máximal; Teorema do ponto fixo de Schauder; Método Variacional .

Abstract

In this paper we use a technique of fixed point to prove the existence of weak solution to the following mixed problem developments

$$(PM)\begin{cases} u_t - \Delta u = -\left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1} & \text{em } \ (0,T)\times\Omega, \\ u(t,.) = 0 & \text{sobre } \ (0,T)\times\Gamma_0, \\ \partial_n u(t,.) = \left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_2} & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ u(0,.) = u_0(.), & \text{em } \ \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega u(.,x)dx \geq 0 & \text{em } (0,T) \end{cases}$$

Where p_1, p_2 are real numbers greater than or equal to 1, Ω is a connected, bounded, Lipschitz domain of R^N, Γ_0 and Γ_1 are two disjoint subsets of $\partial\Omega$, mearurable with respect to the measure area on $\partial\Omega$ and satisfying $\overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega$, $|\Gamma_0| > 0$. Then using usual techniques, we show that in fact a weak solution obtained is unique and is maximal with respect to time. We also a qualitative result for the full solution, ie show that $\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx$ is positive when Ω is an interval in $\mathbb{R}$. Finally a study of coupled equations, associated with (PM), showing a result of existence and uniqueness of maximal weak solution for this system.

Key words: parabolic equation, maximal solution, the theorem Schauder fixed point, variational method.

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de solução fraca para o sistema parabólico semilinear

$$(P_0)\begin{cases} u_t - \Delta u = -a\left(\displaystyle\int_{\Omega'} u(t_0,x)dx\right) & \text{em } \ [t_0, t_0+\Delta t)\times\Omega, \\ u(t,.) = 0 & \text{sobre } \ [t_0, t_0+\Delta t)\times\Gamma_0 \\ \partial_n u(t,.) = b\left(\displaystyle\int_{\Omega'} u(t_0,x)dx\right) & \text{sobre } [t_0, t_0+\Delta t)\times\Gamma_1, \\ u(t_0,.) = u_0(.) & \text{em } \ \Omega. \\ \displaystyle\int_{\Omega} u(.,x)dx \geq 0 & \text{em } (0,T), \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira lipschitiz, T é um número real positivo, $p \geq 1$, Ω' é uma parte bem contida em Ω, Γ_0 e Γ_1 são partes disjuntas da fronteira de Ω. Assuma que Ω seja uma chapa metálica fina, de tal forma que em cada instante $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, ...,\ u(t,x)$ é a medida de temperatura de uma parte Ω' de Ω, tal que entre cada variação de tempo ocorra um resfriamento em Ω e um aquecimento de uma parte que compõem o bordo de Ω. Como não é possível obter o valor exato da temperatura de cada ponto de Ω, toma-se uma média de temperatura para uma determinada vizinhança de pontos em Ω dada por,

$$\frac{1}{|B|}\int_B u(t,x)dx,$$

onde B é uma bola que contém Ω'.

Este problema foi tratado de forma um pouco mais geral pelos matemáticos

M. Chipot e A. Rougirel, no artigo [6], através da seguinte abordagem variacional. Encontrar uma função $u(t,x)$ tal que:

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V); \quad u_t \in L^2(0,T;V'), \\ \langle u_t, \varphi \rangle + A(u,\varphi) = -a(q(u)) \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)dx \\ \qquad\qquad\qquad + b(q(u)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi(\sigma)d\sigma \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \varphi \in V, \\ u(0,.) = u_0(.) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } L^2(\Omega), \\ q(u) \in D \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } (0,T). \end{cases}$$

Para mostrar a existência de solução para este problema, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Além disso, usaremos técnicas consideradas usuais para mostrar que a solução obtida é única e máximal com relação ao tempo em que ela está definida. Mostraremos também um resultado de positividade para a integral da solução em $\mathbb{R}$.

No capítulo 4, estudaremos os mesmos resultados obtidos anteriormente para um sistema acoplado associado a P_0. A saber, consideraremos um sistema com acoplamento não linear no segundo membro da equação em P_0.

$$(S_a) \begin{cases} u_t - \Delta u = -\left(\displaystyle\int_\Omega v(t,x)dx \right)^p & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ v_t - \Delta v = -\left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx \right)^p & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_0, \\ \partial_n u(t,x) = \left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx \right)^q & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ \partial_n v(t,x) = \left(\displaystyle\int_\Omega v(t,x)dx \right)^q & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ u(0,x) = u_0; \quad v(0,x) = v_0; & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Estudamos a existência e unicidade de solução fraca para o sistema (S_a) e mostraremos a existência e unicidade da solução maximal com as mesmas hipóteses do problema (P_0).

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, estabeleceremos algumas notações, conceitos e resultados que serão de grande importância no decorrer do trabalho.

1.1 Espaços de Banach

Um espaço normado E é dito um espaço de Banach[1], se o mesmo for completo, isto é, se toda sequência de Cauchy converge em E.

1.1.1 O Espaço dual

Definição 1.1.1 *Denotemos por E' o conjunto das funções $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:*

$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ f$ *é linear e contínua*$\}$. *O conjunto E' é chamado o dual de E.*

1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Os espaços L^p serão de grande importância em todo o trabalho. Faremos algumas definições e mostraremos alguns resultados relevantes para o que se segue.

[1]Stefan Banach (1892-1945)

Adotaremos um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e identificamos funções mensuráveis que são iguais quase sempre. Dado $p \in \mathbb{R}$; $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como a classe das funções mensuráveis f tais que $|f|^p$ é integrável, e $L^\infty(\Omega)$ como a classe das funções mensuráveis f, tais que existe algum $M > 0$ para o qual $\mu(\{x : |f(x)| > M\}) = 0$.

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{f é mensurável e} \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty\},$$

e levando em conta ocaso em que $p = \infty$:

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{f é mensurável e } \exists M \geq 0; |f(x)| \leq M \quad q.s \text{ em } \Omega\}.$$

Definiremos também as normas: $\|.\|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, para $0 < p < \infty$ e $\|.\|_{+\infty}$, para $p = +\infty$, dadas respectivamente por:

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

e,

$$\|f\|_\infty := \inf\{c : |f(x)| \leq c \;\; q.s \text{ em } \Omega\}.$$

Resulta porém do modo como definimos estes espaços que, para $1 \leq p < \infty$, qualquer $f \in L^p(\Omega)$ está identificada com uma função mensurável que não toma nunca os valores $\pm\infty$. De fato, se $\|f\|_p < \infty$ para algum $1 \leq p < \infty$, então o conjunto dos pontos onde f toma valores $\pm\infty$ terá que ter medida nula. Assim, dados $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, faz sentido falar de $f \pm g$, considerando, se necessário, representantes de f e g que não tomem nunca os valores $\pm\infty$.
Se $1 \leq p \leq \infty$ denotaremos por q o número definido por:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \quad \text{se } 1 < p < \infty$

b) $q = 1, \;\text{ se }\; p = \infty \;\text{ e } q = \infty, \;\text{ se } p = 1.$

O número p é denominado *expoente conjungado* de q, sendo o mesmo dito para q com relação a p.

Outros espaços derivados dos espaços $L^p(\Omega)$ que são de grande importância em Análise, são os espaços $L^p_{loc}(\Omega)$, que são constituídos das funções (classes de funções) $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que para todo compacto $K \subset \Omega$

$$\int_K |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Um resultado demonstrado em [1], p. 29 é que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ em qualquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, outro também demonstrado em [1], p.74, é conhecido como lema de **Du Boys Reymound** que é muito utilizado para demonstrar unicidade de distribuições.

Lema 1.2.1 (Du Boys Reymound) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, com $\int u(x)\varphi(x)dx = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $u(x) = 0$ q.t.p. em Ω.*

Lema 1.2.2 (A Desigualdade de Young) *Se $1 < p < \infty$ e a, b são números reais não negativos então:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

e se $a^p = b^q$, então a igualdaded ocorrerá. Assim para todo $\varepsilon > 0$ teremos que

$$|a||b| \leq \frac{\varepsilon^p |a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{\varepsilon^q q}.$$

Demonstração: Se $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda \Longrightarrow \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda - 1})$ e se $\lambda - 1 < 0$ temos que:

- $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1$
- $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$.

Logo para $t \neq 1$, temos $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, de onde $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$ (a igualdade só é válida se t=1), se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por $\frac{a^p}{b^q}$. Por outro lado, se $b = 0$ o lema é trivial. ■

Lema 1.2.3 (Desigualdade de Holder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então $f, g \in L^1(\Omega)$ e :*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demonstração: Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem de modo imediato. Agora se $1 < p < \infty$ temos que:

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Dessa forma, temos que:
$\displaystyle\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{L^q}$, mostrando portanto, que $fg \in L^1(\Omega)$. Substituindo f por λf, $\lambda > 0$, segue-se que
$\displaystyle\int_\Omega |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{\lambda q}\|g\|^q_{L^q}$. Por outro lado, minimizando o segundo membro da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$, temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|f\|^{-1}_{L^p}\|g\|^{q/p}_{L^q}$, e o resultado segue. ■

No caso em que $p = 2$ temos também $q = 2$, se $f, g \in L^2(\Omega)$, então

$$\int |fg|d\mu \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Esta é a conhecida *Desigualdade de Cauchy-Schwarz.* O teorema seguinte estabelece algumas propriedades importantes dos espaços $L^p(\Omega)$ e pode-se encontrar sua demonstração em [1] e [3].

Teorema 1.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$, então*

a) *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach;*

b) *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo e uniformemente convexo;*

c) *Se $1 \leq p \leq \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável.*

O seguinte Lema estabelece um resultado central para conclusão de importantes teoremas de Análise, como por exemplo o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Lema 1.2.4 (Fatou) *: Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Teorema 1.2.2 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis em X. Suponha que:*

- *$(f_n)_n$ converge q.t.p para uma função real, mensurável, f.*
- *Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$.*

Então f é integrável e $\displaystyle\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu.$

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual, sua demonstração pode ser encontrada em [3] p.58.

Proposição 1.2.1 *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ convergindo para $u \in L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência de (u_k), ainda denotada por (u_k), tal que:*

i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$, *q.s em* Ω

ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, *q.s em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, *com* $h \in L^p(\Omega)$

Definição 1.2.1 (Convergência Fraca) *Sejam E um espaço de Banach e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então u_n comverge fraco para u, $u_n \rightharpoonup u$ quando $\langle \varphi, u_n\rangle \longrightarrow \langle \varphi, u\rangle, \ \forall \varphi \in E'$.*

Definição 1.2.2 (Convergência Fraca Estrela $\star$) *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Diz-se que $\varphi_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi$ fraco estrela se, e somente se, $\langle \varphi_n, u\rangle \longrightarrow \langle \varphi, u\rangle, \ \forall u \in E$.*

Enunciaremos agora o teorema da representação de Riesz, que relaciona todo elemento do dual de um espaço $L^p(\Omega)$ com um elemento do espaço $L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cuja demonstração poderá ser vista em [1].

Teorema 1.2.3 (Representação de Riez) *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^{p'}$ *tal que:*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf; \qquad \forall f \in L^p.$$

Além disso, $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}$.

Como consequência destes resultados temos as seguintes identificações:

- $L^2 \cong (L^2)'$
- $L^{p'} \cong (L^p)'$

Dizemos que uma sequência (φ_n) converge para φ em $L^p(\Omega)$ quando tivermos $\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável, para $1 < p < \infty$, é reflexivo.

O resultado seguinte é um importante lema cuja a demonstração pode ser encontrada em [19].

Lema 1.2.5 (Compacidade de Aubin-Lions) *Sejam* $1 < p_i < \infty, i = 0, 1$ *e* B_0, B, B_1 *espaços de Banach sendo que* B_0 *e* B_1 *são reflexivos tais que* $B_0 \subset\subset B \hookrightarrow B_1, \subset\subset$ *indica imersão compacta. Para* $0 < T < \infty$, *considere o espaço,*

$$W = \{w; w \in L^{p_0}(0, T; B_0) \ e\ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

com a norma, $\|u\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. *Então,*

1) *W é um espaço de Banach*

2) $W \subset\subset L^{p_0}(0, T; B)$.

Como consequência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_1)$, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subsequência $(u_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_{n_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.

Definição 1.2.3 *Seja H um espaço vetorial. Um produto interno (u, v) é uma forma bilinear $H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, definida positiva e simétrica, ou seja, $(u, v) \geq 0$ e $\forall u \in H$ e $(u, u) > 0$ se $u \neq 0$.*

Definição 1.2.4 *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto interno (u, v), e completo com relação a norma provinda desse produto interno.*

Exemplo 1.2.1 *O espaço $L^2(\Omega)$ dotado de um produto interno que pode ser definido por $(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$, é um espaço de Hilbert.*

Definição 1.2.5 *Seja H um espaço de Hilbert, uma forma bilinear dada por $A(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita:*

i) ***Contínua****, se existir uma constante positiva $M > 0$ tal que:*

$$|A(u, v)| \leq M|u|_H|v|_H \qquad \forall u, v \in H$$

ii) ***Coerciva****, se existir uma constante positiva $m > 0$ tal que:*

$$A(u, u) \geq m|u|_H^2 \qquad \forall u \in H.$$

O exemplo abaixo mostra uma forma bilinear contínua e coerciva, a demonstração de tal fato pode ser encontrada em [1].

Exemplo 1.2.2 *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$. A forma bilinear dada por $A(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ é contínua e coerciva sobre Ω.*

Definição 1.2.6 *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se de* ***base Hilbertiana*** *de H uma sequência de elementos (ω_n) de H tais que:*

i) $|\omega_n| = 1 \;\; \forall n, \;\; (\omega_n, \omega_m) = 0, \;\; \forall n, m, \;\; m \neq n;$

ii) *O espaço gerado pela (ω_n) é denso em H.*

Definição 1.2.7 *Seja X um espaço de Banach, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ é uma* ***base de Schauder*** *de X, se para cada $x \in X$ existir uma única sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x.$$

Note que na definição de base algébrica só é permitido somas finitas.

Mesmo que um espaço de Banach possua base de Schauder nem sempre é possível exibi-la, mas existem alguns espaços onde a prova da existência de base de Schauder é feita usando teoria de aproximação de operadores. Um fato logo concreto, de Análise Funcional, quando se fala em base de Schauder, é que se um espaço de Banach X possui uma base de Schauder, então o espaço X é separável, obviamente esse resultado é de grande praticidade, pois se X não for separável, então não se deve esperar que X possua uma base de Schauder.

1.3 Existência de Soluções Clássicas de EDO's

Nesta secção apresentaremos alguns fatos concernentes à existência de soluções de certas equações diferenciais ordinárias. As demonstrações podem ser encontrados em [12].

Seja $w(t,u)$ uma função escalar definida sobre um aberto conexo Ω, dizemos que uma função $v(t), a \leq t \leq b$, é uma solução para a *desigualdade diferencial*

$$v'_+(t) \leq w(t, v(t)) \tag{1.1}$$

onde $v'_+(t)$ é a derivada lateral direita de $v(t)$ sobre $[a,b)$, se a função $v(t)$ for contínua e satisfazer a desigualdade (1.1) acima sobre $[a,b)$.

O próximo teorema é um clássico resultado sobre desigualdades diferenciais, e sua demonstração pode ser encontrada no livro de Jack Hale [12] p.31.

Teorema 1.3.1 *Seja $w(t,u)$ uma função escalar contínua sobre o aberto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e tal que um dado problema de valor inicial qualquer associado à equação*

$$u' = w(t, u)$$

possua uma única solução. Se $u(t)$ for solução da equação diferencial acima para $a \leq t \leq b$, e $v(t)$ uma solução da desigualdade diferencial (1.1) sobre $a \leq t < b$ com $v(a) \leq u(a)$, então $v(t) \leq u(t)$ para $a \leq t \leq b$.

O problema que nos interessa nesta secção é o de estudar soluções para a equação abaixo sob determinadas condições,

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.2}$$

Definição 1.3.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ um conjunto aberto. Dizemos que a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de **Carathéodory** em D, se f é mensurável em t, para cada x fixado, contínua em x para cada t fixado e para todo conjunto compacto $K \subset D$, existir uma função integrável $g_{K(t)}$ tal que,*

$$|f(t, x)| \leq g_{K(t)}, \qquad (t, x) \in K.$$

O próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [12], p. 28, possui um papel importante para os seguintes capítulos deste trabalho.

Teorema 1.3.2 (Carathéodory) *Se D é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{N+1}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory em D, então para qualquer $(t_0, y_0) \in D$, existe uma solução de (1.2) tal que $x(t_0) = y_0$.*

1.4 O Teorema do Ponto Fixo de Schauder

O chamado Teorema do Ponto Fixo de Brouwer[2] afirma que toda função contínua (na topologia usual) de uma bola fechada unitária de $\mathbb{R}^N$, em si mesma, tem pelo menos um ponto fixo. Aqui a unicidade nem sempre pode ser garantida: pense no exemplo das rotações em $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo que passa pela origem, todo ponto ao longo do eixo de rotação é levado em si mesmo pela rotação e é, portanto, um ponto fixo da mesma. Nesta seção enunciaremos o teorema que é uma generalização do teorema do ponto fixo de Brouwer para espaços gerais de Banach, o chamado teorema do ponto fixo de Schauder[3], sua demonstração pode ser encontrada em vários livros clássicos de Análise Funcional como por exemplo [10], porém usaremos uma forma equivalente desse teorema, de demonstração que pode ser encontrada no livro de J. Conway [7] p.154.

Definição 1.4.1 *Sejam* $(X, \|\|_X)$ *e* $(Y, \|\|_Y)$ *espaços normados. Toda aplicação* $T : X \longrightarrow Y$ *é chamada de Operador, e o valor de* T *no ponto* $x \in X$ *é denotado por* Tx *ou* $T(x)$.

Definição 1.4.2 *Um operador* $T : X \longrightarrow Y$ *é dito limitado, se existe um número real positivo* c*, tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.4.3 *Um operador* $T : X \longrightarrow Y$ *é dito compacto, quando* $\overline{T(X)}$ *for um subconjunto compacto de* Y.

Definição 1.4.4 *Um operador* $T : X \longrightarrow Y$ *é dito contínuo no ponto* $x_0 \in X$*, se para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$*, tal que:*

$$\forall x \in X, \quad \|x - x_0\|_X < \delta \Longrightarrow \|Tx - tx_0\|_Y < \varepsilon.$$

Se T *for contínuo em todo* $x \in X$*, então dizemos que* T *é um operador contínuo.*

[2] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

[3] Juliusz Pawel Schauder (1899-1943)

Quando um operador $T : X \longrightarrow Y$ é limitado, podemos definir sua norma pela expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0 \right\}$$

Definição 1.4.5 *Sejam X e Y espaços de Banach, dizemos que um operador $T : X \longrightarrow Y$ é completamente contínuo, se T for contínuo e compacto.*

Teorema 1.4.1 (Ponto fixo de Schauder) *Seja K um subconjunto convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach X. Se $F : K \longrightarrow K$ for um operador completamente contínuo, então F possui um ponto fixo.*

O lema de Gronwall, que apresentaremos abaixo, possui várias aplicações na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais, sua demonstração pode ser encontrada no livro de Lawrence Evans [10]. Usamo-lo, por exemplo, para concluir a demonstração de um caso de unicidade de solução para o nosso problema de evolução.

Lema 1.4.1 (Lema de Gronwall, ou desigualdade de Gronwall)
Sejam $u : [t_0, T] \longrightarrow [0, \infty)$ uma função contínua e não-negativa, e suponha que existam duas constantes $\alpha, \beta \geq 0$ tais que valha

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} u(s)ds$$

para todo $t \in [t_0, T]$, então

$$u(t) \leq \alpha e^{(\beta(t-t_0))}; \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Em particular, $u(t)$ é limitada, e se $\alpha = 0$, então $u \equiv 0$.

1.5 Fragmentos da Teoria das Distribuições e dos Espaços de Sobolev

Introduziremos agora alguns fragmentos da teoria das **Distribuições** e dos **Espaços de Sobolev**, ferramentas matemáticas de grande importância para os trabalhos sobre a existência e unicidade de solução das equações diferenciais parciais. A apresentação desse assunto servirá para um efetivo entendimento do problema principal que será tratado no capítulo 2.

1.5.1 O Espaço das Funções Teste

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Chama-se *Suporte* de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp(\varphi)$, em símbolos

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \;\; \varphi(x) \neq 0\}} \;\text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula, fica também claro que nem sempre o suporte de uma função é subconjunto de seu domínio, e valem as seguintes relações:

- $supp(\varphi + \psi) \subset supp(\varphi) \bigcup supp(\psi)$
- $supp(\varphi\psi) \subset supp(\varphi) \bigcap supp(\psi)$
- $supp(\lambda\varphi) = \lambda supp(\varphi), \;\; \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$

Neste estudo, damos um destaque especial para as funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω, que sejam indefinidamente diferenciáveis. Com esse intuito definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis de suporte compacto contido em Ω. Os elementos do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados *funções teste* em Ω.

Exemplo 1.5.1 *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\;r > 0$, *denominamos por* $B_r(x_0)$ *a bola aberta de centro* x_0 *de raio* r, *isto é,* $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \; \|x - x_0\| < r\}$. *Se* $B_r(x_0) \subset \Omega$, *define-se* $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *por:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right); & se\ \|x-x_0\| < r \\ 0; & se\ \|x-x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar alguns funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.5.1 *Entendemos por um* ***multi-índice****, uma n-upla do tipo* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denotamos por* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial, de ordem* $|\alpha|$;

$$D^\alpha = \frac{|\alpha|}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}....\partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, ..., 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$. A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.5.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Uma sequência de funções teste $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando:

i) Existir um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que
$supp(\varphi) \subset K$ e $supp(\varphi_n) \subset K;\ \ \forall n \in K$

ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^n\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado *Espaço das funções teste.*

É importante observar e pode ser visto com mais detalhes em [1] p. 38, que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e além disso $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

1.5.3 Distribuições Escalares

O conceito de distribuição escalar vem com o objetivo de generalizar o significado da função Matemática. Denomina-se distribuição escalar sobre Ω, a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi); \ \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então teremos que $T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado pelos colchetes de dualidade $\langle T, \varphi\rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sequência $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com essa noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.5.2 *: Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral, restando apenas mostrar que T_u é contínua; seja dada uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ, então:

$$\begin{aligned}
|\langle T_u, \varphi_n\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_n - \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega u(x)(\varphi_n - \varphi)(x)dx\right| \\
&\leq \int |u(x)(\varphi_n - \varphi)(x)|dx \\
&\leq \sup|\varphi_n - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Pois, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ uniformemente. A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u".

Exemplo 1.5.3 *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

*é fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição. Tal distribuição é conhecida por **Distribuição de Dirac**.[4] Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

de fato, suponhamosm que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

tomando $\mu \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por, $\mu(x) = \|x - x_0\|^2\varphi(x)$, segue-se que:

$$\mu(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \mu \rangle = \int_\Omega u(x)\|x - x_0\|^2\varphi(x) = 0, \qquad \forall \mu \in \mathcal{D}(\Omega),$$

portanto, tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω, logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

[4] Em homenagem ao físico ingles Paul A.M. Dirac (1902-1984).

1.5.4 Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para elementos de $\mathcal{D}(\Omega)$. O fator que motiva o conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por Sobolev, se deve à fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear:

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observe que a aplicação:

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'$. Isto significa que:

$\lim\limits_{p\to\infty} T_p = T$ em $\mathcal{D}'$ então $\lim\limits_{p\to\infty} D^\alpha T_p = D^\alpha T$ em $\mathcal{D}'$.

Exemplo 1.5.4 *Seja u uma função real tal que:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x > 0 \\ 0 & se \;\; x < 0, \end{cases}$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$. Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$. De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_\infty^0 \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0, \quad \varphi > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

*essa função u é conhecida como função de **Heaviside**.*

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos como **Espaços de Sobolev.**

1.5.5 Espaços de Sobolev

Os **Espaços de Sobolev** formam uma classe fundamental de espaços para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, são subespaços dos espaços $L^p(\Omega)$ cujos elementos possuem derivadas, no sentido das distribuições, ainda nos espaços $L^p(\Omega)$, isto é, se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, p um número real tal que $1 \leq p \leq +\infty$ e m é um número inteiro não negativo, definimos o Espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, como o espaço vetorial dado por:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega);\ \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$$

onde D^α é a derivada no sentido das distribuiçõs.

Observação 1.5.2 *Quando dizemos que a derivada $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ de u é no sentido distribucional, significa que existe uma função $w = D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, tal que*

$$\int_\Omega w(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nos espaços de Sobolev, podemos definir uma norma que leva em conta, as derivadas das funções, esta norma é definida por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p},$$

onde $\|\|_p$ é a norma de $L^p(\Omega)$.

Observação 1.5.3 *Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert com produto interno definido por*

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$$

neste caso tal espaço é denotado por $H^m(\Omega)$.

O próximo resultado não será demonstrado aqui, porém sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 1.5.1 *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não negativo então*

a) *$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach;*

b) *Se $1 \leq p < \infty$, então $W^{m,p}$ é separável;*

c) *Se $1 < p < \infty$, então $W^{m,p}$ é uniformemente convexo.*

Lema 1.5.1 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2}(\Omega) \leq C|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

Observação 1.5.4 *Utilizando a desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

De fato, consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}$$

da desigualdade de Poincaré, obtém-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C)|\nabla v|^2_{L^2(\Omega)},$$

conclui-se da desigualdade acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.5.6 Os Espaços Temporais $L^p(a, b; X)$

Considere a, b números reais e X um espaço de Banach, munido de uma norma $\|.\|_X$, T um número real positivo e $\mathcal{X}_E$ a função caracteristica do conjunto E.

Definição 1.5.1 *Uma função $\varphi : (a, b) \longrightarrow X$ é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos.*

Seja $\varphi : (a, b) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{X}_{E_i} \varphi_i$$

onde cada $E_i \subset (a, b)$ é mensurável, i=1,2,....,k, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, i=1,2,......,k, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (a, b) \longrightarrow X$ é Bochner integrável, se existir uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

i) $(\varphi_n) \longrightarrow u$ em X, q.s em (a, b)

ii) $\displaystyle\lim_{k,m\to\infty} \int_a^b \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0,$

não é difícil ver que o limite da condição $ii)$ independe da escolha da sequência de funções, isto pode ser visto com mais detalhes em [21], p. 132. O próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [21], p. 133, relaciona a norma de uma função com sua Bochner integrabilidade.

Teorema 1.5.2 (Bochner) *Sejam X um espaço de Banach e $(S; B; \mu)$ um espaço de medida. Uma função fortemente mensurável $u : S \longrightarrow X$ é Bochner integrável se, e somente se $\|u(.)\|_X$ integrável em S.*

Neste caso, a integral de Bochner de u, é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_a^b u(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X. Uma função vetorial $u : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é fracamente mensurável quando a função numérica $t \longmapsto \langle \phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X; dizemos que u é fortemente mensurável quando u for limite quase sempre de uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \longmapsto \|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue. No decorrer do trabalho denotaremos por $L^p(a,b;X)$, $1 < p < \infty$, o espaço vetorial das classes de funções $u : [a,b] \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \longmapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lebesgue em $[a,b]$, munido da norma:

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(a,b;H)$ é também um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u,v)_{L^2(a,b;H)} := \int_a^b (u(s),v(s))_H ds$$

Por $L^\infty(a,b;X)$ representaremos o espaço de Banach das classes de funções $u : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$, essencialmente limitadas sobre (a,b), ou seja, existe $M > 0$ tal que $\|u(t)\|_X \leq M; t \in (a,b)$, munido da norma de limitação essencial.

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \inf\{M \in \mathbb{R}; \|u(t)\|_X \leq M; t \in (a,b)\}.$$

Os espaços $L^p(a,b;X), 1 \leq p \leq +\infty$ são espaços de Banach.

1.5.7 O Subespaço $H(a,b;X,X')$

Um espaço de grande importância neste trabalho será denotado por $H(a,b;X,X')$, trata-se, na verdade, de um subespaço de $L^2(a,b;X)$, dado pela seguinte definição.

Definição 1.5.2 *Seja X um espaço de Banach, definiremos agora uma notável classe de funções que formam o seguinte espaço,*

$$H(a,b;X,X') := \{u \in L^2(a,b;X);\ \textit{tal que}\ \ u_t \in L^2(a,b;X')\}.$$

A demonstração do seguinte lema pode ser encontrada em [4].

Lema 1.5.2 *Sejam $u,v \in H(a,b;X,X')$, então*

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t)\rangle dt + \int_a^b \langle v'(t), u(t)\rangle dt = (u(b),v(b)) - (u(a),v(a)).$$

Teorema 1.5.3 *Se $u \in H(a,b;X,X')$, então para todo $v \in X$.*

$$\frac{d}{dt}(u(.),v) = \langle u_t(.), v\rangle \quad \textit{em}\ \mathcal{D}'(a,b)$$

Um outro resultado importante onde a demonstração se encotra também em [4] é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 1.5.4 *O espaço $H(a,b;X,X')$ esta imerso continuamente em $C([a,b];X)$, ou seja, toda função de $H(a,b;X,X')$ é contínua.*

Capítulo 2

O Problema Parabólico Com Uma Equação

2.1 O Problema Modelo

Neste capítulo, estudaremos a questão de existência e unicidade de solução fraca para um Problema parabólico representado pelo modelo abaixo.

$$
(PM)\begin{cases}
u_t - \Delta u = -\left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1} & \text{em } \ (0,T)\times\Omega,\\
u(t,.) = 0 & \text{sobre } \ (0,T)\times\Gamma_0,\\
\partial_n u(t,.) = \left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_2} & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1,\\
u(0,.) = u_0(.) & \text{em } \ \Omega,\\
\displaystyle\int_\Omega u(.,x)dx \geq 0 & \text{sobre } \ (0,T).
\end{cases}
$$

Tal sistema pode ser visto como uma ferramenta matemática que descreve a difusão de calor em uma chapa metálica com geometria mista de fronteira, cuja modelagem foi discutida na introdução deste trabalho. A partir de agora faremos referência ao problema (PM), como o **problema modelo** associado a condição de calor. Uma solução para o problema (PM) pode ser entendida como uma função $u : (0,T)\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad T > 0$, que representa a temperatura, em um dado instante t, de um ponto $x \in \Omega$ e que satisfaça (PM). No problema (PM) admitiremos que, p_1 e p_2 são números reais maiores ou iguais a 1. T é um número real positivo, chamado de supremo do domínio temporal $[0,T]$, N é um inteiro maior ou igual a 1 e Ω um domínio conexo, limitado e Lipschitz de $\mathbb{R}^N$. Γ_0 e Γ_1 são dois subconjuntos disjuntos da fronteira Γ, mensuráveis com respeito a medida sobre Γ e satisfazendo $\overline{\Gamma}_0 \bigcup \overline{\Gamma}_1 = \Gamma$, $med(\Gamma_0) > 0$. Γ_0 é a parte isolada da fronteira, nesta parte não ocorre nenhuma passagem de energia termica, ou seja, a temperatura é fixada igual a 0. Γ_1 é a parte não isolada da fronteira, permitindo assim que o domínio Ω sofra uma perda de calor.

A **existência** de uma solução fraca para (PM) será feita via tecnica de ponto fixo e alguns resultados de Análise Funcional. Tal procedimento consiste em:

i) Obter uma formulação variacional para o problema modelo (PM), que será denominada de problema variacional associado a (PM) e denotada por (PV). Generalizando, logo após, para uma classe de problemas.

ii) Definir o operador ponto fixo $F : \mathcal{B} \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach, e $\mathcal{B}$ é uma bola fechada unitária de X.

iii) Mostrar que o operador F leva $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$.

iv) Mostrar que o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é compacto.

v) Mostrar que o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é contínuo.

Feito isso, será usado o teorema do ponto fixo de Schauder para concluir que a classe de problemas variacionais (PVG) possui uma solução.

A **unicidade** será feita graças a algumas estimativas. Será também mostrado que essa solução é máximal com relação ao tempo a qual esta definida.

2.2 Formulação Variacional Para o Problema (PM)

O método a qual tentaremos resolver o problema (PM) consiste em uma abordagem variacional. Seja φ uma função teste definida em Ω. Multiplicando a primeira equação[1] de (PM) por esta função teremos que,

$$u_t\varphi - \Delta u\varphi = -\left(\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1}\varphi,$$

integrando sobre Ω a igualdade acima obtemos,

$$\int_\Omega u_t\varphi dx - \int_\Omega \Delta u\varphi dx = -\left(\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1}\int_\Omega \varphi dx. \tag{2.1}$$

Da identidade de Green sabemos que,

$$\int_\Omega \Delta u\varphi dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + \int_\Gamma \partial_n u\varphi d\sigma$$

ou seja,

$$\int_\Omega \Delta u\varphi dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + \int_{\Gamma_0} \partial_n u\varphi d\sigma + \int_{\Gamma_1} \partial_n u\varphi d\sigma.$$

Admitindo agora a função teste φ como sendo nula sobre a parte Γ_0 de Γ, teremos que

$$\int_\Omega \Delta u\varphi dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + \int_{\Gamma_1} \partial_n u\varphi d\sigma,$$

subistituindo agora $\int_\Omega \Delta u\varphi dx$ na igualdade (2.1) temos,

$$\int_\Omega u_t\varphi dx - \left[-\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx + \int_{\Gamma_1} \partial_n u\varphi d\sigma\right] = -\left(\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1}\int_\Omega \varphi dx,$$

[1]Equação Parabólica $u_t - \Delta u = -\left(\int_\Omega u(t,x)dx\right)^{p_1}$

mas pela condição de Neumam que é estabelecida no problema (PM), se tem[2],

$$\int_{\Omega} u_t \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx - \left(\int_{\Omega} u(t,x)dx \right)^{p_2} \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma = - \left(\int_{\Omega} u(t,x)dx \right)^{p_1} \int_{\Omega} \varphi dx (2.2)$$

Sendo assim, considere agora as funções[3] reais contínuas $a, b : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde D é um intervalo de reta, definidas por,

$$\begin{array}{rcl} a \; : \; D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{p_1} \end{array}$$

e,

$$\begin{array}{rcl} b \; : \; D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{p_2} \end{array}$$

considere também o funcional $q : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por,

$$q(u) = \int_{\Omega} u(t,x)dx. \tag{2.3}$$

Teremos então da expressão (2.2) que,

$$\int_{\Omega} u_t \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = -a(q(u)) \int_{\Omega} \varphi dx + b(q(u)) \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma. \tag{2.4}$$

A equação (2.4) será aqui chamada de ***expressão fraca***, ou ***expressão variacional*** da equação parabólica dada no problema (PM), sendo assim uma função $u(t,x)$ que satisfaça a igualdade dada por (2.4) é dita ser uma ***solução fraca***, ou ***solução variacional***, para a tal equação parabólica.

No desenvolvimento variacional realizado sobre a equação parabólica do problema (PM) tomamos φ, como uma função teste, definida em Ω, se anulando na parte Γ_0 da fronteira Γ. Para que faça sentido as integrais da equação (2.4) e a condição de Dirichlet seja verificada consideremos o seguinte espaço funcional.

[2] O segundo membro da equação abaixo se explica pelo fato da integral $-\left(\int_{\Omega} u(t,x)dx \right)^{p_1}$ ser uma constante.

[3] A equação dada acima por (2.2) já induz a definição dada, de uma lei para a, b e para o funcional q.

$$V := \{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi \equiv 0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

com a norma $|\varphi|_V := (\int_\Omega |\nabla\varphi|^2)^{1/2}$. Da desigualdade de Poincaré temos que V esta continuamente imerso em $H^1(\Omega)$, (para detalhes veja [17]). Com relação a uma solução fraca para a equação parabólica do problema modelo (PM), buscaremos funções $u \in L^2(0,T;V)$, com $u_t \in L^2(0,T;V')$ tal que a igualdade variacional (2.4) seja verificada.

Assim, nosso trabalho em resolver (PM) reformula-se em resolver o seguinte problema variacional, denotado por (PV), encontrar uma solução $u(t,x)$ para o problema:

$$(PV)\begin{cases} u \in L^2(0,T;V), \text{ tal que } \ u_t \in L^2(0,T;V'), \\ \displaystyle\int_\Omega u_t\varphi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx = -a(q(u))\int_\Omega \varphi(x)dx \\ \qquad\qquad\qquad +b(q(u))\displaystyle\int_{\Gamma_1}\varphi(\sigma)d\sigma \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\varphi\in V, \\ u(0,.) = u_0(.) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } L^2(\Omega), \\ q(u) \in D \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } (0,T). \end{cases}$$

Uma função $u(t,x)$ que satisfaça o problema variacional (PV) acima, é dita uma ***Solução Fraca***, ou ***Solução Variacional*** para o problema modelo (PM). Nossos esforços se concentraram em encontrar uma tal função $u(t,x)$ que resolva o problema (PM) no sentido das distribuições.

Para generalizar o problema acima, será considerado uma classe mais geral de problemas variacionais.

Consideraremos um operador elíptico $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ dado por:

$$\mathcal{A}u = -\partial_j(a_{i,j}(x)\partial_i u + a_j(x)u) + a_0(x)u,$$

e ∂_η, $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)$, denotando a derivada normal associada ao operador $\mathcal{A}$, dada por,

$$\partial_\eta u = a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial .x_i}\eta_j + a_j\eta_j u,$$

$A(u,v)$ denotará uma forma bilinear sobre $V \times V$, **contínua** e **coerciva**, associada ao operador $\mathcal{A}$, dada por,

$$A(u,v) = \int_\Omega a_{i,j}(x)\partial_i u \partial_j v + a_j u \partial_j v + a_0(x) uv dx,$$

$a_{i,j}$ e a_i pertencem a $L^\infty(\Omega)$. Considere também que as duas funções reais contínuas a e b, definidas sobre um intervalo de reta D, possuam a seguinte propriedade. Existe um número real $p \geq 1$ e uma constante $C_0 > 0$ tal que,

$$|a(s)| \leq C_0(1 + |s|^{p/2}), \tag{2.5}$$

$$|b(s)| \leq C_0(1 + |s|^{p/2}), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Faremos referência às prorpiedades (2.5) e (2.6) como uma condição de crescimento para as funções a e b. A aplicação q será um funcional sobre $L^2(\Omega)$ globalmente Lipschitz contínuo, ou seja, existe uma constante $q_0 > 0$ tal que

$$|q(u) - q(v)| \leq q_0 |u - v|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Agora considere a seguinte classe de problemas que chamaremos de problema variacional generalizado (PVG), encontrar uma função $u(t,x)$ onde:

$$(PVG)\begin{cases} u \in L^2(0,T;V), \text{ tal que } \ u_t \in L^2(0,T;V'), & \\ \langle u_t, \varphi\rangle + A(u,\varphi) = -a(q(u)) \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)dx & \\ \qquad\qquad\qquad +b(q(u)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi(\sigma)d\sigma & \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \ \forall \varphi \in V, \\ u(0,.) = u_0(.) & \text{em } L^2(\Omega), \\ q(u) \in D & \text{sobre } (0,T). \end{cases}$$

2.3 O Operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow X$

Considere o espaço de Banach $X := L^p(0,T;L^2(\Omega))$ munido da norma

$$|u|_X := \left(\int_0^T |u(t)|^p_{L^2(\Omega)} dt \right)^{1/p}.$$

Seja $\mathcal{B}$ uma bola fechada unitária de X, e $F : \mathcal{B} \longrightarrow X$ um operador definido por

$$\begin{array}{rcl} F \;:\; \mathcal{B} & \longrightarrow & X \\ v & \longmapsto & u \end{array}$$

onde a imagem $F(v) = u$ é tomada como sendo uma solução do seguinte problema, que é uma linearização do problema (PVG), e que será denotado por (PVL)[4]

$$(PVL) \begin{cases} u \in L^2(0,T;V), \text{ tal que } \; u_t \in L^2(0,T;V'), \\ \langle u_t, \varphi \rangle + A(u,\varphi) = -a(q(v)) \displaystyle\int_\Omega \varphi dx \\ \qquad\qquad\qquad +b(q(v)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \; \forall \varphi \in V, \\ u(0,.) = u_0(.) \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } L^2(\Omega). \end{cases}$$

O trabalho em mostrar que o operador F esta bem definido se resume, agora, em mostrar que o problema (PVL) possui uma única solução u. E além disso esta solução $u \in X \bigcap C([0,T]; L^2(\Omega))$. De fato o operador F esta bem definido, pois para isto, considere o seguinte funcional.

$$\begin{array}{rcl} f_{v(t)} \;:\; V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & -(a \circ q)(v(t)) \displaystyle\int_\Omega \varphi dx + (b \circ q)(v(t)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} d\sigma, \end{array}$$

temos que claramente $f_{v(t)}$ pertence a V' para quase todo $t \in [0,T]$, daí

$$|f_{v(t)}\varphi| \leq \left| -(a \circ q)(v(t)) \int_\Omega \varphi dx \right| + \left| (b \circ q)(v(t)) \int_{\Gamma_1} d\sigma \right|,$$

logo,

$$|f_{v(t)}\varphi| \leq |(a \circ q)(v(t))| \left| \int_\Omega \varphi dx \right| + |(b \circ q)(v(t))| \left| \int_{\Gamma_1} d\sigma \right|,$$

$$|f_{v(t)}\varphi| \leq (|(a \circ q)(v(t))| + |(b \circ q)(v(t))|) \left| \int_\Omega \varphi dx \right|,$$

[4]O problema (PVL) é uma linearização do problema (PVG), mostraremos, via Teorema Variacional de Lions, que (PVL) possui uma única solução, fazendo assim de F um operador bem definido.

assim,

$$|f_{v(t)}\varphi| \leq \left(|(a \circ q)(v(t))| + |(b \circ q)(v(t))|\right) |\varphi|_V . \tag{2.8}$$

Mas da condição de crescimento associada às funções a e b juntamente com o fato de q ser globalmente Lipschitz contínuo teremos que para todo $v \in L^2(\Omega)$,

$$|a(q(v))| \leq c_0(1 + |q(v)|^{p/2}) \leq c_0(1 + (|q(0)| + q_0|v|_{L^2(\Omega)})^{p/2}),$$

logo,

$$|a(q(v))| \leq c_0 + (c_0^{2/p}(|q(0)| + q_0|v|_{L^2(\Omega)}))^{p/2},$$

ou seja,

$$|a(q(v))| \leq c_0 + (c_0^{2/p}|q(0)| + c_0^{2/p}q_0|v|_{L^2(\Omega)})^{p/2},$$

assim, para alguma constante $c_1 > 0$, conveniente, teremos que:

$$|a(q(v))| \leq c_1(1 + |v|^{p/2}_{L^2(\Omega)}). \tag{2.9}$$

Procedendo da mesma forma com $b(q(v))$, teremos que, para cada $v \in X$ o modulo do lado direito da equação do problema (PVL) é limitado por

$$c(1 + |v(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)})|\varphi|_V, \tag{2.10}$$

para alguma nova constante positiva c. Logo de (2.8) e (2.10) temos que,

$$|f_{v(t)}|^2_{V'} \leq c(|v(t)|^p_{L^2(\Omega)} + 1),$$

integrando a desigualdade acima entre 0 e T obtemos,

$$|f_v|^2_{L^2(0,T,V')} \leq c \int_0^T |v(t)|^p_{L^2(\Omega)} dt + cT = c|v|^p_X + cT. \tag{2.11}$$

Daí, $f_v \in L^2(0,T;V')$ (note que pela nossa hipótese a mensurabilidade em t de $t \longmapsto f_{v(t)}$ é facilmente estabelecida). Aplicando o teorema variacional de Lions dado em [9], capítulo XVIII, concluimos que o problema (PVL) possui uma única solução u. Sendo assim temos que, como uma consequência direta do teorema variacional de Lions, o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow X$ esta bem definido, ou seja, dado $v \in \mathcal{B}$, existe um único $u \in X$, tal que $F(v) = u$.

2.4 F Leva a Bola $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$.

Seja $T \in (0,\infty)$, $v \in \mathcal{B}$ e $u := F(v)$. Note inicialmente que a equação variacional de (PVL) também pode ser escrita como,

$$u_t + \mathcal{A}u = f_{v(.)} \;\text{ em }\; L^2(0,T;V'),$$

daí, para todo $w \in L^2(0,T;V)$, teremos que,

$$\langle u_t(.), w(.)\rangle + A(u(.), w(.)) = \langle f_v(.), w(.)\rangle \quad \text{em } L^1(0,T), \tag{2.12}$$

agora escolhendo $w := u$ na equação (2.12), teremos que

$$\langle u_t(.), u(.)\rangle + A(u(.), u(.)) = \langle f_{v(.)}, u(.)\rangle \quad \text{em } L^1(0,T), \tag{2.13}$$

logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + A(u(t), u(t)) = \langle f_v(t), u(t)\rangle, \quad \text{em } L^1(0,T), \tag{2.14}$$

assim da coercividade da forma bilinear $A(u,u)$, e da desigualdade de Young teremos de (2.14),

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + m|u|^2_V \leq \frac{1}{m}|f_v|^2_{V'}. \tag{2.15}$$

A expressão (2.15) nos permitirá obter valiosas estimativas para $|u|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}$ e $|u|_{L^2(0,T;V)}$. Integrando agora (2.15) sobre $[0,t]$, para $t \in [0,T]$ teremos que

$$|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} - |u(0)|^2_{L^2(\Omega)} + m|u|^2_{L^2(0,t;V)} \leq \frac{1}{m}|f_v|^2_{L^2(0,T;V')}, \tag{2.16}$$

por (2.11) e de posse que $v \in \mathcal{B}$, para uma nova constante $c > 0$, teremos de (2.16),

$$|u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + m|u|^2_{L^2(0,t;V)} \leq |u_0|^2_{L^2(\Omega)} + c(1+T), \quad \text{para } \ t \in [0,T].$$

Assim obtemos,

$$|u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \Big(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + c(1+T)\Big),^{1/2} \tag{2.17}$$

e,

$$|u|_{L^2(0,T;V)} \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\Big(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + c(1+T)\Big),^{1/2} \tag{2.18}$$

onde c é independente de T, u_0 e $v \in \mathcal{B}$.
De extrema importância é também obter uma estimativa para $|u|_X$ e $|v_t|_{L^2(0,T;V')}$, sendo assim apartir de (2.17) teremos,

$$|u|^p_X \leq |u|^p_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}T \leq \Big(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + c(1+T)\Big)^{p/2} T,$$

logo,

$$|u|_X \leq \Big(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + c(1+T)\Big)^{1/2} T^{1/p}. \tag{2.19}$$

E para fazer a outra estimativa, tome $\varphi \in V$, seguindo apartir de (2.13) teremos que,

$$\langle u_t, \varphi\rangle + A(u(t),\varphi) \leq |f_{v(t)}|_{V'}|\varphi|_V \quad \text{ em } \ L^1(0,T),$$

usando a continuidade da forma bilinear $A(u,\varphi)$ obtemos,

$$|\langle u_t, \varphi\rangle| \leq M|u(t)|_V|\varphi|_V + |f_{v(t)}|_{V'}|\varphi|_V,$$

$$|\langle u_t, \varphi\rangle| \leq (M|u(t)|_V + |f_{v(t)}|_{V'})|\varphi|_V,$$

logo teremos

$$|u_t|_{V'} \leq (M|u(t)|_V + |f_{v(t)}|_{V'}), \tag{2.20}$$

agora elevando (2.20) ao quadrado,

$$|u_t|^2_{V'} \leq M^2|u(t)|^2_V + |f_{v(t)}|^2_{V'} + 2M|u(t)|_V|f_{v(t)}|_{V'}, \tag{2.21}$$

e usando a desigualdade de Young na última parcela de (2.21) teremos a seguinte expressão,

$$|u_t|^2_{V'} \leq 2M^2|u(t)|^2_V + 2|f_{v(t)}|^2_{V'} \qquad \text{em} \;\; L^1(0,T). \tag{2.22}$$

Integrando entre 0 e T e usando as expressões dadas por (2.11) e (2.18), teremos que para uma constante C independente de $v \in \mathcal{B}$,

$$|u_t|_{L^2(0,T;V')} \leq C. \tag{2.23}$$

Observação 2.4.1 *Feito as estimativas acima, para u e u_t, consideraremos agora o seguinte espaço*

$$H(0,T;V,V') := \{u \in L^2(0,T;V);\ tal\ que\ \ u_t \in L^2(0,T;V')\},$$

este espaço munido da norma

$$\|u\|_{H(0,T;V,V')} = (\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u_t\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2} = \left(\int_a^b [\|u(t)\|^2_V + \|u_t(t)\|^2_{V'}]dt\right),^{1/2}$$

é uma importante classe de funções que segundo o teorema 1.5.4 esta continuamente imerso no espaço das funções contínuas $C([0,T];V)$, tratando-se ainda de um espaço de Hilbert.

Tomando agora $v \in \mathcal{B}$, $u := F(v)$, e de (2.19) sabemos que existe uma constante $c > 0$ independente de $|u_0|_{L^2(\Omega)}$, T, e $v \in \mathcal{B}$, tal que,

$$|u|_X \leq c\left(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + T + 1\right)^{1/2} T.^{1/p} \tag{2.24}$$

Assim para uma constante $c > 0$ conveniente, mostraremos que existe um único $T > 0$ tal que a função $G(T) = c(|u_0|_{L^2(\Omega)} + T + 1)^{1/2}T^{1/p} = 1$. De fato como $G(0) = 0$ e $G(1) \geq 1$, temos que pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), da continuidade de G, e do fato de que G é crescente em $[0, +\infty)$, existe um único $T > 0$ tal que:

$$G(T) = c(|u_0|^2_{L^2(\Omega)} + T + 1)^{1/2}T^{1/p} = 1, \tag{2.25}$$

com esta escolha de T e por (2.24), concluimos que $F(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

2.5 O Operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é Compacto

Seja $(v_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{B}$, e tome $u_n := F(v_n) \in H(0,T;V,V')$. Usando (2.18) e (2.23) é possível ver que $(u_n)_{n\geq 0}$ é limitada em $H(0,T;V,V')$. A imersão

de $H(0,T;V,V')$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ é compacta, assim concluimos que a subsequência $(u_n)_{n\geq 0}$ converge em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Agora mostraremos que a convergencia ocorre em $X := L^p(0,T;L^2(\Omega))$. Se $p \leq 2$ então $L^2(0,T;L^2(\Omega)$ esta continuamente imerso em X, o que prova o resultado. Se $p > 2$ então para todos inteiros não negativos n e m,

$$
\begin{aligned}
|u_n - u_m|_X^p &\leq \int_0^T |u_n - u_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{p-2} |u_n - u_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\
&\leq |u_n - u_m|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{p-2} |u_n - u_m|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
&\leq C|u_n - u_m|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2,
\end{aligned}
$$

de acordo com (2.17). Portanto, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge em X, logo o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é compacto.

2.6 O Operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é Contínuo

Seja $v \in X$, tome $(v_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{B}$ uma sequência tal que $v_n \longrightarrow v$ em X e $u := F(v), u_n := F(v_n)$, daí mostraremos que u é o único ponto de acumulação de $(u_n)_{n\geq 0}$, ou seja, mostraremos que $u_n \longrightarrow u$. Para todo $\varphi \in L^2(0,T;V)$, teremos através de (2.12) que,

$$
\begin{aligned}
\langle u_t, \varphi \rangle + A(u(t), \varphi) &= \langle f_{v(t)}, \varphi \rangle, && (2.26) \\
\langle u_{n_t}, \varphi \rangle + A(u_n(t), \varphi) &= \langle f_{v_n(t)}, \varphi \rangle \quad \text{em } L^1(0,T), && (2.27)
\end{aligned}
$$

subtraindo assim (2.27) de (2.26), e escolhendo $\varphi(.) := (u - u_n)(t, .)$ obteremos,

$$
\langle (u-u_n)_t, u-u_n \rangle + A((u-u_n)(t), (u-u_n)(t)) = \langle f_v - f_{v_n}, (u-u_n)(t) \rangle, \tag{2.28}
$$

e procedendo de forma análoga ao que foi feito nas estimativas em (2.15) e (2.16), seguido do uso de que $u(0,.) \equiv u_n(0,.)$, assim para cada $t \in (0,T)$ teremos,

$$
|(u-u_n)(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + m|u-u_n|_{L^2(0,t;V)}^2 \leq c|f_v - f_{v_n}|_{L^2(0,T;V')}^2. \tag{2.29}
$$

Mostraremos que o lado direito de (2.29) converge para 0 quando $n \longrightarrow \infty$, de fato temos que,

$$|(f_v - f_{v_n})(\varphi)| \leq \left|(a \circ q)v(t) \int_\Omega \varphi dx - (a \circ q)v_n(t) \int_\Omega \varphi dx\right| + \left|(b \circ q)v(t) \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma - (b \circ q)v_n(t) \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma\right|$$

$$|(f_v - f_{v_n})(\varphi)| \leq |(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)| \left|\int_\Omega \varphi dx\right| + |(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)| \left|\int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma\right|,$$

logo,

$$|(f_v - f_{v_n})(\varphi)| \leq (|(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)| + |(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|) \left|\int_\Omega \varphi dx\right|,$$

$$|(f_v - f_{v_n})(\varphi)| \leq (|(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)| + |(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|)|\varphi|_V,$$

ou seja,

$$|(f_v - f_{v_n})|_{V'} \leq |(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)| + |(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|, \quad (2.30)$$

e elevando (2.30) ao quadrado teremos que,

$$|(f_v - f_{v_n})|^2_{V'} \leq |(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)|^2 + |(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|^2 + 2|(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)||(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|,$$

daí usando a desigualdade de Young na terceira parcela do segundo membro da expressão acima, resultará que existe uma constante c positiva tal que,

$$|(f_v - f_{v_n})|^2_{V'} \leq c|(a \circ q)v(t) - (a \circ q)v_n(t)|^2 + c|(b \circ q)v(t) - (b \circ q)v_n(t)|^2, \tag{2.31}$$

agora integrando (2.31) com $t \in [0, T]$ teremos que,

$$\begin{aligned} |f_v - f_{v_n}|_{L^2(0,T;V')} &\leq c \int_0^T [a \circ q(v(t)) - a \circ q(v_n(t))]^2 dt \\ &+ c \int_0^T [b \circ q(v(t)) - b \circ q(v_n(t))]^2 dt. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Além disso $v_n \longrightarrow v$ em X, assim

$$|(v - v_n)(t)|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \qquad \text{em } L^p(0, T).$$

Da proposição 1.2.1 temos que existe uma função $h \in L^p(0, T)$ tal que,

$$|v_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leq h(t) \quad \text{para } t \in (0, T), \tag{2.33}$$

e,

$$v_n(t) \longrightarrow v(t) \quad \text{em } L^2(\Omega) \qquad \text{para } t \in (0, T).$$

Temos também que da continuidade das funções a e b, e de (2.7), a função $a \circ q$ é contínua sobre $L^2(\Omega)$. Assim

$$(a \circ q(v(t)) - a \circ q(v_n(t)))^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{para } t \in (0, T), \tag{2.34}$$

mas de (2.9) e do resultado visto em (2.33) teremos que,

$$\begin{aligned} |a \circ q(v(t)) - a \circ q(v_n(t))| &\leq |a(q(v(t)))| + |a(q(v_n(t)))| \\ &\leq c(1 + |v(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)} + |v_n(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq c(1 + |v(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)} + h^{p/2}(t)). \end{aligned}$$

Assim pelo uso da desigualdade de Young no segundo membro da desigualdade acima obtemos que,

$$\begin{aligned}
|a \circ q(v(t)) - a \circ q(v_n(t))|^2 &\leq c^2(1 + |v(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)} + |v_n(t)|^{p/2}_{L^2(\Omega)})^2 \\
&\leq 4c^2(1 + |v(t)|^p_{L^2(\Omega)} + h^p(t)).
\end{aligned}$$

Usando (2.34), a estimativa dada acima e o fato de que a função

$$\mu(t) = 4c^2(1 + |v(t)|^p_{L^2(\Omega)} + h^p(t))$$

esta em $L^1(0,T)$ e independe de n, concluimos pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue que,

$$\int_0^T [a \circ q(v(t)) - a \circ q(v_n(t))]^2 dt \longrightarrow 0, \qquad \text{quando } n \longrightarrow +\infty$$

procedendo de forma análoga com a função b e usando as relações dadas por (2.29) e (2.32) concluiremos que

$$\sup_{[0,T]} |u_n - u(t)|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, \qquad \text{quando } n \longrightarrow \infty. \tag{2.35}$$

Mas como a convergência em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ implica a convergência no espaço $X := L^p(0,T;L^2(\Omega))$, segue que $u_n \longrightarrow u$ em X, quando $n \longrightarrow +\infty$. Concluimos assim que o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é contínuo.

De posse do fato de que o operador $F : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ é completamente contínuo, ou seja, compacto e contínuo, já é possível usar o teorema 1.4.1, do ponto fixo de Schauder, para concluir que o problema,

$$(PVG)\begin{cases}
u \in H(0,T;V,V'), & \\
\langle u_t, \varphi\rangle + A(u,\varphi) = -a(q(u)) \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)dx & \\
\qquad\qquad + b(q(u)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi(\sigma)d\sigma & \text{em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \varphi \in V, \\
u(0,.) = u_0(.) & \text{em } L^2(\Omega), \\
q(u) \in D & \text{sobre } (0,T).
\end{cases}$$

possui solução, ou seja, existe uma solução fraca para o problema modelo (PM).

2.7 Unicidade

Como o Teorema 1.4.1, do ponto fixo de Schauder, não nos garante a unicidade da solução, mostraremos agora um resultado de unicidade para a função u solução do problema (PVG) através de algumas estimativas, para isto, precisaremos de uma hipótese um pouco mais forte a respeito da continuidade das funções a e b, assumiremos que

$$\text{As funções } a \text{ e } b \text{ são localmente Lipschitz contínuas sobre } \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Isto é, para algum intervalo limitado $[-M, M] \in \mathbb{R}$, teremos,

$$|a(s) - a(r)| \leq C(M)|s - r| \tag{2.37}$$

e,

$$|b(s) - b(r)| \leq C(M)|s - r|, \tag{2.38}$$

$\forall (s, r) \in [-M, M]^2$, onde $C(M)$ é uma constante positiva.

Sejam u e v duas soluções para o problema (PVG). Tomando a diferença entre as expressões variacionais de (PVG), para u e para v, $\forall \varphi \in L^2(0, T; V)$ temos que,

$$\langle (u-v)t, \varphi\rangle + A(u-v, \varphi) = -[a\circ q(u(t)) - a\circ q(v(t))] \int_\Omega \varphi dx + [b\circ q(u(t)) - b\circ q(v(t))] \int_{\Gamma_1} \varphi d\sigma,$$

em $L^1(0, T)$. E escolhendo $\varphi(.) = (u - v)(t, .)$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)} + m|(u-v)(t)|^2_V &\leq c|a\circ q(u(t)) - a\circ q(v(t))||u-v|_V \\ &+ c|b\circ q(u(t)) - b\circ q(v(t))||u-v|_V. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young teremos claramente que o segundo membro da expressão acima é limitado por

$\frac{c^2}{2m}(a \circ q(u(t)) - a \circ q(v(t)))^2 + \frac{c^2}{2m}(b \circ q(u(t)) - b \circ q(v(t)))^2 + m|(u-v)(t)|_V^2$.
Assim, para uma nova constante c,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c(a \circ q(u(t)) - a \circ q(v(t)))^2 \\
&+ c(b \circ q(u(t)) - b \circ q(v(t)))^2. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Definindo $M := |u|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + |v|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$. Temos que M é finito; assim por (2.7)

$$|q(u(t))| \leq |q(0)| + q_0|u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |q(0)| + q_0 M =: R_0$$

e

$$|q(v(t))| \leq R_0.$$

Usando agora (2.37) temos que,

$$|a(q(u(t))) - a(q(v(t)))| \leq C(R_0)|q(u(t)) - q(v(t))| \leq C(R_0)q_0|(u-v)(t)|_{L^2(\Omega)}.$$

De forma análoga ao que foi feito para obter a estimativa acima se faz também para obter uma estimativa para $|b(q(u(t))) - b(q(v(t)))|$, e juntamente com a expressão (2.39) se consegue uma constante C positiva tal que,

$$\frac{d}{dt}|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.40)$$

Integrando (2.40) em $[0,t]$, para $t \in [0,T]$ e usando o fato de que $(u-v)(0,.) = 0$ em $L^2(\Omega)$ teremos,

$$|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T |(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt = 0 + C\int_0^T |(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)}dt \qquad (2.41)$$

usando agora o Lema de Gronwall em (2.41) obtemos que,

$$|(u-v)(t)|^2_{L^2(\Omega)} \equiv 0 \qquad \forall t \in [0,T].$$

Concluindo assim o resultado de unicidade de solução para o problema (PVG).

2.8 Solução Maximal

De uma forma inicial, quando se trata de algum problema de evolução vinculado a equação do calor, tem-se logo um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com uma certa fronteira denotada por Γ, estabelecendo-se assim um domínio do tipo cilindro $Q = \Omega \times [0,T)$ de lateral dada por $\pi = \Gamma \times [0,T); T > 0$, e se considera logo o seguinte.
Encontrar uma função $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ em Q

2) $u = 0$ sobre π

3) $u(x,0) = u_0$ em Ω,

onde $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o chamado operador laplaciano, e $u_0(x)$ é uma função dada.
A equação (1) chama-se equação do calor, pois pode modelar a distribuição de temperatura em um domínio Ω no instante t. A equação do calor juntamente com suas variáveis se relaciona a numerosos fenômenos de difusão.[5] A função $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação espacial e temporal, ou seja, evolui também com o tempo, isso quer dizer que para cada $t \in [0,T)$ ocorre uma atuação temporal. Daí é natural algumas observações, visto que se $T \to +\infty$ a função u pode também ir para o infinito, logo não seria mais uma solução, assim quanto máximo pode ser o supremo temporal T para que a função u ainda continue solução do nosso problema ? Esse valor de T é chamado tempo de **Blow-up** do problema. Sendo assim podemos pensar na seguinte definição.

Definição 2.8.1 *Seja um intervalo $J \subset [0,+\infty)$ contendo o zero. Uma função $u : J \longrightarrow L^2(\Omega)$ é chamada de **Solução Maximal no Tempo**, para o problema (PVG), se*

i) *u for uma solução para (PVG) para todo $T > 0$ tal que $[0,T] \subset J$,*

ii) *Não existir solução v para o problema (PVG) em um domínio temporal $[0,T'] \supset J,\ [0,T'] \neq J$ e $v \equiv u$ sobre J.*

[5] A propagação de calor é apenas um exemplo dentre vários.

A solução maximal u é uma solução definida em um domínio temporal de maior amplitude possível, qualquer extensão para um domínio temporal de amplitude maior, se existir, não será solução.

Proposição 2.8.1 *Seja u uma solução para o problema (PVG) em $[0,T]$. Então existe uma função w que estende u e que é uma solução para o problema (PVG) em $[0,T+T_0]$, onde T_0 é o único número positivo tal que,*

$$c(|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + T_0 + 1)^{1/2} T_0^{1/p} = 1. \tag{2.42}$$

c é uma constante positiva.

Demonstração: De acordo com o que foi feito, sabemos que existe uma solução v para o problema,

$$\begin{cases} v \in H(0,T_0;V,V'), \\ \langle v_t, \varphi\rangle + A(v,\varphi) = -a \circ q(v) \displaystyle\int_\Omega \varphi(x)dx \\ \qquad\qquad\qquad +b \circ q(v) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi(\sigma)d\sigma \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,T_0),\ \forall \varphi \in V, \\ v(0,.) = u(T,.) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Então a função w definida por,

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } 0 \le t \le T, \\ v(t-T) & \text{se } T \le t \le T+T_0, \end{cases}$$

é obviamente uma extensão de u e pertence ao espaço $L^2(0,T+T_0;V)$. Além disso, através do lema abaixo, é dado uma prova de que a função w pertence ao espaço $H(0,T+T_0;V,V')$, sua demonstração pode ser encontrada na tese de A. Rougirel [22]. Sendo assim a função w é uma solução para (PVG) em $[0,T+T_0]$.

■

Lema 2.8.1 *Seja $0 < T < T'$, $w \in L^2(0, T'; V)$ e denote por u e v as restrições de w para $(0, T)$ e (T, T'), respectivamente. Além disso suponha que*

i) $u \in H(0, T; V, V')$,

ii) $v \in H(T, T'; V, V')$,

iii) $w \in C([0, T']; L^2(\Omega))$.

Então $w \in H(0, T'; V, V')$.

Mostraremos agora que o problema variacional (PVG) possui uma única solução maximal no tempo, em um domínio temporal $[0, T_{max})$.

Teorema 2.8.1 *O problema variacional (PVG), sob as mesmas condições, possui uma única solução maximal.*

Demonstração:

Para o caso de unicidade, seja u e v duas soluções maximais definidas sobre J e J' respectivamente. Sem perda de generalidade podemos assumir que $J \subset J'$, pela condição i) da definição 2.8.1, u e v são soluções para (PVG) em $[0, T]$ para todo $[0, T] \subset J$. Assim do resultado de unicidade de solução para o problema variacional, $u \equiv v$ sobre J. Investigaremos agora a questão da existência de solução maximal para o problema (PVG). Fixando $u_0 \in L^2(\Omega)$, tem-se que, pelo resultado de existência de solução obtido para (PVG), o conjunto

$$\{T > 0 : (PVG) \text{ possui solução em [0,T]}\},$$

é um intervalo não vázio. Seja então T_{max} o limite superior desses valores de T, considere também $u : [0, T_{max}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ uma função tal que para cada $t \in [0, T_{max})$, $u(t)$ é o valor no ponto t da solução do problema (PVG) em $[0, t]$. Note que u esta bem definida, em $[0, T_{max})$, devido o resultado de unicidade que foi obtido. E por último afirmamos que a função u é uma solução maximal. De fato a condição i), da definição 2.8.1, é diretamente satisfeita pela forma como u foi construida. Suponha agora que a condição ii) não seja válida, então existe

$[0, T'] \supset [0, T_{max})$, com $[0, T'] \neq [0, T_{max})$ e v uma solução para (PVG) em $[0, T']$, tal que v coincida com u sobre $[0, T_{max})$. Temos então que v estende u sobre a direita de $[0, T_{max})$, e isto contradiz a escolha que tomamos para T_{max}.

■

Capítulo 3

Um Resultado de Positividade para a Integral.

Nesta capítulo mostraremos sobre um resultado de positividade para a integral da solução do problema (PM), em $\mathbb{R}$. Assumiremos que $N = 1$ e que $\Omega := (0,l) \subset \mathbb{R}$ onde $l \in (0,+\infty)$.

Consideraremos agora o problema uni-dimensional.

$$(PM)\begin{cases} u_t - u'' = -a(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx) & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,.) = 0 & \text{sobre } (0,T), \\ u'(t,l) = b(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx) & \text{sobre } (0,T), \\ u(0,.) = u_0(.) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

Independente da solução u do problema acima ser negativa ou positiva em $(0,T)\times\Omega$, mesmo fixando $u_0 > 0$, ou $u_0 < 0$ sobre Ω, a sua integral $\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx$ é sempre positiva. Este Fato foi confirmado pelo seguinte teorema.

Teorema 3.0.2 *Assumindo que*

i) $\Omega := (0,l)$ *com* $l \in (0, \frac{3\pi}{10}]$,

ii) *As funções a e b satisfazem (2.5), (2.6) e (2.36)*

iii) *Para todo* $s > 0$, $a(s) \le b(s)$ *e* $b(s) \ge 0$,

iv) *A condição inicial* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $u_0 \ge 0, u_0 \ne 0$ *quase sempre em* Ω.

Então a integral da solução variacional maximal do problema (PM) é positiva em $[0, T_{max})$.

Demonstração:

Seja $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ uma base Hilbertiana de $L^2(\Omega)$ definida por

$$\begin{cases} -\varphi_k'' = \lambda_k \varphi_k & \text{em } \Omega, \\ \varphi_k(0) = 0, & \varphi_k'(l) = 0, \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi_k dx > 0, & |\varphi_k|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Assim temos que

$$\lambda_k = \frac{\pi^2}{4l^2}(2k-1)^2, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\sqrt{\lambda_k}x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\frac{\pi}{2l}(2k-1)x). \tag{3.1}$$

Denotaremos por u a solução variacional máximal para o problema $(P1, u_0)$(veja a definição (3.3.1)) e por T um número real em $(0, T_{max(u_0)})$. Fazendo $\varphi = \varphi_k$ na forma variacional de $(P1, u_0)$, obteremos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(t)\varphi_k dx\right) + \left(\int_\Omega u'(t)\varphi_k' dx\right) = -a\left(\int_\Omega u(t)dx\right)\int_\Omega \varphi_k dx + b\left(\int_\Omega u(t)dx\right)\varphi_k(l),$$

em $L^1(0,T)$. Agora, desde que φ_k seja uma autofunção, esta equação pode ser dada também por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega u(t)\varphi_k dx\right) + \lambda_k \int_\Omega u(t)\varphi_k dx &= -a\left(\int_\Omega u\right)\int_\Omega \varphi_k dx \\ &+ b\left(\int_\Omega u\right)\varphi_k(l), \end{aligned} \tag{3.2}$$

em $C([0,T])$. Desde que $u_0 \geq 0$ e $u_0 \neq 0$, teremos que

$$\int_\Omega u_0 dx > 0.$$

Usando um argumento de continuidade, o teorema pode ser provado se mostrarmos que para cada t_0 pertencente a $[0, T_{max})$ e satisfazendo

$$\int_\Omega u(t,x)dx > 0, \quad \forall t \in [0,t_0), \tag{3.3}$$

tivermos

$$\int_\Omega u(t_0,x)dx > 0.$$

Para um t_0 satisfazendo (3.3) e tendo iii),

$$a\left(\int_\Omega u(t)dx\right) \leq b\left(\int_\Omega u(t)dx\right) \quad \forall t \in [0,t_0].$$

Assim definindo

$$u_k(t) := \int_\Omega u(t)\varphi_k dx$$

e,

$$D(\varphi_k) := \varphi_k(l) - \int_\Omega \varphi_k dx = \sqrt{\frac{2}{l}}\left((-1)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right), \tag{3.4}$$

obteremos por (3.33), desde que $\int_\Omega \varphi_k dx > 0$, por iii),

$$u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) \geq b\left(\int_\Omega u(t)dt\right) D(\varphi_k), \quad k = 1,2,....,\forall t \in [0,t_0]. \tag{3.5}$$

Seja $v_k : [0, T_{max}(u_0)) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução para o problema

$$v_k'(t) + \lambda_k v_k(t) = b\left(\int_\Omega u(t)dt\right) D(\varphi_k), \tag{3.6}$$

$$v_k(0) = u_{0_k}, \tag{3.7}$$

onde u_{0_k} denota a k^{th} coordenada da condição inicial; isto é

$$u_{0_k} = \int_\Omega u_0(x)\varphi_k(x)dx.$$

Vemos facilmente que

$$u_k(t) \geq v_k(t), \qquad \forall t \in [0, t_0],\ \forall k = 1, 2...... \tag{3.8}$$

Mostraremos agora que $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t_0) \displaystyle\int_\Omega \varphi_k dx$ é positivo. Por (3.37)-(3.38), deduzimos a seguinte representação de v_k:

$$v_k(t) = e^{-\lambda_k t} u_{0_k} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} (\int_\Omega u(s)dx) ds D(\varphi_k). \tag{3.9}$$

Para todo inteiro $n \geq 1$, considere a série de funções

$$S_n(t) := \sum_{k=1}^{n} v_k(t) \int_\Omega \varphi_k dx,$$

definida sobre $[0, T_{max}(u_0))$. Com a notação

$$E_k := D(\varphi_k) \int_\Omega \varphi_k dx = \frac{2}{l} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\lambda_k}} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \tag{3.10}$$

e,

$$I_k := \int_0^{t_0} e^{-\lambda_k (t_0 - s)} b(\int_\Omega u(s)dx) ds,$$

onde escrevemos $S_n(t_0)$ na forma

$$S_n(t_0) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t_0} u_{0_k} \int_\Omega \varphi_k dx + \sum_{k=1}^{n} I_k E_k =: S_n^1(t_0) + S_n^2(t_0), \tag{3.11}$$

onde $S_n^1(t_0)$ e $S_n^2(t_0)$ são definidas por caminhos obvios. Primeiramente mostraremos que para todo inteiro $n \geq 2, S_n^2(t_0)$ é não negativo. Para cada inteiro $k \geq 1$, veja (3.10) e (3.1)

$$E_k + E_{k+1} = \frac{\pi^2}{2l^4 \lambda_k \lambda_{k+1}} (\pi(4k^2 - 1) - 2(4k^2 + 1)l).$$

Assim

$$l \leq \frac{3\pi}{10} \Longrightarrow E_k + E_{k+1} \geq 0 \qquad \forall k \geq 1. \tag{3.12}$$

Escrevemos $S_n^2(t_0)$ na forma

$$S_n^2(t_0) = \sum_{k=1}^{n-1} I_k E_k + I_{k+1} E_{k+1}.$$

Usando o fato de que para todo $t \in [0, t_0]$, $\int_\Omega u(t)dx \geq 0$ e pela hipótese iii), deduzimos

$$b(\int_\Omega u(.)dx) \geq 0 \quad \text{em } [0, t_0].$$

Assim, $k \longmapsto I_k$ decresce. Para todo inteiro $k \geq 1$,

$$I_{k+1}E_{k+1} \geq I_k E_{k+1}, \tag{3.13}$$

desde que $E_{k+1} \leq 0$. Pelas expressões (3.12), (3.13) e a positividade de I_k, teremos que $I_k E_k + I_{k+1}E_{k+1} \geq I_k(E_k + E_{k+1}) \geq 0$. Assim,

$$S_n^2(t_0) \geq 0, \qquad \forall n = 2, 4, ... \tag{3.14}$$

Considere agora a soma $S_n^1(t_0)$. Sabemos que a solução variacional para o problema

$$\begin{cases} w_{n_t} - w_n'' = 0 & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega \\ w_n(t, 0) = 0, \qquad w_n'(t, l) = 0 & \text{sobre } (0, +\infty) \\ w_n(0, x) = \sum_{k=1}^n u_{0_k} \varphi_k & \text{em } \Omega \end{cases}$$

converge em $C([0, t_0], L^2(\Omega))$ com relação a solução variacional w para o problema

$$\begin{cases} w_t - w'' = 0 & \text{em } (0, +\infty) \times \Omega \\ w(t, 0) = 0, \qquad w'(t, l) = 0 & \text{sobre } (0, +\infty) \\ w(0, x) = u_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Agora, é claro que

$$w_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t} u_{0_k} \varphi_n.$$

Assim, pela continuidade da integral,

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t_0} u_{0_k} \int_\Omega \varphi_k dx \longrightarrow \int_\Omega w(t_0) dx, \qquad \text{quando } n \longrightarrow +\infty.$$

Com relação a u, e pelas expressões (3.8), (3.11), (3.14),

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t_0) \int_\Omega \varphi_k dx \geq \sum_{k=1}^{n} v_k(t_0) \int_\Omega \varphi_k dx = S_n(t_0) \geq \sum_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k t_0} u_{0_k} \int_\Omega \varphi_k dx.$$

Passando o limite, obtemos que

$$\int_\Omega u(t_0) dx \geq \int_\Omega w(t_0) dx.$$

Agora, desde que $u_0 > 0$ em todo Ω e $u_0 \neq 0$, podemos pelo princípio do maximo $w(t_0) > 0$ em todo Ω. Em particular, $\displaystyle\int_\Omega u(t_0) dx > 0$. O que completa a prova do teorema. ■

Capítulo 4

O Sistema Acoplado

4.1 O Sistema Acoplado Formado Pelas Equações do Problema (PM)

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência e unicidade de Solução Fraca para o seguinte sistema modelo acoplado de evolução (PMA), dado abaixo:

$$(PMA)\begin{cases} u_t - \Delta u = -\left(\displaystyle\int_\Omega v(t,x)dx\right)^p & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ v_t - \Delta v = -\left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^p & \text{em } (0,T)\times\Omega, \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_0, \\ \partial_n u(t,x) = \left(\displaystyle\int_\Omega u(t,x)dx\right)^q & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ \partial_n v(t,x) = \left(\displaystyle\int_\Omega v(t,x)dx\right)^q & \text{sobre } (0,T)\times\Gamma_1, \\ u(0,x) = u_0; \quad v(0,x) = v_0; & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Onde p, q são números reais maiores ou iguais a 1. Aqui Ω denota um aberto, conexo, limitado e lipschitz de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira Γ. Γ_0 e Γ_1 são dois subconjuntos disjuntos da fronteira e mensuráveis com respeito à medida de Lebesgue (m), satisfazendo $\Gamma = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1$. Γ_0 é a parte isolada da fronteira, nesta parte não ocorre nenhuma passagem de energia térmica, ou seja, a temperatura é fixada igual a 0. Γ_1 é a parte não isolada da fronteira, permitindo assim que o domínio Ω sofra uma perda de calor.

4.2 Existência de Solução para o Sistema Acoplado

Considere agora o seguinte espaço funcional:

$$V = \{u \in H^1(\Omega); \quad u \equiv 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0\}$$

Definição 4.2.1 *Uma* ***Solução Fraca*** *para o sistema acoplado* (PMA) *é um par de funções (u(t,x); v(t,x)) tais que:*

i) $(u, v) \in [L^2(0, T; V) \cap C([0, T], L^2(\Omega))]^2$;

ii) $(u_t, v_t) \in [L^2(0, T, V')]^2$;

iii) $u(0, x) = u_0 \in L^2(\Omega)$, *e* $v(0, x) = v_0 \in L^2(\Omega)$;

iv) *As equações variacionais abaixo são verificadas:*

$$\textbf{a)}\ \langle u_t, \varphi_1\rangle + A(u, \varphi_1) = -a(q(v)) \int_\Omega \varphi_1(x)dx + b(q(u)) \int_{\Gamma_1} \varphi_1(\sigma)d\sigma,$$

$$\textbf{b)}\ \langle v_t, \varphi_2\rangle + A(v, \varphi_2) = -a(q(u)) \int_\Omega \varphi_2(x)dx + b(q(v)) \int_{\Gamma_1} \varphi_2(\sigma)d\sigma,$$

no espaço $\mathcal{D}'(0, T)$, *para toda* $\varphi_1, \varphi_2 \in V$, *com* $A(u, \varphi_1) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_1 dx$, *uma forma bilinear contínua e coerciva sobre o espaço* $V \times V$.

Teorema 4.2.1 *Sob as hipóteses anteriores existe uma solução fraca para o sistema acoplado* (PM).

Demonstração:

Seja $\{w_j\}_{j=1}^{+\infty}$ uma base de Schauder do espaço V, e $V_m = span\{w_1, w_2, ...w_m\}$, queremos achar funções

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \Theta_i(t) w_i; \qquad u'_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \Theta'_i(t) w_i;$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(t) w_i; \qquad v'_m = \sum_{i=1}^{m} \Phi'_i(t) w_i;$$

tais que o seguinte problema aproximado (PA) seja satisfeito:

$$(PA) \begin{cases} \langle u'_m, \varphi_1 \rangle + A(u_m, \varphi_1) = -a(q(v_m)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x) dx \\ \qquad\qquad +b(q(u_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_1(\sigma) d\sigma, \\ \langle v'_m, \varphi_2 \rangle + A(v_m, \varphi_2) = -a(q(u_m)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_2(x) dx \\ \qquad\qquad +b(q(v_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_2(\sigma) d\sigma, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in V_m, \\ (u_m(0), v_m(0)) = (u_{0m}, v_{0m}) \qquad \text{em} \;\; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{cases}$$

Como $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$, então

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \Theta_{0i} w_i \longrightarrow u_0,$$

e,

$$v_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \Phi_{0i} w_i \longrightarrow v_0.$$

Agora tomando $\varphi_1 = \varphi_2 = w_j, \;\; 1 \leq j \leq m$; teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Theta'_i(x) \langle w_i, w_j \rangle + \sum_{i=1}^{m} \Theta_i(x) \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle = -a(q(v_m)) \int_\Omega w_j dx \\ \qquad\qquad +b(q(u_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Phi'_i(x) \langle w_i, w_j \rangle + \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(x) \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle = -a(q(u_m)) \int_\Omega w_j dx \\ \qquad\qquad +b(q(v_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma, \\ \Theta(0) = \Theta_{0m} = [\Theta_{0i}]_{i=1}^m, \\ \Phi(0) = \Phi_{0m} = [\Phi_{0i}]_{i=1}^m, \quad i = 1, ..., m \end{cases}$$

que nos dá,

$$\left\{\begin{array}{l} A\Theta'(t)+B\Theta(t)=-a(\Phi.F)F+b(\Theta.F)G; \\ A\Phi'(t)+B\Phi(t)=-a(\Theta.F)G+b(\Phi.F)F, \end{array}\right.$$

Equivalentemente, teremos a seguinte adequação de nosso problema à forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{A} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Theta'(t) \\ \Phi'(t) \end{array}\right]+\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} -a(\Phi(t).F) & b(\Theta(t).F) \\ b(\Phi(t).F) & -a(\Theta(t).F) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} F \\ G \end{array}\right]$$

onde,

$$A=[\langle w_i,w_j\rangle]_{i,j=1}^m, \qquad B=[\langle\nabla w_i,\nabla w_j\rangle]_{i,j=1}^m$$

e,

$$F=\left[\int_\Omega w_j dx\right]_{j=1}^m, \qquad G=\left[\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma\right]_{j=1}^m$$

Como A é inversível e o sistema é semi-linear, podemos reescrevê-lo da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{c} \Theta' \\ \Phi' \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{array}\right]\left\{\left[\begin{array}{cc} -a(\Phi(t).F) & b(\Theta(t).F) \\ b(\Phi(t).F) & -a(\Theta(t).F) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} F \\ G \end{array}\right]-\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{array}\right]\right\} \tag{4.1}$$

denotando por,

$$\psi=\left[\begin{array}{c} \Theta \\ \Phi \end{array}\right], \qquad \psi'=\left[\begin{array}{c} \Theta' \\ \Phi' \end{array}\right] \qquad e,$$

$$H(t,\psi)=\left[\begin{array}{cc} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{array}\right]\left\{\left[\begin{array}{cc} -a(\Phi(t).F) & b(\Theta(t).F) \\ b(\Phi(t).F) & -a(\Theta(t).F) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} F \\ G \end{array}\right]-\left[\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{B} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{array}\right]\right\} \tag{4.2}$$

teremos assim o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI),

$$\left\{\begin{array}{l} \psi'=H(t,\psi) \\ \psi(0)=\psi_0, \end{array}\right. \qquad \text{onde } \psi_0=\left[\begin{array}{c} \Theta_{0m}(t) \\ \Phi_{0m}(t) \end{array}\right] \tag{4.3}$$

Usaremos o Teorema de Carathéodory para provar que o sistema (4.3) possui solução. Consideremos a função,

$$\begin{array}{rcl} H \; : \; \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ (t, Z) & \longmapsto & H(t, Z) \end{array}$$

$$Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

1) Fixemos Z e mostraremos que $t \longmapsto H(t, Z)$ é mensurável. De fato, como A e B não dependem de t, então é sufuciente mostrar que os elementos $-a(\Theta(t).F), b(\Phi.F), -a(\Phi.F), b(\Theta.F)$ são mensuráveis em t. A saber, $\Theta(.)$ e $\Phi(.)$ são fixados em t e portanto são mensuráveis; os vetores F e G não dependem de t, portanto os produtos escalares $\Theta(t).F$ e $\Phi(t).F$ são mensuráveis; além disso, as funções $a(.)$ e $b(.)$ são contínuas e portanto mensuráveis.

2) Fixemos t e mostraremos que $Z \longmapsto H(t, Z)$ é contínua. De fato, como os produtos escalares $\Theta(t).F$ e $\Phi(t).F$ são funções lineares e contínuas, e as funções $a(.)$ e $b(.)$ são contínuas, então $Z \longmapsto H(t, Z)$ é contínua.

3) Seja K um compacto de $D = [0, T] \times B_\delta$, onde

$$B_\delta = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{2m}; \quad \| \|X - \Theta_{0m}\| + \|Y - \Phi_{0m}\| \| < \delta\}.$$

Devemos mostrar que existe uma função real $m_K(t)$, integrável em $[0, T]$ tal que,

$$\|H(t, Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_k(t), \qquad Z = (X, Y) \in \mathbb{R}^{2m}; \forall (t, Z) \in D. \tag{4.4}$$

Temos que

$$H(t, Z) = \begin{bmatrix} h_1(t, Z) \\ h_2(t, Z) \end{bmatrix}$$

onde,

$$h_1(t, Z) = A^{-1}[-a(Y.F)F + b(X.F)G - BX],$$

$$h_2(t,Z) = A^{-1}[-a(X.F)F + b(Y.F) - BY].$$

Assim, $\forall t \in [0,T]$,

$$\|H(t,Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \max\{\|h_1(t,Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}}, \|h_2(t,Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}}\},$$

observe que:

$$\begin{aligned} \|h_1(t,Z)\|_{\mathbb{R}^m} &\leq \|A^{-1}\|\|-a(Y.F)F + b(X.F)G\|_{\mathbb{R}^m} + \|A^{-1}\|\|B\|\|X\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq \|A^{-1}\|[\|-a(Y.F)F\|_{\mathbb{R}^m} + \|b(X.F)G\|_{\mathbb{R}^m} + \|B\|\|X\|_{\mathbb{R}^m}]. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Como $\|A^{-1}\|$ e $\|B\|$ são constantes, mostraremos que $\|-a(Y.F)F\|_{\mathbb{R}^m}$, $\|b(X.F)G\|_{\mathbb{R}^m}$ e $\|X\|_{\mathbb{R}^m}$ são funções integráveis em t. De fato, $t \longmapsto \|\Theta(t)\|$ é mensurável e,

$$\int_0^T \|X\|_{\mathbb{R}^m} dt = \int_0^T \|\Theta(t)\| dt \leq \int_0^T (\delta + \|\Theta_{0m}\|) dt < +\infty. \quad (4.6)$$

Portanto, $\|X\|_{\mathbb{R}^m}$ é integrável em t. Temos que $t \longmapsto [\Phi(t).F]^{p/2}$ é mensurável, pois $\Phi(t).F = \sum_{i=1}^m \phi_i(t).F_i$ onde $F_i = \displaystyle\int_\Omega w_i$, é uma soma de funções mensuráveis. Além disso,

$$\begin{aligned} |[\Phi(t).F]^{p/2}| = |\Phi(t).F|^{p/2} &\leq \|\Phi(t)\|_{\mathbb{R}^m}^{p/2} \|F\|_{\mathbb{R}^m}^{p/2} \\ &\leq (\delta + \|\Theta_{0m}\|)^{p/2}.\|F\|^{p/2}. \end{aligned}$$

Mas como $(\delta + \|\Theta_{0m}\|)^{p/2}$. $\|F\|^{p/2}$ é constante em relação a t, então

$$\int_0^T |\Phi(t).F|^{p/2} dt < +\infty.$$

Portanto, $\|\Phi(t).F\|^{p/2}$ é integrável. De maneira análoga, mostra-se que a função $t \longmapsto [\Theta(t).F]^{p/2}$ também é integrável. Agora, observe que

$$|a(s)| \leq C_0(1 + |s|^{p/2}) \quad \text{e,}$$

$$|b(s)| \leq C_0(1+|s|^{p/2}).$$

Assim,

$$\|-a(Y.F)F\| \leq |-a(Y.F)|\|F\|_{\mathbb{R}^m} \leq C_0(1+|Y.F|^{p/2})\|F\|_{\mathbb{R}^m},$$

o que nos dá

$$\int_0^T \|-a(Y.F)F\|_{\mathbb{R}^m} dt < +\infty, \tag{4.7}$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$\int_0^T \|b(X.F)G\|_{\mathbb{R}^m} dt < +\infty. \tag{4.8}$$

Agora de (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) temos que $\|h_1(t,z)\|_{\mathbb{R}^m}$ é limitada por uma função integrável definida sobre K. De maneira análoga, prova-se que $\|h_2(t,z)\|_{\mathbb{R}^m}$ é também limitada por uma função integrável sobre K. Portanto, existe uma função real $m_k(t)$ integrável em $[0,T]$ tal que,

$$\|H(t,Z)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_k(t), \qquad \forall (t,Z) \in D. \tag{4.9}$$

Concluimos portanto, que o problema (4.3) satisfaz as condições de Carathéodory e portanto existe uma solução $(u_m(t), v_m(t))$ definida sobre o intervalo $[0,t_m)$ para algum $t_m \in [0,T)$.

Considerando agora o problema aproximado

$$(PA)\begin{cases} \langle u'_m, \varphi_1\rangle + A(u_m, \varphi_1) = -a(q(v_m)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(u_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_1(\sigma)d\sigma, \\ \langle v'_m, \varphi_2\rangle + A(v_m, \varphi_2) = -a(q(u_m)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_2(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(v_m)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_2(\sigma)d\sigma, \\ \forall\ (\varphi_1, \varphi_2) \in V_m \times V_m, \end{cases}$$

teremos que tomando $\varphi_1 = u_m$ e $\varphi_2 = v_m$ obteremos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(.)|_2^2 + m|\nabla u_m|_2^2 \leq c(1 + |v_m(.)|_2^{p/2})|u_m(.)|_2 + c(1 + |u_m|_2^{p/2})|u_m|_2 \quad (4.10)$$

e,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m(.)|_2^2 + m|\nabla v_m|_2^2 \leq c(1 + |u_m(.)|_2^{p/2})|v_m(.)|_2 + c(1 + |v_m|_2^{p/2})|v_m|_2, \quad (4.11)$$

somando (4.10) e (4.11), seguido do uso da desigualdade de Young juntamente com a hipótese de coercividade teremos que,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2) + m(|\nabla u_m|_2^2 + |\nabla v_m|_2^2) \leq \\ &2 + 2(|u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2 + (|u_m(.)|_2^p + |v_m(.)|_2^p)) \leq \\ &\quad c[1 + |u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2 + (|u_m(.)|_2^p + |v_m(.)|_2^p)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observação 4.2.1 *Para $p \in [1, 2]$, é possível fazer uma compensação do segundo membro da desigualdade (4.12) com o segundo termo do primeiro membro para obter as estimativas procuradas.*

Para $p > 2$ teremos a desigualdade:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2) \leq c[1 + (|u_m|_2^2 + |v_m|_2^2) + (|u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2)^{p/2}]. \quad (4.13)$$

Seja agora a função $w : [0, T_m] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $w(t) = |u_m(t)|_2^2 + |v_m(t)|_2^2$, de (4.12) obtemos a desigualdade diferencial,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dw(t)}{dt} \leq c[1 + w(.) + w^{\alpha}(.)]; \qquad \alpha > 1 \\ w(0) = |u_{0m}|_2^2 + |v_{0m}|_2^2 \end{array} \right. \tag{4.14}$$

considere agora o seguinte (PVI),

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = 1 + \varphi + \varphi^{\alpha} \\ \varphi(0) = |u_0|_2^2 + |v_0|_2^2. \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Observe que a função $h : [0, T_m] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$é de classe C^1 em φ e mensurável em t. Podemos afirmar que existe uma única solução φ para (4.15), definida em $[0, T^*]$ com $T^* < T_m$. Pelo Resultado da desigualdade diferencial Teorema 1.3.1, como $\dfrac{dw(.)}{dt}$ existe, $w(.)$ satisfaz a desigualdade diferencial em (4.13) e, $w(0) \leq \varphi(0)$, então

$$w(t) \leq \varphi(t), \qquad \forall t \in [0, T^*], \tag{4.16}$$

como φ é contínua em $[0, T^*]$, $\exists M > 0$ tal que,

$$w(t) \leq \varphi(t) \leq M < +\infty, \qquad \forall t \in [0, T^*]. \tag{4.17}$$

De (4.16) temos que,

$$w(t) = |u_m(t)|_2^2 + |v_m(t)|_2^2 \leq M, \qquad \forall t \in [0, T^*], \tag{4.18}$$

de onde segue que

$$|u_m|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))} \leq M, \qquad \forall m \tag{4.19}$$

$$|v_m|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))} \leq M. \qquad \forall m \tag{4.20}$$

Além disso usando (4.16) e (4.17) obteremos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u_m(.)|_2^2 + |v_m(.)|_2^2) + (|\nabla u_m(.)|_2^2 + |\nabla v_m(.)|_2^2) \leq C \quad \forall m. \tag{4.21}$$

c‘ Integrando (4.21) em $t \in [0, T^*]$ obtemos que,

$$|u_m(t)|_2^2 + |v_m(t)|_2^2 + \int_0^t (|\nabla u_m(t)|_2^2 + |\nabla v_m(t)|_2^2) dt \leq C,$$

logo,

$$|u_m|_{L^2(0,T^*;V)} \leq C \qquad \forall m, \tag{4.22}$$

$$|v_m|_{L^2(0,T^*;V)} \leq C \qquad \forall m. \tag{4.23}$$

Agora, buscaremos estimativas para a derivada temporal das funções u_m e v_m. Do problema aproximado temos,

$$\langle u'_m, w_i\rangle = \langle \Delta u_m, w_i\rangle - \langle a(q(v_m)), w_i\rangle \tag{4.24}$$

$$\langle v'_m, w_j\rangle = \langle \Delta v_m, w_j\rangle - \langle a(q(u_m)), w_j\rangle \tag{4.25}$$

$$\forall\ (w_i, w_j) \in V_m \times V_m.$$

Como $\Delta : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ é um operador linear contínuo, existe $M > 0$ tal que,

$$|\langle u'_m, w_i\rangle| \leq \int_\Omega M\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)}|w_i|dx + \int_\Omega |a(q(v_m))||w_i|dx, \tag{4.26}$$

$$|\langle v'_m, w_j\rangle| \leq \int_\Omega M\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)}|w_j|dx + \int_\Omega |a(q(u_m))||w_j|dx, \tag{4.27}$$

segue que

$$|\langle u'_m, w_i\rangle| \leq M\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} \int_\Omega |w_i|dx + c(1 + |v_m|^{p/2}_{L^2(\Omega)}) \int_\Omega |w_i|dx, \tag{4.28}$$

$$|\langle v'_m, w_j\rangle| \leq M\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)} \int_\Omega |w_j|dx + c(1 + |u_m|^{p/2}_{L^2(\Omega)}) \int_\Omega |w_j|dx. \tag{4.29}$$

Usando a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ e a desigualdade de Poincaré obtemos,

$$|\langle u'_m, w_i\rangle| \leq [M\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} + c(1 + |v_m|^{p/2}_{L^2(\Omega)})]\|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{4.30}$$

$$|\langle v'_m, w_j\rangle| \leq [M\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)} + c(1 + |u_m|^{p/2}_{L^2(\Omega)})]\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{4.31}$$

onde segue,

$$\|u_{m_t}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq M\|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} + c(1+|v_m|_{L^2(\Omega)}^{p/2}), \tag{4.32}$$

$$\|v_{m_t}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq M\|v_m\|_{H_0^1(\Omega)} + c(1+|u_m|_{L^2(\Omega)}^{p/2}), \tag{4.33}$$

integrando em $t \in [0, T^*]$ e usando as estimativas (4.32), (4.33), (4.34), (4.35) obtemos,

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*} \|u_{m_t}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt &\leq C_1 \int_0^{T^*} \|u_m(.)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &+C_2 \int_0^{T^*} (1+|v_m(.)|_{L^2(\Omega)}^{p/2}) \leq C \quad \forall m,\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{T^*} \|v_{m_t}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt &\leq C_1 \int_0^{T^*} \|v_m(.)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\ &+C_2 \int_0^{T^*} (1+|u_m(.)|_{L^2(\Omega)}^{p/2}) \leq C \quad \forall m.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Assim,

$$\|u_{m_t}\|_{L^2(0,T^*;H^{-1}(\Omega))} \leq C \quad \forall m, \tag{4.36}$$

$$\|v_{m_t}\|_{L^2(0,T^*;H^{-1}(\Omega))} \leq C \quad \forall m. \tag{4.37}$$

Das estimativas (4.32), (4.33), (4.34), (4.35), (4.48) e (4.49), temos a existência de subsequências, novamente denotadas por $(u_m), (v_m)$ tais que:

- $u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ fraco estrela em $L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega))$,
- $v_m \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ fraco estrela em $L^\infty(0, T^*; L^2(\Omega))$,

- $u_m \rightharpoonup u$ fraco em $L^2(0,T^*;V)$,
- $v_m \rightharpoonup v$ fraco em $L^2(0,T^*;V)$,
- $u_{m_t} \rightharpoonup u_t$ fraco em $L^2(0,T^*;H^{-1}(\Omega))$,
- $v_{m_t} \rightharpoonup v_t$ fraco em $L^2(0,T^*;H^{-1}(\Omega))$.

Usando as estimativas (4.34), (4.35), (4.48) e (4.49) e o lema de compacidade de Aubin-Lions e considerando as imersões abaixo,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Temos a existência de subsequências, denotadas novamente por (u_m) e (v_m) tais que:

- $u_m \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T^*;L^2(\Omega))$
- $v_m \longrightarrow v$ forte em $L^2(0,T^*;L^2(\Omega))$,

multiplicando as equação (4.36) e (4.37) por funções $\varphi_i(.), \varphi_j(.) \in \mathcal{D}(0,T^*)$, com $\varphi_i(T^*) = \varphi_j(T^*) = 0$ obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_0^{T^*}\int_\Omega u_{m_t}\varphi_i(t)w_i(x)dxdt + \int_0^{T^*}\int_\Omega \nabla u_m\varphi_i(t)\nabla w_i dxdt = \\ &-a(q(v_m))\int_0^{T^*}\int_\Omega \varphi_i(t)w_i(x)dxdt + b(q(u_m))\int_0^{T^*}\int_{\Gamma_1}\varphi_i(t)w_i(x)d\sigma dt, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{T^*}\int_\Omega v_{m_t}\varphi_j(t)w_j(x)dxdt + \int_0^{T^*}\int_\Omega \nabla v_m\varphi_j(t)\nabla w_j dxdt = \\ &-a(q(u_m))\int_0^{T^*}\int_\Omega \varphi_j(t)w_j(x)dxdt + b(q(v_m))\int_0^{T^*}\int_{\Gamma_1}\varphi_j(t)w_j(x)d\sigma dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Passando ao limite em (4.50) e (4.51) e usando argumentos de densidade, obtemos a solução fraca procurada.

4.2.1 Verificando as Condições Iniciais

Do fato de que $H(0,T;V,V') \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega))$, temos que as condições iniciais u_0 e v_0 fazem sentido, além disso, da passagem ao limite, temos que $\forall \varphi \in C^1(0,T); \varphi(T)=0$,

$$\int_0^{T^*}\int_\Omega u_m'\varphi(t)v(x)dxdt \longrightarrow \int_0^{T^*}\int_\Omega u'\varphi(t)v(x)dxdt. \tag{4.40}$$

Integrando por partes, $\forall v \in V$, em (4.52) obtemos por um lado,

$$(u_m(t^*),v)\varphi(T^*) - (u_m(0),v)\varphi(0) - \int_0^{T^*}(u_m(t),v)\varphi'(t)dt, \tag{4.41}$$

e por outro,

$$(u(T^*),v)\varphi(T^*) - (u(0),v)\varphi(0) - \int_0^{T^*}(u,v)\varphi'(t)dt, \tag{4.42}$$

como a expressão em (4.53) converge para a expressão em (4.54), como

$$\int_0^{T^*}(u_m(t),v)\varphi'(t)dt \longrightarrow \int_0^{T^*}(u,v)\varphi'(t)dt,$$

então de (4.53) e (4.54), obtemos que

$$(u_m(0),v)\varphi(0) \longrightarrow (u(0),v)\varphi(0),$$

o que implica,

$$(u_m(0),v) \longrightarrow (u(0),v), \quad \forall v \in V.$$

Como $u_m(0) \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$, pela unicidade do limite temos que $(u(0),v) = (u_0,v)$, $\forall v \in L^2(\Omega)$. Portanto, $u(0)=u_0$, e analogamente se procede para verificar que $v(0)=v_0$ em $L^2(\Omega)$. ∎

4.3 Unicidade

O resultado de unicidade é baseado no seguinte teorema

Teorema 4.3.1 *O problema variacional acoplado (PVA) tem única solução.*

Demonstração: Seja $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} : [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ soluções de (PVA), temos então

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_1, w_i) + A(\nabla u_1, \nabla w_i) = -a(q(v_1)) \displaystyle\int_\Omega w_i dx \\ \qquad\qquad +b(q(u_1)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_i d\sigma, \\ \dfrac{d}{dt}(v_1, w_j) + A(\nabla v_1, \nabla w_j) = -a(q(u_1)) \displaystyle\int_\Omega w_j dx \\ \qquad\qquad +b(q(v_1)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma, \end{cases} \tag{4.43}$$

e,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_2, w_i) + A(\nabla u_2, \nabla w_i) = -a(q(v_2)) \displaystyle\int_\Omega w_i dx \\ \qquad\qquad +b(q(u_2)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_i d\sigma, \\ \dfrac{d}{dt}(v_2, w_j) + A(\nabla v_2, \nabla w_j) = -a(q(u_2)) \displaystyle\int_\Omega w_j dx \\ \qquad\qquad +b(q(v_2)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma, \end{cases} \tag{4.44}$$

subtraindo os termos das equações respectivas em (4.55) e (4.56) obtemos,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_1 - u_2, w_i) + A(u_1 - u_2, w_i) = -[a(q(v_1)) - a(q(v_2))] \displaystyle\int_\Omega w_i dx \\ \qquad\qquad +[b(q(u_1)) - b(q(u_2))] \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_i d\sigma, \\ \dfrac{d}{dt}(v_1 - v_2, w_j) + A(v_1 - v_2, w_j) = -[a(q(u_1)) - a(q(u_2))] \displaystyle\int_\Omega w_j dx \\ \qquad\qquad +[b(q(v_1)) - b(q(v_2))] \displaystyle\int_{\Gamma_1} w_j d\sigma, \end{cases} \tag{4.45}$$

fazendo agora $w_i = u_1 - u_2$, e $w_j = v_1 - v_2$ obtemos,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)}+m|u_1-u_2|^2_V \leq c|a\circ q(v_1(t))-a\circ q(v_2(t))||u_1-u_2|_V \\ \qquad\qquad +c|b\circ q(u_1(t))-b\circ q(u_2(t))||u_1-u_2|_V, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|v_1-v_2|^2_{L^2(\Omega)}+m|v_1-v_2|^2_V \leq c|a\circ q(u_1(t))-a\circ q(u_2(t))||v_1-v_2|_V \\ \qquad\qquad +c|b\circ q(v_1(t))-b\circ q(v_2(t))||v_1-v_2|_V. \end{cases} \tag{4.46}$$

Usando a desigualdade de Young em (4.58) obtemos,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)}+m|u_1-u_2|^2_V \leq \dfrac{c^2}{2m}|a\circ q(v_1(t))-a\circ q(v_2(t))|^2 \\ \qquad\qquad +\dfrac{c^2}{2m}|b\circ q(u_1(t))-b\circ q(u_2(t))|^2+m|u_1-u_2|^2_V, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|v_1-v_2|^2_{L^2(\Omega)}+m|v_1-v_2|^2_V \leq \dfrac{c^2}{2m}|a\circ q(u_1(t))-a\circ q(u_2(t))|^2 \\ \qquad\qquad +\dfrac{c^2}{2m}|b\circ q(v_1(t))-b\circ q(v_2(t))|^2+m|v_1-v_2|^2_V. \end{cases} \tag{4.47}$$

Para obter a unicidade precisamos de hipóteses mais fortes que a continuidade para as funções $a(.)$ e $b(.)$. Admitiremos aqui que $a(.)$ e $b(.)$ são localmente Lipschitz contínuas sobre $\mathbb{R}$, isto é, para qualquer intervalo $[-M,M]$ de $\mathbb{R}$, existe uma constante $C(M)$ tal que,

1) $|a(s)-a(r)|\leq C(M)|s-r|$,

2) $|b(s)-b(r)|\leq C(M)|s-r| \quad \forall s,r\in[-M,M]$.

Tomando $M_1 := |u_1|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+|u_2|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ e $M_2 := |v_1|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+|v_2|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ temos que, $M_1,M_2<+\infty$; $u_1,u_2,v_1,v_2\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Além disso,

$$|q(u_1(t))|\leq|q(0)|+q_0|u_1(t)|_{L^2(\Omega)}\leq|q(0)|+q_0M_1=:R_1,$$

de maneira análoga temos que,

$$|q(v_1(t))|\leq|q(0)|+q_0M_2=:R_2.$$

Usando a hipótese 1) sobre a função $a(.)$ temos,

$$|a(q(u_1)) - a(q(u_2))| \leq C(R_1)|q(u_1(t)) - q(u_2(t))| \leq C(R_1)q_0|u_1(t) - u_2(t)|_{L^2(\Omega)},$$

procedendo de maneira análoga com a hipótese 2) para a função $b(.)$ e juntamente com a desigualdade (4.59) obtemos,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(|v_1(t) - v_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |u_1(t) - u_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}) \\ \dfrac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2_{L^2(\Omega)} \leq c(|u_1(t) - u_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v_1(t) - v_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}). \end{cases} \tag{4.48}$$

Adicionando as desigualdades (4.60) acima obtemos,

$$\frac{d}{dt}(|u_1(t) - u_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v_1(t) - v_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}) \leq c(|u_1(t) - u_2(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |v_1(t) - v_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Usando o lema de Gronwall e o fato de que $u(0) = v(0) = 0$, em $L^2(\Omega)$, obtemos a unicidade de solução do problema (PM).

■

4.4 Solução Maximal para o Sistema Acoplado

Considerando a seguinte classe de problemas variacionais acoplado, associada ao problema (PMA)

$$(PVA) \begin{cases} \langle u_t, \varphi_1 \rangle + A(u, \varphi_1) = -a(q(v)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(u)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_1(\sigma)d\sigma, \\ \langle v_t, \varphi_2 \rangle + A(v, \varphi_2) = -a(q(u)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_2(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(v)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_2(\sigma)d\sigma, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \forall\ (\varphi_1, \varphi_2) \in V \times V. \end{cases}$$

teremos a seguinte definição

Definição 4.4.1 *Sejam $J_1, J_2 \subset [0, +\infty)$ intervalos contendo a origem. Um par de funções $(u, v) : J_1 \times J_2 \longrightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é chamado de **Solução Maximal no Tempo** para o problema (PVA), se*

i) *(u, v) for uma solução para o problema (PVA), $\forall T_1, T_2 > 0$ tal que $[0, T_1] \subset J_1, [0, T_2] \subset J_2$.*

ii) *Não existir solução (u', v') para o problema (PVA), em dominíos temporais $[0, T_1'] \supset J_1$, $[0, T_2'] \supset J_2$, com $(u', v') \equiv (u, v)$ sobre $J_1 \times J_2$.*

Proposição 4.4.1 *Seja (u, v) uma solução para o problema (PVA) em $[0, T_1]$ e $[0, T_2]$ respectivamente. Então existe uma extensão (w_u, w_v) a qual é solução do problema (PVA), de forma respectiva, em $[0, T_1 + T_{0_1}]$ e $[0, T_2 + T_{0_2}]$, onde T_{0_1} e T_{0_2} são os únicos números positivos satisfazendo*

$$c(|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + T_{0_1} + 1)^{1/2} T_{0_1}^{1/p} = 1.$$

e,

$$c(|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + T_{0_2} + 1)^{1/2} T_{0_2}^{1/p} = 1.$$

Demonstração:

Como ja sabemos, existe uma solução (u', v') para o problema

$$\begin{cases} (u', v') \in H(0, T_{0_1}, V, V') \times H(0, T_{0_2}, V, V'), \\ \langle u_t, \varphi_1 \rangle + A(u, \varphi_1) = -a(q(v)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_1(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(u)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_1(\sigma)d\sigma, \\ \langle v_t, \varphi_2 \rangle + A(v, \varphi_2) = -a(q(u)) \displaystyle\int_\Omega \varphi_2(x)dx \\ \qquad\qquad +b(q(v)) \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_2(\sigma)d\sigma, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \forall\, (\varphi_1, \varphi_2) \in V \times V. \end{cases}$$

Sendo assim a função $w = (w_u, w_v)$ definida por:

$$w(t) = \begin{cases} (u(t), v(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq T_1, \text{ e } 0 \leq t \leq T_2, \\ (u'(t - T_1), v'(t - T_2)) & \text{se } T_1 \leq t \leq T_1 + T_{0_1}, \text{ e } T_2 \leq t \leq T_2 + T_{0_2}, \end{cases}$$

é claramente uma extensão de (u, v).

■

Teorema 4.4.1 *O problema variacional* (PVA)*, sob as mesmas condições, possui uma única solução maximal.*

Demonstração:

Para o caso de unicidade, sejam (u, v) e (u', v') duas soluções maximais definidas sobre $J_1 \times J_2$ e $J_1' \times J_2'$ respectivamente. Pela condição $i)$ da definição 4.4.1, temos que (u, v) e (u', v') são soluções para (PVA), portanto pelo resultado de unicidade, as mesmas são únicas. Para o caso de existência de solução máximal para (PVA), temos que, do que ja foi visto, o conjunto

$$\{(T_1, T_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : (PVA) \text{ possui solução em } [0, T_1] \times [0, T_2]\},$$

é não vázio. Seja então $T_{1_{max}}$ e $T_{2_{max}}$ os limites superiores, respectivamente, desses valores, considere também o par de funções $(u, v) : [0, T_{1_{max}}) \times [0, T_{2_{max}}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ tais que para cada $(t_1, t_2) \in [0, T_{1_{max}}) \times [0, T_{2_{max}})$, $(u(t_1), v(t_2))$ é o valor, no ponto (t_1, t_2), da solução do problema (PVA) em $[0, t_1] \times [0, t_2]$. Note portanto que (u, v) esta bem definida em $[0, T_{1_{max}}) \times [0, T_{2_{max}})$. E por último afirmamos que o par de funções (u, v) é uma solução máximal. De fato a condição $i)$, da definição 4.4.1, é diretamente satisfeita pela forma como (u, v) foi construida. Suponha agora que a condição ii) não seja válida, então existe $[0, T_1'] \supset [0, T_{1_{max}})$, e $[0, T_2'] \supset [0, T_{2_{max}})$, com $[0, T_1'] \neq [0, T_{1_{max}})$, e $[0, T_2'] \neq [0, T_{2_{max}})$, e (u', v') uma solução para (PVA) em $[0, T_1'] \times [0, T_2']$ que coincide com (u, v) em $[0, T_{1_{max}}) \times [0, T_{2_{max}})$. Temos então que (u', v') estende (u, v) sobre a direita dos domínios temporais, e isto contradiz a escolha que tomamos para $T_{1_{max}}$ e $T_{2_{max}}$.

■

Bibliografia

[1] ADAMS, R.; FOURNIER, J. **Sobolev Spaces.** *2th. ed. Amsterdam: Academic Press, 2006.*

[2] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure.** *New York: John Wiley & Sons, 1995.*

[3] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.** *Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.*

[4] CHIPOT, M. **Elements of nonlinear analysis.** *Berlin: Birkhäuser Basel, 2000.*

Do livro de Michel Chipot foram retirados alguns clássicos resultados de Análise Funcional voltados para os problemas de evolução. Neste livro encontra-se proposto o problema Parabólico abordado nessa dissertação.

[5] CHIPOT, M.; MOLINET. L. **Asymptotic behaviour of some nonlocal diffusion problems.** *Preprint.*

[6] CHIPOT, M.; ROUGIREL, A. **On Some Class Of Problems With Nonlocal Source And Boundary Flux.** *Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstr, 2001.*

Esse é o artigo que é base desta dissertação, nele é tratado, por M. Chipot e A. Rougirel, a formulação variacional e o uso de ponto fixo para solucionar fracamente o problema modelo (PM).

[7] CONWAY, J. B. **A Course in Functional Analysis.** *Managing Editor. Springer-Verlag. Indiana University, department of Mathematics. Bloomington. USA. 1985.*

No livro de J. B. Conway pode-se encontrar o enunciado e a demonstração do teorema principal desta dissertação, o teorema do ponto fixo de Schauder, além de vários resultados de Análise Funcional.

[8] DAUTRAY, R.; LIONS J. L **Mathematical analysis and numerical metholds for science and tecnology.** *New-York: Spriger-Verlag, vol. 1, 2000.*

[9] DAUTRAY, R.; LIONS J. L **Mathematical analysis and numerical metholds for science and tecnology.** *New-York: Spriger-Verlag, vol. 5,* 2000.

Nesse livro de Dautry & Lions encontra-se o clássico teorema variacional de Lions, um resultado de existência e unicidade de solução que é usado no capítulo 2 deste trabalho.

[10] EVANS, L. C **Partial differential equations.** *Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.*

[11] FERNANDEZ, P. J. **Medida e integração.** *Rio de Janeiro: IMPA, Segunda Edição, 2002.*

[12] HALE, J. K. **Ordinary differential equations.** *New York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.*

[13] KREYSZIG, E. **Introdutory functional analysis with applications.** *New York: John Wiley e Sons, 1989.*

[14] LIMA, E. L. **Espaços Métricos** *Rio de Janeiro: IMPA, 2003.*

[15] LOBATO, R. F. C. **Solvabilidade E Decaimento Exponencial Para Um Sistema De Edp Não Linear Com Acoplamento Na Fonte.** *Belém. 2006.*

[16] MEDEIROS, L. A.; MILLA, M. A. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos Nao Homogêneos).** *Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.*

[17] NECAS, J. **Méthodes directes en théorie des équations elliptiques.** *Masson (1967).*

[18] OLIVEIRA, CÉSAR. R. **Introdução à Análise Funcional.** *Rio de Janeiro, IMPA, 2001.*

[19] RIVERA, J. E. M. **Introdução às distribuições e equações diferenciais parciais.** *Rio de Janeiro: LNCC, 2004.*

[20] SANTOS, M. J. **Existência E Unicidade De Solução De Uma Equação Parabólica Com Expoente Variável Da Não Linearidade.** *Belém. 2008*

[21] YOSIDA, K. **Functional analysis.** *6th. ed. Berlin: Springer-Verlar, 1995.*

[22] ROUGIREL, A. **Sur une équation de la chaleur régulée par des termes non locaux** *Thèse de Université Henri Poincaré, 1999.*