UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Raimundo das Graças Carvalho de Almeida

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDAS COM MEMÓRIA

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

BELÉM - PA

2009

Raimundo das Graças Carvalho de Almeida

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDAS COM MEMÓRIA

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém - PA

2009

Raimundo das Graças Carvalho de Almeida

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDAS COM MEMÓRIA

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 30 de abril de 2009

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Coordenador do PPGME - UFPA

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos **(Orientador)**
Universidade Federal do Pará - UFPA - PPGME

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Faria **(Examinador)**
Universidade Federal do Pará - UFPA - PPGME

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha **(Examinador)**
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos aqueles professores ou não, que contribuíram direta ou indiretamente para o seu pleno êxito, em especial aos professores do PPGME e em particular ao Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, que de forma séria, competente e paciente orientou passo a passo o mesmo.

Agradecimentos

Ao meu Deus pela vida.

Aos meus pais, Olgarina e João Almeida responsáveis também pela minha formação.

À minha esposa Cândida e filhos Stanley e Stiven, pela alegria e incentivos do cotidiano.

Aos professores doutores que, de forma brilhante ministraram as disciplinas do curso.

Ao Prof. Dr. Mauro de Lima Santos pela, também, orientação deste trabalho.

A todos os meus colegas do curso pelo companheirismo, solidariedade e alto grau de relacionamento humano, sempre presentes.

Ao amigo Átila pela ajuda nos momentos necessários.

À amiga Kelly Alves que também ajudou a dar forma a este trabalho

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial de soluções associadas ao seguinte sistema de ondas elásticas com acoplamento linear dado por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$u = v = 0 \;\text{ sobre }\; \Gamma \times (0,\infty), \tag{3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \;\text{ em }\; \Omega \tag{4}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

Palavras - chaves: Soluções Fortes e decaimento polinomial.

Abstract

The main purpose of this paper is to study the existence, uniqueness, lack of exponential and polynomial decay of the following problem

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{5}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{6}$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,\infty) \tag{7}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em} \quad \Omega \tag{8}$$

where Ω is a open set bounded of $\mathbb{R}^n$ with regular boundary Γ.

Key words: Strong solutions and Polynomial decay.

Conteúdo

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, a falta de decaimento exponencial e o decaimento polinomial do sistema de ondas elásticas com acoplamento linear dado por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty) \tag{9}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty) \tag{10}$$

$$u = v \;\; = \;\; 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma \times (0,\infty) \tag{11}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \;\; \text{em} \;\; \Omega \tag{12}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular e u e v representam os deslocamentos verticais das membranas. O modelo acima pode ser usado para descrever a evolução de um sistema constituido de duas membranas elásticas sujeitas a uma força elástica que atrai uma membrana a outra com coeficiente $\alpha > 0$. Note que o termo $\int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)ds$, age sobre a primeira membrana como um estabilizador.
Mostraremos que o sistema acoplado acima é dissipativo, mas o correspondente semigrupo não é exponencialmente estável. Além disso, mostraremos que a solução do sistema (9)-(12) decai polinomialmente para zero quando t tende para o infinito.

Sistemas fracamente acoplados do tipo

$$u_{tt} - \Delta u + \beta u_t + \alpha v = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0, \infty),$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0, \infty),$$

$$u = v \ = \ 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0, \infty),$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \ \text{ em } \ \Omega$$

foi estudado por vários autores entre eles destacamos F. Alabau , P. Cannarsa e V. Komornik em [6], F. Alabau em [1] e M. L. Santos [10]. Eles mostraram que o sistema acima não é exponencialmente estável, porém é polinomialmente estável, com taxa de decaimento explícita.

O que diferencia nosso trabalho dos citados acima e suas referências, está no fato de que o mecanismo dissipativo utilizado é o efeito memória que age somente na primeira equação, tornando o problema mais interessante e novo na literatura.

Os capítulos são organizados como segue. No primeiro capítulo apresentamos os principais resultados sobre semigrupos utilizados na dissertação. No segundo capítulo, usando técnicas de semigrupos, mostramos existência e unicidade de soluções globais fortes para o sistema (9)-(12). No terceiro capítulo, usando o Teorema devido a Gearhart, mostramos a falta de decaimento exponencial para o sistema (9)-(12). Finalmente, no quarto capítulo mostramos a estabilidade polinomial do sistema (9)-(12) usando método de energia combinado com algumas essenciais desigualdades.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados sobre semigrupos de operadores e alguns resultados sobre estabilidade. Estes serão utilizados nos capítulos posteriores.

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Hilbert real ou complexo equipado com o produto interno $(\ ,\ )$ e norma $\|\cdot\|$. Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \mapsto X$ um operador linear densamente definido sobre X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é dissipativo se para todo $x \in D(\mathcal{A})$,*

$$Re(\mathcal{A}x, x) \leq 0.$$

Definição 1.2 *Uma família de operadores $S(t) : X \to X$ no espaço de Banach X é chamado de semigrupo quando*
$S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X,
$S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.3 *Uma família $S(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X é chamado de Semigrupo Fortemente Contínuo quando*
(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade em X,
(ii) $S(s+t) = S(s)S(t)$, para todo $t, s \geq 0$,
(iii) para cada $x \in X, S(t)x$ é contínua em t sobre $[0, \infty)$.

Para o semigrupo $S(t)$, considere o operador $\mathcal{A}$ com domínio $D(\mathcal{A})$ consistindo de pontos x tais que o limite

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(\mathcal{A})$$

existe. O operador $\mathcal{A}$ é chamado de gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$.

Chamaremos de *Semigrupo de classe* C_0 ou simplesmente *Semigrupo* C_0 a um *Semigrupo Fortemente Continuo*. Algumas vezes denotaremos $S(t)$ por $e^{\mathcal{A}t}$.

Definição 1.4 *Um semigrupo $S(t)$, $0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é dito de Contrações, se*

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad \textit{para todo} \;\; t \geq 0.$$

Definição 1.5 *Dizemos que $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se existe uma constante positiva μ e $M \geq 1$ tal que*

$$\|e^{\mathcal{A}t}\| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Aqui $\|\cdot\|$ denota a norma em $\mathcal{L}(X, X)$.

Definição 1.6 *Seja $\mathcal{A}$ um operador definido sobre um espaço de Banach X. Denotaremos por $\rho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ o espectro de $\mathcal{A}$, que definiremos como o complementar de $\rho(\mathcal{A})$ com respeito a $\mathbb{C}$, isto é, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \backslash \rho(\mathcal{A})$.

Definição 1.7 *Seja $\mathcal{A}$ um operador num espaço de Banach X. Chamaremos de* ***cota superior do espectro*** *de $\mathcal{A}$ ao valor*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Definição 1.8 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal do semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ de classe C_0. Diremos que $\omega_0(\mathcal{A})$ é o* ***tipo do semigrupo*** *gerado por $\mathcal{A}$ se*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \lim_{t \mapsto \infty} \frac{ln\|e^{\mathcal{A}t}\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\|e^{\mathcal{A}t}\|}{t}.$$

Dizemos que o semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ de classe C_0 possui a ***propriedade do crescimento determinada pelo espectro*** *se $\omega_\sigma(A) = \omega_0(\mathcal{A})$.*

1.2 Semigrupos gerados por Operadores Dissipativos

Suponhamos que o operador linear $\mathcal{A}$ gera um semigrupo $e^{\mathcal{A}t}$ de classe C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos os seguintes resultados cujas demonstrações encontram-se em [7] e em [11].

Teorema 1.1 ***(Hille-Yosida)*** *Um operador linear (não limitado) $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t)$, $t \geq 0$, se e somente se*
i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$,
ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(\mathcal{A})$ e para todo $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ e I é o operador identidade.

Teorema 1.2 ***(Lummer-Phillips)*** *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em X.*
(a) Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um real $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X.
(b) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X, então $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Teorema 1.3 *Dado o operador linear (não limitado) $\mathcal{A}$ com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(A)$ (o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$), então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.*

O seguinte teorema caracteriza um operador fechado.

Teorema 1.4 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em $\mathcal{H}$. Se $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, então $\mathcal{A}$ é fechado.*

O seguinte teorema caracteriza a densidade do domínio do operador $\mathcal{A}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Teorema 1.5 *Seja $\mathcal{A}$ dissipativo tal que $Im(I - \mathcal{A}) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*

Teorema 1.6 ***(Stone)*** *$\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se, e somente se, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto ($\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$).*

1.3 Propriedades assintóticas de um semigrupo

Nesta secção apresentamos alguns resultados fundamentais para este trabalho.

Para obtermos taxas de decaimento polinomial tomando dados iniciais mais regulares, usamos o seguinte resultado devido a Prüss [8].

Teorema 1.7 *Seja $\mathcal{A} \in G(H, M, 0)$ com $\mathcal{A}$ invertível. Se $T(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ no espaço H, então para todo $\gamma > 0$ são equivalentes:*

$$(i) \qquad \|S(t)\mathcal{A}^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(H)} \le \frac{C}{t^{\beta}}, \quad \forall\ t > 0,$$

$$(ii) \qquad |S(t)\mathcal{A}^{-\gamma}\|_{\mathcal{L}(H)} \le \frac{C}{t^{\alpha\beta}}, \quad \forall\ t > 0, \quad \textit{e para algum} \;\; \alpha > 0.$$

Demonstração: Faremos a prova para o caso em que $\beta = 1$. O caso geral é análogo. Suponhamos inicialmente que (i) acontece. Então temos

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-n\gamma}\| = |[T(t/n)\mathcal{A}^{-\gamma}]^n\| \le \left(\frac{C}{t/n}\right)^n = \frac{C(n)}{t^n}. \tag{1.1}$$

Seja $\theta \in (0,1)$. Então

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-n\gamma\theta}\| = \|\mathcal{A}^{n\gamma(1-\theta)}T(t)^{1-\theta}T(t)^{\theta}\mathcal{A}^{-n\gamma^{(1-\theta)}}\mathcal{A}^{-n\gamma\theta}\| \leq \|\mathcal{A}^{n\gamma}T(t)\mathcal{A}^{-n\gamma}\|^{1-\theta}\|T(t)\mathcal{A}^{-n\gamma}\|\theta.$$

Usando (1.1) e o fato que $\|T(t)\| \leq M$, segue que

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-n\gamma\theta}\| \leq \frac{C'(n)}{t^{n\theta}}, \quad \forall t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \theta \in (0,1). \tag{1.2}$$

Para $\alpha > 0$ e $n > \alpha$, definamos $\theta := \frac{\alpha}{n}$. Segue que $\theta \in (0,1)$ e de (1.2) temos

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-\gamma\alpha}\| \leq \frac{C'(n)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que (ii) acontece. Fazendo $\delta := \gamma\alpha$ segue da hipótese que

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-\delta}\| \leq \frac{C(\delta\alpha)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0. \tag{1.3}$$

Usando (1.3) temos

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-n\delta}\| = \|[T(t/n)\mathcal{A}^{-\delta}]^n\| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{n\alpha}}, \quad \forall t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Seja $\theta \in (0,1)$. De (1.4), temos

$$\|T(t)\mathcal{A}^{-n\delta\theta}\| \leq \|\mathcal{A}^{n\delta}T(t)\mathcal{A}^{-n\delta}\|^{1-\theta}T(t)\mathcal{A}^{-n\delta}\|^{\theta} \leq \frac{C'(\alpha)}{t^{n\alpha\theta}}. \tag{1.5}$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $n > \dfrac{1}{\alpha}$ e definindo $\theta := \dfrac{1}{n\alpha}$, temos

$$\theta \in (0,1), \quad n\delta\theta = \gamma, \quad n\alpha\theta = 1.$$

De (1.5) segue que (i) acontece. ■

O resultado seguinte refere-se a estabilidade exponencial cujas demonstrações podem ser vistas em [9].

Teorema 1.8 *Seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Então $e^{\mathcal{A}t}$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R},$$

$$\|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

onde I é o operador identidade e $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$.

Se o semigrupo C_0 não é de contrações, temos a seguinte caracterização.

Teorema 1.9 *Seja $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um semigrupo C_0 definido sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{\lambda; Re\lambda \geq 0\},$$

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \quad \forall Re\lambda \geq 0.$$

O próximo resultado dá uma condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo é determinada pela cota superior do espectro.

Teorema 1.10 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos que*

$$\omega_0(\mathcal{A}) = \omega_\sigma(\mathcal{A})$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe M_ϵ tal que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M_\epsilon, \quad \forall Re\lambda \geq \omega_\sigma(\mathcal{A}) + \epsilon.$$

Observação 1.1 *O teorema 1.10 nos diz que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando esta propriedade é válida, diz-se que o semigrupo possui a* ***propriedade do crescimento determinada pelo espectro*** *(PCDE).*

O seguinte resultado mostra que se $\mathcal{A}$ gera um semigrupo analítico e se a cota superior do espectro é negativa, então temos decaimento exponencial, ver Pazy [7].

Teorema 1.11 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $S(t)$. Se $\omega_\sigma(S) < 0$, então existe constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$.*

Demonstração: Sendo $\mathcal{A}$ um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, existem constantes $\omega \geq 0, M \geq 1, \delta > 0$ e uma vizinhança V de $\lambda \neq \omega$ tal que

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \Sigma = \{\lambda; |arq(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup V$$

e

$$\|R(\lambda; \mathcal{A})\| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad para \ \lambda \in \Sigma.$$

Além disso,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau} e^{\lambda t}R(\lambda;\mathcal{A})d\lambda \tag{1.6}$$

onde Γ é formado por $\Gamma_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : p \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta\}$ e $\Gamma_2 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta\}$ e é orientado de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de Γ. A convergência em (1.6) para $t > 0$ é na topologia uniforme do operador. Por hipótese, temos que $R(\lambda;\mathcal{A})$ é analítico numa vizinhança de

$$\Delta = \{\lambda; Re\lambda > \sigma_1, |arq(\lambda - \omega)| \geq \theta\}$$

onde $0 > \sigma_1 > \omega_\sigma(S)$. Do Teorema de Cauchy segue que Γ em (1.6) pode ser mudado sem variar o valor da integral para a trajetória Γ' onde Γ' é composta por

$$\Gamma_1' = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\},$$

$$\Gamma_2' = \{Re\lambda = \sigma_1 : |Im\lambda| \leq (\omega - \sigma_1)|tan\theta|\},$$

$$\Gamma_3' = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\},$$

e é orientada de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de Γ'. Portanto,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}R(\lambda;\mathcal{A})d\lambda$$

Estimando $\|S(t)\|$ sobre $\Gamma_i', i = 1, 2, 3$ encontramos para $t \geq 1$ e alguma constante M_1, que $\|S(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$. Desde que $\|S(t)\| \leq M_2$ para $0 \leq t \leq 1$, então temos $\|S(t)\| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$ para $t \geq 0$. Donde segue a conclusão. ■

Observação 1.2 *Na prova do Teorema 1.11(ver Pazy [7], Teorema 4.3), temos decaimento exponencial da forma $\|S(t)\| \leq M_1 e^{-\sigma_1 t}$ para todo $\omega_\sigma(S) < \sigma_1 < 0$. Em particular, para $\sigma_1 = \omega_\sigma(S) + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ muito pequeno, temos decaimento exponencial com taxa dada pela cota superior do espectro. Desta forma, temos a propriedade do crescimento determinada pelo espectro. Em outras palavras temos o seguinte resultado:*

Teorema 1.12 *Se $S(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal $\mathcal{A}$, então S possui a propriedade do crecimento determinada pelo espectro.*

1.4 Regularidade de “Mild Solutions”

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} & = \mathcal{A}u(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.7}$$

onde $f : [0, T)\rangle \to X$ e $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_0.

Definição 1.9 *Uma função $u : [0, T) \to X$ é uma solução clássica de (1.7) sobre $[0, T)$ se u é contínua sobre $[0, T)$, continuamente diferenciável sobre $(0, T]$, $u(t) \in D(\mathcal{A})$ para $0 < t < T$ e satisfaz (1.7) em $[0, T)$.*

Definição 1.10 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de classe C_0. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de “mild solution” do problema (1.9) sobre [0,T].

Capítulo 2

Solução Global: Existência e unicidade

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução do seguinte sistema acoplado de equações de onda com memória dada por

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau + \alpha v = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \tag{2.1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,\infty), \tag{2.2}$$

$$u = v = 0 \;\text{ sobre }\; \Gamma \times (0,\infty), \tag{2.3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \;\text{ em }\; \Omega \tag{2.4}$$

Note que neste caso o operador gerado a partir do sistema acima não é autônomo e, portanto, não gera um semigrupo. Para transformar (2.1) numa equação autônoma, Dafermos [2] e Fabrizio [3], introduzem os espaços de memória, isto é, consideram

$$\eta = u(\cdot,t) - u(\cdot,t-s). \tag{2.5}$$

$$\eta_t = u_t(\cdot,t) - u_t(\cdot,t-s) \; e \; \eta_s = u_s(\cdot,t-s). \tag{2.6}$$

Somando as relações (2.5) - (2.6), temos:

$$\eta_t + \eta_s = u_t(\cdot, t).$$

De (2.5), temos $\eta = 0$, quando $s = 0$, para todo $t \geq 0$. Esta pode ser considerada como condição de contorno, enquanto

$$\eta_t \mid_{t=0} = u_t(\cdot, 0) - u_t(\cdot, -s) = u_1 - u_t(\cdot, -s) := v(s)$$

onde $v(s)$ é chamada de história de u_t. De (2.5), também temos:

$$\Delta\eta = \Delta u(\cdot, t) - \Delta u(\cdot, t - s). \tag{2.7}$$

Consideremos agora o problema com história

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t - \tau)d\tau + \alpha v = 0.$$

Usando (2.7), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(\tau)\Delta u(t-\tau)d\tau &= \int_0^\infty g(\tau)[\Delta u(\cdot, t) - \Delta\eta(\cdot, \tau)]d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau)d\tau\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\cdot, \tau)d\tau, \end{aligned}$$

de onde a equação original pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(\tau)d\tau\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\cdot, \tau)d\tau + \alpha v = 0$$

ou

$$u_{tt} - (1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau)\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\cdot, \tau)d\tau + \alpha v = 0.$$

Fazendo $\beta = 1 - \int_0^\infty g(\tau)d\tau$, podemos, então, transformar (2.1) numa equação autônoma. Assim, o sistema completo pode ser reescrito como

$$u_{tt} - \beta\Delta u - \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau)d\tau + \alpha v = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.8}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.9}$$

$$\eta_s + \eta_t - u_t = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \tag{2.10}$$

$$u = v = 0 \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty), \tag{2.11}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)), (u_t(x,0), v_t(x,0)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega, \tag{2.12}$$

$$\eta(x,0) = \eta_0(x) = u_0 - u_0(x,-s) \text{ em } \Omega. \tag{2.13}$$

Sendo $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$, temos:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \\ v_t \\ v_{tt} \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \beta\Delta u + \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(.,\tau) - \alpha v \\ v_t \\ \Delta v - \alpha u \\ u_t - \eta_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \beta\Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \int_0^\infty g(\tau)\Delta d\tau \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha I & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -(.)_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \beta\Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \mathcal{T} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha I & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -(.)_s \end{pmatrix}}_{:=\mathcal{A}} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Definimos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ como

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \beta\Delta & 0 & -\alpha I & 0 & \mathcal{T} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha I & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -(.)_s \end{pmatrix}$$

onde $\mathcal{T}$ está definido como

$$\mathcal{T}\eta = \int_0^\infty g(\tau)\Delta\eta(\tau)\, d\tau, \quad \forall \eta \in D(\mathcal{T}).$$

2.1 Espaços Funcionais

Denotemos por $L^2_\mu(0,\infty; H^1_0(\Omega))$ o espaço das funções de quadrado integrável, com peso μ e com valores no espaço $H^1_0(\Omega)$, isto é,

$$L^2_\mu(0,\infty; H^1_0(\Omega)) = \{f; \int_0^\infty \mu(s) \int_\Omega |\nabla f|^2 \, dx\, ds < \infty\}.$$

Este espaço munido do produto interno

$$(f,g)_{L^2_\mu} = \int_0^\infty \mu(s) \int_\Omega \nabla f(x,s).\nabla g(x,s)\, dx\, ds$$

é um espaço de Hilbert.

De agora em diante iremos denotar por $\mathcal{H}$ o seguinte espaço

$$\mathcal{H} = (H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega))^2 \times L^2_\mu(0,\infty; H^1_0(\Omega))$$

Em $\mathcal{H}$ considere o seguinte produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle &= \beta \int_\Omega \nabla u_1.\nabla v_1 dx + \int_\Omega u_2 v_2\, dx + \int_\Omega \nabla u_3.\nabla v_3\, dx + \int_\Omega u_4 v_4\, dx \\ &+ \alpha \int_\Omega (u_1 v_3 + u_3 v_1)\, dx + \int_0^\infty \mu(s) \int_\Omega \nabla u_5(x,s).\nabla v_5(x,s)\, dx\, ds \end{aligned}$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^T$.

Portanto,

$D(\mathcal{T}) = \{\eta \in L^2_g(0,\infty; H^1_0(\Omega)); \eta_s \in L^2_g(0,\infty; H^1_0(\Omega)), \eta(0) = 0\}$

e

$D(\mathcal{A}) = \{(u, \varphi, v, \psi, \eta)^T \in \mathcal{H}; \beta u - \int_0^\infty g(\tau)\eta(\tau)\ d\tau \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \varphi \in H^1_0(\Omega), v \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \psi \in H^1_0(\Omega), \eta \in D(\mathcal{T})\}$.

2.2 Hipóteses sobre o núcleo g.

Assumiremos que $g \in C^2$ e satisfaz

$$g(t) > 0, \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g(t) \leq g^{'}(t) \leq -k_1 g(t), |g^{''}(t)| \leq k_2 g(t). \qquad (2.14)$$

Para demonstrar a existência de solução do problema transformado usaremos o **Teorema 1.3**.

O lema seguinte é essencial para demonstração de existência de solução.

Lema 2.1 *Suponha que o núcleo g satisfaz as condições* (2.14)*. Então o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ de contração de classe C_0 sobre $\mathcal{H}$.*

Demonstração: O sistema $(2.8) - (2.13)$ é equivalente a

$$\frac{d}{dt}U = \mathcal{A}U,\ \ U(0) = U_0,\ \ U \in D(\mathcal{A})$$

onde $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$, $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0)^T$

É suficiente mostrar que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo. Para isso mostraremos inicialmente que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. De fato, do produto interno em $\mathcal{H}$, e da hipótese (2.14), temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U\rangle &= \beta\int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u\ dx + \int_\Omega (\beta\Delta u - \alpha v + \mathcal{T}\eta)u_t\ dx + \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v\ dx \\ &+ \int_\Omega (\Delta v - \alpha u)v_t\ dx + \alpha\int_\Omega (u_t v + u v_t)\ dx \\ &+ \int_0^\infty g(\tau)\int_\Omega \nabla(u_t - \eta_\tau(x,\tau)).\nabla\eta(x,\tau) dx\ d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta \int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx + \int_\Omega \beta \Delta u u_t \, dx + \alpha \int_\Omega v u_t \, dx + \int_\Omega \int_0^\infty g(\tau) \Delta \eta(\tau) u_t \, d\tau dx \\
&+ \int_\Omega \nabla v_t \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \Delta v v_t \, dx - \alpha \int_\Omega u v_t \, dx + \alpha \int_\Omega u_t v \, dx \\
&+ \alpha \int_\Omega u v_t \, dx + \int_0^\infty g(\tau) \int_\Omega \nabla (u_t - \eta_\tau(x,\tau)) \cdot \nabla \eta(x,\tau) \, dx \, d\tau \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty g(\tau) \Delta \eta(\tau) u_t \, dx \, d\tau + \int_0^\infty g(\tau) \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla \eta \, dx \, d\tau \\
&- \int_0^\infty g(\tau) \int_\Omega \nabla \eta_s \cdot \nabla \eta \, dx \, d\tau \\
&= - \int_0^\infty g(\tau) \int_\Omega \nabla \eta_s \cdot \nabla \eta \, dx \, d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(\tau) \int_\Omega |\nabla \eta|^2 \, dx \, d\tau \\
&\leq -\frac{k_1}{2} \int_0^\infty g(\tau) \int_\Omega |\nabla \eta|^2 \, dx \, d\tau \leq 0.
\end{aligned}
$$

De onde segue que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Portanto, pelo **Teorema 1.3**, é suficiente verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Para isto, seja $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$ e considere a equação resolvente

$$\lambda U - \mathcal{A} U = F$$

onde $U = (u, \varphi, v, \psi, \eta)^T$. Para $\lambda = 0$, temos:

$$-\varphi = f_1, \tag{2.15}$$

$$-\beta \Delta u + \alpha v - \mathcal{T} \eta = f_2, \tag{2.16}$$

$$-\psi = f_3, \tag{2.17}$$

$$-\Delta v + \alpha u = f_4, \tag{2.18}$$

$$-\varphi + \eta_s = f_5. \tag{2.19}$$

De (2.15) e (2.17), temos $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$ então $\eta \in L_g^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ e portanto $\eta \in D(\mathcal{T})$. De (2.16) e (2.18), temos:

$$-\beta \Delta u + \alpha v = f_2 + \mathcal{T}_\eta, \tag{2.20}$$

$$-\Delta v + \alpha u = f_4. \tag{2.21}$$

De (2.20), usando a fórmula de Green, temos:

$$\beta \int_\Omega \nabla u.\nabla \theta dx + \alpha \int_\Omega v\theta dx = \int_\Omega F_1 \theta dx, \ \ \forall \ \ \theta \in H_0^1(\Omega),$$

onde $F_1 = f_2 + \mathcal{T}_\eta$.

De (2.21), usando a fórmula de Green, temos:

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla \delta dx + \alpha \int_\Omega u\delta dx = \int_\Omega f_4 \delta dx, \ \ \forall \ \ \delta \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, obtemos o seguinte problema variacional:

Determinar $u, v \in H_0^1(\Omega)$, solução do problema

$$b((u,\theta),(v,\delta)) = \mathcal{X}(\theta,\delta), \forall \theta, \delta \in H_0^1(\Omega)$$

onde

$$b((u,\theta),(v,\delta)) = \beta \int_\Omega \nabla u.\nabla \theta dx + \alpha \int_\Omega v\theta dx + \int_\Omega \nabla v.\nabla \delta dx + \alpha \int_\Omega u\delta dx$$

$$\mathcal{X}(\theta,\delta) = \int_\Omega (f_2 + \mathcal{T}_\eta)\theta dx + \int_\Omega f_4 \delta dx$$

- $\mathcal{X}(\cdot,\cdot)$ é linear e contínua em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$
- b$(\cdot,\cdot)$ é bilinear, contínua e elíptica em $(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))^2$

Pelo lema de Lax-Milgran segue-se que existe uma única $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ solução do problema (2.16) - (2.18) e usando regularidade elíptica segue-se que $(u,v) \in (H_0^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$. Portanto $U = (u,\varphi,v,\psi,\eta)^T \in D(\mathcal{A})$.

Logo, $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

O resultado de existência e unicidade de solução é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 *: Sejam* $(u_0,u_1,v_0,v_1,\eta_0)^T \in D(\mathcal{A})$. *Então, existe uma única solução forte do sistema* $(2.8) - (2.13)$ *satisfazendo*

$$u \in C(0,\infty;V_1) \cap C^1(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0,\infty;L^2(\Omega))$$

$$v \in C(0,\infty;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0,\infty;L^2(\Omega))$$

$$\eta \in C(0,\infty;D(\mathcal{T}) \cap C^1(0,\infty;L_g^2(0,\infty;H_0^1(\Omega)))$$

onde $V_1 = \{u \in H_0^1(\Omega); \beta u - \int_0^\infty g(\tau)\eta(\tau)d\tau \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \eta \in D(\mathcal{T})\}$

Demonstração: É consequência imediata do lema anterior.

Capítulo 3

Falta de Decaimento Exponencial

Neste capítulo provaremos que o operador resolvente não é uniformemente limitado. Isto significa afirmar que o semigrupo $\mathcal{S}(t)$ em $\mathcal{H}$ não é exponencialmente estável. Para simplificação dos cálculos supomos que o nucleo é da forma $g(s) = e^{-\mu s}$, $s, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Aqui usaremos condições necessárias e suficientes para C_0-semigrupos não serem exponencialmente estável em um espaço de Hilbert.

O teorema a seguir é uma variante do Teorema 1.8 e foi obtido independentemente por L. Gearhart [4], F. Huang [5] e J. Pruss [8].

Teorema 3.1 *Seja $\mathcal{S}(t) = e^{\mathcal{A}t}$ um C_0-semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert, então $\mathcal{S}(t)$ é exponencialmente estável se e só se,*

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R},$$

e

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty,$$

onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$.

Para estudar o comportamento assintótico do semigrupo associado a (2.1) − (2.3) vamos considerar o problema espectral:

$$\begin{cases} -\Delta w_m = \lambda_m w_m \quad em \;\; \Omega, \\ w_m = 0 \quad sobre \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

Onde $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$.

O Teorema seguinte descreve o principal resultado desta seção.

Teorema 3.2 *Assuma que o núcleo é da forma* $g(s) = e^{-\mu s}$, $s, \mu \in \mathbb{R}^+$. *O semigrupo* $\mathcal{S}(t)$ *em* $\mathcal{H}$ *não é exponencialmente estável.*

Demonstração: Para provar que o semigrupo $\mathcal{S}(t)$ em $\mathcal{H}$ não é exponencialmente estável, consideremos uma sequência de funções limitadas $F_m = (f_{1,m}, f_{2,m}, f_{3,m}, f_{4,m}, f_{5,m}) \in \mathcal{H}$ para a qual as soluções correspondentes das equações resolventes não é limitada. Isto comprovará que o perador resolvente não é uniformemente limitado. Vamos considerar a equação:

$$i\lambda U_m - \mathcal{A}U_m = F_m.$$

Para simplificar a notação omitiremos o subindice m. Temos

$$\begin{cases} i\lambda u - \varphi = f_1, \\ i\lambda\varphi - \beta_0 \Delta u + \alpha v - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(x,s)ds = f_2, \\ i\lambda v - \psi = f_3, \\ i\lambda\psi - \Delta v + \alpha u = f_4, \\ i\lambda\eta - \varphi + \eta s = f_5. \end{cases} \tag{3.2}$$

Considerando $f_1 = f_3 = f_5 = 0$ e $f_2 = f_4 = w_m$, obtemos $\varphi = i\lambda u$ e $\psi = \iota\lambda v$. Então o sistema (3.2)assume a forma

$$\begin{cases} -\lambda^2 u - \beta_0 \Delta u + \alpha v - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(x,s)ds = w_m, \\ -\lambda^2 v - \Delta v + \alpha u = w_m, \\ i\lambda\eta + \eta_s - i\lambda u = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Procuremos solução da forma $u = aw_m, v = bw_m, \varphi = cw_m, \psi = dw_m, \eta(x,s) = \gamma(s)w_m$ com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e γ_s dependente de λ será determinado explicitamente na sequência. De (3.3) verificamos que a e b satisfazem

$$\begin{cases} -\lambda^2 a + \beta_0 a\lambda_m + \alpha b + \lambda_m \int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = 1, \\ -\lambda^2 b + \lambda_m b + \alpha a = 1, \\ \gamma_s + i\lambda\gamma - i\lambda a = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Resolvendo $(3.4)_3$ encontramos:

$$\gamma(s) = Ce^{-i\lambda s} + a. \tag{3.5}$$

Sendo $\eta(0) = 0$, então $C = -a$ e (3.5) pode ser escrito como,

$$\gamma(s) = a - ae^{-i\lambda s}. \tag{3.6}$$

De (3.6) temos

$$\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds = \int_0^\infty g(s)(a - ae^{-i\lambda s})ds = aa_0 - a\int_0^\infty g(s)e^{-i\lambda s}ds, \tag{3.7}$$

Onde $a_0 = \int_0^\infty g(s)ds$. Agora, escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_m}$ e usando as equações $(3.4)_1$ e $(3.4)_2$, obtemos:

$$a = \frac{1}{\alpha},$$

$$b = \frac{\lambda_m(1-\beta_0)}{\alpha^2} - \frac{\lambda_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \frac{1}{\alpha},$$

$$c = i\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\alpha},$$

$$d = i\sqrt{\lambda_m}\left(\frac{\lambda_m(1-\beta_0)}{\alpha^2} - \frac{\lambda_m}{\alpha}\int_0^\infty g(s)\gamma(s)ds + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Lembrando que $\varphi = cw_m = i\frac{\sqrt{\lambda_m}}{\alpha}w_m$. Temos $\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{\lambda_m}{\alpha^2}$. Dai obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\|U_m\|^2_{\mathcal{H}} \geq \lim_{m\to\infty}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_m}{\alpha^2} = \infty$$

o que conclui a demonstração. ■

Capítulo 4

Decaimento Polinomial

Consideremos primeiramente o sistema (2.8) – (2.13) e as hipóteses (2.14) sobre o nucleo g . Demonstraremos que a energia

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv + \int_0^\infty g(s)|\nabla \eta^t(s)|^2 ds)dx, \tag{4.1}$$

decai polinomialmente para zero quando o tempo t tende a infinito. Para isto introduzimos as energias de segunda e terceira ordem

$$E_2(t) = E(u_t, v_t, \eta_t), \quad E_3(t) = E(u_{tt}, v_{tt}, \eta_{tt}).$$

Então de (4.1) e (2.14) resulta

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\frac{K_1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla \eta^t(s)|^2 ds\right) dx, \tag{4.2}$$

$$\frac{d}{dt}E_2(t) \leq -\frac{K_1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla \eta_t^t(s)|^2 ds\right) dx, \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}E_3(t) \leq -\frac{K_1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla \eta_{tt}^t(s)|^2 ds\right) dx. \tag{4.4}$$

Introduzimos o funcional

$$F_1(t) = -\int_\Omega u_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta^t(s) ds\right) dx.$$

Então, temos o seguinte Lema:

Lema 4.1 *Para todo $\epsilon_1 > 0$, existe uma constante positiva $C_{\epsilon_1} > 0$, tal que*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_1(t) &\leq -\frac{\beta_1}{2}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{\beta_0\epsilon_1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&+ C_{\epsilon_1}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t(s)|^2 ds\right) dx \\
&+ \frac{\alpha C_{\epsilon_1}(\Omega)}{2}\int_\Omega |v|^2 dx,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde $\beta_1 = \int_0^\infty g(s)ds$.

Demonstração: Usando as equações (2.8) − (2.10) e as fórmulas de Green, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_1(t) &= -\int_\Omega u_{tt}\left\{\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right\} dx - \int_\Omega u_t\left\{\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right\} dx \\
&= \int_\Omega \left(\beta_0\nabla u + \int_0^\infty g(s)\eta^t(.,s)ds - \alpha v\right)\left\{\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right\} dx \\
&- \int_\Omega u_t\left\{\int_0^\infty g(s)\eta_t^t(s)ds\right\} dx \\
&= \beta_0\int_\Omega \left\{\int_0^\infty g(s)\nabla\eta^t(s)ds\right\}\nabla u dx + \int_\Omega \left\{\int_0^\infty g(s)\nabla\eta^t(.,s)ds\right\}^2 dx \\
&+ \alpha\int_\Omega v\left\{\int_0^\infty g(s)\eta^t(s)ds\right\} dx - \int_\Omega u_t\left\{\int_0^\infty g(s)\eta_t^t(s)ds\right\} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo, $\eta_t = u_t - \eta_s$, temos

$$-\int_\Omega u_t\left\{\int_0^\infty g(s)(u_t - \eta_s^t)\, ds\right\} dx = -\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_\Omega u_t^2\, dx + \int_\Omega u_t\left\{\int_0^\infty g(s)\eta_s^t\, ds\right\}\, dx.$$

Assim, a equação anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_1(t) &= \beta_0\int_\Omega \nabla u\cdot\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta^t(x,s)\, ds\right)\, dx \\
&+ \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta^t(x,s)\, ds\right)^2\, dx \\
&+ \alpha\int_\Omega v\left(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)\, ds\right) - \beta_1\int_\Omega u_t^2\, dx \\
&+ \int_\Omega u_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(x,s)\, ds\right)\, dx
\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_0^\infty u_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(x,s) \right) dx = -\int_\Omega u_t \left(\int_0^\infty g'(s)\eta^t(x,s)ds \right) dx$$

e

$$\int_0^\infty u_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(x,s) \right) dx \leq \beta_1 \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds \right) dx.$$

Então usando a desigualdade de Young e as hipóteses (2.13), concluimos o resultado. ■

Considere o seguinte funcional

$$F_2(t) = F_1(u_t, v_t, u_t^t).$$

Então usando o Lema (4.1), obtemos :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &\leq -\frac{\beta_1}{2}\int_\Omega u_{tt}^2 dx + \frac{\beta_0\epsilon_1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ &+ C\epsilon_1 \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta_t^t(s)|^2 ds \right) dx \\ &+ \frac{\alpha C(\Omega)\epsilon_1}{2}\int_\Omega |v_t|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definimos o funcional

$$Z_1(t) = \int_\Omega u_t u dx$$

Usando (2.2) − (2.3) e as fórmulas de Green, temos :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_1(t) &\leq \int_\Omega u_t^2 dx - \frac{\beta_0}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &+ \frac{\beta_1}{2\beta_0}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t(x,s)|^2 ds \right) dx \\ &- \alpha \int_\Omega uv dx \end{aligned} \tag{4.7}$$

Denotemos por $Z_2(t)$ o seguinte funcional

$$Z_2(t) = Z_1(u_t, v_t, \eta_t^t).$$

Então de (4.7), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Z_2(t) &\leq \int_\Omega u_{tt}^2 dx - \frac{\beta_0}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\ &+ \frac{\beta_1}{2\beta_0}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta_t^t(x,s)|^2 ds \right) dx \\ &- \alpha \int_\Omega u_t v_t dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Lema 4.2 *Para todo $\epsilon_2 > 0$, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &\leq -\alpha\int_\Omega |v_t|^2dx + \left(\frac{1}{2\epsilon_2}+\frac{\beta_0}{2\epsilon_2}\right)\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta_{tt}^t|^2ds\right)dx \\
&+ \left(\frac{k_2}{2\epsilon_2}+\frac{\beta_1}{2\epsilon_2}+\frac{k_2\beta_0}{2\epsilon_2}\right)\int_\Omega\left(\int_0^\infty |g''(s)||\nabla\eta^t|^2ds\right)dx \qquad (4.9)\\
&+ \left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{2}+\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\epsilon_2\int_\Omega|\nabla v|^2dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega|u_{tt}|^2dx \\
&+ \frac{\alpha c(\Omega)}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx.
\end{aligned}$$

Demonstração: Seja

$$\int_\Omega u_{ttt}v_tdx - \beta_0\int_\Omega \nabla u_t\ v_t\ dx - \int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_s^t(x,s)dsv_tds\right) = -\alpha\int_\Omega v_t^2dx. \quad (4.10)$$

Note que,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}\ v_t\ dx = \int_\Omega u_{ttt}\ v_t\ dx + \int_\Omega u_{tt}\ v_{tt}\ dx,$$

que implica

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{ttt}\ v_t\ dx &= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}\ v_t\ dx - \int_\Omega u_{tt}\ v_{tt}\ dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}\ v_t\ dx - \int_\Omega u_{tt}\ \Delta v\ dx + \alpha\int_\Omega u_{tt}\ u\ dx \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}\ v_tdx + \int_\Omega \nabla u_{tt}\nabla v dx \\
&+ \alpha\int_\Omega u_{tt}\ udx\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_s^t(x,s)ds\nabla v_tds\right)\nabla v_tdx \\
&= \frac{d}{dt}\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_s^t(x,s)ds\right)\nabla vdx - \int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_{ss}^t(x,s)ds\right)\nabla v\ dx.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
-\beta_0\int_\Omega\nabla u_t\ v_tdx &= \beta_0\int_\Omega\nabla u_t\ \nabla v_tdx \\
&= \beta_0\frac{d}{dt}\int_\Omega\nabla u_t\ \nabla v\ dx - \beta_0\int_\Omega\nabla u_{tt}\nabla vdx.
\end{aligned}$$

Considere o seguinte funcional

$$\Phi(t) = \int_\Omega u_{tt}\ v_tdx + \beta_0\int_\Omega\nabla u_t\ \nabla vdx + \int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_t^t(x,s)ds\right)\nabla v\ dx.$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &= -\int_\Omega\nabla u_{tt}\nabla vdx - \alpha\int_\Omega u_{tt}udx \\
&+ \int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_{ss}^t(x,s)ds\right)\nabla vdx \\
&+ \beta_0\int_\Omega\nabla u_{tt}\nabla vdx - \alpha\int_\Omega|v_t|^2dx \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Considerando (2.10) deduzimos que

$$u_{tt} = \eta^t_{tt} - \eta^t_{ss}$$

Considerando $\beta_1 = \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta_1 \int_\Omega \nabla u_{tt} \cdot \nabla v dx &= \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla u_{tt} ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)(\nabla \eta^t_{tt} - \nabla \eta^t_{ss}) ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&- \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{ss} ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&- \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right) \cdot \nabla v dx. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.11) em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &= -\frac{1}{\beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right) \cdot \nabla v dx \\
&+ \frac{1}{\beta_1} \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right) \cdot \nabla v dx - \alpha \int_\Omega u_{tt} u dx \\
&+ \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right) \nabla v dx + \frac{\beta_0}{\beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right) \nabla v dx \\
&- \frac{\beta_0}{\beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right) \cdot \nabla v dx - \alpha \int_\Omega |v_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1 \beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_1}{2\beta_1} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&+ \frac{\alpha}{2} \int_\Omega |u_{tt}|^2 dx + \frac{\alpha C(\Omega)}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon_1 \beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_1}{2\beta_1} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&+ \frac{\beta_0}{2\varepsilon_1 \beta_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \nabla \eta^t_{tt} ds \right)^2 dx + \frac{\varepsilon_1 \beta_0}{2\beta_1} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&+ \frac{\beta_0}{2\beta_1 \varepsilon_1} \int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s) \nabla \eta^t ds \right)^2 dx + \frac{\beta_0 \varepsilon_1}{2\beta_1} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&- \alpha \int_\Omega |v_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta_{tt}^t ds\right)^2 dx \leq \beta_1 \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta_{tt}^t|^2 ds\right) dx$$

e

$$\frac{1}{2\varepsilon_1\beta_1}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g''(s)\nabla\eta^t ds\right)^2 dx \leq \frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega \left(\int_0^\infty |g''(s)||\nabla\eta^t|^2 ds\right) dx.$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) &\leq \left(\frac{1}{2\varepsilon_2}+\frac{\beta_0}{2\varepsilon_2}\right)\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta_{tt}^t|^2 ds\right) dx \\
&+ \left(\frac{1}{2\varepsilon_2}+\frac{\beta_1}{2\varepsilon_2}+\frac{\beta_0}{2\varepsilon_2}\right)\int_\Omega \left(\int_0^\infty |g''(s)||\nabla\eta^t|^2 ds\right) dx \\
&+ \left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{2}+\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\varepsilon_2\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx \\
&+ \frac{\alpha C(\Omega)}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha\int_\Omega |v_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado. ■

Finalmente, definimos o funcional

$$\psi(t) = \int_\Omega v_t v\ dx. \tag{4.13}$$

Da equação (2.9) segue que

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega |v_t|^2 dx - \alpha\int_\Omega uv\ dx. \tag{4.14}$$

Agora estamos em condições de provar o decaimento polinomial.

Teorema 4.1 *Assuma que o núcleo g da memória satisfaz as condições (2.14) e os dados iniciais verifica.*

$$u_0, v_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \eta_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega))\cap H_0^1(\Omega), u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega).$$

Então a energia $E(t)$ decai polinomialmente a zero, isto é, existe uma constante positiva C, sendo independente dos dados iniciais, tal que

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0)+E_2(0)+E_3(0)).$$

Além disso, se $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, n) \in D(\mathcal{A}^k)$. Então:

$$\|T(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^k}\|\mathcal{A}^k U_0\|_{\mathcal{H}} \tag{4.15}$$

Demonstração: Definamos $\mathcal{L}$, como

$$\mathcal{L}(t) = N_1(E(t) + E_2(t) + E_3(t) + N_2(F_1(t) + F_2(t) + N_3(Z_1 + Z_2) + N_4\Phi(t) + \psi(t).$$

Então usando as hipóteses (2.10) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad &\leq \quad -\left(\frac{N_1k_1}{2} - \frac{\beta_1}{\beta_0} - C_{\varepsilon_1} - N_4k_2\left(\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{\beta_1}{2\varepsilon_1} + \frac{\beta_0}{2\varepsilon_1}\right)\right)\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t|^2 ds\right)dx \\
&- \quad \left(\frac{N_2b_1}{2} - N_3\right)\int_\Omega u_t^2 dx - \left(\frac{N_3\beta_0}{2} - \frac{N_2\beta_0\varepsilon_1}{2} - \frac{\alpha C(\Omega)}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&- \quad \left(1 - \frac{C(\Omega)N_2\alpha\varepsilon_1}{2} - \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{2} + \frac{\beta_0}{\beta_1}\right)\varepsilon_1\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&- \quad \left(\frac{N_1k_1}{2} - \left(\frac{1}{2\varepsilon_1} + \frac{\beta_0}{2\varepsilon_1}\right)\right)\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t_{tt}|^2 ds\right)dx \\
&- \quad \left(\alpha - \frac{N_2\alpha\varepsilon_1}{2}\right)\int_\Omega |v_t|^2 dx \\
&- \quad \left(\frac{N_1k_1}{2} - C_{\varepsilon_1} - \frac{\beta_1}{2\beta_0}\right)\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)|\nabla\eta^t_t|^2 ds\right)dx \\
&- \quad \left(\frac{N_2\beta_1}{2} - N_3 - \frac{\alpha}{2}\right)\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx \\
&- \quad \left(\frac{N_3\beta_0}{2} - \frac{\beta\varepsilon_1 N_2}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u_t|^2 dx \\
&- \quad (N_3 + 1)\alpha\int_\Omega uv dx - \alpha\int_\Omega u_t v_t dx.
\end{aligned}$$

Escolhendo $N_1 > N_2 > N_3 > N_4 > 0$ grande e tomando $\varepsilon_1 > 0$ pequeno obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -\gamma E(t),$$

para algum $\gamma > 0$. Consequentemente

$$\gamma\int_0^t E(s)ds \leq \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{4.16}$$

Dessa forma existe uma constante $\xi > 0$ tal que:

$$\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t) \leq \xi(E(0) + E_2(0) + E_3(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.17}$$

De (4.16) e (4.17) obtemos:

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{\xi}{\gamma}(E(0) + E_1(0) + E_2(0)). \tag{4.18}$$

Desde que

$$\frac{d}{dt}\{tE(t)\} = E(t) + t\frac{d}{dt}E(t) \leq E(t), \tag{4.19}$$

obtemos de (4.18)

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_2(0) + E_3(0)),$$

onde $C = \dfrac{\xi}{\gamma}$.

Finalmente se $U_0 \in D(A^k)$, usando os resultados de Prüss [8], obtemos (4.15) o que conclui a prova. ■

Bibliografia

[1] F. ALABAU, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015 - 1020, 1999.*

[2] C. DAFERMOS, *Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Ration. Mech. Anal. 37 (1970) 297-308.*

[3] M. FABRIZIO, *Mathematical problems in linear viscoelasticity, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 12, Philadelphia, 1992.*

[4] L. GEARHART, *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces,* Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[5] F. HUANG, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space,* Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43 - 56, 1985.

[6] F. ALABAU, P. CANNARSA E V. KOMORNIK , *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations J. Evol. Equ., 2, 127 - 150, 2002.*

[7] A. PAZY,. *Semigroups of linear operators and aplications to partial differenial equation, Springer, New York, 1983.*

[8] J. PRÜSS, *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. AMS 28, 847-857, (1984).

[9] J. E. M. RIVERA, *Estabilização de semigrupos e aplicações, Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.*

[10] M. L. SANTOS, M. P. C ROCHA., S. C. GOMES, *Polynomial Stability of a coupled system of waves equations weakly dissipative. Applicable Analysis, v. 86, p. 1293 - 1302, 2007.*

[11] Z. Liu e S. Zheng,. *Semigroups associated with dissipative systems,* In CRC Reseach Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, 1999.