UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Rafael dos Reis Abreu**

# Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas com Falta de Compacidade envolvendo o Operador p-Laplaciano

**BELÉM**

**2009**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Rafael dos Reis Abreu**

# Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas com Falta de Compacidade envolvendo o Operador p-Laplaciano

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo**

**BELÉM**

**2009**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Rafael dos Reis Abreu**

# Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas com Falta de Compacidade envolvendo o Operador p-Laplaciano

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 16 de Janeiro de 2009.

Conceito:_____

Banca Examinadora

_____

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Faculdade de Matemática - UFPA

_____

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA

_____

Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira
Departamento de Matemática - UNICAMP

# Dedicatória

*Ao meu amado pai.*

# Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos...

... A Deus, por tudo o que me proporciona;

... À minha família, pelo amor, compreensão e apoio;

... Ao professor Giovany Figueiredo, pela excelente orientação, incentivo, disponibilidade, compreensão, amizade e sobretudo pelo exemplo de profissional sério e competente;

... À Cláudia Aline, minha "maninha", pela a mais intensa amizade que tive durante o curso, pelo extremo companheirismo durante os nossos estudos sobre Equações Diferenciais Parciais Elípticas e pelo exemplo de estudante aplicada e competente;

... Aos professores Mauro Santos, Ducival Pereira, Marcus Pinto e Paulo Marques, os quais com seus conhecimentos me proporcionaram uma base sólida a qual fez com que esse trabalho fosse menos árduo;

... A todos os meus amigos do curso de mestrado, em especial a Dalmí Gama, pelo apoio, força, companheirismo e incentivo;

... Aos amigos Denilson Pereira, João Rodrigues e Kelmem Cruz, pela sincera amizade, incentivo e por terem esclarecido algumas dúvidas que surgiram durante a produção deste trabalho;

... Ao meu eterno amigo Raimundo Mangabeira, pelos muitos livros que me deu ou me emprestou, pelas dúvidas que me esclareceu, pelas lições de LATEX, por algumas vezes ter me orientado nas minhas horas de fazer algumas escolhas importantes, pelo incentivo e sobretudo por ter acreditado que eu conseguiria;

... Aos professores Dr. Lucas Catão Ferreira e Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento, por terem aceitado fazer parte da banca examinadora de minha dissertação;

... Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

# Resumo

A proposta deste trabalho é estudar um resultado de existência de solução fraca positiva do seguinte problema com falta de compacidade:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

cujas hipóteses sobre a função $a$ serão introduzidas oportunamente.

O resultado em questão será obtido utilizando métodos variacionais.

**Palavras-chave:** Equação Elíptica. Falta de Compacidade. p-Laplaciano. Método Variacional. Princípio de Concentração e Compacidade de Lions.

# Abstract

The purpose of this work is to prove the existence of positive solution for the following problem with lack of compactness:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

whose hypotheses about the function $a$ will be introduced opportunely.

Variational methods will be used to prove this result.

**Key-words:** Elliptic equation. Lack of Compactness. p-Laplacian. Variational Method. Concentration-Compactness Principle.

# Conteúdo

# Introdução

Nesta dissertação estudaremos um resultado de existência de solução para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $p^* = Np/(N-p)(N > p \geq 2)$, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ é uma função com $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, $\Delta_p$ é o operador p-Laplaciano, ou seja,

$$\Delta_p u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

e

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)\}.$$

Este estudo será feito seguindo um artigo de C. O. Alves [1], que usou técnicas variacionais e topológicas para tratar o problema $(P)$, os quais descreveremos abaixo.

Este problema apresenta algumas dificuldades, como por exemplo a falta de compacidade pelo fato de estarmos trabalhando no $\mathbb{R}^N$ e a não linearidade ter crescimento crítico. Quando isso ocorre, em geral, a condição Palais-Smale não é válida. Para contornar estas e outras dificuldades, usamos o caso limite do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [11], o Resultado de Compacidade Global de Struwe e Teoria do Grau.

Para estabelecer o nosso principal resultado, precisamos de algumas definições e notações prévias.

Vamos denotar por $S$ a melhor constante da imersão

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja,

$$S = \min_{\substack{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx)^{p/p^*}} \ .$$

Denotamos por $I : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia relacionado a $(P)$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx.$$

O nosso principal teorema é o seguinte:

**Teorema 1** *: Seja $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa tal que*

*(a1)* $a(x) > 0$ *em uma vizinhança de um ponto* $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

*(a2)* $a \in L^s(\mathbb{R}^N)$ $\forall s \in [p_1, p_2]$, *onde* $1 < p_1 < \dfrac{N}{p} < p_2$ *com* $p_2 < (N(p-1))/(p^2 - N)$ *se* $N < p^2$ *e*

*(a3)* $|a|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N)} < S(2^{p/N} - 1)$.

*Então* $(P)$ *tem uma solução positiva* $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *com* $\dfrac{1}{N}S^{N/p} < I(u_0) < \dfrac{2}{N}S^{N/p}$.

Para uma melhor compreensão, este texto será escrito com a seguinte estruturação.

No capítulo 1 começaremos apresentando alguns resultados preliminares que serão usados na demonstração do Teorema principal, como por exemplo propriedades sobre a seqüência Palais-Smale do funcional associado ao problema limite, o Lema de Compacidade Global de Struwe e um resultado do tipo Brezis-Lieb para não linearidades que aparecerão no decorrer dos estudos.

No capítulo 2 mostraremos a existência de solução para o problema $(P)$ combinando a Técnica de Minimização e Teoria do Grau.

Para a completeza deste trabalho, colocaremos alguns resultados em apêndices, conforme descreveremos abaixo.

No apêndice A mostraremos a regularidade do funcional associado ao problema $(P)$, bem como alguns resultados importantes.

No apêndice B enunciaremos os resultados que foram usados nesta dissertação indicando a bibliografia onde as demonstrações poderão ser encontradas.

No apêndice C faremos a definição do Grau de Brower e demonstraremos algumas de suas principais propriedades.

No corpo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$||.|| = ||.||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$

$|.|_p = ||.||_{L^p(\mathbb{R}^N)}$

$||.||_{D'} = ||.||_{(D^{1,p}(\mathbb{R}^N))'}$

# Capítulo 1

# Resultados Preliminares

Para provar a existência de soluções para $(P)$, mostraremos um lema que estuda as seqüências $(P.S.)_c$ do funcional energia $I$ relacionado a $(P)$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \ , \ \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Usando o caso limite do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [11], estudaremos a seqüência Palais-Smale do funcional energia $I_\infty : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx$$

relacionado ao problema limite

$$(P_\infty) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

**Lema 1** *: Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$. Então:*
*(a) $(u_n)$ é uma seqüência limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*
*(b) Existe $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $I'_\infty(u) = 0$.*
*(c) Se $c < \frac{1}{N}S^{N/p}$, então a menos de subseqüência, $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $I_\infty$ satisfaz a condição $(P.S.)_c$.*

**Demonstração de (a)**:

Desde que $(u_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$, temos que:

$$I_\infty(u_n) \to c \tag{1.1}$$

e

$$||I'_\infty(u_n)||_{D'} \to 0. \tag{1.2}$$

De (1.1), temos que $(I_\infty(u_n))$ é uma seqüência limitada de números reais e portanto podemos tomar $k = \sup_{n\in\mathbb{N}} I_\infty(u_n)$.

De (1.2), por definição, segue que tomando $\varepsilon = p^* > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||I'_\infty(u_n)||_{D'} < p^* \ , \ \forall n > n_0.$$

Daí,

$$-\frac{1}{p^*}I'_\infty(u_n)u_n \leq \frac{1}{p^*}|I'_\infty(u_n)u_n| \leq \frac{1}{p^*}||I'_\infty(u_n)||_{D'}||u_n|| < ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Temos então que

$$I_\infty(u_n) - \frac{1}{p^*}I'_\infty(u_n)u_n < k + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & I_\infty(u_n) - \frac{1}{p^*}I'_\infty(u_n)u_n \\ = \ & \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx - \frac{1}{p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx\right) \\ = \ & \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx = \frac{1}{N}||u_n||^p. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{N}||u_n||^p < k + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0. \tag{1.3}$$

Suponhamos por contradição que $(u_n)$ não seja limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $||u_{n_j}|| \to +\infty$. De (1.3) temos que,

$$\frac{1}{N} < \frac{k}{||u_{n_j}||^p} + \frac{1}{||u_{n_j}||^{p-1}} \ , \ \forall n_j > n_0$$

e fazendo $n_j \to \infty$ segue que

$$\frac{1}{N} \leq 0,$$

o que é uma contradição.

Portanto $(u_n)$ é uma seqüência limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

**Demonstração de (b)**:

Do fato de que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ existe $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e por outro lado obtemos também que $(u_n)$ é limitada

em $D^{1,p}(B_R)$ para todo $R > 0$. Desde que $p \in [1, p^*)$ segue que $D^{1,p}(B_R) \hookrightarrow L^p(B_R)$ é uma imersão compacta para todo $R > 0$. Logo fixando $R = 1$, existe $(u_{1n}) \subset (u_n)$ tal que $u_{1n} \to u$ em $L^p(B_1)$ e daí, $u_{1n}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $B_1$. Fixando $R = 2$, temos que $(u_{1n})$ é limitada em $D^{1,p}(B_2)$ e portanto existe $(u_{2n}) \subset (u_{1n}) \subset (u_n)$ tal que $u_{2n} \to u$ em $L^p(B_2)$ e daí $u_{2n}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $B_2$. Seguindo este mesmo raciocínio fixando $k \in \mathbb{N}$, existe $(u_{kn}) \subset (u_n)$ tal que $u_{kn}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $B_k$.

Agora vamos mostrar que a seqüência $(u_{jj})$ é tal que $u_{jj}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Consideremos $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, onde $S_k = \{x \in B_k; u_{kn}(x) \not\to u(x)\}$.

Temos que $|S| = 0$.

Seja agora $x \in \mathbb{R}^N \backslash S$.

Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$ e $u_{j_0 n}(x) \to u(x)$.

Para $j \geq j_0$ temos que $x \in B_j$ e $(u_{jj}(x))$ é uma subseqüência de $(u_{j_0 n}(x))$ e portanto $u_{jj}(x) \to u(x)$.

Concluimos então que $u_{jj}(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Denotando ainda tal subseqüência por $(u_n)$ obtemos que

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Queremos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e para isto vamos usar o Lema de Brezis-Lieb (veja [8]).

Consideremos a seqüência $f_n(x) = |u_n(x)|^{p^*-2} u_n(x)$ e a função $f(x) = |u(x)|^{p^*-2} u(x)$. Temos que, a menos de subseqüência, $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e que

$$\frac{p^*}{p^* - 1} > 1.$$

Notemos que, $\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^{p^*/(p^*-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx = |u_n|_{p^*}^{p^*}$ e desde que $(u_n)$ é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe $M > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^{p^*/(p^*-1)} dx = |u_n|_{p^*}^{p^*} < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e com isso obtemos também que $(f_n) \subset L^{p^*/(p^*-1)}(\mathbb{R}^N)$. Além disso $f \in L^{p^*/(p^*-1)}(\mathbb{R}^N)$, pois $\int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p^*/(p^*-1)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx$ e desde que $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p^*/(p^*-1)} dx < +\infty$.

Então do Lema de Brezis-Lieb, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

Vamos mostrar que, a menos de subseqüência, $\dfrac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ para cada $i = 1, 2, \ldots, N$.

De fato, seja $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B_{1/2}(0) \\ 0 \text{ se } x \in B_1^c(0). \end{cases}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ definamos

$$\Psi_\varepsilon(x) = \Phi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)$$

onde $\{x_j\}_{j \in J}$ é uma família de pontos do $\mathbb{R}^N$ que será fixada posteriormente.

Notemos que

$$\Psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B_{\varepsilon/2}(x_j) \\ 0 \text{ se } x \in B_\varepsilon^c(x_j). \end{cases}$$

Mostraremos que para cada $\varepsilon > 0$ a seqüência $(\Psi_\varepsilon u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\begin{aligned} ||\Psi_\varepsilon u_n||^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\Psi_\varepsilon u_n)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_\varepsilon u_n + \Psi_\varepsilon \nabla u_n|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_\varepsilon u_n|^p dx + 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_\varepsilon \nabla u_n|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Psi_\varepsilon|^p |u_n|^p dx + 2^p ||u_n||^p. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$ temos

$$||\Psi_\varepsilon u_n||^p \leq 2^p |\nabla \Psi_\varepsilon|_N^p |u_n|_{p^*}^p + 2^p ||u_n||^p$$

e da imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$||\Psi_\varepsilon u_n||^p \leq C ||u_n||^p$$

e desde que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue que $(\Psi_\varepsilon u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Assim,

$$I'_\infty(u_n)(\Psi_\varepsilon u_n) \to 0 \text{ em } \mathbb{R} \tag{1.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &I'_\infty(u_n)(\Psi_\varepsilon u_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla(\Psi_\varepsilon u_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \Psi_\varepsilon u_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\varepsilon u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \Psi_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \Psi_\varepsilon u_n dx \\ &= I'_\infty(u_n)(\Psi_\varepsilon u_n) + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_\varepsilon dx.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Desde que $(u_n)$ é uma seqüência limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que $(|u_n|^{p^*})$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e assim, a menos de identificação, $(|u_n|^{p^*})$ é uma seqüência limitada em $M(\mathbb{R}^N)$, onde $M(\mathbb{R}^N)$ denota o conjunto das medidas de Radon. Daí, a menos de subseqüência, $|u_n|^{p^*} \rightharpoonup \hat{\nu}$ em $M(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\omega dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\nu}\omega dx \ , \ \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Analogamente justifica-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \omega dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu}\omega dx \ , \ \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions (veja o Teorema 15 no apêndice B), temos que as medidas $\hat{\nu}$ e $\hat{\mu}$ são da seguinte forma:

$$\hat{\nu} = |u|^{p^*} + \nu \ \ e \ \ \hat{\mu} \geq |\nabla u|^p + \mu,$$

onde $\nu = \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$, $\mu = \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$ e $\mu_j, \nu_j \geq 0$, com $J$ no máximo enumerável.

Temos então que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\omega dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\omega dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega d\nu \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \omega dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu}\omega dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \omega dx + \int_{\mathbb{R}^N} \omega d\mu.\end{aligned}$$

Desde que $\Psi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^N)$, então existem medidas $\nu$ e $\mu$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon d\nu \tag{1.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \Psi_\varepsilon dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \hat{\mu}\Psi_\varepsilon dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \Psi_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon d\mu. \tag{1.8}$$

Então de (1.5), (1.6), (1.7) e (1.8) obtemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \Psi_\varepsilon u_n dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon d\nu - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \Psi_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon d\mu\end{aligned}$$

e lembrando que $\text{supp}(\Psi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(x_j)$ temos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \Psi_\varepsilon u_n dx \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx + \int_{B_\varepsilon(x_j)} \Psi_\varepsilon d\nu - \int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla u|^p \Psi_\varepsilon dx - \int_{B_\varepsilon(x_j)} \Psi_\varepsilon d\mu.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Notemos que para cada $\varepsilon > 0$,

$$\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon \chi_{B_\varepsilon(x_j)} dx$$

e

$$\Big||u(x)|^{p^*}\Psi_\varepsilon(x)\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x)\Big| \leq |u(x)|^{p^*},$$

onde $|u|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\varepsilon \to 0$

$$|u(x)|^{p^*}\Psi_\varepsilon(x)\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x) \to 0 \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo, pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{p^*}\Psi_\varepsilon dx = 0. \tag{1.10}$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente concluimos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x_j)} |\nabla u|^p \Psi_\varepsilon dx = 0. \tag{1.11}$$

Notemos ainda que para cada $\varepsilon > 0$,

$$|\Psi_\varepsilon(x)\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x)| \leq 1$$

e se $\varepsilon \to 0$, então

$$\Psi_\varepsilon(x)\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x) \to \chi_{\{x_j\}}.$$

Desde que as medidas de Radon são finitas, temos que 1 é integrável com relação a $\nu$ e daí, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x_j)} \Psi_\varepsilon d\nu = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \Psi_\varepsilon \chi_{B_\varepsilon(x_j)} d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\{x_j\}} d\nu = \int_{\{x_j\}} d\nu. \tag{1.12}$$

Do mesmo modo tem-se que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x_j)} \Psi_\varepsilon d\mu = \int_{\{x_j\}} d\mu. \tag{1.13}$$

Verifiquemos agora que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon u_n dx\right]=0. \tag{1.14}$$

De fato, primeiramente observemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}|u_n||\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon|dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-1}|u_n||\nabla\Psi_\varepsilon|dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$, encontramos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\leq\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p}.$$

Desde que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\Psi_\varepsilon\equiv 1$ em $B_{\varepsilon/2}(x_j)$ e $\mathrm{supp}(\Psi_\varepsilon)\subset B_\varepsilon(x_j)$, temos que

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Psi_\varepsilon|^p|u_n|^p dx\right)^{1/p}\\ &=||u_n||^{(p-1)}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)}|\nabla\Psi_\varepsilon|^p|u_n|^p dx\right)^{1/p}\\ &\leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)}|\nabla\Psi_\varepsilon|^p|u_n|^p dx\right)^{1/p},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)}|u_n|^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p}. \tag{1.15}$$

Da imersão compacta $D^{1,p}(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))\hookrightarrow L^p(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))$ obtemos que, a menos de subseqüência, $u_n\to u$ em $L^p(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))$ e portanto, a menos de subseqüência, $u_n(x)\to u(x)$ q.t.p. em $B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)$ e existe $g\in L^p(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))$ tal que $|u_n(x)|\leq g(x)$ q.t.p. em $B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)$. Assim, fazendo $f_n(x)=|u_n(x)|^p|\nabla\Psi_\varepsilon(x)|^p$, concluimos que $f_n(x)\to f(x)$ q.t.p. em $B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)$, onde $f(x)=|u(x)|^p|\nabla\Psi_\varepsilon(x)|^p$. Além disso,

$$|f_n(x)|=|u_n(x)|^p|\nabla\Psi_\varepsilon(x)|^p\leq g(x)^p|\nabla\Psi_\varepsilon(x)|^p$$

e desde que $|\nabla\Psi_\varepsilon|^P\in L^\infty(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))$, segue que $g^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p\in L^1(B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j))$.

Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)}|u_n|^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p dx=\int_{B_\varepsilon(x_j)\backslash B_{\varepsilon/2}(x_j)}|u|^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p dx.$$

Portanto de (1.15) temos que

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_j)}|u|^p|\nabla\Psi_\varepsilon|^p dx\right)^{1/p}.$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder com expoentes $N/(N-p)$ e $N/p$ no segundo membro da desigualdade obtemos

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\\&\leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_j)}|u|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_j)}|\nabla\Psi_\varepsilon|^N dx\right)^{p/N}\end{aligned}$$

e desde que $B_\varepsilon(x_j)\setminus B_{\varepsilon/2}(x_j)\subset B_\varepsilon(x_j)$, segue que

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\\&\leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}|u|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}|\nabla\Psi_\varepsilon|^N dx\right)^{p/N}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Notemos que fazendo $y=\dfrac{x-x_j}{\varepsilon}$, pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial\Psi_\varepsilon(x)}{\partial x_i}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_i}\ ,\ \text{para cada } i=1,2,\ldots,N$$

e portanto

$$\nabla\Psi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\nabla\Phi(y).$$

Obtemos também

$$dx=\varepsilon^N dy$$

e além disso, se $x\in B_\varepsilon(x_j)$ tem-se $y\in B_1(0)$. Assim,

$$\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}|\nabla\Psi_\varepsilon|^N dx\right)^{p/N}=\left(\int_{B_1(0)}\frac{1}{\varepsilon^N}|\nabla\Phi|^N\varepsilon^N dy\right)^{p/N}=\left(\int_{B_1(0)}|\nabla\Phi|^N dy\right)^{p/N}$$

e de (1.16) obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\leq C_1\left(\int_{B_\varepsilon(x_j)}|u|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}.\tag{1.17}$$

Agora notemos que para cada $\varepsilon>0$

$$\left||u(x)|^{p^*}\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x)\right|\leq|u(x)|^{p^*}$$

com $|u|^{p^*}\in L^1(\mathbb{R}^N)$. E além disso, se $\varepsilon\to 0$, então

$$|u(x)|^{p^*}\chi_{B_\varepsilon(x_j)}(x)\to 0\ \ \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon(x_j)}|u|^{p^*}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\chi_{B_\varepsilon(x_j)}dx = 0$$

e portanto decorre de (1.17) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}u_n\nabla u_n\nabla\Psi_\varepsilon dx\right|\right] = 0$$

e (1.14) de fato ocorre.

Assim podemos passar ao limite de $\varepsilon \to 0$ em (1.9) e daí, de (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) segue que

$$0 \leq \int_{\{x_j\}} d\nu - \int_{\{x_j\}} d\mu,$$

ou seja,

$$\mu(\{x_j\}) \leq \nu(\{x_j\}). \tag{1.18}$$

Além disso,

$$\nu(\{x_j\}) = \int_{\{x_j\}} d\nu = \int_{\{x_j\}} \Psi_\varepsilon d\nu = \nu_j\Psi_\varepsilon(x_j) = \nu_j$$

e da mesma forma

$$\mu(\{x_j\}) = \int_{\{x_j\}} d\mu = \int_{\{x_j\}} \Psi_\varepsilon d\mu = \mu_j\Psi_\varepsilon(x_j) = \mu_j.$$

Do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions temos que

$$S\nu_j^{p/p^*} \leq \mu_j$$

e por (1.18) obtemos

$$S\nu_j^{p/p^*} \leq \nu_j.$$

Portanto,

$$S^{N/p} \leq \nu_j$$

implicando que $\nu_j \not\to 0$ e sendo $\sum_{j\in J}\nu_j^{p/p^*} < +\infty$, concluimos que $J$ é finito ou vazio.

Agora estudaremos os seguintes casos.

**1º Caso:** Existe uma quantidade de índices $j$ tal que $\nu_j > 0$.

Seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_0}(x_1) \subset B_{1/2\varepsilon_0}(0)$, $B_{\varepsilon_0}(x_2) \subset B_{1/2\varepsilon_0}(0)$, ... , $B_{\varepsilon_0}(x_R) \subset B_{1/2\varepsilon_0}(0)$ e $B_{\varepsilon_0}(x_i)\bigcap B_{\varepsilon_0}(x_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, onde $R$ é a quantidade de índices $j$ tais que $\nu_j > 0$.

Definamos $\varphi_\varepsilon(x) = \Phi(\varepsilon x) - \sum_{j=1}^{R} \Phi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)$ onde $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Dessa forma

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A_\varepsilon = B_{1/2\varepsilon}(0) \setminus \bigcup_{j=1}^{R} B_\varepsilon(x_j) \\ 0 \text{ se } x \in \bigcup_{j=1}^{R} B_{\varepsilon/2}(x_j). \end{cases}$$

Fixemos $\rho, \varepsilon > 0$ com $0 < \varepsilon < \rho < \varepsilon_0$.

Definamos agora

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\right)(x) \\ &= |\nabla u_n(x)|^p - |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla u(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla u_n(x) \\ &+ |\nabla u(x)|^p. \end{aligned}$$

Temos que $0 \leq C_p|\nabla u_n - \nabla u|^p \leq G_n$ (veja o Lema 16 no apêndice A).

Agora observemos que $A_\rho \subset A_\varepsilon$. Assim:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{A_\rho} C_p|\nabla u_n - \nabla u|^p dx \leq \int_{A_\rho} G_n dx = \int_{A_\rho} G_n\varphi_\varepsilon dx \leq \int_{A_\varepsilon} G_n\varphi_\varepsilon dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} G_n\varphi_\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\varphi_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\varphi_\varepsilon\nabla u_n\nabla u dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\varphi_\varepsilon\nabla u_n\nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\varphi_\varepsilon dx. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\varphi_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\varphi_\varepsilon dx \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\varphi_\varepsilon\nabla u_n\nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n u\varphi_\varepsilon dx \\ I_3 &= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\varphi_\varepsilon\nabla u\nabla u_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\varphi_\varepsilon dx \\ I_4 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\varphi_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n u\varphi_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Notemos que $\int_{\mathbb{R}^N} G_n\varphi_\varepsilon dx = I_1 - I_2 + I_3 + I_4$.

Vamos agora estimar cada uma das $I_i$.

**Estimativa de $I_1$:**

Notemos que

$$I'_\infty(u_n)(u_n\varphi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p\varphi_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi_\varepsilon u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*}\varphi_\varepsilon dx,$$

ou seja,

$$I_1 = I'_\infty(u_n)(u_n\varphi_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi_\varepsilon u_n dx.$$

Desde que $(u_n\varphi_\varepsilon)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $I'_\infty(u_n) \to 0$ em $\left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$ temos que $I'_\infty(u_n)(u_n\varphi_\varepsilon) \to 0$ e daí,

$$\limsup_{n\to\infty} I_1 = -\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi_\varepsilon u_n dx.$$

Passando ao limite com $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty} I_1\right] = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi_\varepsilon u_n dx\right] = 0.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} I_1 = o_\varepsilon(1) \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

**Estimativa de $I_2$:**

Observando que

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)(u\varphi_\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \varphi_\varepsilon \nabla u dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi_\varepsilon u dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n u \varphi_\varepsilon dx, \end{aligned}$$

ou seja, que

$$I_2 = I'_\infty(u_n)(u\varphi_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi_\varepsilon u dx$$

e procedendo de maneira análoga ao que fizemos anteriormente obtemos que

$$\limsup_{n\to\infty} I_2 = o_\varepsilon(1) \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

**Estimativa de $I_3$:**

Consideremos $F(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla\omega dx$ com $\omega \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Temos que $F$ é linear, pois

$$\begin{aligned} F(c\omega_1 + \omega_2) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla(c\omega_1 + \omega_2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon (c\nabla\omega_1 + \nabla\omega_2) dx \\ &= c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla\omega_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla\omega_2 dx \\ &= cF(\omega_1) + F(\omega_2). \end{aligned}$$

Além disso, $F$ é limitado, pois

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla\omega dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}|\varphi_\varepsilon||\nabla u \nabla\omega| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\varphi_\varepsilon||\nabla\omega| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\nabla\omega| dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$ obtemos

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\nabla \omega| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^p dx\right)^{1/p} = ||u||^{p-1}||\omega|| \end{aligned}$$

para todo $\omega \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Portanto $F$ é um funcional linear contínuo definido em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla u_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \varphi_\varepsilon \nabla u dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \varphi_\varepsilon dx$$

e daí

$$\lim_{n\to\infty} I_3 = 0.$$

**Estimativa de $I_4$:**

Recordemos que usando o Lema de Brezis-Lieb verificamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u \varphi dx, \ \forall \varphi \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Daí, desde que $u\varphi_\varepsilon \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n u \varphi_\varepsilon dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \varphi_\varepsilon dx. \tag{1.20}$$

Por outro lado, do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} \varphi_\varepsilon dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \varphi_\varepsilon dx + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}(\varphi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \varphi_\varepsilon dx. \tag{1.21}$$

Então de (1.20) e (1.21) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} I_4 = 0.$$

Feitas as estimativas de cada uma das $I_j$, obtemos de (1.19) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\rho} C_p |\nabla u_n - \nabla u|^p dx = C_p \lim_{n\to\infty} \int_{A_\rho} |\nabla(u_n - u)|^p dx = 0$$

implicando que $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^p(A_\rho)$.

Assim, a menos de subseqüência, $\dfrac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ q.t.p. em $A_\rho$, e desde que $\rho$ é arbitrário, por um argumento diagonal concluimos que

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

**2º Caso:** $\nu_j = 0$ para todo $j \in J$ ou $J$ é vazio.

Nesse caso $\varphi_\varepsilon$ se reduz a $\varphi_\varepsilon(x) = \Phi(\varepsilon x)$ e $A_\rho = B_{1/2\rho}(0)$ e repetindo os mesmos argumentos aplicados no 1º Caso obtemos

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Consideremos então para cada $i$, com $i = 1, \ldots, N$, a seqüência $g_{in}(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u_n(x)}{\partial x_i}$ e a função $g_i(x) = |\nabla u(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$. Temos que, para cada $i$, $g_{in}(x) \to g_i(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Temos também que, para cada $i$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |g_{in}|^{p/(p-1)}dx \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |g_{in}|^{p/(p-1)}dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p/(p-1)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right)^{p/(p-1)} dx.
\end{aligned}$$

Desde que, para cada $i$, temos que

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq \left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right|^2\right)^{1/2} = |\nabla u_n|,$$

então segue-se que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right| \leq |\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n|.$$

Logo, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |g_{in}|^{p/(p-1)}dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( |\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right)^{p/(p-1)} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-1})^{p/(p-1)}dx = ||u_n||^p
\end{aligned}$$

e como $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |g_{in}|^{p/(p-1)}dx \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso obtemos também que, para cada $i$, $(g_{in}) \subset L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para cada $i$, temos que $g_i \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$, pois analogamente ao que foi feito anteriormente verifica-se que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |g_i|^{p/(p-1)}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$ e como $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |g_i|^{p/(p-1)}dx < +\infty$.

Então desde que $\dfrac{p}{p-1} > 1$, segue do Lema de Brezis-Lieb que, para cada $i$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e observando que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx + \ldots + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx + \ldots + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}dx,\end{aligned}$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.22}$$

Desde que $(u_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$, temos que $I'_\infty(u_n) \to 0$ em $\left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$, onde

$$I'_\infty(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\varphi dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $n \to \infty$, de (1.4) e (1.22) e da unicidade do limite obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx = I'_\infty(u)\varphi \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e portanto

$$I'_\infty(u) = 0.$$

**Demonstração de (c):**

Seja $v_n = u_n - u$.

Já mostramos no ítem anterior que $\dfrac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, para cada $i$, e portanto $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Além disso, $(|\nabla u_n|)$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$, pois $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Temos também que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e que $(u_n)$ é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Portanto, do Teorema de Brezis-Lieb,

$$|\nabla u_n|_p^p = |\nabla u|_p^p + |\nabla u_n - \nabla u|_p^p + o_n(1) = |\nabla u|_p^p + |\nabla v_n|_p^p + o_n(1) \tag{1.23}$$

$$|u_n|_{p^*}^{p^*} = |u|_{p^*}^{p^*} + |u_n - u|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) = |u|_{p^*}^{p^*} + |v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1). \tag{1.24}$$

Daí,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_\infty(u_n)u_n = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n u_n dx \\ &= |\nabla u_n|_p^p - |u_n|_{p^*}^{p^*} \end{aligned}$$

e de (1.23) e (1.24) segue que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_\infty(u_n)u_n = |\nabla u_n|_p^p - |u_n|_{p^*}^{p^*} \\ &= |\nabla u|_p^p + |\nabla v_n|_p^p - |u|_{p^*}^{p^*} - |v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Desde que $u$ é solução fraca do problema $(P_\infty)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\phi dx, \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e visto que $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, em particular temos

$$|\nabla u|_p^p = |u|_{p^*}^{p^*}.$$

Portanto de (1.25) obtemos

$$o_n(1) = I'_\infty(u_n)u_n = |\nabla v_n|_p^p - |v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1). \tag{1.26}$$

Desde que as seqüências $(|\nabla v_n|_p^p)$ e $(|v_n|_{p^*}^{p^*})$ são limitadas e de números reais, passando a subseqüência se necessário, temos de (1.26) que

$$\lim_{n\to\infty}(|\nabla v_n|_p^p - |v_n|_{p^*}^{p^*}) = 0$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_p^p = \lim_{n\to\infty} |v_n|_{p^*}^{p^*}.$$

Seja $\rho = \lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_p^p = \lim_{n\to\infty} |v_n|_{p^*}^{p^*}$.

Desde que $|\nabla v_n|_p^p \geq 0$ e $|v_n|_{p^*}^{p^*} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\rho \geq 0$.

Provaremos agora que $\rho = 0$.

Suponhamos por contradição que $\rho > 0$.

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} dx\right)^{p/p^*} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx$$

isto é,

$$S|v_n|_{p^*}^p \leq |\nabla v_n|_p^p.$$

Passando ao limite de $n \to \infty$ temos $S\rho^{p/p^*} \leq \rho$ e portanto

$$S^{N/p} \leq \rho. \tag{1.27}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
c &= I_\infty(u_n) + o_n(1) = I_\infty(u_n) - \frac{1}{p^*} I'_\infty(u_n)u_n + o_n(1) \\
&= \frac{1}{p}|\nabla u_n|_p^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{p^*}|\nabla v_n|_p^p + \frac{1}{p^*}|v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\
&= \frac{1}{p}|\nabla u|_p^p + \frac{1}{p}|\nabla v_n|_p^p - \frac{1}{p^*}|u|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{p^*}|v_n|_{p^*}^{p^*} - \frac{1}{p^*}|\nabla v_n|_p^p + \frac{1}{p^*}|v_n|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\
&= \frac{1}{p}|\nabla v_n|_p^p - \frac{1}{p^*}|\nabla v_n|_p^p + \frac{1}{p}|\nabla u|_p^p - \frac{1}{p^*}|u|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\
&= \frac{1}{N}|\nabla v_n|_p^p + I_\infty(u) + o_n(1). \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

Lembrando que $|\nabla u|_p^p = |u|_{p^*}^{p^*}$, temos

$$I_\infty(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx = \frac{1}{p}|\nabla u|_p^p - \frac{1}{p^*}|u|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{N}|\nabla u|_p^p \geq 0.$$

Portanto de (1.28)

$$c = \frac{1}{N}|\nabla v_n|_p^p + I_\infty(u) + o_n(1) \geq \frac{1}{N}|\nabla v_n|_p^p + o_n(1) = \frac{1}{N}\rho$$

e por (1.27)

$$c \geq \frac{1}{N}\rho \geq \frac{1}{N}S^{N/p}$$

o que é uma contradição.

Logo $\rho = 0$ e portanto

$$|\nabla v_n|_p^p = |\nabla(u_n - u)|_p^p = ||u_n - u||^p \to 0.$$

Concluimos então que, a menos de subseqüência, $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

■

O seguinte resultado é um Lema técnico devido a C. O. Alves e que usaremos neste trabalho. Na sua demonstração o autor usou argumentos encontrados em Brezis e Lieb [6].

**Lema 2** *: Seja $\eta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ $(k \geq 1)$ com $\eta_n \in \left(L^p(\mathbb{R}^N)\right)^K$ $(p \geq 2)$, $\eta_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $A(y) = |y|^{p-2}y$, $\forall y \in \mathbb{R}^K$. Então, se $|\eta_n|_p \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)} dx \;=\; o_n(1)$$

*para cada $w \in \left(L^p(\mathbb{R}^N)\right)^K$ fixado.*

**Demonstração:**

Observemos que a função $A_i(y) = |y|^{p-2}y_i$ satisfaz a seguinte igualdade:

$$A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n) \;=\; \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}A_i(\eta_n + tw)\right) dt.$$

De fato, considerando $g(t) = A_i(\eta_n + tw)$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_0^1 \left(\frac{d}{dt}A_i(\eta_n + tw)\right) dt = \int_0^1 g'(t)dt = g(t)|_0^1 = A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n).$$

Considerando agora $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^K$ tal que $\gamma(t) = \eta_n + tw$, temos que

$$A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt}A_i(\gamma(t))dt.$$

Da Regra da Cadeia obtemos

$$A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n) = \int_0^1 \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n)| &= \left|\int_0^1 \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \sum_{j=1}^K \left|\frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t))\right| |\gamma_j'|dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^K \left|\frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t))\right| |w_j|dt \\
&\leq C_1|w| \int_0^1 \sum_{j=1}^K \left|\frac{\partial}{\partial \gamma_j} A_i(\gamma(t))\right| dt. \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Observemos que para todo $y \in \mathbb{R}^K$ temos

$$\sum_{j=1}^K \left|\frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y)\right| \leq C|y|^{p-2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^K \left|\frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y)\right| = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y_i} A_i(y)\right| + \sum_{j=i+1}^K \left|\frac{\partial}{\partial y_j} A_i(y)\right| \\
= \;& \sum_{j=1}^{i-1} \left|(p-2)|y|^{p-4}y_jy_i\right| + \left|(p-2)|y|^{p-4}y_i^2 + |y|^{p-2}\right| + \sum_{j=i+1}^K \left|(p-2)|y|^{p-4}y_jy_i\right| \\
\leq \;& (p-2)|y|^{p-4}\sum_{j=1}^{i-1}|y_j||y_i| + (p-2)|y|^{p-4}|y_i|^2 + |y|^{p-2} \\
+ \;& (p-2)|y|^{p-4}\sum_{j=i+1}^K |y_j||y_i| \\
\leq \;& (p-2)|y|^{p-4}(i-1)|y|^2 + (p-2)|y|^{p-4}|y|^2 + |y|^{p-2} \\
+ \;& (p-2)|y|^{p-4}(K-i)|y|^2 \\
= \;& C|y|^{p-2}.
\end{aligned}$$

Temos então de (1.29) que

$$|A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n)| \leq C_2|w| \int_0^1 |\gamma(t)|^{p-2} dt,$$

ou seja,

$$|A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n)| \leq C_2|w| \int_0^1 |\eta_n + tw|^{p-2} dt \leq C_2|w| \int_0^1 (|\eta_n| + |t||w|)^{p-2}\, dt.$$

Desde que $0 \leq t \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} |A_i(\eta_n + w) - A_i(\eta_n)| &\leq C_2|w| \int_0^1 (|\eta_n| + |t||w|)^{p-2}\, dt \\ &\leq C_2|w| \int_0^1 (|\eta_n| + |w|)^{p-2}\, dt = C_2|w|\, (|\eta_n| + |w|)^{p-2} \\ &\leq C_2|w| 2^{p-2} \left(|\eta_n|^{p-2} + |w|^{p-2}\right) \\ &= C_2 2^{p-2} \left(|w|^{p-1} + |w||\eta_n|^{p-2}\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n)|_S &= |A_1(\eta_n + w) - A_1(\eta_n)| + \ldots + |A_K(\eta_n + w) - A_K(\eta_n)| \\ &\leq K C_2 2^{p-2} \left(|w|^{p-1} + |w||\eta_n|^{p-2}\right) \end{aligned}$$

e da equivalência de normas em $\mathbb{R}^K$ obtemos

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| \leq C_3 \left(|w|^{p-1} + |w||\eta_n|^{p-2}\right) = C_3|w|^{p-1} + C_3|w||\eta_n|^{p-2}.$$

Para cada $\epsilon > 0$, usando a desigualdade de Young com os expoentes $p-1$ e $(p-1)/(p-2)$ na segunda parcela do segundo membro da desigualdade acima obtemos

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| \leq C_3|w|^{p-1} + C_3 C(\epsilon)|w|^{p-1} + C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1},$$

ou seja,

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| \leq C_4|w|^{p-1} + C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1} \tag{1.30}$$

onde $C_4 = C_3 + C_3 C(\epsilon)$.

Para cada $\epsilon > 0$, consideremos a seqüência de funções $G_{\epsilon,n}$ dada por

$$G_{\epsilon,n}(x) \;=\; \max\left\{|A(\eta_n(x) + w(x)) - A(\eta_n(x)) - A(w(x))| - C_3\epsilon|\eta_n(x)|^{p-1}, 0\right\}.$$

Desde que $A : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K$ dada por $A(y) = |y|^{p-2}y$ é contínua e que $\eta_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue que $G_{\epsilon,n}(x) \to 0$ q.t.p. $\mathbb{R}^N$ e portanto

$$|G_{\epsilon,n}(x)|^{p/(p-1)} \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$0 \leq G_{\epsilon,n} \leq \max\Big\{|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| + |A(w)| - C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1}, 0\Big\}$$

e de (1.30) segue que

$$\begin{aligned} 0 \leq G_{\epsilon,n} &\leq \max\Big\{|A(\eta_n + w) - A(\eta_n)| + |A(w)| - C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1}, 0\Big\} \\ &\leq C_4|w|^{p-1} + C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1} + |w|^{p-1} - C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1} = C_5|w|^{p-1}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$|G_{\epsilon,n}|^{p/(p-1)} \leq C_5^{p/(p-1)}|w|^p$$

onde $C_5^{p/(p-1)}|w|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |G_{\epsilon,n}|^{p/(p-1)}dx \to 0. \tag{1.31}$$

Da definição de $G_{\epsilon,n}$ temos

$$|A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)| \leq G_{\epsilon,n} + C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)} &\leq \Big(G_{\epsilon,n} + C_3\epsilon|\eta_n|^{p-1}\Big)^{p/(p-1)} \\ &\leq C_6|G_{\epsilon,n}|^{p/(p-1)} + C_7\epsilon^{p/(p-1)}|\eta_n|^p, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)}dx \\ &\leq C_6\int_{\mathbb{R}^N} |G_{\epsilon,n}|^{p/(p-1)}dx + C_7\epsilon^{p/(p-1)}\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_n|^p dx. \end{aligned}$$

Recordando que $|\eta_n|_p \leq C$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)}dx \leq C_6\int_{\mathbb{R}^N} |G_{\epsilon,n}|^{p/(p-1)}dx + C_8\epsilon^{p/(p-1)}.$$

Daí, usando (1.31) segue que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)}dx \leq C_8\epsilon^{p/(p-1)}\ ,\ \forall\epsilon > 0.$$

e fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + w) - A(\eta_n) - A(w)|^{p/(p-1)}dx \leq 0$$

e daí concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|A(\eta_n+w)-A(\eta_n)-A(w)|^{p/(p-1)}dx \;=\; 0.$$

■

O próxima Lema foi provado por Struwe em [12] (veja também [13]) quando $p=2$ e $\Omega$ é um domínio limitado.

**Lema 3** *(O lema principal): Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para o funcional $I_\infty$ com $u_n \rightharpoonup 0$ e $u_n \not\to 0$. Então, existem seqüências $(R_n)\subset\mathbb{R}$, $(x_n)\subset\mathbb{R}^N$, $v_0$ uma solução não-trivial para o problema $(P_\infty)$ e uma seqüência $(w_n)$ o qual é $(P.S.)_{\tilde{c}}$ para $I_\infty$ tais que, para uma subseqüência de $(u_n)$, temos*

$$w_n(x)=u_n(x)-R_n^{(N-p)/p}v_0(R_n(x-x_n))+o_n(1).$$

**Demonstração:**

Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$, ou seja,

$$I_\infty(u_n)\to c \;\text{ e }\; I'_\infty(u_n)\to 0. \tag{1.32}$$

Do Lema 1 temos que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $u_n \rightharpoonup 0$ e $u_n \not\to 0$ segue do Lema 1 que $c\geq \dfrac{1}{N}S^{N/p}$.

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
&I_\infty(u_n)-\frac{1}{p^*}I'_\infty(u_n)u_n\\
&=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx-\frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx-\frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx+\frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*}dx\\
&=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx=\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx
\end{aligned}$$

e daí, de (1.32) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx=c,$$

de onde segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p dx=Nc\geq S^{N/p}. \tag{1.33}$$

Desde que $\overline{B_2(0)}\subset\mathbb{R}^N$ é compacto e $\{B_1(y)\}_{y\in\overline{B_2(0)}}$ é uma cobertura aberta de $\overline{B_2(0)}$, então existe $L\in\mathbb{N}$ tal que $\overline{B_2(0)}\subset\bigcup_{k=1}^{L}B_1(y_k)$ e em particular temos

$$B_2(0)\subset\bigcup_{k=1}^{L}B_1(y_k).$$

Provaremos que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{R_n^{-1}}(y)}|\nabla u_n|^p dx = \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)}|\nabla u_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL}$$

onde $(R_n)\subset\mathbb{R}^+$ e $(x_n)\subset\mathbb{R}^N$.

Para $n$ fixado, consideremos a função Concentração de Levy

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_\lambda(y)}|\nabla u_n|^p dx.$$

Provaremos primeiramente que dado $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ a função

$$Q(\lambda) = \sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_\lambda(y)}|f|dx$$

é contínua.

Consideremos primeiramente o caso $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Seja $(\lambda_n)$ uma seqüência de números positivos tais que $\lambda_n\to\lambda_0$ para algum $\lambda_0$ fixado.

Consideremos $(\lambda_{n_j})\subset(\lambda_n)$ e $(\lambda_{n_k})\subset(\lambda_n)$ tais que $\lambda_{n_j}<\lambda_0$ e $\lambda_{n_k}\geq\lambda_0$, $\forall n_j\in\mathbb{N}$ e $\forall n_k\in\mathbb{N}$.

Vamos provar que $Q(\lambda_{n_j})\to Q(\lambda_0)$ com $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\lambda_{n_j}<\lambda_0$ para todo $n_j\in\mathbb{N}$, temos que $B_{\lambda_{n_j}}(y)\subset B_{\lambda_0}(y)$, para todo $y\in\mathbb{R}^N$. Assim,

$$\int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)}|f|dx\leq\int_{B_{\lambda_0}(y)}|f|dx\leq\int_{\mathbb{R}^N}|f|dx<+\infty\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}^N\ ,\ \forall n_j\in\mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)}|f|dx\leq\int_{B_{\lambda_0}(y)}|f|dx\leq\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_{\lambda_0}(y)}|f|dx=Q(\lambda_0)\ ,\ \forall y\in\mathbb{R}^N\ ,\ \forall n_j\in\mathbb{N}$$

e daí, $Q(\lambda_{n_j})\leq Q(\lambda_0)$, $\forall n_j\in\mathbb{N}$.

Logo

$$\limsup_{n_j\to\infty}Q(\lambda_{n_j})\leq Q(\lambda_0). \tag{1.34}$$

Observemos agora que, desde que $B_{\lambda_{n_j}}(y)\subset B_{\lambda_0}(y)$ para todo $y\in\mathbb{R}^N$, podemos considerar $\Omega_{n_j}=B_{\lambda_0}(y)\backslash B_{\lambda_{n_j}}(y)$ e com isso obtemos que, dado $\varepsilon>0$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n_j\geq n_1$, tem-se $|\Omega_{n_j}|<\varepsilon$.

Assim,

$$\int_{B_{\lambda_0}(y)} |f|dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f|dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left( |f|\chi_{B_{\lambda_0}(y)} - |f|\chi_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} \right) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} |f| \left( \chi_{B_{\lambda_0}(y)} - \chi_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f|\chi_{B_{\lambda_0}(y)\setminus B_{\lambda_{n_j}}(y)} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} |f|\chi_{\Omega_{n_j}} dx \leq K \left|\Omega_{n_j}\right| < \varepsilon \ , \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, \ \forall n_j \geq n_1.$$

Daí,

$$\int_{B_{\lambda_0}(y)} |f|dx < \varepsilon + \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f|dx \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \ , \ \forall n_j \geq n_1$$

e logo,

$$Q(\lambda_0) \leq \varepsilon + Q(\lambda_{n_j}) \ , \ \forall n_j \geq n_1.$$

Obtivemos então que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n_j \geq n_1$, $Q(\lambda_0) - \varepsilon \leq Q(\lambda_{n_j})$ e portanto

$$\liminf_{n_j \to \infty} Q(\lambda_{n_j}) \geq Q(\lambda_0). \tag{1.35}$$

Temos então de (1.34) e (1.35) que $\left(Q(\lambda_{n_j})\right)$ converge e

$$\lim_{n_j \to \infty} Q(\lambda_{n_j}) = Q(\lambda_0). \tag{1.36}$$

Por um raciocínio análogo, mostra-se que

$$\lim_{n_k \to \infty} Q(\lambda_{n_k}) = Q(\lambda_0). \tag{1.37}$$

De (1.36) e (1.37) obtemos que, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\left|Q(\lambda_{n_j}) - Q(\lambda_0)\right| < \varepsilon \ , \ \forall n_j \geq n_1$$

e

$$|Q(\lambda_{n_k}) - Q(\lambda_0)| < \varepsilon \ , \ \forall n_k \geq n_2.$$

Considerando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos

$$|Q(\lambda_n) - Q(\lambda_0)| < \varepsilon \ , \ \forall n \geq n_0$$

provando que $Q(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |f|dx$ é contínua com $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Usando o fato de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$ provaremos a continuidade de $Q$ com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Tomemos arbitrariamente $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^1(\mathbb{R}^N)$ segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\left|f - \tilde{f}\right|_1 < \varepsilon$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}| dx < \varepsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j}) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_0}(y)} |f| dx - \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f| dx \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left( \int_{B_{\lambda_0}(y)} |f| dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f| dx \right) \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(y)} |f| dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f| dx \right|.
\end{aligned}$$

Recordando que $Q(\lambda_{n_j}) \leq Q(\lambda_0)$ para todo $n_j \in \mathbb{N}$, temos

$$\left| Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j}) \right| = Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j})$$

e daí,

$$\begin{aligned}
&\left| Q(\lambda_0) - Q(\lambda_{n_j}) \right| \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(y)} |f| dx - \int_{B_{\lambda_0}(y)} |\tilde{f}| dx + \int_{B_{\lambda_0}(y)} |\tilde{f}| dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |\tilde{f}| dx \right. \\
&\left. + \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |\tilde{f}| dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f| dx \right| \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(y)} \left( |f| - |\tilde{f}| \right) dx \right| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_0}(y)} |\tilde{f}| dx - \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |\tilde{f}| dx \right| \\
&+ \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} \left( |\tilde{f}| - |f| \right) dx \right| \\
&\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_0}(y)} |f - \tilde{f}| dx + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} K |\Omega_{n_j}| + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{\lambda_{n_j}}(y)} |f - \tilde{f}| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}| dx + K |\Omega_{n_j}| + \int_{\mathbb{R}^N} |f - \tilde{f}| dx < \varepsilon \ , \ \forall n_j \geq n_1
\end{aligned}$$

concluindo que $Q(\lambda_{n_j}) \to Q(\lambda_0)$ com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Analogamente verifica-se que $Q(\lambda_{n_k}) \to Q(\lambda_0)$ com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Portanto $Q(\lambda_n) \to Q(\lambda_0)$ e com isso concluimos que $Q$ é contínua com $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Daí, para todo $n \in \mathbb{N}$, a função

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |\nabla u_n|^p dx$$

é contínua.

Notemos que,

$$\lim_{\lambda \to 0} Q_n(\lambda) = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e daí, existe $\delta > 0$ tal que

$$Q_n(\lambda) < \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall \lambda \in (0, \delta) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.38}$$

Por outro lado, observando que $pL > 1$, obtemos de (1.33) que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \geq S^{N/p} > \frac{S^{N/p}}{pL},$$

e portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx > \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall n \geq n_0.$$

Tomando arbitrariamente $y \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{B_\lambda(y)} |\nabla u_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx > \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall n \geq n_0,$$

ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{B_\lambda(y)} |\nabla u_n|^p dx > \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall \lambda > K \ , \ \forall n \geq n_0.$$

Daí,

$$Q_n(\lambda) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_\lambda(y)} |\nabla u_n|^p dx \geq \int_{B_\lambda(y)} |\nabla u_n|^p dx > \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall \lambda > K \ , \ \forall n \geq n_0$$

e podemos dizer sem perda de generalidade que

$$Q_n(\lambda) > \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall \lambda > K \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.39}$$

Segue de (1.38), (1.39) e do Teorema do Valor Intermediário que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $R_n \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$Q_n(R_n^{-1}) = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}(y)} |\nabla u_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL}.$$

Da definição de supremo podemos considerar, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, uma seqüência $(y_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} \int_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})} |\nabla u_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL}. \tag{1.40}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $(y_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada pois caso contrário, a menos de subseqüência, teríamos $\lim_{k\to\infty} |y_{n,k}| = +\infty$.

Assim, definindo a seqüência $f_{n,k}(x) = |\nabla u_n(x)|^p \chi_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})}(x)$, temos que

$$f_{n,k}(x) \to 0 \text{ quando } k \to \infty$$

e

$$|f_{n,k}| \leq |\nabla u_n|^p \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

onde $|\nabla u_n|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})} |\nabla u_n|^p dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_{n,k}| dx = 0,$$

o que contradiz (1.40).

Agora, desde que $(y_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{R}^N$ segue que, a menos de subseqüência, $y_{n,k} \to x_n$ em $\mathbb{R}^N$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$|\nabla u_n(x)|^p \chi_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})}(x) \to |\nabla u_n(x)|^p \chi_{B_{R_n^{-1}}(x_n)}(x) \ \text{ quando } \ k \to \infty$$

e

$$|\nabla u_n|^p |\chi_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})}| \leq |\nabla u_n|^p \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

onde $|\nabla u_n|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{R_n^{-1}}(y_{n,k})} |\nabla u_n|^p dx = \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)} |\nabla u_n|^p dx$$

e de (1.40) e da unicidade do limite concluimos que

$$\int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)} |\nabla u_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}(y)} |\nabla u_n|^p dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $(R_n) \subset \mathbb{R}^+$ e $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$.

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função

$$v_n(x) = R_n^{(p-N)/p} u_n \left( \frac{x}{R_n} + x_n \right).$$

Provaremos que

$$\int_{B_1(0)} |\nabla v_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL} = \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\nabla v_n|^p dx.$$

De fato, observemos que tomando arbitrariamente $y \in \mathbb{R}^N$ temos que

$$\int_{B_1(y)} |\nabla v_n(x)|^p dx = R_n^{(p-N)} \int_{B_1(y)} \left|\nabla u_n \left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)\right|^p dx.$$

Fazendo $z = \dfrac{x}{R_n} + x_n$, obtemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right) = \frac{1}{R_n}\frac{\partial u_n(z)}{\partial z_i} \Rightarrow \nabla u_n\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right) = \frac{1}{R_n}\nabla u_n(z)$$

e

$$z = \frac{x}{R_n} + x_n \Rightarrow x = R_n(z - x_n) \Rightarrow dx = R_n^N dz.$$

Além disso, notemos que para todo $x \in B_1(y)$ temos,

$$|x - y| < 1 \Rightarrow |R_n(z - x_n) - y| < 1 \Rightarrow \left|z - \left(x_n + \frac{y}{R_n}\right)\right| < \frac{1}{R_n}.$$

Fazendo $y' = x_n + \dfrac{y}{R_n}$ segue que $z \in B_{R_n^{-1}}(y')$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(y)} |\nabla v_n(x)|^p dx &= R_n^{(p-N)} \int_{B_1(y)} \left|\nabla u_n \left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)\right|^p dx \\
&= R_n^{(p-N)} \int_{B_{R_n^{-1}}(y')} R_n^{-p} |\nabla u_n(z)|^p R_n^N dz \\
&= \int_{B_{R_n^{-1}}(y')} |\nabla u_n(z)|^p dz \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N,
\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\frac{S^{N/p}}{pL} &= \sup_{y' \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}(y')} |\nabla u_n|^p dx = \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_{R_n^{-1}}\left(x_n + \frac{y}{R_n}\right)} |\nabla u_n|^p dx \\
&= \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\nabla v_n|^p dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{B_1(0)} |\nabla v_n(x)|^p dx = R_n^{(p-N)} \int_{B_1(0)} \left|\nabla u_n \left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)\right|^p dx.$$

Fazendo novamente $z = \dfrac{x}{R_n} + x_n$ e observando que para todo $x \in B_1(0)$ temos,

$$|x| < 1 \Rightarrow |R_n(z - x_n)| < 1 \Rightarrow |z - x_n| < \frac{1}{R_n} \Rightarrow z \in B_{R_n^{-1}}(x_n),$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(0)} |\nabla v_n(x)|^p dx &= R_n^{(p-N)} \int_{B_1(0)} \left|\nabla u_n \left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)\right|^p dx \\
&= R_n^{(p-N)} \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)} R_n^{-p} |\nabla u_n(z)|^p R_n^N dz \\
&= \int_{B_{R_n^{-1}}(x_n)} |\nabla u_n(z)|^p dz.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{S^{N/p}}{pL} = \int_{B_{R_n^{-1}(x_n)}} |\nabla u_n|^p dx = \int_{B_1(0)} |\nabla v_n|^p dx.$$

Agora, para cada $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, definamos a seguinte seqüência:

$$\tilde{\Phi}_n(x) = R_n^{(N-p)/p}\Phi(R_n(x - x_n)).$$

Notemos que

$$||\tilde{\Phi}_n|| = ||\Phi|| \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De fato, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{\Phi}_n(x)|^p dx = R_n^{(N-p)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi(R_n(x - x_n))|^p dx.$$

Fazendo $z = R_n(x - x_n)$ obtemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(R_n(x - x_n)) = R_n\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_i} \Rightarrow \nabla\Phi(R_n(x - x_n)) = R_n\nabla\Phi(z)$$

e

$$z = R_n(x - x_n) \Rightarrow x = \frac{z}{R_n} + x_n \Rightarrow dx = R_n^{-N}dz.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{\Phi}_n(x)|^p dx = R_n^{(N-p)} \int_{\mathbb{R}^N} R_n^p|\nabla\Phi(z)|^p R_n^{-N}dz = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi(z)|^p dz \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e daí $||\tilde{\Phi}_n|| = ||\Phi||$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e com isso concluimos também que $(\tilde{\Phi}_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Observemos que são válidas as seguintes identidades:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla\Phi dx \qquad (P_1)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2}v_n\Phi dx \qquad (P_2)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\tilde{\Phi}_n(x)dx \\ &= R_n^{(N-p)/p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\Phi(R_n(x - x_n))dx.\end{aligned}$$

Fazendo $z = R_n(x - x_n)$, segue que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(R_n(x - x_n)) = R_n\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_i} \Rightarrow \nabla\Phi(R_n(x - x_n)) = R_n\nabla\Phi(z),$$

$$z = R_n(x - x_n) \Rightarrow x = \frac{z}{R_n} + x_n \Rightarrow dx = R_n^{-N} dz$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial z_i}\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) = \frac{1}{R_n}\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla u_n(x) = R_n \nabla u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\tilde{\Phi}_n(x)dx = \\
&= R_n^{\frac{(N-p)}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} R_n^{p-2}\left|\nabla u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right)\right|^{p-2} R_n \nabla u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) R_n \nabla\Phi(z) R_n^{-N} dz.
\end{aligned}$$

Lembrando que $v_n(x) = R_n^{(p-N)/p} u_n\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)$, vemos que

$$u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) = R_n^{(N-p)/p} v_n(z) \Rightarrow \nabla u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) = R_n^{(N-p)/p}\nabla v_n(z).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\tilde{\Phi}_n(x)dx \\
&= R_n^{\frac{(N-p)}{p}} R_n^{p-N} \int_{\mathbb{R}^N} R_n^{(N-p)(p-2)/p}|\nabla v_n(z)|^{p-2} R_n^{(N-p)/p}\nabla v_n(z)\nabla\Phi(z)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n(z)|^{p-2}\nabla v_n(z)\nabla\Phi(z)dz,
\end{aligned}$$

e portanto a identidade $(P_1)$ é válida.

Vamos agora verificar que vale a identidade $(P_2)$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{p^*-2}u_n(x)\tilde{\Phi}_n(x)dx = R_n^{(N-p)/p}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{p^*-2}u_n(x)\Phi(R_n(x - x_n))dx.$$

Fazendo novamente $z = R_n(x - x_n)$ segue que

$$x = \frac{z}{R_n} + x_n \Rightarrow dx = R_n^{-N} dz.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{p^*-2}u_n(x)\tilde{\Phi}_n(x)dx \\
&= R_n^{(N-p)/p}\int_{\mathbb{R}^N}\left|u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right)\right|^{p^*-2} u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right)\Phi(z)R_n^{-N}dz \\
&= R_n^{(N-p)/p}\int_{\mathbb{R}^N} R_n^{(N-p)(p^*-2)/p}|v_n(z)|^{p^*-2} R_n^{(N-p)/p} v_n(z)\Phi(z)R_n^{-N}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |v_n(z)|^{p^*-2}v_n(z)\Phi(z)dz,
\end{aligned}$$

e portanto a identidade $(P_2)$ é válida.

Já vimos que

$$\int_{B_1(y)} |\nabla v_n|^p dx = \int_{B_{R_n^{-1}}(y')} |\nabla u_n|^p dx \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N$$

onde $y' = \dfrac{y}{R_n} + x_n$, e desde que $\mathbb{R}^N$ é invariante por translações e dilatações, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx.$$

Da mesma forma concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx.$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} I_\infty(v_n) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx = I_\infty(u_n) \end{aligned}$$

e de (1.32) segue que

$$I_\infty(v_n) \to c.$$

Além disso, por $(P_1)$ e $(P_2)$, temos

$$\begin{aligned} I'_\infty(u_n)\tilde{\Phi}_n &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \tilde{\Phi}_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \tilde{\Phi}_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p^*-2}\nabla v_n \nabla \Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2} v_n \Phi dx = I'_\infty(v_n)\Phi. \end{aligned}$$

Para todo $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\Phi|| \leq 1$

$$|I'_\infty(v_n)\Phi| = |I'_\infty(u_n)\tilde{\Phi}_n| \leq ||I'_\infty(u_n)||_{D'}||\tilde{\Phi}_n|| = ||I'_\infty(u_n)||_{D'}||\Phi|| \leq ||I'_\infty(u_n)||_{D'}.$$

Daí,

$$0 \leq ||I'_\infty(v_n)||_{D'} = \sup_{\substack{\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ ||\Phi|| \leq 1}} |I'_\infty(v_n)\Phi| \leq ||I'_\infty(u_n)||_{D'}$$

e passando ao limite de $n \to \infty$ segue que

$$||I'_\infty(v_n)||_{D'} \to 0.$$

Temos então que $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$ e segue do Lema 1 que $(v_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Desde que $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo segue que existe $v_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subseqüência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e pelo o ítem $(b)$ do Lema 1 segue que $v_0$ é ponto crítico do funcional $I_\infty$.

Como conseqüência do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{p^*}\phi dx + \sum_{j\in J}\phi(x_j)\nu_j \ , \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{1.41}$$

para alguma família $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^N$ e para alguma família $\{\nu_j\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^+$.

Na demonstração do ítem (b) do Lema 1 mostramos que $J$ é vazio ou finito.

Denotemos $J = \{1, 2, \ldots, s\}$ e $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ o conjunto dado por

$$\Gamma = \{x_j \in \{x_j\}_{j\in J} : |x_j| > 1\}.$$

Queremos provar que $v_0 \not\equiv 0$.

Suponhamos por contradição que $v_0 \equiv 0$.

Assim de (1.41) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx \to 0 \ , \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}). \tag{1.42}$$

Seja $\phi_n = \phi v_n$ com $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_s\})$.

Temos que $(\phi_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\begin{aligned} ||\phi_n||^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_n|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\phi v_n)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n\nabla\phi + \phi\nabla v_n|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |v_n\nabla\phi|^p dx + 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |\phi\nabla v_n|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p|\nabla\phi|^p dx + 2^p C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/(N-p)$ e $N/p$ obtemos

$$||\phi_n||^p \leq 2^p |v_n|_{p^*}^p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^N dx\right)^{\frac{p}{N}} + 2^p C_1 ||v_n||^p \leq C_2||v_n||^p + C_3||v_n||^p$$

e daí, a limitação de $(\phi_n)$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ segue da limitação de $(v_n)$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Temos então que

$$I'_\infty(v_n)\phi_n = o_n(1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla\phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2} v_n\phi_n dx = o_n(1),$$

o que é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla(\phi v_n) dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2} v_n\phi v_n dx = o_n(1).$$

Então segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n v_n \nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx = o_n(1)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n v_n \nabla\phi dx + o_n(1)\right| \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n v_n \nabla\phi dx\right| + o_n(1) \\
&\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx\right| + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-1}|v_n||\nabla\phi| dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx\right| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx\right| \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p |\nabla\phi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1)
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx\right| + ||v_n||^{p-1}\left(\int_{B_R(0)} |v_n|^p |\nabla\phi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1),$$

onde $B_R(0) \supset \text{supp}\phi$. Daí,

$$0 \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*}\phi dx\right| + C\left(\int_{B_R(0)} |v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + o_n(1). \tag{1.43}$$

Desde que $(v_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, segue que $(v_n)$ é limitada em $D^{1,p}(B_R(0))$ e usando a imersão compacta $D^{1,p}(B_R(0)) \hookrightarrow L^p(B_R(0))$ segue que, a menos de subseqüência, $v_n \to 0$ em $L^p(B_R(0))$. Assim, passando a uma subseqüência se necessário em (1.43), fazendo $n \to \infty$, segue de (1.42) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \phi dx \to 0 \ , \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}). \tag{1.44}$$

Seja $\rho \in \mathbb{R}$ verificando a desigualdade $0 < \rho < \min\{\text{dist}(\Gamma, \overline{B_1}(0)), 1\}$.

Vamos mostrar que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\backslash B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^p dx \to 0. \tag{1.45}$$

Consideremos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e $\phi(x) = 1$ se $x \in B_{1+\rho}(0)$.

Fazendo $\tilde{\phi} = \phi|_{\mathbb{R}^N \backslash \{x_1,\ldots,x_s\}}$, segue de (1.44) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \tilde{\phi} dx \to 0.$$

Desde que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^p dx \leq \int_{B_{1+\rho}(0)} |\nabla v_n|^p dx = \int_{B_{1+\rho}(0)} |\nabla v_n|^p \tilde{\phi} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \tilde{\phi} dx, \end{aligned}$$

segue que (1.45) ocorre.

Seja agora $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B_{1+\frac{\rho}{3}}(0) \\ 0 \text{ se } x \in B^c_{1+\frac{2\rho}{3}}(0) \end{cases}$$

e seja a seqüência $(\Phi_n)$ dada por $\Phi_n(x) = \Phi(x) v_n(x)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} &\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx = \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla(\Phi v_n)|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi|^p |\nabla v_n|^p dx + 2^p \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^p |\nabla \Phi|^p dx. \end{aligned}$$

Desde que $0 \leq \Phi \leq 1$, segue que $|\Phi|^p \leq 1$. Além disso, $|\nabla \Phi|^p$ é limitada. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx \\ &\leq 2^p \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^p dx + 2^p C \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^p dx. \end{aligned}$$

Recordemos que $v_n \rightharpoonup 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e usando a imersão compacta $D^{1,p}(B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)) \hookrightarrow L^p(B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0))$ segue que, a menos de subseqüência, $v_n \to 0$ em $L^p(B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0))$. Assim, passando ao limite de $n \to \infty$ na desigualdade acima, segue de (1.45) que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx \to 0. \tag{1.46}$$

Usando os mesmos argumentos que usamos anteriormente para mostrar que $(\phi_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ mostra-se que $(\Phi_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e segue desse fato que

$$I'_\infty(v_n)(\Phi_n) = o_n(1).$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \Phi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2} v_n \Phi_n dx = o_n(1).$$

Da definição de $\Phi$

$$\int_{B_{1+\rho}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx - \int_{B_{1+\rho}(0)} |v_n|^{p^*-2} v_n \Phi_n dx = o_n(1),$$

ou ainda,

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx$$
$$- \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx - \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx = o_n(1).$$

Mas em $B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)$ temos que $\Phi \equiv 1$ e assim $\Phi_n = v_n$. Daí,

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^{p} dx \tag{1.47}$$
$$- \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx - \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx = o_n(1).$$

Notemos que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx = o_n(1). \tag{1.48}$$

De fato,

$$\left| \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx \right| \leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-1} |\nabla \Phi_n| dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx \right| \\ &\leq \left( \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Desde que $(v_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e (1.46) ocorre, segue da desigualdade acima que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla \Phi_n dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Notemos também que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx = o_n(1). \tag{1.49}$$

De fato, considerando $\bar{\Phi} = \Phi|_{\mathbb{R}^N\setminus\{x_1,\ldots,x_s\}}$, segue que $\bar{\Phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\{x_1,\ldots,x_s\})$ e $\bar{\Phi}(x) = \Phi(x)$ se $x \in B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)$. Daí,

$$0 \leq \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx = \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \bar{\Phi} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \bar{\Phi} dx.$$

De (1.42) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} \bar{\Phi} dx \to 0$$

e portanto,

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Voltando a igualdade (1.47), segue de (1.48) e (1.49) que

$$\int_{B_{1+\frac{\rho}{3}(0)}} |\nabla \Phi_n|^p dx - \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx = o_n(1). \tag{1.50}$$

Agora observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx &= \int_{B_{1+\rho}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx \\
&= o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx
\end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{p^*} dx &= \int_{B_{1+\rho}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx \\
&= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi^{p^*} dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx.
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que fizemos para mostrar (1.49), mostra-se que

$$\int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |v_n|^{p^*} \Phi^{p^*} dx = o_n(1)$$

e daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{p^*} dx = o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\Phi_n|^{p^*} dx.$$

Então da igualdade (1.50) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_n|^{p^*} dx = o_n(1),$$

ou ainda,

$$||\Phi_n||^p - |\Phi_n|_{p^*}^{p^*} = o_n(1).$$

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$|\Phi_n|_{p^*}^p S \leq ||\Phi_n||^p \Leftrightarrow |\Phi_n|_{p^*}^{p^*} S^{p^*/p} \leq ||\Phi_n||^{p^*} \Leftrightarrow -\frac{1}{S^{p^*/p}} ||\Phi_n||^{p^*} \leq -|\Phi_n|_{p^*}^{p^*}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||\Phi_n||^p \left[1 - \left(\frac{1}{S^{p^*/p}}\right) ||\Phi_n||^{p^*-p}\right] &= ||\Phi_n||^p - \frac{1}{S^{p^*/p}}||\Phi_n||^{p^*} \\ &\leq ||\Phi_n||^p - |\Phi_n|_{p^*}^{p^*} = o_n(1). \end{aligned} \tag{1.51}$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} ||\Phi_n||^p &= \int_{B_{1+\rho}(0)\setminus B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}(0)}} |\nabla \Phi_n|^p dx \\ &= o_n(1) + \int_{B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx. \end{aligned}$$

Recordando que $\Phi_n = v_n$ em $B_{1+\frac{\rho}{3}}(0)$ e observando que $B_{1+\frac{\rho}{3}}(0) \subset B_2(0)$, obtemos

$$||\Phi_n||^p \leq o_n(1) + \int_{B_2(0)} |\nabla v_n|^p dx.$$

Recordando que $B_2(0) \subset \bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k)$ seque que

$$\begin{aligned} ||\Phi_n||^p \leq o_n(1) + \int_{\bigcup_{k=1}^{L} B_1(y_k)} |\nabla v_n|^p dx &\leq o_n(1) + \sum_{k=1}^{L} \int_{B_1(y_k)} |\nabla v_n|^p dx \\ &\leq o_n(1) + L \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\nabla v_n|^p dx, \end{aligned}$$

e desde que $\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_1(y)} |\nabla v_n|^p dx = \dfrac{S^{N/p}}{pL}$, temos

$$||\Phi_n||^p \leq o_n(1) + \frac{S^{N/p}}{p},$$

e daí,

$$\begin{aligned} ||\Phi_n|| \leq o_n(1) + \frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}} \quad &\Rightarrow \quad ||\Phi||^{p^*-p} \leq o_n(1) + \left(\frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}}\right)^{p^*-p} \\ &\Rightarrow \quad o_n(1) - \left(\frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}}\right)^{p^*-p} \leq -||\Phi_n||^{p^*-p}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Combinando (1.51) e (1.52) temos que

$$\begin{aligned} &||\Phi_n||^p \left[1 + o_n(1) - \frac{1}{S^{p^*/p}} \left(\frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}}\right)^{p^*-p}\right] \\ &= ||\Phi_n||^p \left\{1 + \frac{1}{S^{p^*/p}} \left[o_n(1) - \left(\frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}}\right)^{p^*-p}\right]\right\} \\ &\leq ||\Phi_n||^p \left[1 - \frac{1}{S^{p^*/p}}||\Phi_n||^{p^*-p}\right] = o_n(1), \end{aligned}$$

e portanto,

$$||\Phi_n||^p \left[1 - \frac{1}{S^{p^*/p}} \left(\frac{S^{N/p^2}}{p^{1/p}}\right)^{p^*-p}\right] \leq o_n(1).$$

Notemos que

$$\frac{N}{p^2}(p^* - p) - \frac{p^*}{p} = \frac{N}{p^2}\frac{p^2}{N-p} - \frac{N}{N-p} = 0,$$

e daí,

$$||\Phi_n||^p \left[1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{p^*-p}{p}}\right] \leq o_n(1).$$

Desde que $1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{p^*-p}{p}} > 0$, temos

$$0 \leq ||\Phi_n||^p \left[1 - \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{p^*-p}{p}}\right] \leq o_n(1),$$

e passando ao limite de $n \to \infty$ concluimos que $\Phi_n \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ .

Agora, desde que $v_n = \Phi_n$ em $B_1(0)$, segue que

$$0 \leq \int_{B_1(0)} |\nabla v_n|^p dx = \int_{B_1(0)} |\nabla \Phi_n|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_n|^p dx.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_1(0)} |\nabla v_n|^p dx = 0$$

contradizendo a igualdade

$$\int_{B_1(0)} |\nabla v_n|^p dx = \frac{S^{N/p}}{pL} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo

$$v_0 \not\equiv 0.$$

Agora só nos resta provar a existência de $(w_n)$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ onde $(w_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_{\tilde{c}}$ para $I_\infty$ verificando

$$w_n(x) = u_n(x) - R_n^{(N-p)/p} v_0(R_n(x - x_n)) + o_n(1)$$

para alguma subseqüência de $(u_n)$ que ainda chamaremos de $(u_n)$.

Seja $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Psi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in B_1(0) \\ 0 \text{ se } x \in B_2^c(0) \end{cases}$$

e seja

$$w_n(x) = u_n(x) - R_n^{(N-p)/p} v_0(R_n(x - x_n))\Psi(\bar{R}_n(x - x_n)), \tag{1.53}$$

onde a seqüência $(\bar{R}_n)$ é escolhida verificando $\tilde{R}_n = \dfrac{R_n}{\bar{R}_n} \to +\infty$ .

De (1.53) obtemos

$$R_n^{(p-N)/p} w_n(x) = R_n^{(p-N)/p} u_n(x) - v_0(R_n(x - x_n))\Psi(\bar{R}_n(x - x_n))$$

e fazendo $z = R_n(x - x_n)$ segue que

$$R_n^{(p-N)/p} w_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) = R_n^{(p-N)/p} u_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right) - v_0(z)\Psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right).$$

Definindo agora

$$\tilde{w_n}(z) = R_n^{(p-N)/p} w_n\left(\frac{z}{R_n} + x_n\right)$$

e recordando que

$$v_n(x) = R_n^{(p-N)/p} u_n\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)$$

segue que

$$\tilde{w_n}(z) = v_n(z) - v_0(z)\Psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right). \tag{1.54}$$

Definamos

$$\Psi_n(z) = \Psi\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right). \tag{1.55}$$

Notemos que $0 \leq \Psi_n(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e

$$\Psi_n(z) = \begin{cases} 1 \text{ se } z \in B_{\tilde{R}_n}(0) \\ 0 \text{ se } z \in B^c_{2\tilde{R}_n}(0). \end{cases}$$

Substituindo (1.55) em (1.54) obtemos

$$\tilde{w_n}(z) = v_n(z) - v_0(z)\Psi_n(z).$$

O Lema estará provado se provarmos que $v_0\Psi_n \to v_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e que $(w_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_{\tilde{c}}$ para $I_\infty$.

Vamos primeiramente provar que $v_0\Psi_n \to v_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Temos que

$$\begin{aligned} ||v_0\Psi_n - v_0||^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_0\Psi_n - v_0)|^p dz = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(v_0(\Psi_n - 1))|^p dz \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz + 2^p \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_n - 1|^p |\nabla v_0|^p dz. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz = o_n(1).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz \\
&= \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^p |\nabla \Psi_n|^p dz \\
&= \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^p |\nabla \Psi_n|^p dz + \int_{B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^p |\nabla \Psi_n|^p dz.
\end{aligned}$$

Desde que $\Psi_n(x) = 1$ se $x \in B_{\tilde{R}_n}(0)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz = \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^p |\nabla \Psi_n|^p dz,$$

e usando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/(N-p)$ e $N/p$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz \\
&\leq \left( \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^{p^*} dz \right)^{\frac{N-p}{p}} \left( \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |\nabla \Psi_n|^N dz \right)^{\frac{p}{N}} \\
&\leq \left( \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^{p^*} dz \right)^{\frac{N-p}{p}} \left( \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |\nabla \Psi_n|^N dz \right)^{\frac{p}{N}}.
\end{aligned}$$

Observemos que fazendo $y = \dfrac{z}{\tilde{R}_n}$ segue que

$$\frac{\partial \Psi_n(z)}{\partial z_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_i}\left(\frac{z}{\tilde{R}_n}\right) = \tilde{R}_n^{-1} \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y_i} \Rightarrow \nabla \Psi_n(z) = \tilde{R}_n^{-1} \nabla \Psi(y),$$

$$z = \tilde{R}_n y \Rightarrow dz = \tilde{R}_n^{\,N} dy$$

e

$$z \in B_{2\tilde{R}_n}(0) \Rightarrow |z| < 2\tilde{R}_n \Rightarrow |y| < 2 \Rightarrow y \in B_2(0).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)} |\nabla \Psi_n(z)|^N dz &= \int_{B_2(0)} \tilde{R}_n^{-N} |\nabla \Psi(y)|^N \tilde{R}_n^{\,N} dy \\
&= \int_{B_2(0)} |\nabla \Psi(y)|^N dy
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz \leq C \left( \int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^{p^*} dz \right)^{\frac{N-p}{p}}. \tag{1.57}$$

Notemos agora que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| |v_0|^{p^*} \chi_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} \right| \leq |v_0|^{p^*}$$

onde $|v_0|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, quando $n \to \infty$ temos que

$$|v_0(z)|^{p^*} \chi_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)}(z) \to 0 \ \text{ q.t.p. } \ \mathbb{R}^N.$$

Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{B_{2\tilde{R}_n}(0)\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |v_0|^{p^*} dz \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

e concluimos de (1.57) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^p |\nabla(\Psi_n - 1)|^p dz = o_n(1). \tag{1.58}$$

Notemos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_n - 1|^p |\nabla v_0|^p dz = o_n(1).$$

De fato, recordando que $\Psi_n \equiv 1$ em $B_{\tilde{R}_n}(0)$ e $0 \leq \Psi_n(x) \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_n - 1|^p |\nabla v_0|^p dz &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |\Psi_n - 1|^p |\nabla v_0|^p dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} (1 - \Psi_n)^p |\nabla v_0|^p dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |\nabla v_0|^p dz. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| |\nabla v_0|^p \chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} \right| \leq |\nabla v_0|^p$$

onde $|\nabla v_0|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, quando $n \to \infty$ temos que

$$|\nabla v_0(z)|^p \chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)}(z) \to 0 \ \text{ q.t.p. } \ \mathbb{R}^N.$$

Então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{\tilde{R}_n}(0)} |\nabla v_0|^p dz \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Concluimos então de (1.59) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_n - 1|^p |\nabla v_0|^p dz = o_n(1). \tag{1.60}$$

Voltando a desigualdade (1.56), segue de (1.58) e (1.60) que

$$v_0\Psi_n \to v_0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

e portanto,

$$\tilde{w_n} = v_n - v_0 + o_n(1)$$

onde $o_n(1) \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Mostraremos agora que, a menos de subseqüência, $(w_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_{\tilde{c}}$ para $I_\infty$.

De forma análoga ao que fizemos para mostrar que $I_\infty(u_n) = I_\infty(v_n)$, mostra-se que $I_\infty(w_n) = I_\infty(\tilde{w_n})$. Daí,

$$I_\infty(w_n) = I_\infty(v_n - v_0 + o_n(1)) = I_\infty(v_n - v_0) + o_n(1).$$

De forma análoga ao que fizemos na demonstração do ítem (b) do Lema 1 mostra-se que $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, $(v_n)$ é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, $\nabla v_n(x) \to \nabla v_0(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e $(|\nabla v_n|)$ é limitada em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Segue então do Teorema de Brezis-Lieb que

$$\begin{aligned} |\nabla v_n|_p^p &= |\nabla v_0|_p^p + |\nabla v_n - \nabla v_0|_p^p + o_n(1) \\ |v_n|_{p^*}^{p^*} &= |v_0|_{p^*}^{p^*} + |v_n - v_0|_{p^*}^{p^*} + o_n(1), \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_\infty(w_n) \;=\; I_\infty(v_n - v_0) + o_n(1) = I_\infty(v_n) - I_\infty(v_0) + o_n(1).$$

Desde que $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$, segue que

$$I_\infty(w_n) = c - I_\infty(v_0) + o_n(1),$$

e fazendo $\tilde{c} = c - I_\infty(v_0)$ concluimos que

$$I_\infty(w_n) \to \tilde{c} \;\text{ quando }\; n \to \infty.$$

Finalmente estamos interessados em provar que $||I'_\infty(w_n)||_{D'} \to 0$ e para isto é suficiente provarmos que

$$||I'_\infty(\tilde{w_n})||_{D'} \to 0, \tag{1.61}$$

porque supondo provado que (1.61) ocorre, para cada $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ podemos definir a seqüência

$$\tilde{\Phi}_n(x) = R_n^{(p-N)/p}\Phi\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right)$$

que satisfaz

$$||\tilde{\Phi}_n|| = ||\Phi||, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$I'_\infty(w_n)\Phi = I'_\infty(\tilde{w}_n)\tilde{\Phi}_n.$$

Daí, tomando $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\Phi|| \leq 1$ temos

$$|I'_\infty(w_n)\Phi| = |I'_\infty(\tilde{w}_n)\tilde{\Phi}_n| \leq ||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'}||\tilde{\Phi}_n|| = ||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'}||\Phi|| \leq ||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'},$$

e portanto,

$$0 \leq ||I'_\infty(w_n)||_{D'} \leq ||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'},$$

e passando ao limite de $n \to \infty$ segue que $||I'_\infty(w_n)||_{D'} \to 0$.

Observemos que

$$||I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)||_{D'} \to 0. \tag{1.62}$$

De fato, para todo $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\Phi|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\,\Phi| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n\nabla\Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{w}|^{p^*-2}\tilde{w}_n\Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla\Phi dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2}v_n\Phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\nabla\Phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_0|^{p^*-2}v_0\Phi dx\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big(|\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\Big)\nabla\Phi\Big]\,dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} \Big[\Big(|\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\Big)\Phi\Big]\,dx\Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big||\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\Big|\,|\nabla\Phi|\,dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} \Big||\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\Big|\,|\Phi|\,dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$ na primeira parcela e $p^*/(p^*-1)$ e $p^*$ na segunda, encontramos

$$\begin{aligned}
&|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\,\Phi| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Big||\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\Big|^{p/(p-1)}\,dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}}||\Phi|| \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Big||\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\Big|^{p^*/(p^*-1)}\,dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}}|\Phi|_{p^*}.
\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$
\begin{aligned}
&|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\,\Phi| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} ||\Phi|| \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}} ||\Phi|| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}}
\end{aligned}
$$

Considerando $A(y) = |y|^{p-2}y$, $A'(y) = |y|^{p^*-2}y$, $\eta_n = \nabla v_n - \nabla v_0$, $w = \nabla v_0$, $\overline{\eta}_n = v_n - v_0$ e $\overline{w} = v_0$ temos que

$$
\begin{aligned}
&|[I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)]\,\Phi| \\
\leq\ & \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla\tilde{w}_n|^{p-2}\nabla\tilde{w}_n - |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \\
+\ & C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\tilde{w}_n|^{p^*-2}\tilde{w}_n - |v_n|^{p^*-2}v_n + |v_0|^{p^*-2}v_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}} \\
=\ & \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \\
+\ & C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}} + o_n(1),
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
&||I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)||_{D'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx\right)^{\frac{(p-1)}{p}} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx\right)^{\frac{(p^*-1)}{p^*}} + o_n(1).
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

Agora desde que

$$
\eta_n, w \in \left(L^p(\mathbb{R}^N)\right)^N \text{ e } \overline{\eta}_n, \overline{w} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N),
$$

$$
\eta_n(x) \to 0 \text{ e } \overline{\eta}_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N
$$

e

$$
|\eta_n|_p \leq C_1 \text{ e } |\overline{\eta}_n|_{p^*} \leq C_2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},
$$

segue do Lema 2 que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx \to 0
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx \to 0.
$$

Portanto de (1.63) obtemos

$$||I'_\infty(\tilde{w}_n) - I'_\infty(v_n) + I'_\infty(v_0)||_{D'} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

e daí, temos que

$$I'_\infty(\tilde{w}_n) = I'_\infty(v_n) - I'_\infty(v_0) + o_n(1)$$

onde $o_n(1) \to 0$ em $\left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$.

Desde que $v_0$ é ponto crítico do funcional $I_\infty$, segue que

$$I'_\infty(\tilde{w}_n) = I'_\infty(v_n) + o_n(1),$$

e portanto,

$$||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'} = ||I'_\infty(v_n) + o_n(1)||_{D'} \leq ||I'_\infty(v_n)||_{D'} + ||o_n(1)||_{D'}.$$

Desde que $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$, concluimos que

$$||I'_\infty(\tilde{w}_n)||_{D'} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

e a demonstração do Lema está concluída.

■

**Teorema 2** *(Um Resultado de Compacidade Global): Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$ com $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Então, a menos de subseqüência, $(u_n)$ verifica uma, e somente uma, das afirmações abaixo.*

*(a) $u_n \to u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ou,*

*(b) Existe $k \in \mathbb{N}$ e soluções não triviais $z_0^1, \cdots, z_0^k$ para o problema $(P_\infty)$, tais que*

$$||u_n||^p \to ||u_0||^p + \sum_{j=1}^{k} ||z_0^j||^p$$

*e*

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

**Demonstração:**

Usando argumentos análogos aos utilizados na prova do ítem (b) do Lema 1 mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla \phi dx \ , \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{1.64}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p^*-2}u_0\phi dx \ , \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.65}$$

Observemos agora que

$$a|u_n|^{p-2}u_n\phi = a^{(p-1)/p}|u_n|^{p-2}u_n a^{1/p}\phi \ , \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

onde $a^{(p-1)/p}|u_n|^{p-2}u_n \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ e $a^{1/p}\phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos a seqüência de funções $f_n(x) = a(x)^{(p-1)/p}|u_n(x)|^{p-2}u_n(x)$ e a função $f(x) = a(x)^{(p-1)/p}|u_0(x)|^{p-2}u_0(x)$. Temos que, a menos de subseqüência, $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Temos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^{p/(p-1)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx \leq |a|_{N/p}|u_n|_{p^*}^p \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|^{p/(p-1)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx \leq |a|_{N/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} < +\infty.$$

Então desde que $\dfrac{p}{(p-1)} > 1$, segue do Lema de Brezis-Lieb que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi dx \ , \ \forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

e desde que $a^{1/p}\phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a^{(p-1)/p}|u_n|^{p-2}u_n a^{1/p}\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a^{(p-1)/p}|u_0|^{p-2}u_0 a^{1/p}\phi dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^{p-2}u_n\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^{p-2}u_0\phi dx \ , \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.66}$$

Desde que $(u_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$, temos que $I'(u_n) \to 0$ em $\left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$ onde

$$I'(u_n)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^{p-2}u_n\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\phi dx$$

para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Fazendo $n \to \infty$ segue de (1.64), (1.65), (1.66) e da unicidade do limite que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 \nabla\phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^{p-2}u_0\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{p^*-2}u_0\phi dx = 0$$

para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e portanto $u_0$ é ponto crítico do funcional $I$.

Suponhamos que $u_n \not\rightharpoonup u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e seja $(z_n^1) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por $z_n^1 = u_n - u_0$. Então

$$z_n^1 \rightharpoonup 0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ mas } z_n^1 \not\rightharpoonup 0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Provaremos que $(z_n^1)$ é uma seqüência $(P.S.)_{c_1}$ para $I_\infty$.

De fato, do Teorema de Brezis-Lieb

$$||z_n^1||^p = |\nabla u_n - \nabla u_0|_p^p = |\nabla u_n|_p^p - |\nabla u_0|_p^p + o_n(1) \tag{1.67}$$

$$|z_n^1|_{p^*}^{p^*} = |u_n - u_0|_{p^*}^{p^*} = |u_n|_{p^*}^{p^*} - |u_0|_{p^*}^{p^*} + o_n(1). \tag{1.68}$$

Por outro lado, temos que, a menos de subseqüência, $|u_n(x)|^p \to |u_0(x)|^p$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e que

$$\frac{N}{(N-p)} > 1.$$

Notemos também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p)^{N/(N-p)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e além disso

$$|u_0|^p \in L^{N/(N-p)}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, do Lema de Brezis-Lieb, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$$

e desde que $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx,$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx = o_n(1). \tag{1.69}$$

Assim, de (1.67), (1.68) e (1.69) obtemos

$$\begin{aligned}
I_\infty(z_n^1) &= I_\infty(u_n - u_0) = \frac{1}{p}|\nabla u_n - \nabla u_0|_p^p - \frac{1}{p^*}|u_n - u_0|_{p^*}^{p^*} \\
&= \frac{1}{p}|\nabla u_n|_p^p - \frac{1}{p}|\nabla u_0|_p^p - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*} + \frac{1}{p^*}|u_0|_{p^*}^{p^*} + o_n(1) \\
&= \frac{1}{p}|\nabla u_n|_p^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx - \frac{1}{p^*}|u_n|_{p^*}^{p^*} \\
&- \frac{1}{p}|\nabla u_0|_p^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx + \frac{1}{p^*}|u_0|_{p^*}^{p^*} + o_n(1),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$I_\infty(z_n^1) \;=\; I(u_n) - I(u_0) + o_n(1). \tag{1.70}$$

Além disso, considerando $\eta_n = \nabla z_n^1$, $w = \nabla u_0$, $\overline{\eta}_n = z_n^1$ e $\overline{w} = u_0$ temos que

$$\eta_n, w \in \left(L^p(\mathbb{R}^N)\right)^N \text{ e } \overline{\eta}_n, \overline{w} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

$$\eta_n(x) \to 0 \text{ e } \overline{\eta}_n(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

$$|\eta_n|_p \leq C_1 \text{ e } |\overline{\eta}_n|_{p^*} \leq C_2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

e do Lema 2 obtemos os seguintes limites:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla z_n^1|^{p-2}\nabla z_n^1 - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{p/(p-1)} dx \to 0, \tag{1.71}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |z_n^1|^{p^*-2}z_n^1 - |u_0|^{p^*-2}u_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx \to 0. \tag{1.72}$$

Por outro lado, temos que, a menos de subseqüência,

$$\left||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u_0(x)|^{p-2}u_0(x)\right|^{p/(p-1)} \to 0 \ \text{ q.t.p. em } \ \mathbb{R}^N.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p/(p-1)}\right)^{p^*/p} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p^*/(p-1)} dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1}\right)^{p^*/(p-1)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} C\left(|u_n|^{p^*} + |u_0|^{p^*}\right) dx \\
&= C|u_n|_{p^*}^{p^*} + C|u_0|_{p^*}^{p^*} \leq K \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Então, desde que $\dfrac{p^*}{p} > 1$, segue do Lema de Brezis-Lieb que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p/(p-1)} \varphi dx \to 0 \ , \ \forall \varphi \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N),$$

e desde que $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a\left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p/(p-1)} dx \to 0. \tag{1.73}$$

Para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\phi|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\left|\left[I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)\right]\phi\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla z_n^1|^{p-2}\nabla z_n^1 - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||z_n^1|^{p^*-2}z_n^1 - |u_n|^{p^*-2}u_n + |u_0|^{p^*-2}u_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{(p^*-1)/p^*} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} a\left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
&||I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)||_{D'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla z_n^1|^{p-2}\nabla z_n^1 - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n + |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||z_n^1|^{p^*-2}z_n^1 - |u_n|^{p^*-2}u_n + |u_0|^{p^*-2}u_0\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{(p^*-1)/p^*} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} a\left||u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p}
\end{aligned}
$$

e de (1.71), (1.72) e (1.73) concluimos que

$$||I'_\infty(z_n^1) - I'(u_n) + I'(u_0)||_{D'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim,

$$I'_\infty(z_n^1) = I'(u_n) - I'(u_0) + o_n(1). \tag{1.74}$$

Concluimos então de (1.70) e (1.74) que $(z_n^1)$ é uma seqüência $(P.S.)_{c_1}$ para $I_\infty$. Portanto, do Lema 3, existem seqüências $(R_{n,1}) \subset \mathbb{R}$, $(x_{n,1}) \subset \mathbb{R}^N$, $z_0^1 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ solução não-trivial para o problema $(P_\infty)$ e uma seqüência $(z_n^2) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ o qual é $(P.S.)_{c_2}$ para $I_\infty$ e tais que

$$z_n^2(x) = z_n^1(x) - R_{n,1}^{(N-p)/p}.z_0^1(R_{n,1}(x - x_{n,1})) + o_n(1).$$

Se definirmos

$$v_n^1(x) = R_{n,1}^{(p-N)/p}.z_n^1\left(\frac{x}{R_{n,1}} + x_{n,1}\right) \tag{1.75}$$

e

$$\tilde{z}_n^2(x) = R_{n,1}^{(p-N)/p}.z_n^2\left(\frac{x}{R_{n,1}} + x_{n,1}\right),$$

segue que

$$\tilde{z}_n^2(x) = v_n^1(x) - z_0^1(x) + o_n(1). \tag{1.76}$$

Analogamente ao que fizemos na prova do Lema 3, usando mudança de variável, mostra-se que

$$||v_n^1|| = ||z_n^1|| \tag{1.77}$$

e

$$|v_n^1|_{p^*} = |z_n^1|_{p^*}$$

e daí segue que

$$I_\infty(v_n^1) = I_\infty(z_n^1). \tag{1.78}$$

Para cada $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, definimos a seqüência

$$\tilde{\Phi}_n(x) = R_{n,1}^{(N-p)/p}\Phi\left(R_{n,1}(x - x_{n,1})\right)$$

e usando mudança de variável mostra-se que

$$||\Phi|| = ||\tilde{\Phi}_n|| \ , \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_n^1|^{p-2}\nabla z_n^1 \nabla \tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n^1|^{p-2}\nabla v_n^1 \nabla \Phi dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n^1|^{p^*-2} z_n^1 \tilde{\Phi}_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |v_n^1|^{p^*-2} v_n^1 \Phi dx.$$

Logo,

$$I'_\infty(z_n^1)\tilde{\Phi}_n = I'_\infty(v_n^1)\Phi$$

e com isso obtemos que, para todo $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\Phi|| \leq 1$,

$$|I'_\infty(v_n^1)\Phi| = |I'_\infty(z_n^1)\tilde{\Phi}_n| \leq ||I'_\infty(z_n^1)||_{D'}||\tilde{\Phi}_n|| = ||I'_\infty(z_n^1)||_{D'}||\Phi|| \leq ||I'_\infty(z_n^1)||_{D'},$$

e portanto,

$$0 \leq ||I'_\infty(v_n^1)||_{D'} \leq ||I'_\infty(z_n^1)||_{D'}.$$

Fazendo $n \to \infty$ segue que

$$I'_\infty(v_n^1) \to 0 \text{ em } \left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'. \tag{1.79}$$

De (1.78), (1.79) e do ítem (a) do Lema 1 temos que $(v_n^1)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, a menos de subseqüência,

$$v_n^1 \rightharpoonup z_0^1. \tag{1.80}$$

De (1.76), usando o Teorema de Brezis-Lieb, segue que

$$||\tilde{z}_n^2||^p = ||v_n^1||^p - ||z_0^1||^p + o_n(1), \tag{1.81}$$

$$|\tilde{z}_n^2|_{p^*}^{p^*} = |v_n^1|_{p^*}^{p^*} - |z_0^1|_{p^*}^{p^*} + o_n(1)$$

e daí obtemos

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I_\infty(v_n^1) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.82}$$

Por outro lado, considerando $A(y) = |y|^{p-2}y$, $A'(y) = |y|^{p^*-2}y$, $\eta_n = \nabla v_n^1 - \nabla z_0^1$, $w = \nabla z_0^1$, $\overline{\eta}_n = v_n^1 - z_0^1$ e $\overline{w} = z_0^1$, usando o Lema 2, mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx \to 0.$$

Para todo $\Phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\Phi|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
&\left|[I'_\infty(\tilde{z}_n^2) - I'_\infty(v_n^1) + I'_\infty(z_0^1)]\right| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} + o_n(1),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
&||I'_\infty(\tilde{z}_n^2) - I'_\infty(v_n^1) + I'_\infty(z_0^1)||_{D'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) - A(\eta_n + w) + A(w)|^{p/(p-1)}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&+C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |A'(\overline{\eta}_n) - A'(\overline{\eta}_n + \overline{w}) + A'(\overline{w})|^{p^*/(p^*-1)}\, dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} + o_n(1).
\end{aligned}$$

Então, fazendo $n \to \infty$ concluimos que

$$I'_\infty(\tilde{z}_n^2) = I'_\infty(v_n^1) - I'_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.83}$$

Combinando (1.77) com (1.81) obtemos

$$||\tilde{z}_n^2||^p = ||z_n^1||^p - ||z_0^1||^p + o_n(1)$$

e de (1.67) segue que

$$||\tilde{z}_n^2||^p = ||u_n||^p - ||u_0||^p - ||z_0^1||^p + o_n(1). \tag{1.84}$$

De (1.78) e (1.82) obtemos

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I_\infty(z_n^1) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1)$$

e de (1.70) segue que

$$I_\infty(\tilde{z}_n^2) = I(u_n) - I(u_0) - I_\infty(z_0^1) + o_n(1). \tag{1.85}$$

Se $\tilde{z}_n^2 \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que o teorema fica provado com $k = 1$, pois $||\tilde{z}_n^2||^p \to 0$ e de (1.84) temos que

$$||u_n||^p \to ||u_0||^p + ||z_0^1||^p$$

e além disso, da continuidade de $I_\infty$, temos que $I_\infty(\tilde{z}_n^2) \to 0$ e de (1.85) obtemos

$$I(u_n) \to I(u_0) + I_\infty(z_0^1).$$

Se $\tilde{z}_n^2 \not\to 0$, desde que temos por (1.76) e (1.80) que $\tilde{z}_n^2 \rightharpoonup 0$ e por (1.82) e (1.83) que $(\tilde{z}_n^2)$ é $(P.S.)_{c_2}$ para $I_\infty$, podemos aplicar o Lema 3 e encontramos $(R_{n,2}) \subset \mathbb{R}$, $(x_{n,2}) \subset \mathbb{R}^N$, $z_0^2 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ solução não-trivial para o problema $(P_\infty)$ e uma seqüência $(z_n^3) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ o qual é $(P.S.)_{c_3}$ para $I_\infty$ e tais que

$$z_n^3(x) = \tilde{z}_n^2(x) - R_{n,2}^{(N-p)/p} z_0^2(R_{n,2}(x - x_{n,2})) + o_n(1).$$

Se definirmos

$$v_n^2(x) = R_{n,2}^{(p-N)/p}.\tilde{z}_n^2\left(\frac{x}{R_{n,2}} + x_{n,2}\right)$$

e

$$\tilde{z}_n^3(x) = R_{n,2}^{(p-N)/p}.z_n^3\left(\frac{x}{R_{n,2}} + x_{n,2}\right),$$

segue que

$$\tilde{z}_n^3(x) = v_n^2(x) - z_0^2(x) + o_n(1). \tag{1.86}$$

Argumentando de forma análoga que fizemos anteriormente, obtemos os seguintes resultados:

$$||v_n^2|| = ||\tilde{z}_n^2||, \tag{1.87}$$

$$I_\infty(v_n^2) = I_\infty(\tilde{z}_n^2), \tag{1.88}$$

$$I'_\infty(v_n^2) \to 0 \text{ em } \left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)', \tag{1.89}$$

$$v_n^2 \rightharpoonup z_0^2, \tag{1.90}$$

$$||\tilde{z}_n^3||^p = ||v_n^2||^p - ||z_0^2||^p + o_n(1), \tag{1.91}$$

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I_\infty(v_n^2) - I_\infty(z_0^2) + o_n(1) \tag{1.92}$$

e

$$I'_\infty(\tilde{z}_n^3) = I'_\infty(v_n^2) - I'_\infty(z_0^2) + o_n(1). \tag{1.93}$$

Combinando (1.87) e (1.91) obtemos

$$||\tilde{z}_n^3||^p = ||\tilde{z}_n^2||^p - ||z_0^2||^p + o_n(1)$$

e de (1.84) segue que

$$||\tilde{z}_n^3||^p = ||u_n||^p - ||u_0||^p - ||z_0^1||^p - ||z_0^2||^p + o_n(1). \tag{1.94}$$

De (1.88) e (1.92) obtemos

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I_\infty(\tilde{z}_n^2) - I_\infty(z_0^2) + o_n(1)$$

e de (1.85) segue que

$$I_\infty(\tilde{z}_n^3) = I(u_n) - I(u_0) - I_\infty(z_0^1) - I_\infty(z_0^2) + o_n(1). \tag{1.95}$$

Se $\tilde{z}_n^3 \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que o Teorema fica provado com $k = 2$, pois $||\tilde{z}_n^3||^p \to 0$ e de (1.94) temos que

$$||u_n||^p \to ||u_0||^p + \sum_{j=1}^{2} ||z_0^j||^p$$

e além disso, desde que $I_\infty(\tilde{z}_n^3) \to 0$, temos por (1.95) que

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{2} I_\infty(z_0^j).$$

Se $\tilde{z}_n^3 \not\to 0$, repetimos os argumentos e encontramos $z_0^1$, $z_0^2$, ..., $z_0^{k-1}$ soluções não-triviais para $(P_\infty)$ satisfazendo

$$||\tilde{z}_n^k||^p = ||u_n||^p - ||u_0||^p - \sum_{j=1}^{k-1} ||z_0^j||^p + o_n(1) \tag{1.96}$$

e

$$I_\infty(\tilde{z}_n^k) = I(u_n) - I(u_0) - \sum_{j=1}^{k-1} I_\infty(z_0^j) + o_n(1). \tag{1.97}$$

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$|z_0^j|_{p^*}^p S \leq ||z_0^j||^p \ , \ j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{1.98}$$

Desde que $z_0^j$ é solução fraca do problema $(P_\infty)$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_0^j|^{p-2} \nabla z_0^j \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |z_0^j|^{p^*-2} z_0^j \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

e desde que $z_0^j \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$, vale em particular que

$$||z_0^j||^p = |z_0^j|_{p^*}^{p^*}$$

e portanto,

$$||z_0^j||^{p/p^*} = |z_0^j|_{p^*} \ , \ j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{1.99}$$

Substituindo (1.99) em (1.98) obtemos

$$\left(||z_0^j||^{p/p^*}\right)^p S \leq ||z_0^j||^p \ , \ j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Daí,

$$\left(||z_0^j||^{p/p^*}\right)^p S \leq ||z_0^j||^p \Leftrightarrow S \leq \left(||z_0^j||^p\right)^{1-\frac{p}{p^*}} \Leftrightarrow S^{N/p} \leq ||z_0^j||^p,$$

e portanto,

$$-||z_0^j||^p \leq -S^{N/p} \ , \ j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{1.100}$$

Então de (1.96) e (1.100) obtemos

$$\begin{aligned} ||\tilde{z}_n^k||^p &= ||u_n||^p - ||u_0||^p - \sum_{j=1}^{k-1} ||z_0^j||^p + o_n(1) \qquad (1.101) \\ &\leq ||u_n||^p - ||u_0||^p - \sum_{j=1}^{k-1} S^{N/p} + o_n(1) \\ &= ||u_n||^p - ||u_0||^p - (k-1)S^{N/p} + o_n(1). \end{aligned}$$

Desde que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$||u_n||^p - ||u_0||^p + o_n(1) \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então de (1.101) segue que

$$0 \leq ||\tilde{z}_n^k||^p \leq C - (k-1)S^{N/p} \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C - (k-1)S^{N/p} \leq 0$, segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} ||\tilde{z}_n^k||^p \leq 0.$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty} ||\tilde{z}_n^k||^p = 0$ e assim, $\tilde{z}_n^k \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e o Teorema está demonstrado.

■

**Corolário 1** *: Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$ com $c \in (0, (1/N)S^{N/p})$. Então $(u_n)$ possui uma subseqüência que converge fortemente em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

**Demonstração:**

Desde que $(u_n)$ é $(P.S.)_c$ para $I$ temos que $(u_n)$ é limitada e sendo $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço reflexivo segue que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Suponhamos por contradição que $u_n \not\to u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Então, do Teorema 2, existem $k \in \mathbb{N}$ e soluções não-triviais $z_0^1, \ldots, z_0^k$ do problema $(P_\infty)$ tais que, a menos de subseqüência,

$$||u_n||^p \to ||u_0||^p + \sum_{j=1}^{k} ||z_0^j||^p$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Na prova do Teorema 2 mostramos que nessas condições $u_0$ é ponto crítico do funcional $I$ e daí segue que

$$I'(u_0)u_0 = ||u_0||^p + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx - |u_0|_{p^*}^{p^*} = 0,$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx = |u_0|_{p^*}^{p^*} - ||u_0||^p.$$

Com isso obtemos

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{p}||u_0||^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx - \frac{1}{p^*}|u_0|_{p^*}^{p^*} \\ &= \frac{1}{p}||u_0||^p + \frac{1}{p}\left(|u_0|_{p^*}^{p^*} - ||u_0||^p\right) - \frac{1}{p^*}|u_0|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{N}|u_0|_{p^*}^{p^*} \geq 0. \end{aligned}$$

Da unicidade do limite

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$$

e daí temos que

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) \geq \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) \geq \frac{k}{N} S^{N/p} \geq \frac{1}{N} S^{N/p}.$$

Temos então que $c \notin (0, (1/N)S^{N/p})$, o que é uma contradição.

■

**Corolário 2** *: O funcional $I : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição Palais-Smale no intervalo $((1/N)S^{N/p}, (2/N)S^{N/p})$.*

**Demonstração:**

Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$, ou seja,

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0.$$

Na prova do Corolário 1 argumentamos que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Suponhamos por contradição que $u_n \not\to u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema 2, existem $k \in \mathbb{N}$ e soluções não-triviais $z_0^1, \ldots, z_0^k$ do problema $(P_\infty)$ tais que, a menos de subseqüência,

$$||u_n||^p \to ||u_0||^p + \sum_{j=1}^{k} ||z_0^j||^p$$

e

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Da unicidade do limite temos

$$c = I(u_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Na prova do Corolário 1 mostramos que $I(u_0) \geq 0$ e daí, segue que $k$ não pode ser maior do que 1 e $z_0^1$ não pode mudar de sinal, pois caso contrário, teríamos $c \notin ((1/N)S^{N/p}, (2/N)S^{N/p})$ e então já teríamos uma contradição.

Portanto temos

$$c = I(u_0) + I_\infty(z_0^1) = I(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/p}.$$

Da definição de melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$S|u|_{p^*}^p \leq ||u||^p \ , \ \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.102}$$

Desde que, por argumentos usados na prova do Teorema 2, $u_0$ é ponto crítico do funcional $I$, segue que

$$I'(u_0)u_0 = ||u_0||^p + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx - |u_0|_{p^*}^{p^*} = 0.$$

Daí,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} a|u_0|^p dx = |u_0|_{p^*}^{p^*} - ||u_0||^p,$$

e portanto,

$$||u_0||^p \leq |u_0|_{p^*}^{p^*}.$$

Combinando esta última desigualdade com (1.102) obtemos

$$S|u_0|_{p^*}^p \leq |u_0|_{p^*}^{p^*}.$$

Daí,

$$S \leq |u_0|_{p^*}^{p^*-p} = |u_0|_{p^*}^{p^2/(N-p)} \Rightarrow S^{N/p} \leq |u_0|_{p^*}^{p^*} \Rightarrow \frac{1}{N}S^{N/p} \leq \frac{1}{N}|u_0|_{p^*}^{p^*}$$

e logo,

$$\frac{2}{N}S^{N/p} \leq \frac{1}{N}|u_0|_{p^*}^{p^*} + \frac{1}{N}S^{N/p}.$$

Por argumentos usados na prova do Corolário 1 temos que

$$I(u_0) = \frac{1}{N}|u_0|_{p^*}^{p^*},$$

e daí,

$$\frac{2}{N}S^{N/p} \leq I(u_0) + \frac{1}{N}S^{N/p} = c$$

e isso contradiz o fato de $c \in ((1/N)S^{N/p}, (2/N)S^{N/p})$.

■

**Corolário 3**

*: Seja $(u_n)$ uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$ com $c \in ((k/N)S^{N/p}, ((k+1)/N)S^{N/p})$ onde $k \in \mathbb{N}$. Então o limite fraco $u_0$ de $(u_n)$ é não-nulo.*

**Demonstração:**

Suponhamos por contradição que $u_0 \equiv 0$.

Então $u_n \to 0$ ou $u_n \not\to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Se $u_n \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então da continuidade de $I$ e da unicidade do limite, segue que $c = 0$ e isso contradiz o fato de $c \in ((k/N)S^{N/p}, ((k+1)/N)S^{N/p})$.

Se $u_n \not\to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então do Teorema 2 temos que para uma subseqüência de $(u_n)$ vale

$$||u_n||^p \to \sum_{j=1}^{k} ||z_0^j||^p$$

e

$$I(u_n) \to \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Da unicidade do limite temos

$$c = \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j).$$

Se para todo $j = 1, \ldots, k$, $z_0^j$ é solução positiva do problema $(P_\infty)$, então $c = (k/N)S^{N/p}$. Se para algum $j$, $z_0^j$ é uma solução que muda de sinal, então $c > ((k+1)/N)S^{N/p}$. Ambos os casos contradizem o fato de $c \in ((k/N)S^{N/p}, ((k+1)/N)S^{N/p})$.

Concluimos então que $u_0 \not\equiv 0$.

■

Daqui em diante, denotaremos por $f : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$f(u) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)dx$$

e por $M \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a seguinte variedade:

$$M \;=\; \left\{ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx = 1 \right\}.$$

Observamos que se $(u_n) \subset M$ satisfaz

$$f(u_n) \to c \;\text{ e }\; f'\Big|_M (u_n) \to 0,$$

a seqüência $(v_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde $v_n = c^{(N-p)/p^2} u_n$, verifica os seguintes limites:

$$I(v_n) \to \frac{1}{N} c^{N/p} \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0.$$

De fato, temos que

$$I(v_n) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a|v_n|^p dx - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*} dx.$$

Da definição de $v_n$ obtemos

$$\begin{aligned} I(v_n) &= \frac{1}{p} c^{(N-p)/p} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx \right) - \frac{1}{p^*} c^{(N-p)p^*/p^2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \\ &= \frac{1}{p} c^{(N-p)/p} f(u_n) - \frac{1}{p^*} c^{N/p} = \frac{1}{p} c^{(N-p)/p} c - \frac{1}{p^*} c^{N/p} + o_n(1) \\ &= \frac{1}{p} c^{N/p} - \frac{1}{p^*} c^{N/p} + o_n(1) = \frac{1}{N} c^{N/p} + o_n(1) \end{aligned}$$

e com isso concluimos que

$$I(v_n) \to \frac{1}{N} c^{N/p} \text{ quando } n \to \infty.$$

Além disso, temos que

$$||f'(u)||_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||f'(u) - \lambda \psi'(u)||_{D'}$$

onde $||.||_*$ é a norma da derivada da restrição de $f$ a $M$ em $u$ e $\psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx$.

Observemos que $\psi \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e que $\psi'(u)\phi = p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u\phi dx$.

Agora para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $||f'(u_n)||_* = ||f'(u_n) - \lambda_n \psi'(u_n)||_{D'}$.

Para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\phi|| \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned} |I'(v_n)\phi| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|v_n|^{p-2} v_n \phi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{p^*-2} v_n \phi dx \right| \\ &= \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^{p-2} u_n \phi dx \right) \right. \\ &- \left. c^{(N-p)(p^*-1)/p^2} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \phi dx \right) \right| \\ &= \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2} \frac{1}{p} \left( p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx + p \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^{p-2} u_n \phi dx \right) \right. \\ &- \left. c^{(N-p)(p^*-1)/p^2} \frac{1}{p^*} \left( p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \phi dx \right) \right|. \end{aligned}$$

Desde que $f'(u_n)\phi = p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi dx + p \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^{p-2} u_n \phi dx$ e que $\psi'(u_n)\phi = p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n \phi dx$, segue que

$$|I'(v_n)\phi| = \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2} \frac{1}{p} f'(u_n)\phi - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2} \frac{1}{p^*} \psi'(u_n)\phi \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}f'(u_n)\phi - c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n\psi'(u_n)\phi \right. \\
&+ \left. c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n\psi'(u_n)\phi - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2}\frac{1}{p^*}\psi'(u_n)\phi \right|.
\end{aligned}
$$

Usando desigualdade triangular, temos que

$$
\begin{aligned}
|I'(v_n)\phi| &\leq c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}|f'(u_n)\phi - \lambda_n\psi'(u_n)\phi| \\
&+ \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| |\psi'(u_n)\phi| \\
&\leq c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}||f'(u_n) - \lambda_n\psi'(u_n)||_{D'}||\phi|| \\
&+ \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| ||\psi'(u_n)||_{D'}||\phi||.
\end{aligned}
$$

Desde que $||\phi|| \leq 1$ e $||f'(u_n) - \lambda_n\psi'(u_n)||_{D'} = ||f'(u_n)||_*$, segue que

$$
\begin{aligned}
|I'(v_n)\phi| &\leq c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}||f'(u_n)||_* \\
&+ \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^8-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| ||\psi'(u_n)||_{D'} \\
&= o_n(1) + \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^8-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| ||\psi'(u_n)||_{D'}
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
||I'(v_n)||_{D'} \leq o_n(1) + \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| ||\psi'(u_n)||_{D'}. \tag{1.103}
$$

Mostraremos que

$$
||\psi'(u_n)||_{D'} \leq p^*C \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.104}
$$

e que

$$
\left| c^{(N-p)(p-1)/p^2}\frac{1}{p}\lambda_n - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2}\frac{1}{p^*} \right| \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.105}
$$

Temos que (1.104) de fato ocorre, pois para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\phi|| \leq 1$ temos que

$$
\begin{aligned}
|\psi'(u_n)\phi| &= \left| p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\phi dx \right| \\
&\leq p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}|u_n||\phi| dx = p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-1}|\phi| dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p^*/(p^*-1)$ e $p^*$, obtemos

$$
|\psi'(u_n)\phi| \leq p^* \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right)^{(p^*-1)/p^*} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} dx \right)^{1/p^*}.
$$

Recordando que $(u_n) \subset M$, segue que

$$\begin{aligned} |\psi'(u_n)\phi| &\leq p^* \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx\right)^{(p^*-1)/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} = p^*|\phi|_{p^*} \\ &\leq p^* C||\phi|| \leq p^* C \end{aligned}$$

e portanto

$$||\psi'(u_n)||_{D'} \leq p^* C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observemos agora que

$$||f'(u_n)||_* \to 0 \Leftrightarrow ||f'(u_n) - \lambda_n \psi'(u_n)||_{D'} \to 0.$$

Desde que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e que

$$|f'(u_n)u_n - \lambda_n \psi'(u_n)u_n| \leq ||f'(u_n) - \lambda_n \psi'(u_n)||_{D'}||u_n||$$

segue que

$$|f'(u_n)u_n - \lambda_n \psi'(u_n)u_n| \to 0.$$

Daí,

$$|f'(u_n)u_n - \lambda_n \psi'(u_n)u_n| \to 0$$

o que implica que

$$\left| p\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n|^p dx\right) - \lambda_n p^* \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \right| \to 0.$$

Logo,

$$|pf(u_n) - \lambda_n p^*| \to 0 \Rightarrow pf(u_n) - \lambda_n p^* = o_n(1) \Rightarrow \lambda_n = \frac{p}{p^*} f(u_n) + o_n(1)$$

de onde concluimos que

$$\lambda_n = \frac{p}{p^*} c + o_n(1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\left| c^{(N-p)(p-1)/p^2} \frac{1}{p} \lambda_n - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2} \frac{1}{p^*} \right| \\ &= \left| c^{(N-p)(p-1)/p^2} \frac{1}{p} \frac{p}{p^*} c - c^{(N-p)(p^*-1)/p^2} \frac{1}{p^*} + o_n(1) \right| \\ &= \left| c^{(Np-N+p)/p^2} \frac{1}{p^*} - c^{(Np-N+p)/p^2} \frac{1}{p^*} + o_n(1) \right| = o_n(1) \end{aligned}$$

e de fato (1.105) ocorre.

Concluimos então de (1.103) que

$$||I'(v_n)||_{D'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Notemos agora que se existem $(u_n) \subset M$ e $c \in (S, 2^{p/N}S)$ tais que

$$f(u_n) \to c \ \text{ e } \ f'\Big|_M(u_n) \to 0,$$

então, a menos de subseqüência, $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, temos que a seqüência $(v_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por, $v_n = c^{(N-p)/p^2}u_n$, é Palais-Smale de nível $\frac{1}{N}c^{N/p}$ para $I$.

Desde que $c \in (S, 2^{p/N}S)$, temos que

$$\frac{1}{N}c^{N/p} \in \left(\frac{1}{N}S^{N/p}, \frac{2}{N}S^{N/p}\right)$$

e do Corolário 2 segue que, a menos de subseqüência, $v_n \to v$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Daí, fazendo $u = c^{(p-N)/p^2}v$, temos

$$c^{(N-p)/p^2}||u_n - u|| = ||c^{(N-p)/p^2}u_n - c^{(N-p)/p^2}u|| = ||v_n - v|| \to 0$$

e portanto

$$||u_n - u|| \to 0.$$

**Corolário 4** *: Se existem $(u_n) \subset M$ e $c \in (S, 2^{p/N}S)$ tais que*

$$f(u_n) \to c \quad e \quad f'\Big|_M(u_n) \to 0,$$

*então $I$ tem um ponto crítico $v_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $I(v_0) = \dfrac{1}{N}c^{N/p}$.*

**Demonstração:**

Da observação anterior, a seqüência $(v_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por $v_n = c^{(N-p)/p^2}u_n$ verifica os seguintes limites:

$$I(v_n) \to \frac{1}{N}c^{N/p} \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0.$$

Desde que $c \in (S, 2^{p/N}S)$, segue que

$$\frac{1}{N}c^{N/p} \in \left(\frac{1}{N}S^{N/p}, \frac{2}{N}S^{N/p}\right)$$

e do Corolário 2 temos que, a menos de subseqüência, $v_n \to v_0$ e do fato de que $I \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e da unicidade do limite obtemos que $v_0$ é ponto crítico do funcional $I$ e que $I(v_0) = \dfrac{1}{N}c^{N/p}$.

■

# Capítulo 2

# Existência de Soluções Positivas para $(P)$

Nesta seção, mostraremos a existência de soluções positivas para $(P)$. Para este próposito, usamos argumentos que poderão ser encontrados no artigo [1] e que são parecidos aos utilizados por Benci e Cerami [4]. Daqui em diante, denotamos por $\Phi_{\delta,y} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a função

$$\Phi_{\delta,y}(x) = \frac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \frac{[N((N-p)/(p-1))\delta]^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} \ , \ x, y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \delta > 0.$$

Por um resultado de Talenti [14], segue que

$$||\Phi_{\delta,y}||^p = S \ \text{ e } \ |\Phi_{\delta,y}|_{p^*} = 1. \ \text{(veja também Aubin [2])}$$

O principal resultado estudado neste capítulo é o seguinte:

**Teorema 3** *: Seja $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa tal que*

*(a1)* $a(x_0) > 0$ *para algum* $x_0 \in \mathbb{R}^N$

*(a2)* $a \in L^S(\mathbb{R}^N)$ $\forall s \in [p_1, p_2]$, *onde* $1 < p_1 < \dfrac{N}{p} < p_2$ *com* $p_2 < (N(p-1))/(p^2 - N)$ *se* $N < p^2$ *e*

*(a3)* $|a|_{N/p}(\mathbb{R}^N) < S(2^{p/N} - 1)$.

*Então existe um ponto crítico* $\tilde{u}_0 \in M$ *do funcional* $f\Big|_M$ *com* $S < f(\tilde{u}_0) < 2^{p/N}S$.

Para provar o Teorema 3, primeiramente começamos observando que $\Phi_{\delta,y}$ satisfaz

$$\Phi_{\delta,y} \in \sum = \{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : u \geq 0\} \tag{2.1}$$

e

$$\Phi_{\delta,y} \in L^q(\mathbb{R}^N) \text{ para } q \in \left(\frac{(p-1)N}{N-p}, p^*\right] \ , \ \forall \delta > 0 \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

De fato, (2.1) é imediato da definição de $\Phi_{\delta,y}$.

Com relação a (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} \right|^q dx \\
&= C_{N,p}^q \delta^{(N-p)q/p^2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left\{\delta\left[1 + \left(\frac{|x-y|}{\delta^{(p-1)/p}}\right)^{p/(p-1)}\right]\right\}^{(N-p)q/p}} dx \\
&= C_{N,p}^q \delta^{(N-p)q/p^2} \delta^{(p-N)q/p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left[1 + \left|\frac{x-y}{\delta^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^{(N-p)q/p}} dx
\end{aligned}$$

onde

$$C_{N,p} = \frac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \left[\frac{N(N-p)}{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}.$$

Fazendo $z = \dfrac{x-y}{\delta^{(p-1)/p}}$ segue que $x = \delta^{(p-1)/p} z + y$ e daí $dx = \delta^{(p-1)N/p} dz$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^q dx &= C_{N,p}^q \delta^{(N-p)q(1-p)/p^2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1 + |z|^{p/(p-1)}]^{(N-p)q/p}} \delta^{(p-1)N/p} dz \\
&= C_{N,p}^q \delta^{(N-p)(p-1)(p^*-q)/p^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p} dz.
\end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p} dz \\
= &\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p} dz + \int_{\overline{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p} dz.
\end{aligned}$$

Desde que a função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(z) = \left[\dfrac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}$ é contínua e $\overline{B}_R(0)$ é compacto, segue que

$$\int_{\overline{B}_R(0)} \left[\frac{1}{1 + |z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p} dz < +\infty.$$

Por outro lado

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_R(0)}\left[\frac{1}{1+|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_R(0)}\left[\frac{1}{|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz.$$

Fazendo mudança de variável para coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_R(0)}\left[\frac{1}{1+|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz &\leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_R(0)}\left[\frac{1}{|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz\\ = \int_R^{+\infty}\left[\frac{1}{\rho^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}\rho^{N-1}d\rho &= \int_R^{+\infty}\left(\frac{1}{\rho}\right)^{(N-p)q/(p-1)}\rho^{N-1}d\rho\\ = \lim_{s\to+\infty}\int_R^s \rho^{((p-N)q/(p-1))+N-1}d\rho.\end{aligned}$$

Mas temos que

$$\lim_{s\to+\infty}\int_R^s \rho^{((p-N)q/(p-1))+N-1}d\rho < +\infty$$

se, e somente se,

$$\frac{(p-N)q}{p-1}+N-1<-1$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{N(p-1)}{N-p}<q.$$

Portanto, temos que se $q\in\left(\frac{(p-1)N}{N-p},p^*\right]$, então

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\Phi_{\delta,y}|^q dx = C_{N,p}^q\delta^{(N-p)(p-1)(p^*-q)/p^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{1+|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz<+\infty$$

e daí (2.2) de fato ocorre.

**Lema 4** *: Para cada $y\in\mathbb{R}^N$ fixado, temos*

*(i)* $||\Phi_{\delta,y}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}\to+\infty$ *quando* $\delta\to 0$,

*(ii)* $||\Phi_{\delta,y}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}\to 0$ *quando* $\delta\to+\infty$,

*(iii)* $|\Phi_{\delta,y}|_q\to 0$ *quando* $\delta\to 0$, $\forall q\in\left(\frac{(p-1)N}{N-p},p^*\right)$,

*(iv)* $|\Phi_{\delta,y}|_q\to+\infty$ *quando* $\delta\to+\infty$, $\forall q\in\left(\frac{(p-1)N}{N-p},p^*\right)$.

**Demonstração:**

Temos que

$$\Phi_{\delta,y}(x) = C_{N,p}\frac{\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} = C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\left[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}\right]^{-\frac{N}{p}+1},$$

onde $C_{N,p} = \dfrac{1}{S^{(N-p)/p^2}}\left[\dfrac{N(N-p)}{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_{\delta,y}(x)}{\partial x_i} \\
&= C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\left(\frac{p-N}{p-1}\right)(x_i - y_i)|x-y|^{(-p+2)/(p-1)}[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{-N/p}
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)| &= \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \Phi_{\delta,y}(x)}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} = \\
&= C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\left(\frac{N-p}{p-1}\right)|x-y|^{(-p+2)/(p-1)}[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{-N/p}|x-y| \\
&= K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}|x-y|^{1/(p-1)}[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{-N/p} \\
&= \frac{K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}|x-y|^{1/(p-1)}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{N/p}}
\end{aligned}$$

onde $K_{N,p} = C_{N,p}\left(\dfrac{N-p}{p-1}\right)$.

Considerando a função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \frac{K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}t^{1/(p-1)}}{[\delta + t^{p/(p-1)}]^{N/p}} = K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}t^{1/(p-1)}[\delta + t^{p/(p-1)}]^{-N/p}$$

temos que $h(0) = 0$, $h(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ e $h(t) \geq 0$, e desde que a função $h$ é contínua, concluimos que $h$ admite valor máximo.

Estamos agora interessados em calcular o valor máximo de $h$.

Temos que

$$\begin{aligned}
h'(t) &= K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\left[\frac{1}{p-1}t^{(2-p)/(p-1)}(\delta + t^{p/(p-1)})^{-N/p}\right. \\
&+ \left. t^{1/(p-1)}\frac{p}{p-1}t^{1/(p-1)}\left(-\frac{N}{p}\right)(\delta + t^{p/(p-1)})^{-(N/p)-1}\right] \\
&= K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\frac{1}{p-1}t^{(2-p)/(p-1)}(\delta + t^{p/(p-1)})^{-N/p} \\
&- K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}t^{2/(p-1)}\frac{N}{p-1}(\delta + t^{p/(p-1)})^{-(N/p)-1}.
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação $h'(t) = 0$ segue que

$$h'(t) \;=\; 0$$

se, e somente se,

$$\begin{aligned} & K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\frac{1}{p-1}t^{(2-p)/(p-1)}(\delta + t^{p/(p-1)})^{-N/p} \\ & = K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}t^{2/(p-1)}\frac{N}{p-1}(\delta + t^{p/(p-1)})^{-(N/p)-1} \end{aligned}$$

que por sua vez é equivalente a

$$t = \frac{1}{(N-1)^{(p-1)/p}}\delta^{(p-1)/p}.$$

Agora

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{(N-1)^{(p-1)/p}}\delta^{(p-1)/p}\right) &= K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\frac{1}{(N-1)^{1/p}}\delta^{1/p}\left(\delta + \frac{1}{N-1}\delta\right)^{-N/p} \\ &= K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}\frac{1}{(N-1)^{1/p}}\delta^{1/p}\left(\frac{N\delta}{N-1}\right)^{-N/p} \\ &= K^{(1)}_{N,p}\delta^{N(1-p)/p^2} \end{aligned}$$

onde $K^{(1)}_{N,p} = K_{N,p}\dfrac{1}{(N-1)^{1/p}}\left(\dfrac{N}{N-1}\right)^{-N/p}$.

Temos então que

$$||\Phi_{\delta,y}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} = K^{(1)}_{N,p}\delta^{N(1-p)/p^2}$$

e desde que $K^{(1)}_{N,p} > 0$ e $N(1-p)/p^2 < 0$, segue que $(i)$ e $(ii)$ ocorrem.

Afim de provarmos que valem $(iii)$ e $(iv)$, recordemos que

$$|\Phi_{\delta,y}|^q_q \;=\; C^q_{N,p}\delta^{(N-p)(p-1)(p^*-q)/p^2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{1+|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz$$

onde

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{1+|z|^{p/(p-1)}}\right]^{(N-p)q/p}dz < +\infty\ ,\ \forall q \in \left(\frac{(p-1)N}{N-p}, p^*\right).$$

Desde que $q < p^*$ segue que

$$\frac{(N-p)(p-1)(p^*-q)}{p^2} > 0$$

e daí concluimos que $(iii)$ e $(iv)$ ocorrem.

■

**Lema 5** *: Para cada $\varepsilon > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dx \to 0 \text{ quando } \delta \to 0.$$

**Demonstração:**

Usando a definição de $\Phi_{\delta,0}$, obtemos por contas já feitas na demonstração do Lema 4 que

$$|\nabla \Phi_{\delta,0}(x)| = \frac{K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}|x|^{1/(p-1)}}{[\delta + |x|^{p/(p-1)}]^{N/p}}$$

onde $K_{N,p} = \dfrac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \left[\dfrac{N(N-p)}{p-1}\right]^{(N-p)/p^2} \left(\dfrac{N-p}{p-1}\right)$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \left| \frac{K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}|x|^{1/(p-1)}}{[\delta + |x|^{p/(p-1)}]^{N/p}} \right|^p dx \\
&= K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \frac{|x|^{p/(p-1)}}{[\delta + |x|^{p/(p-1)}]^N} dx.
\end{aligned}$$

e mudando para coordenadas esféricas encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dx &= K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\rho^{p/(p-1)}}{[\delta + \rho^{p/(p-1)}]^N} \rho^{N-1} d\rho \\
&\leq K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\rho^{p/(p-1)}}{\rho^{(pN)/(p-1)}} \rho^{N-1} d\rho \\
&= K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} \int_\varepsilon^{+\infty} \rho^{((1-N)p/(p-1)+(N-1))} d\rho. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Notemos que $\int_\varepsilon^{+\infty} \rho^{((1-N)p/(p-1)+(N-1))} d\rho$ é convergente. De fato,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \rho^{((1-N)p/(p-1)+(N-1))} d\rho < +\infty$$

se, e somente se,

$$\frac{(1-N)p}{p-1} + N - 1 < -1$$

que por sua vez equivale a

$$p < N.$$

Daí, desde que $\int_\varepsilon^{+\infty} \rho^{((1-N)p/(p-1)+(N-1))} d\rho < +\infty$ e $\dfrac{(N-p)}{p} > 0$ segue que

$$K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} \int_\varepsilon^{+\infty} \rho^{((1-N)p/(p-1)+(N-1))} d\rho \to 0 \text{ quando } \delta \to 0$$

e por (2.3) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dx \to 0 \ \text{ quando } \ \delta \to 0.$$

■

**Lema 6** *: Suponhamos que* $a \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $\forall s \in [p_1, p_2]$ *onde* $1 < p_1 < \dfrac{N}{p} < p_2$ *com* $p_2 < \dfrac{N(p-1)}{p^2 - N}$ *se* $N < p^2$*. Então para cada* $\varepsilon > 0$*, existem* $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\varepsilon) > 0$ *e* $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon) > 0$ *tais que*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,y}) < S + \varepsilon \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}] \cup [\overline{\delta}, \infty).$$

**Demonstração:**

Fixemos $y \in \mathbb{R}^N$, $s \in \left(\dfrac{N}{p}, p_2\right]$ e $t \in (1, +\infty)$ com $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 1$.

Temos que

$$\frac{(p-1)N}{N-p} < pt < p^*. \tag{2.4}$$

De fato, primeiramente observemos que se $s \in \left(\dfrac{N}{p}, p_2\right]$, então $s > 0$ e conseqüentemente

$$\frac{1}{s} > 0. \tag{2.5}$$

Desde que $\dfrac{N}{p} < s$ e $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 1$, temos que

$$1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} < \frac{p}{N} + \frac{1}{t} \ \Rightarrow \ 1 - \frac{p}{N} < \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{N-p}{N} < \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{N-p}{Np} < \frac{1}{pt}$$

e portanto

$$pt < \frac{Np}{N-p} = p^*. \tag{2.6}$$

Agora, suponhamos por contradição que

$$pt \leq \frac{(p-1)N}{N-p}.$$

Daí, obtemos que

$$\frac{p(N-p)}{(p-1)N} \leq \frac{1}{t}.$$

Obtemos então que

$$\frac{1}{s} + \frac{p(N-p)}{(p-1)N} \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} \leq 1 - \frac{p(N-p)}{(p-1)N}$$

e portanto,

$$\frac{1}{s} \leq \frac{p^2 - N}{(p-1)N}. \tag{2.7}$$

Agora temos dois casos a considerar: $N \geq p^2$ ou $N < p^2$.

Se $N \geq p^2$ temos por (2.7) que

$$\frac{1}{s} \leq \frac{p^2 - N}{(p-1)N} \leq 0$$

e isso contradiz (2.5).

Se $N < p^2$, por hipótese, segue que

$$p_2 < \frac{N(p-1)}{p^2 - N}$$

e de (2.7) obtemos

$$p_2 < \frac{N(p-1)}{p^2 - N} \leq s$$

e isso contradiz o fato de

$$s \in \left(\frac{N}{p}, p_2\right].$$

Concluimos então que

$$\frac{(p-1)N}{N-p} < pt$$

e (2.4) de fato ocorre.

Agora, desde que $\Phi_{\delta,y} \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $\forall q \in \left(\frac{(p-1)N}{N-p}, p^*\right)$ segue que

$$|\Phi_{\delta,y}|^p \in L^t(\mathbb{R}^N)$$

e daí, segue da desigualdade de Hölder com expoentes $s$ e $t$ que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{pt} dx\right)^{1/t} \\
&= |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}}\right|^{pt} dx\right)^{1/t}
\end{aligned}$$

onde $C_{N,p} = \dfrac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \left[\dfrac{N(N-p)}{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}$.

Fazendo $z = x - y$, segue que $dx = dz$ e daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}}\right|^{pt} dx\right)^{1/t} \\
&= |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |z|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}}\right|^{pt} dz\right)^{1/t} \\
&= |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{pt} dz\right)^{1/t} = |a|_s |\Phi_{\delta,0}|_{pt}^p \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Pelo o ítem $(iii)$ do Lema 4 segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|\Phi_{\delta,0}|_{pt}^p < \frac{\varepsilon}{2|a|_s} \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq |a|_s |\Phi_{\delta,0}|_{pt}^p < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}] \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}^N$$

e daí segue que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,y}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx = S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\ &\leq S + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq S + \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta \in (0, \underline{\delta}] \end{aligned}$$

e portanto,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,y}) \leq S + \frac{\varepsilon}{2} < S + \varepsilon \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Agora fixemos novamente $y \in \mathbb{R}^N$, suponhamos $s \in \left[p_1, \dfrac{N}{p}\right)$ e consideremos novamente $t \in (1, +\infty)$ com $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 1$.

Notemos que nessas condições temos

$$pt - p^* > 0.$$

De fato,

$$s \in \left[p_1, \frac{N}{p}\right) \Rightarrow \frac{p}{N} < \frac{1}{s}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{p}{N} + \frac{1}{t} < \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1 \ &\Rightarrow \ \frac{1}{t} < 1 - \frac{p}{N} = \frac{N-p}{N} \Rightarrow \frac{1}{pt} < \frac{N-p}{pN} = \frac{1}{p^*} \\ &\Rightarrow \ p^* < pt \Rightarrow 0 < pt - p^*. \end{aligned}$$

Notemos agora que

$$|\Phi_{\delta,y}| \in L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{2.8}$$

De fato,

$$|\Phi_{\delta,y}(x)| = \Phi_{\delta,y}(x) = \frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} \leq \frac{C_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}}{\delta^{(N-p)/p}} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{2.9}$$

onde $C_{N,p} = \dfrac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \left[\dfrac{N(N-p)}{p-1}\right]^{(N-p)/p^2}$.

Agora, desde que (2.8) ocorre e desde que $|\Phi_{\delta,y}|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{pt} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} |\Phi_{\delta,y}|^{pt-p^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} |\Phi_{\delta,y}|^{pt-p^*}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} dx \\
&= |\Phi_{\delta,y}|^{pt-p^*}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx < +\infty
\end{aligned}$$

e portanto

$$|\Phi_{\delta,y}|^p \in L^t(\mathbb{R}^N).$$

Daí, aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $s$ e $t$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{pt} dx\right)^{1/t} = |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{pt} dz\right)^{1/t} \\
&= |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{p^*} |\Phi_{\delta,0}|^{pt-p^*} dz\right)^{1/t} \\
&\leq |a|_s \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{p^*} |\Phi_{\delta,0}|^{pt-p^*}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} dz\right)^{1/t} \\
&= |a|_s |\phi_{\delta,0}|^{(pt-p^*)/t}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,0}|^{p^*} dz\right)^{1/t}.
\end{aligned}$$

Recordando que $|\Phi_{\delta,0}|_{p^*} = 1$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq |a|_s |\Phi_{\delta,0}|^{(pt-p^*)/t}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

e de (2.9)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq |a|_s |\Phi_{\delta,0}|^{(pt-p^*)/t}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq |a|_s \left(C_{N,p}\delta^{(((N-p)/p^2)-((N-p)/p))}\right)^{(pt-p^*)/t} \\
&= |a|_s C_{N,p}^{(pt-p^*)/t} \delta^{(((N-p)/p^2)-((N-p)/p))((pt-p^*)/t)} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N
\end{aligned}$$

e daí,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq |a|_s C_{N,p}^{(pt-p^*)/t} \delta^{(((N-p)/p^2)-((N-p)/p))((pt-p^*)/t)}. \tag{2.10}$$

Notemos agora que

$$\left(\frac{N-p}{p^2} - \frac{N-p}{p}\right) \frac{pt-p^*}{t} < 0. \tag{2.11}$$

De fato, já mostramos que

$$pt - p^* > 0$$

e assim, é suficiente mostrar que

$$\frac{N-p}{p^2} - \frac{N-p}{p} < 0.$$

Temos que

$$\frac{N-p}{p^2} - \frac{N-p}{p} = \frac{N-p-p(N-p)}{p^2} = \frac{(1-p)(N-p)}{p^2}.$$

Desde que $1 < p$, $N > p$ e $p^2 > 0$, segue que

$$\frac{N-p}{p^2} - \frac{N-p}{p} = \frac{(1-p)(N-p)}{p^2} < 0$$

e portanto (2.11) de fato ocorre.

Segue então que dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\delta^{(((N-p)/p^2)-((N-p)/p))((pt-p^*)/t)} < \frac{\varepsilon}{2|a|_s C_{N,p}^{(pt-p^*)/t}} \ , \ \forall \delta \in [\overline{\delta}, +\infty).$$

Temos então de (2.10) que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq |a|_s C_{N,p}^{(pt-p^*)/t} \delta^{((N-p)/p^2-(N-p)/p)((pt-p^*)/t)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall \delta \in [\overline{\delta}, +\infty). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,y}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx = S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\ &\leq S + \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx < S + \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta \in [\overline{\delta}, +\infty) \end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,y}) \leq S + \frac{\varepsilon}{2} < S + \varepsilon \ , \ \forall \delta \in [\overline{\delta}, +\infty).$$

■

**Lema 7** *: Suponhamos que $|a|_{N/p} < S(2^{p/N} - 1)$. Então*

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y}) < 2^{p/N} S.$$

**Demonstração:**

Temos que

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,y}) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\ &= S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$ obtemos

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,y}) &= S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\ &\leq S + |a|_{N/p} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta > 0 \end{aligned}$$

e recordando que $|\Phi_{\delta,y}|_{p^*} = 1$, segue que

$$\begin{aligned} f(\Phi_{\delta,y}) &\leq S + |a|_{N/p} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N} \\ &= S + |a|_{N/p} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N \text{ e } \forall \delta > 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y}) \leq S + |a|_{N/p}$$

e lembrando que, por hipótese, temos $|a|_{N/p} < S(2^{p/N} - 1)$, concluimos que

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y}) < S + S(2^{p/N} - 1) = 2^{p/N} S.$$

■

Consideremos a função

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 1, & \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Definamos $\alpha : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ dada por

$$\alpha(u) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \frac{x}{|x|}, \sigma(x) \right) |\nabla u|^p dx = (\beta(u), \gamma(u))$$

onde

$$\beta(u) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|} |\nabla u|^p dx$$

e

$$\gamma(u) = \frac{1}{S} \int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x) |\nabla u|^p dx.$$

Provaremos que $\alpha$ é contínua.

De fato, temos que $\beta$ é contínua, pois caso contrário existiria $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u_0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{2.12}$$

e $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$\Big|\beta(u_{n_j}) - \beta(u_0)\Big| \geq K > 0 \ , \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

De (2.12) teríamos que $u_{n_j} \to u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e daí $|\nabla u_{n_j}| \to |\nabla u_0|$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Segue então que existiria $(u_{n_{j_k}}) \subset (u_{n_j})$ tal que

$$|\nabla u_{n_{j_k}}(x)| \to |\nabla u_0(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|\nabla u_{n_{j_k}}| \leq h \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

com $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teríamos então que, para $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\frac{x_i}{|x|}|\nabla u_{n_{j_k}}(x)|^p \to \frac{x_i}{|x|}|\nabla u_0(x)|^p \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\frac{x_i}{|x|}|\nabla u_{n_{j_k}}|^p\right| = \frac{|x_i|}{|x|}|\nabla u_{n_{j_k}}|^p \leq |\nabla u_{n_{j_k}}|^p \leq h^p \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

onde $h^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|\nabla u_{n_{j_k}}|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|\nabla u_0|^p dx \ , \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N$$

e portanto,

$$\beta(u_{n_{j_k}}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|\nabla u_{n_{j_k}}|^p dx \to \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|\nabla u_0|^p dx = \beta(u_0)$$

e isso contradiria (2.13).

Portanto $\beta$ é contínua.

Temos também que $\gamma$ é contínua, pois caso contrário existiria $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \to u_0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{2.14}$$

e $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que

$$\Big|\gamma(u_{n_j}) - \gamma(u_0)\Big| \geq K > 0 \ , \ \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Argumentando de forma análoga ao que fizemos anteriormente, usando (2.14) obteríamos $(u_{n_{j_k}}) \subset (u_{n_j})$ tal que

$$|\nabla u_{n_{j_k}}(x)| \to |\nabla u_0(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|\nabla u_{n_{j_k}}| \leq h \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

com $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teríamos então que

$$\sigma(x)|\nabla u_{n_{j_k}}(x)|^p \to \sigma(x)|\nabla u_0(x)|^p \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\Big|\sigma(x)|\nabla u_{n_{j_k}}|^p\Big| \leq |\nabla u_{n_{j_k}}|^p \leq h^p \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$$

onde $h^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\gamma(u_{n_{j_k}}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla u_{n_{j_k}}|^p dx \to \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla u_0|^p dx = \gamma(u_0)$$

e isso contradiria (2.15).

Portanto $\gamma$ é contínua.

Desde que $\alpha(u) = (\beta(u), \gamma(u))$, concluimos que $\alpha$ é contínua.

**Lema 8** *: Se $|y| \geq \frac{1}{2}$, temos*

$$\beta(\Phi_{\delta,y}) = \frac{y}{|y|} + o_\delta(1) \ \textit{quando } \delta \to 0.$$

**Demonstração:**

Fixado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(y)} |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dz$$

e pelo o Lema 5 existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx < \varepsilon \ , \ \forall \delta \in (0,\hat{\delta}). \tag{2.16}$$

Então

$$\begin{aligned}
&\left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \leq C_1\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)} \frac{|x|}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= C_1\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx
\end{aligned}$$

e de (2.16) segue que

$$\begin{aligned}
\left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| &\leq C_1\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&< C_1\varepsilon \ , \ \forall \delta \in (0,\hat{\delta}).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Agora notemos que se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $|y| \geq 1/2$ então temos que

$$\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| < 4\varepsilon \ , \ \forall x \in B_\varepsilon(y).$$

De fato, se $x \in B_\varepsilon(y)$ então $|x-y| < \varepsilon$ e além disso, se $|y| \geq 1/2$ então $\dfrac{1}{|y|} \leq 2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| &= \left|\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|y|} + \frac{x}{|y|} - \frac{y}{|y|}\right| \leq \left|\frac{x}{|x|} - \frac{x}{|y|}\right| + \left|\frac{x}{|y|} - \frac{y}{|y|}\right| \\
&= \left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}\right||x| + \frac{|x-y|}{|y|} = \frac{||x|-|y||}{|x||y|}|x| + \frac{|x-y|}{|y|} \\
&= \frac{||x|-|y||}{|y|} + \frac{|x-y|}{|y|} \leq \frac{|x-y|}{|y|} + \frac{|x-y|}{|y|} < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{y}{|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| = \left|\frac{Sy}{S|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right|.$$

Recordando que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx = S$ segue que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{y}{|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
&= \left|\frac{y}{S|y|}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
&= \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{y}{|y|}|\nabla\phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right|.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{y}{|y|}|\nabla\phi_{\delta,y}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}\frac{y}{|y|}|\nabla\phi_{\delta,y}|^p dx + \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{y}{|y|}|\nabla\phi_{\delta,y}|^p dx$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{y}{|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
= &\left|\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\left(\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|}\right)|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx + \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}\frac{y}{|y|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
\leq &\left|\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\left(\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|}\right)|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| + \left|\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}\frac{y}{|y|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| \\
\leq &\ C_2\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\left|\frac{y}{|y|} - \frac{x}{|x|}\right||\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx + C_3\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}\frac{|y|}{|y|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
< &\ C_2\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}4\varepsilon|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx + C_3\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
= &\ C_4\varepsilon\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx + C_3\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx.
\end{aligned}$$

Lembrando agora que

$$\int_{B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx = S$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y}{|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| &< C_4\varepsilon\frac{1}{S}S + C_3\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= C_4\varepsilon + C_3\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon(y)}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx
\end{aligned}$$

e de (2.16) obtemos que

$$\left|\frac{y}{|y|} - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| < C_4\varepsilon + C_3\varepsilon = C_5\varepsilon\ ,\ \forall\delta\in(0,\hat{\delta}). \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18) temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{y}{|y|}\right| \\
&= \left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx + \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{y}{|y|}\right| \\
&\leq \left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx\right| + \left|\frac{1}{S}\int_{B_\varepsilon(y)}\frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{y}{|y|}\right| \\
&< C_1\varepsilon + C_5\varepsilon = C_6\varepsilon\ ,\ \text{se } |y|\geq\frac{1}{2} \text{ e } \forall\delta\in(0,\hat{\delta}).
\end{aligned}$$

■

**Lema 9** : *Suponhamos que* $a \in L^s(\mathbb{R}^N)$, $\forall s \in [p_1, p_2]$ *onde* $1 < p_1 < \dfrac{N}{p} < p_2$ *com* $p_2 < \dfrac{N(p-1)}{p^2 - N}$ *se* $N < p^2$. *Então para qualquer* $\delta > 0$ *fixado temos*

$$\lim_{|y| \to +\infty} f(\Phi_{\delta,y}) = S.$$

**Demonstração:**

Desde que

$$f(\Phi_{\delta,y}) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx = S + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx,$$

é suficiente provarmos que

$$\lim_{|y| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx = 0 \ , \ \forall \delta > 0. \tag{2.19}$$

Notemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} a^{N/p} dx \right)^{p/N} < \varepsilon \ , \ \forall \rho > K_1.$$

De fato, para cada $\rho > 0$ temos que

$$\left| a^{N/p} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} \right| \leq |a|^{N/p},$$

onde $|a|^{N/p} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\rho \to +\infty$, então

$$a(x)^{N/p} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Então, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\rho \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} a^{N/p} dx = \lim_{\rho \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a^{N/p} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} dx = 0$$

e portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} a^{N/p} dx \right)^{p/N} < \varepsilon \ , \ \forall \rho > K_1. \tag{2.20}$$

Analogamente mostra-se que dado $\varepsilon > 0$, existe $K_2 > 0$ tal que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} = \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,0}|^{p^*} dz \right)^{1/p^*} < \varepsilon \ , \ \forall \rho > K_2. \tag{2.21}$$

Seja agora $K_0 = \max\{K_1, K_2\}$ e consideremos

$$K_0 < 2\rho < |y| \quad (\rho \text{ fixado}). \tag{2.22}$$

Observemos que nessas condições temos

$$B_\rho(0) \cap B_\rho(y) = \emptyset \tag{2.23}$$

porque, caso contrário, se existisse $x \in B_\rho(0) \cap B_\rho(y)$ teríamos

$$|x| < \rho \ , \ |x - y| < \rho$$

e daí

$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x| < 2\rho$$

e isso contradiz (2.22).

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{(B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{B_\rho(0)} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx + \int_{B_\rho(y)} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} a^{N/p} dx \right)^{p/N} \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N} \\
&+ \left( \int_{B_\rho(0)} a^{N/p} dx \right)^{p/N} \left( \int_{B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N} \\
&+ \left( \int_{B_\rho(y)} a^{N/p} dx \right)^{p/N} \left( \int_{B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y)) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$, $\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y)) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(y)$, $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N$ e $B_\rho(y) \subset \mathbb{R}^N$. Além disso de (2.23) segue que $B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(y)$ e $B_\rho(y) \subset \mathbb{R}^N \setminus B_\rho(0)$ e portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} a^{N/p} dx \right)^{p/N} \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus (B_\rho(0) \cup B_\rho(y))} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N} \\
&+ \left( \int_{B_\rho(0)} a^{N/p} dx \right)^{p/N} \left( \int_{B_\rho(0)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*} dx \right)^{(N-p)/N}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_{B_\rho(y)} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\\
&+\left(\int_{\mathbb{R}^N} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\\
&+\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}.
\end{aligned}
$$

Recordando que $|\Phi_{\delta,y}|_{p^*}=1$ segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^N} a^{N/p}dx\right)^{p/N}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(y)} |\Phi_{\delta,y}|^{p^*}dx\right)^{(N-p)/N}\\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\rho(0)} a^{N/p}dx\right)^{p/N}
\end{aligned}
$$

e de (2.20) e de (2.21) obtemos,

$$
\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\Phi_{\delta,y}|^p dx < \varepsilon.\varepsilon^p + |a|_{N/p}\varepsilon^p + \varepsilon
$$

e concluimos então que (2.19) de fato ocorre e o Lema está provado.

■

Consideremos agora o seguinte conjunto

$$
\Upsilon = \left\{u \in M; \alpha(u) = \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.
$$

**Lema 10** *: O número real*

$$
c_0 = \inf_{u\in\Upsilon} f(u)
$$

*satisfaz a desigualdade*

$$
c_0 > S.
$$

**Demonstração:**

Primeiramente observemos que

$$
\Upsilon \neq \emptyset.
$$

De fato, temos que $\Phi_{\delta,0} \in M$ para todo $\delta > 0$ e

$$
\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x_i}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx = \frac{1}{S}\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R(0)} \frac{x_i}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx.
$$

Desde que a função $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f_i(x) = \frac{x_i}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}(x)|^p$ é ímpar e $B_R(0)$ é simétrico, temos

$$\int_{B_R(0)} \frac{x_i}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx = 0 \ , \ \forall R > 0,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \beta(\Phi_{\delta,0}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx \\ &= \frac{1}{S}\lim_{R\to+\infty}\int_{B_R(0)} \frac{x}{|x|}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx = 0, \forall\delta > 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Além disso,

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx$$

e do Lema 5 segue que

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) \to 0 \text{ quando } \delta \to 0. \tag{2.25}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi_{\delta,0}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx \\ &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx \\ &= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |\gamma(\Phi_{\delta,0}) - 1| &= \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dx \\ &\leq \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} ||\Phi_{\delta,0}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} dx = \frac{|B_1(0)|}{S}||\Phi_{\delta,0}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

e usando o Lema 4 obtemos

$$\gamma(\Phi_{\delta,0}) \to 1 \text{ quando } \delta \to +\infty. \tag{2.26}$$

Desde que $\gamma$ é contínua, usando o Teorema do Valor Intermediário, segue de (2.25) e (2.26) que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\gamma(\Phi_{\delta_1,0}) = \frac{1}{2} \tag{2.27}$$

e de (2.24) e (2.27), concluimos que $\Phi_{\delta_1,0} \in \Upsilon$ e portanto $\Upsilon \neq \emptyset$.

Provaremos agora que

$$S < c_0.$$

Desde que $\Upsilon \subset M$ e $S = \inf_{u \in M} f(u)$, segue que

$$S \leq c_0.$$

Suponhamos por contradição que $S = c_0$.

Segue então de uma variante do Princípio Variacional de Ekeland (veja o Teorema 16 no apêndice B) que existe $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n|_{p^*} = 1 \quad , \quad \alpha(u_n) \to (0, 1/2) \tag{2.28}$$

e

$$f(u_n) \to S \quad , \quad f'\Big|_M (u_n) \to 0. \tag{2.29}$$

De (2.29) segue que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e portanto, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Definindo $v_n = S^{(N-p)/p^2} u_n$ e $v_0 = S^{(N-p)/p^2} u_0$, temos que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e além disso, obtemos de (2.29) que

$$I(v_n) \to \frac{1}{N} S^{N/p} \quad \text{e} \quad I'(v_n) \to 0.$$

Provaremos que

$$v_0 \equiv 0.$$

Temos que

$$u_n \not\to u_0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \tag{2.30}$$

pois caso contrário, do fato de que $M$ é fechado teríamos $u_0 \in M$, e portanto $u_0 \not\equiv 0$.

Da continuidade de $f$ teríamos $f(u_0) = S$ e daí,

$$S \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx}{(\int_{\mathbb{R}^N} |u_o|^{p^*} dx)^{p/p^*}} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_0|^{p^*} dx = S,$$

o que é um absurdo.

Portanto $v_n \not\to v_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, e desde que $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$, segue do Teorema 2 que

$$I(v_n) \to I(v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$$

e da unicidade do limite

$$I(v_0) + \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j) = \frac{1}{N} S^{N/p}.$$

Desde que $z_0^j$ é solução não-trivial do problema $(P_\infty)$, temos que

$$I(v_0) = 0, \tag{2.31}$$

$$k = 1 \tag{2.32}$$

e

$$z_0^1 > 0. \tag{2.33}$$

Do fato de que $v_n \rightharpoonup v_o$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que $v_0$ é solução fraca do problema $(P)$ e por cálculos feitos na demonstração do Corolário 1, temos que

$$I(v_0) = \frac{1}{N} |v_0|_{p^*}^{p^*}$$

e de (2.31) concluimos que $v_0 \equiv 0$.

Assim, $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I$ tal que $v_n \rightharpoonup 0$ e $v_n \not\to 0$.

Por contas feitas na demonstração do Teorema 2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^p dx = o_n(1).$$

Daí,

$$\frac{1}{N} S^{N/p} + o_n(1) = I(v_n) = I_\infty(v_n) + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^p dx = I_\infty(v_n) + o_n(1). \tag{2.34}$$

Além disso, para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||\phi|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|I'_\infty(v_n)\phi| &= |I'(v_n)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^{p-2} v_n \phi dx| \\
&\leq |I'(v_n)\phi| + |\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^{p-2} v_n \phi dx| \\
&= |I'(v_n)\phi| + |\int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{(p-1)/p} |v_n|^{p-2} v_n a(x)^{1/p} \phi dx| \\
&\leq |I'(v_n)\phi| + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{(p-1)/p} |v_n|^{p-1} a(x)^{1/p} |\phi| dx.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$,

$$|I'_\infty(v_n)\phi| \leq |I'(v_n)\phi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|\phi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e agora aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|I'_\infty(v_n)\phi| &\leq |I'(v_n)\phi| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} |a|_{N/p}^{1/p}|\phi|_{p^*} \\
&\leq ||I'(v_n)||_{D'}||\phi|| + \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v_n|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} |a|_{N/p}^{1/p} C||\phi|| \\
&\leq ||I'(v_n)||_{D'} + o_n(1),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$||I'_\infty(v_n)||_{D'} \leq ||I'(v_n)||_{D'} + o_n(1). \tag{2.35}$$

De (2.34) e (2.35) concluimos que $(v_n)$ é uma seqüência $(P.S.)_c$ para $I_\infty$ e do Lema 3, segue que existem seqüências $(R_n) \subset \mathbb{R}$, $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$, uma solução não-trivial $z_0^1$ do problema $(P_\infty)$ e uma seqüência $(w_n)$ o qual é $(P.S.)_c$ para $I_\infty$ tais que

$$w_n(x) = v_n(x) - R_n^{(N-p)/p} z_0^1(R_n(x - x_n)) + o_n(1),$$

e assim,

$$v_n(x) = w_n(x) + R_n^{(N-p)/p} z_0^1(R_n(x - x_n)) + o_n(1). \tag{2.36}$$

Verifiquemos agora que para todo $n \in \mathbb{N}$, a função

$$z_n(x) = R_n^{(N-p)/p} z_0^1(R_n(x - x_n))$$

é solução positiva de $(P_\infty)$. De fato, para todo $\phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ definamos a seqüência

$$\phi_n(x) = R_n^{(p-N)/p} \phi\left(\frac{x}{R_n} + x_n\right),$$

e analogamente ao que fizemos na demonstração do Lema 3 mostra-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_n|^{p-2} \nabla z_n \nabla \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_0^1|^{p-2} \nabla z_0^1 \nabla \phi_n dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z_n|^{p^*-2} z_n \phi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |z_0^1|^{p^*-2} z_0^1 \phi_n dx,$$

e portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$I'_\infty(z_n)\phi = I'_\infty(z_0^1)\phi_n = 0 \ , \ \forall \phi \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

ou seja, $z_n$ é solução de $(P_\infty)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, da própria definição de $z_n$ e de (2.33), temos que $z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos então que

$$z_n(x) = \frac{[N((N-p)/(p-1))\delta_n]^{(N-p)/p^2}}{[\delta_n + |x-y_n|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}}.$$

De (2.36), segue que

$$\frac{v_n(x)}{S^{(N-p)/p^2}} = \frac{w_n(x)}{S^{(N-p)/p^2}} + \frac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \frac{[N((N-p)/(p-1))\delta_n]^{(N-p)/p^2}}{[\delta_n + |x-y_n|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}} + o_n(1),$$

e lembrando que

$$v_n = S^{(N-p)/p^2} u_n \quad \text{e} \quad \Phi_{\delta,y}(x) = \frac{1}{S^{(N-p)/p^2}} \frac{[N((N-p)/(p-1))\delta]^{(N-p)/p^2}}{[\delta + |x-y|^{p/(p-1)}]^{(N-p)/p}},$$

obtemos

$$u_n(x) = \hat{w}_n(x) + \Phi_{\delta_n,y_n}(x) + o_n(1),$$

onde $\hat{w}_n(x) = \frac{w_n(x)}{S^{(N-p)/p^2}}$.

Podemos supor que $w_n \to 0$, pois caso contrário existiria $k \geq 2$ tal que $I(v_n) \to \sum_{j=1}^{k} I_\infty(z_0^j)$ e isso contradiz (2.32).

Portanto,

$$\hat{w}_n \to 0 \text{ em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Temos então de (2.28) que

$$(0, 1/2) + o_n(1) = \alpha(u_n) = \alpha(\hat{w}_n + \Phi_{\delta_n,y_n} + o_n(1)) = \alpha(\Phi_{\delta_n,y_n}) + o_n(1),$$

e portanto,

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \beta(\Phi_{\delta_n,y_n}) \to 0 \quad \text{e} \\ \text{(ii)} & \gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) \to 1/2. \end{array}$$

Passando a uma seqüência se necessário, um desses casos podem ocorrer:

(a) $\delta_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$;

(b) $\delta_n \to \tilde{\delta} \neq 0$ quando $n \to \infty$;

(c) $\delta_n \to 0$ e $y_n \to \tilde{y}$ quando $n \to \infty$ com $|\tilde{y}| < 1/2$;

(d) $\delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e $|y_n| \leq 1/2$ para $n$ suficientemente grande.

Provaremos que nenhuma das possibilidades podem ocorrer.

Suponhamos que (a) ocorre.

Temos que

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx,
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
|\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) - 1| &= \frac{1}{S}\int_{B_1(0)}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx \\
&\leq \frac{1}{S}\int_{B_1(0)}||\Phi_{\delta_n,y_n}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} dx = \frac{|B_1(0)|}{S}||\Phi_{\delta_n,y_n}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Desde que $\delta_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$, segue do Lema 4 que $||\Phi_{\delta_n,y_n}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quando $n \to \infty$ e portanto

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) \to 1$$

contradizendo (ii).

Suponhamos que (b) ocorre.

Neste caso podemos supor que $|y_n| \to +\infty$ porque caso contrário, se $y_n \to \tilde{y}$, segue que, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_{\delta_n,y_n}(x)}{\partial x_i} = C_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}(x_i - y_{in})|x - y_n|^{(2-p)/(p-1)}[\delta_n + |x - y_n|^{p/(p-1)}]^{-N/p} \\
&\to C_{N,p}\tilde{\delta}^{(N-p)/p^2}(x_i - \tilde{y}_i)|x - \tilde{y}|^{(2-p)/(p-1)}[\tilde{\delta} + |x - \tilde{y}|^{p/(p-1)}]^{-N/p} = \frac{\partial\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x)}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e portanto,

$$|\nabla(\Phi_{\delta_n,y_n}(x) - \Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x))|^p \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\nabla(\Phi_{\delta_n,y_n}(x) - \Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x))|^p &\leq \left(|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}(x)| + |\nabla\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x)|\right)^p \\
&\leq 2^p\left(|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}(x)|^p + |\nabla\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x)|^p\right). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}(x)|^p &= \left(\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}|x-y_n|^{1/(p-1)}}{[\delta_n+|x-y_n|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right)^p \\
&= \left(\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}\delta_n^{-N/p}|x-y_n|^{1/(p-1)}}{\left[1+\left|\frac{x-y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^{N/p}}\right)^p
\end{aligned}$$

e fazendo $z=\dfrac{x-y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}$, obtemos

$$|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}(x)|^p = \left(\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}\delta_n^{-N/p}\delta_n^{(p-1)/p}|z|^{1/(p-1)}}{[1+|z|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right)^p.$$

Desde que $\delta_n\to\tilde{\delta}\neq 0$, segue que

$$\delta_n^{(N-p)/p^2}\delta_n^{-N/p}\delta_n^{(p-1)/p}\leq C\ ,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}(x)|^p &= \left(\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}\delta_n^{-N/p}\delta_n^{(p-1)/p}|z|^{1/(p-1)}}{[1+|z|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right)^p \\
&\leq C^p\left(\frac{K_{N,p}|z|^{1/(p-1)}}{[1+|z|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right)^p = C^p|\nabla\Phi_{1,0}(z)|^p\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

onde $C^p|\nabla\Phi_{1,0}(z)|^p\in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Temos então de (2.37) que

$$|\nabla(\Phi_{\delta_n,y_n}(x)-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x))|^p\leq 2^p(C^p|\nabla\Phi_{1,0}(z)|^p+|\nabla\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x)|^p)$$

onde $2^p(C^p|\nabla\Phi_{1,0}(z)|^p+|\nabla\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}(x)|^p)\in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$||\Phi_{\delta_n,y_n}-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}||^p=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Phi_{\delta_n,y_n}-\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}})|^p dx\to 0,$$

e portanto, $\Phi_{\delta_n,y_n}\to\Phi_{\tilde{\delta},\tilde{y}}$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Daí, desde que $\hat{w}_n\to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n=\hat{w}_n+\Phi_{\delta_n,y_n}+o_n(1)$, segue que $(u_n)$ é convergente em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e isso contradiz (2.30). Assim,

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N}\sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx=\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)}|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(-y_n)}|\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dx \\
&= 1-\frac{1}{S}\int_{B_1(-y_n)}|\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dx. \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$|\nabla\Phi_{\delta_n,0}(x)|^p\chi_{B_1(-y_n)}(x) \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left||\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p\chi_{B_1(-y_n)}\right| \leq |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p \leq C^p|\nabla\Phi_{1,0}|^p$$

onde $C^p|\nabla\Phi_{1,0}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Logo, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dx \to 0$$

e de (2.38), obtemos que

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) \to 1$$

contradizendo (ii).

Suponhamos que (c) ocorre.

Temos que

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta_n,y_n}|^p dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

Provaremos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz = S.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz &= \int_{B_1(-y_n)} \left|\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}|z|^{1/(p-1)}}{[\delta_n + |z|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right|^p dz \\
&= \int_{B_1(-y_n)} \left|\frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}|z|^{1/(p-1)}}{\delta_n^{N/p}\left[1 + \left|\frac{z}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^{N/p}}\right|^p dz.
\end{aligned}$$

Fazendo $w = \frac{z}{\delta_n^{(p-1)/p}}$, segue que $z = \delta_n^{(p-1)/p}w$ e daí,

$$dz = \delta_n^{N(p-1)/p}dw.$$

Além disso, notemos que

$$\delta_n^{(p-1)/p} w = z = z - (-y_n) - y_n,$$

e daí,

$$\begin{aligned} w = \frac{z-(-y_n)}{\delta_n^{(p-1)/p}} - \frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}} \quad &\Rightarrow \quad w - \left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right) = \frac{z-(-y_n)}{\delta_n^{(p-1)/p}} \\ &\Rightarrow \quad \left| w - \left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)\right| = \frac{|z-(-y_n)|}{\delta_n^{(p-1)/p}} \end{aligned}$$

e desde que $z \in B_1(-y_n)$, obtemos

$$\left| w - \left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)\right| = \frac{|z-(-y_n)|}{\delta_n^{(p-1)/p}} < \frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}},$$

e portanto,

$$w \in B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} &\int_{B_1(-y_n)} |\nabla \Phi_{\delta_n,0}|^p dz \\ &= \int_{B_1(-y_n)} \left| \frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}|z|^{1/(p-1)}}{\delta_n^{N/p}\left[1+\left|\frac{z}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^{N/p}} \right|^p dz \\ &= \int_{B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)} \left| \frac{K_{N,p}\delta_n^{(N-p)/p^2}\delta_n^{-N/p}\delta_n^{1/p}|w|^{1/(p-1)}}{[1+|w|^{p/(p-1)}]^{N/p}} \right|^p \delta_n^{N(p-1)/p} dw \\ &= \int_{B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)} \left| \frac{K_{N,p}|w|^{1/(p-1)}}{[1+|w|^{p/(p-1)}]^{N/p}} \right|^p \delta_n^{(N-p)/p}\delta_n^{-N}\delta_n\delta_n^{N(p-1)/p} dw \\ &= \int_{B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw. \end{aligned}$$

Notemos agora que para $n$ suficientemente grande temos

$$B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0) \subset B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right). \tag{2.40}$$

De fato, desde que $y_n \to \tilde{y}$ e $|\tilde{y}| < 1/2$, temos que $|y_n| < 1/2$ para $n$ suficientemente grande e daí, se $\xi \in B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)$, então

$$\left|\xi - \left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)\right| \leq |\xi| + \frac{|y_n|}{\delta_n^{(p-1)/p}} < \frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}} + \frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}} = \frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}},$$

e portanto, $\xi \in B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)$.

Segue então de (2.40) que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)} |\nabla\Phi_{1,0}|^p dw &\leq \int_{B_{\frac{1}{\delta_n^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y_n}{\delta_n^{(p-1)/p}}\right)} |\nabla\Phi_{1,0}|^p dw \\ &= \int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz = S. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left| |\nabla\Phi_{1,0}|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)} \right| \leq |\nabla\Phi_{1,0}|^p,$$

onde $|\nabla\Phi_{1,0}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $n \to \infty$, então

$$|\nabla\Phi_{1,0}(w)|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)}(w) \to |\nabla\Phi_{1,0}(w)|^p \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto, pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)} |\nabla\Phi_{1,0}|^p dw &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{1,0}|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta_n^{(p-1)/p}}}(0)} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{1,0}|^p dw = S,\end{aligned}$$

e usando o Teorema do Sanduíche em (2.41), concluimos que existe $\lim_{n\to\infty} \int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_1(-y_n)} |\nabla\Phi_{\delta_n,0}|^p dz = S.$$

Temos então de (2.39) que

$$\gamma(\Phi_{\delta_n,y_n}) \to 0$$

contradizendo (ii).

Suponhamos que (d) ocorre.

Desde que $|y_n| \geq 1/2$ para $n$ grande, então temos que $y_n \not\to 0$ em $\mathbb{R}^N$.

Do Lema 8 temos que

$$\beta(\Phi_{\delta_n,y_n}) = \frac{y_n}{|y_n|} + o_n(1),$$

e portanto,

$$\beta(\Phi_{\delta_n,y_n}) \not\to 0$$

contradizendo (i).

Concluimos então que $S < c_0$.

■

**Lema 11** *: Existe* $\delta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *tal que*

*(a)* $f(\Phi_{\delta_1,y}) < \dfrac{S+c_0}{2}$ , $\forall y \in \mathbb{R}^N$,

*(b)* $\gamma(\Phi_{\delta_1,y}) < \dfrac{1}{2}$ , $\forall y \in \mathbb{R}^N : |y| < \dfrac{1}{2}$,

*(c)* $\left|\beta(\Phi_{\delta_1,y}) - \dfrac{y}{|y|}\right| < \dfrac{1}{4}$ , $\forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \geq \dfrac{1}{2}$.

**Demonstração:**

Do Lema 6 temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\underline{\delta} = \underline{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,y}) < S + \varepsilon \ , \ \forall \delta \in (0, \underline{\delta}].$$

Daí, tomando $\varepsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$ e escolhendo $\delta_2 < \min\left\{\underline{\delta}, \dfrac{1}{2}\right\}$ temos

$$f(\Phi_{\delta_2,y}) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta_2,y}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S+c_0}{2} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.42}$$

Agora, recordemos que

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx.$$

Da definição da função $\sigma$, segue que

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \sigma(x)|\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx,$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx - \int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma(\Phi_{\delta,y}) &= \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_{\delta,y}|^p dx - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= \frac{1}{S}S - \frac{1}{S}\int_{B_1(0)} |\nabla\Phi_{\delta,y}|^p dx \\
&= 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-y)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz.
\end{aligned}$$

Mostraremos que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz = S.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz &= \int_{B_1(-y)}\left|\frac{K_{N,p}\delta^{(N-p)/p^2}|z|^{1/(p-1)}}{[\delta+|z|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right|^p dz\\
&= \int_{B_1(-y)}\frac{K_{N,p}^p\delta^{(N-p)/p}|z|^{p/(p-1)}}{[\delta+|z|^{p/(p-1)}]^N}dz\\
&= \int_{B_1(-y)}\frac{K_{N,p}^p\delta^{(N-p)/p}|z|^{p/(p-1)}}{\left[\delta\left(1+\left|\frac{z}{\delta^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right)\right]^N}dz\\
&= \int_{B_1(-y)}\frac{K_{N,p}^p\delta^{(N-p)/p}\delta^{-N}|z|^{p/(p-1)}}{\left[1+\left|\frac{z}{\delta^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^N}dz.
\end{aligned}$$

Fazendo $w=\dfrac{z}{\delta^{(p-1)/p}}$, segue que $z=\delta^{(p-1)/p}w$ e daí

$$dz=\delta^{N(p-1)/p}dw.$$

Além disso, notemos que

$$\delta^{(p-1)/p}w = z = z-(-y)-y$$

e daí,

$$\begin{aligned}
w=\frac{z-(-y)}{\delta^{(p-1)/p}}-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}} &\Rightarrow w-\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)=\frac{z-(-y)}{\delta^{(p-1)/p}}\\
\Rightarrow \left|w-\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)\right| &= \left|\frac{z-(-y)}{\delta^{(p-1)/p}}\right| = \frac{|z-(-y)|}{\delta^{(p-1)/p}}
\end{aligned}$$

e desde que $z\in B_1(-y)$, obtemos

$$\left|w-\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)\right| = \frac{|z-(-y)|}{\delta^{(p-1)/p}} < \frac{1}{\delta^{(p-1)/p}},$$

e portanto,

$$w\in B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right).$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz &= \int_{B_1(-y)}\frac{K_{N,p}^p\delta^{(N-p)/p}\delta^{-N}|z|^{p/(p-1)}}{\left[1+\left|\frac{z}{\delta^{(p-1)/p}}\right|^{p/(p-1)}\right]^N}dz\\
&= \int_{B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)}\frac{K_{N,p}^p\delta^{(N-p)/p}\delta^{-N}\delta|w|^{p/(p-1)}}{[1+|w|^{p/(p-1)}]^N}\delta^{N(p-1)/p}dw
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)} \frac{K_{N,p}^p |w|^{p/(p-1)}}{[1+|w|^{p/(p-1)}]^N} dw \\
&= \int_{B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)} \left[\frac{K_{N,p}|w|^{1/(p-1)}}{[1+|w|^{p/(p-1)}]^{N/p}}\right]^p dw \\
&= \int_{B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw.
\end{aligned}
$$

Notemos agora que

$$
B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0) \subset B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right). \tag{2.43}
$$

De fato, se $\xi \in B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)$, então

$$
\left|\xi - \left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)\right| \leq |\xi| + \left|\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right| < \frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}} + \frac{|y|}{\delta^{(p-1)/p}}.
$$

Desde que temos por hipótese que $|y| < \dfrac{1}{2}$, segue que

$$
\left|\xi - \left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)\right| < \frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}} + \frac{|y|}{\delta^{(p-1)/p}} < \frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}} + \frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}} = \frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}
$$

e daí, $\xi \in B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\dfrac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)$.

Segue então de (2.43) que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw &\leq \int_{B_{\frac{1}{\delta^{(p-1)/p}}}\left(-\frac{y}{\delta^{(p-1)/p}}\right)} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw \\
&= \int_{B_1(-y)} |\nabla \Phi_{\delta,0}|^p dz \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_{\delta,0}|^p dz = S.
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

Para cada $\delta > 0$ temos que

$$
\left| |\nabla \Phi_{1,0}|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)} \right| \leq |\nabla \Phi_{1,0}|^p
$$

onde $|\nabla \phi_{1,0}|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $\delta \to 0$ então

$$
|\nabla \Phi_{1,0}(w)|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)}(w) \to |\nabla \Phi_{1,0}(w)|^p \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.
$$

Pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta \to 0} \int_{B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw &= \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{1,0}|^p \chi_{B_{\frac{1}{2\delta^{(p-1)/p}}}(0)} dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \Phi_{1,0}|^p dw = S
\end{aligned}
$$

e usando o Teorema do Confronto em (2.44) concluimos que existe $\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz$ e

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz = S.$$

Então, temos que

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) = 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-y)}|\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz \to 0 \ \text{ quando } \ \delta\to 0$$

e portanto, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que $\gamma(\Phi_{\delta,y}) < \dfrac{1}{2}$ para todo $\delta \in (0,\hat{\delta})$.

Escolhendo $\delta_3 < \min\{\hat{\delta}, \dfrac{1}{2}\}$ temos

$$\gamma(\Phi_{\delta_3,y}) < \frac{1}{2}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^N : |y| < \frac{1}{2}. \tag{2.45}$$

Agora, pelo Lema 8, temos que

$$\beta(\Phi_{\delta,y}) = \frac{y}{|y|} + o_\delta(1) \ \text{ quando } \ \delta\to 0\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \geq \frac{1}{2}.$$

Segue então que existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$\left|\beta(\Phi_{\delta,y}) - \frac{y}{|y|}\right| < \frac{1}{4}\ ,\ \forall \delta \in (0,\tilde{\delta}) \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \geq \frac{1}{2}.$$

Escolhendo $\delta_4 < \min\{\tilde{\delta}, \dfrac{1}{2}\}$ temos

$$\left|\beta(\Phi_{\delta_4,y}) - \frac{y}{|y|}\right| < \frac{1}{4}\ ,\ \forall y \in \mathbb{R}^N : |y| \geq \frac{1}{2}. \tag{2.46}$$

Agora, escolhendo $\delta_1 = \min\{\delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ o resultado segue de (2.42), (2.45) e (2.46).

■

**Lema 12** *: Existe $\delta_2 > \frac{1}{2}$ tal que*

*(a)* $f(\Phi_{\delta_2,y}) < \dfrac{S + c_0}{2}\ \forall y \in \mathbb{R}^N$,

*(b)* $\gamma(\Phi_{\delta_2,y}) > \dfrac{1}{2}\ \forall y \in \mathbb{R}^N$ .

**Demonstração:**

Do Lema 6, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\overline{\delta} = \overline{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta,y}) < S + \varepsilon\ ,\ \forall \delta \in [\overline{\delta}, +\infty).$$

Daí, tomando $\varepsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$ e escolhendo $\delta_3 > \max\{\overline{\delta}, \frac{1}{2}\}$ temos

$$f(\Phi_{\delta_3,y}) \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^N} f(\Phi_{\delta_3,y}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S + c_0}{2} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.47}$$

Além disso, na demonstração do Lema 11, argumentamos que

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) = 1 - \frac{1}{S}\int_{B_1(-y)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz. \tag{2.48}$$

Notemos que para todo $y \in \mathbb{R}^N$

$$0 \leq \int_{B_1(-y)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz \leq \int_{B_1(-y)} ||\Phi_{\delta,0}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} dz = |B_1(-y)|||\Phi_{\delta,0}||^p_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}.$$

Do ítem $(ii)$ do Lema 4 temos que

$$||\Phi_{\delta,0}||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ quando } \delta \to +\infty,$$

e portanto, para todo $y \in \mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{B_1(-y)} |\nabla\Phi_{\delta,0}|^p dz \to 0 \text{ quando } \delta \to +\infty.$$

De (2.48) segue que, para todo $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) \to 1 \text{ quando } \delta \to +\infty$$

e logo, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\gamma(\Phi_{\delta,y}) > \frac{1}{2} \ , \ \forall \delta \in (\hat{\delta}, +\infty).$$

Escolhendo $\delta_4 > \max\{\hat{\delta}, \dfrac{1}{2}\}$ temos

$$\gamma(\Phi_{\delta_4,y}) > \frac{1}{2} \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.49}$$

Agora, escolhendo $\delta_2 = \max\{\delta_3, \delta_4\}$ o resultado segue de (2.47) e (2.49).

■

**Lema 13** *: Existe $R > 0$ tal que*

*(a)* $f(\Phi_{\delta,y}) < \dfrac{S + c_0}{2}$ $\forall y : |y| \geq R$ *e* $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$,

*(b)* $(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} > 0$ $\forall y : |y| \geq R$ *e* $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

**Demonstração:**

Segue do Lema 9 que, dado $\varepsilon = \dfrac{c_0 - S}{2} > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que

$$f(\Phi_{\delta,y}) < S + \frac{c_0 - S}{2} = \frac{S + c_0}{2} \ , \ \forall \delta \in [\delta_1, \delta_2] \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}^N : |y| > R_1. \tag{2.50}$$

Agora, para cada $y \in \mathbb{R}^N$, consideremos $(\mathbb{R}^N)_y^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : (x|y)_{\mathbb{R}^N} > 0\}$ e $(\mathbb{R}^N)_y^- = \mathbb{R}^N \backslash (\mathbb{R}^N)_y^+$. Consideremos também $\tilde{y} \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y - \tilde{y}| = 1/2$ e $r \in (0, 1/4)$.

Notemos que existe $\hat{R}_2 > 0$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > \hat{R}_2$ temos $B_r(\tilde{y}) \subset (\mathbb{R}^N)_y^+$. De fato, notemos que

$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2(x|y)_{\mathbb{R}^N} + |y|^2,$$

ou seja,

$$(x|y)_{\mathbb{R}^N} = \frac{|x|^2}{2} - \frac{|x-y|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2} \geq -\frac{|x-y|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2}.$$

Se $x \in B_r(\tilde{y})$, então

$$|x - y| = |x - \tilde{y} + \tilde{y} - y| \leq |x - \tilde{y}| + |y - \tilde{y}| < r + \frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \tag{2.51}$$

e portanto,

$$(x|y)_{\mathbb{R}^N} > -\frac{9}{32} + \frac{|y|^2}{2}.$$

Daí, tomando $\hat{R}_2 > 3/4$, segue que se $y \in \mathbb{R}^N$ é tal que $|y| > \hat{R}_2$, então

$$(x|y)_{\mathbb{R}^N} > -\frac{9}{32} + \frac{\hat{R}_2^2}{2} > 0,$$

e portanto, $x \in (\mathbb{R}^N)_y^+$. Além disso, observe que se $y \in \mathbb{R}^N$ é tal que $|y| > \hat{R}_2$, então

$$\begin{aligned} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|y|} &= \frac{|x|^2}{2|y|} - \frac{|x-y|^2}{2|y|} + \frac{|y|}{2} \geq -\frac{|x-y|^2}{2|y|} + \frac{|y|}{2} \\ &> -\frac{9}{32|y|} + \frac{|y|}{2} > -\frac{9}{32\hat{R}_2} + \frac{\hat{R}_2}{2} > 0 \ , \ \forall x \in B_r(\tilde{y}). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Notemos agora que existe uma constante $H_1 > 0$ tal que

$$|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p > H_1 \ , \ \forall x \in B_r(\tilde{y}). \tag{2.53}$$

De fato, temos que

$$|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p = \frac{K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p} |x - y|^{p/(p-1)}}{[\delta + |x - y|^{P/(p-1)}]^N}.$$

Se $x \in B_r(\tilde{y})$, então por (2.51) temos

$$|x-y| < \frac{3}{4},$$

e além disso,

$$|x-y| \geq |y-\tilde{y}| - |x-\tilde{y}| > \frac{1}{2} - r > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p > \frac{K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p}(1/4)^{p/(p-1)}}{[\delta + (3/4)^{p/(p-1)}]^N} \geq \frac{K_{N,p}^p \delta_1^{(N-p)/p}(1/4)^{p/(p-1)}}{[\delta_2 + (3/4)^{p/(p-1)}]^N} = H_1 > 0.$$

Além disso, afirmamos que existe uma constante $H_2 > 0$ tal que

$$|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p \leq \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} \ , \ \forall x \in (\mathbb{R}^N)_y^-. \tag{2.54}$$

De fato, temos que

$$|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p \leq \frac{K_{N,p}^p \delta^{(N-p)/p}|x-y|^{P/(p-1)}}{|x-y|^{(pN)/(p-1)}} \leq \frac{K_{N,p}^p \delta_2^{(N-p)/p}}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}},$$

e daí, basta tomar $H_2 = K_{N,p}^p \delta_2^{(N-p)/p}$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} &= \left(\frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx \Big| y\right)_{\mathbb{R}^N} = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx \\
&= \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^+} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx \\
&\geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx
\end{aligned}$$

e de (2.53), segue que

$$(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx + \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|}|\nabla \Phi_{\delta,y}(x)|^p dx$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > \hat{R}_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Notemos que

$$-(x|y)_{\mathbb{R}^N} \leq |(x|y)_{\mathbb{R}^N}| \leq |x||y|,$$

e assim,

$$\frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} \geq -|y|.$$

Daí,

$$(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} |y||\nabla\Phi_{\delta,y}(x)|^p dx,$$

e de (2.54), obtemos

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} &\geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x|} H_1 dx - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} |y| \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx \\
&= \frac{|y|}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x||y|} H_1 dx - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} |y| \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo

$$C = -\frac{9}{32\hat{R}_2} + \frac{\hat{R}_2}{2} > 0,$$

segue de (2.52) que

$$\frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{(x|y)_{\mathbb{R}^N}}{|x||y|} H_1 dx \geq \frac{1}{S}\int_{B_r(\tilde{y})} \frac{C}{|x|} H_1 dx = H_3 > 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} &\geq |y|H_3 - |y|\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx \\
&= |y|\left(H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx\right)
\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > \hat{R}_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Vamos agora verificar que existe $\tilde{R}_2 > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^N$ com $|y| > \tilde{R}_2$, temos

$$\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx < H_3.$$

De fato, fazendo $z = x - y$, segue que $dx = dz$. Além disso, se $x \in (\mathbb{R}^N)_y^-$, então

$$|z|^2 = |x-y|^2 = |x|^2 - 2(x|y)_{\mathbb{R}^N} + |y|^2 \geq |y|^2,$$

e portanto, $z \in B^c_{|y|}(0)$. Daí,

$$\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx \leq \frac{1}{S}\int_{B^c_{|y|}(0)} \frac{H_2}{|z|^{p(N-1)/(p-1)}} dz,$$

e mudando para coordenadas esféricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}} dx &\leq \frac{1}{S}\int_{|y|}^{+\infty} \frac{H_2}{\rho^{p(N-1)/(p-1)}} \rho^{N-1} d\rho \\
&= \frac{1}{S}\lim_{s\to+\infty}\int_{|y|}^{s} H_2 \rho^{(1-N)/(p-1)} d\rho \\
&= \frac{H_2}{S}\lim_{s\to+\infty}\left[\frac{(p-1)}{(p-N)}\rho^{(p-N)/(p-1)}\right]_{|y|}^{s} \\
&= \frac{H_2}{S}\frac{(p-1)}{(N-p)}|y|^{(p-N)/(p-1)}.
\end{aligned}$$

Daí, tomando

$$\tilde{R}_2 = \left[\frac{H_2}{H_3}\frac{1}{S}\frac{(p-1)}{(N-p)}\right]^{(p-1)/(N-p)} > 0,$$

segue que para todo $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > \tilde{R}_2$ temos

$$\frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}}dx \leq \frac{H_2}{S}\frac{(p-1)}{(N-p)}|y|^{(p-N)/(p-1)} < H_3.$$

Concluimos então que, fazendo $R_2 = \max\{\hat{R}_2, \tilde{R}_2\}$, tem-se

$$\begin{aligned}(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} &\geq |y|\left(H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}}dx\right) \\ &> R_2\left(H_3 - \frac{1}{S}\int_{(\mathbb{R}^N)_y^-} \frac{H_2}{|x-y|^{p(N-1)/(p-1)}}dx\right) > 0 \qquad (2.55)\end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y| > R_2$ e para todo $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$.

Agora, escolhendo $R > \max\{R_1, R_2\}$, o resultado segue de (2.50) e (2.55).

■

Consideremos o conjunto

$$V = \{(y,\delta) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty) : |y| < R \text{ e } \delta \in (\delta_1, \delta_2)\}$$

onde $\delta_1$, $\delta_2$ e $R$ são dados pelos Lemas 11, 12 e 13 respectivamente.

Seja $Q : \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \to D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$Q(y,\delta) = \Phi_{\delta,y}.$$

Notemos que $Q$ é contínua.

Consideremos agora os seguintes conjuntos:

$\Theta = \{Q(y,\delta); (y,\delta) \in \overline{V}\}$,
$H = \left\{h \in C(\Sigma \cap M, \Sigma \cap M) : h(u) = u,\ \forall u \in (\Sigma \cap M) : f(u) < \dfrac{S+c_0}{2}\right\}$
e
$\Gamma = \{A \subset (\Sigma \cap M) : A = h(\Theta), h \in H\}$.

Notemos que $\Theta \subset (\Sigma \cap M)$.

Além disso, $\Theta = Q(\overline{V})$ é compacto, pois $Q$ é contínua e $\overline{V} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ é compacto.

Temos também que $H \neq \emptyset$, pois denotando por $I$ a função identidade temos que $I \in H$.

Finalmente, para todo $A \in \Gamma$ temos que $A$ é compacto, pois para todo $A \in \Gamma$ temos $A = h(\Theta)$, onde $h \in H$ é contínua.

**Lema 14** *: Seja*

$$F : \overline{V} \to \mathbb{R}^{N+1}$$

*dada por*

$$F(y,\delta) = (\alpha \circ Q)(y,\delta) = \frac{1}{S}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{x}{|x|}, \sigma(x)\right) |\nabla \Phi_{\delta,y}|^p dx.$$

*Então*

$$d(F, V, (0, \frac{1}{2})) = 1,$$

*onde* $d(F, V, (0, \frac{1}{2}))$ *denota o grau topológico de Brower da aplicação* $F$ *em relação a* $V$ *no ponto* $(0, \frac{1}{2})$.

**Demonstração:**

Desde que $Q$ e $\alpha$ são funções contínuas segue que $F = \alpha \circ Q$ é contínua.

Notemos que $\overline{V} \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Consideremos a homotopia $Z : [0,1] \times \overline{V} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por

$$Z(t,(y,\delta)) = tF(y,\delta) + (1-t)I_{\overline{V}}(y,\delta)$$

onde $I_{\overline{V}}$ é a projeção canônica de $\overline{V}$ em $\mathbb{R}^{N+1}$.

Provaremos primeiramente que $(0, 1/2) \notin Z([0,1] \times \partial V)$, ou seja, que para todo $t \in [0,1]$ e para todo $(y,\delta) \in \partial V$ temos

$$t(\alpha \circ Q)(y,\delta) + (1-t)(y,\delta) = t\alpha(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)(y,\delta) \neq (0, 1/2),$$

ou ainda, que

$$t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y \neq 0 \ , \ \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (y,\delta) \in \partial V \tag{2.56}$$

ou

$$t\gamma(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)\delta \neq 1/2 \ , \ \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (y,\delta) \in \partial V. \tag{2.57}$$

Notemos que $\partial V = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4$ onde

$$\Lambda_1 = \{(y,\delta_1) : |y| < 1/2\},$$

$$\Lambda_2 = \{(y,\delta_1) : 1/2 \leq |y| \leq R\},$$

$$\Lambda_3 = \{(y, \delta_2) : |y| \leq R\}$$

e

$$\Lambda_4 = \{(y, \delta) : |y| = R \text{ e } \delta \in [\delta_1, \delta_2]\}.$$

Se $(y, \delta) \in \Lambda_1$, então $(y, \delta) = (y, \delta_1)$. Além disso, do Lema 11, temos que $\delta_1 < 1/2$ e do ítem (b) do Lema 11 segue que $\gamma(\Phi_{\delta_1,y}) < 1/2$. Daí,

$$\begin{aligned} t\gamma(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)\delta &= t\gamma(\Phi_{\delta_1,y}) + (1-t)\delta_1 \\ &< t\frac{1}{2} + (1-t)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ , \ \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (y,\delta) \in \Lambda_1. \end{aligned}$$

Logo (2.57) ocorre e portanto $(0, 1/2) \notin Z([0, 1] \times \Lambda_1)$.

Se $(y, \delta) \in \Lambda_2$, então $(y, \delta) = (y, \delta_1)$ e $|y| \geq 1/2$. Assim,

$$\begin{aligned} |t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y| &= |t\beta(\Phi_{\delta_1,y}) + (1-t)y| \\ &= \left|(1-t)y + \frac{ty}{|y|} - \frac{ty}{|y|} + t\beta(\Phi_{\delta_1,y})\right|. \end{aligned}$$

Usando desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y| &\geq \left|(1-t)y + \frac{ty}{|y|}\right| - \left|\frac{ty}{|y|} - t\beta(\Phi_{\delta_1,y})\right| \\ &= \frac{|(1-t)|y| + t|}{|y|}|y| - t\left|\frac{y}{|y|} - \beta(\Phi_{\delta_1,y})\right| \\ &= |(1-t)|y| + t| - t\left|\frac{y}{|y|} - \beta(\Phi_{\delta_1,y})\right| \\ &= (1-t)|y| + t - t\left|\frac{y}{|y|} - \beta(\Phi_{\delta_1,y})\right|. \end{aligned}$$

Do ítem (c) do Lema 11 temos que

$$\left|\beta(\Phi_{\delta_1,y}) - \frac{y}{|y|}\right| < \frac{1}{4}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y| &\geq (1-t)|y| + t - t\left|\frac{y}{|y|} - \beta(\Phi_{\delta_1,y})\right| > (1-t)|y| + t - \frac{t}{4} \\ &\geq (1-t)\frac{1}{2} + t - \frac{t}{4} = \frac{1}{2} + \frac{t}{4} > 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $(y, \delta) \in \Lambda_2$. Logo (2.56) ocorre e portanto $(0, 1/2) \notin Z([0, 1] \times \Lambda_2)$.

Se $(y,\delta) \in \Lambda_3$, então $(y,\delta) = (y,\delta_2)$. Além disso, do Lema 12, temos que $\delta_2 > 1/2$ e do ítem (b) do Lema 12 segue que $\gamma(\Phi_{\delta_2,y}) > 1/2$. Daí,

$$\begin{aligned} t\gamma(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)\delta &= t\gamma(\Phi_{\delta_2,y}) + (1-t)\delta_2 \\ &> t\frac{1}{2} + (1-t)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ , \ \forall t \in [0,1] \text{ e } \forall (y,\delta) \in \Lambda_3. \end{aligned}$$

Logo (2.57) ocorre e portanto $(0,1/2) \notin Z([0,1] \times \Lambda_3)$.

Se $(y,\delta) \in \Lambda_4$, então $|y| = R$. Além disso, do ítem (b) do Lema 13 temos que $(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} > 0$. Daí,

$$(t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y|y)_{\mathbb{R}^N} = t\,(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)\,(y|y)_{\mathbb{R}^N}\,.$$

Se $t = 0$, então

$$\begin{aligned} (t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y|y)_{\mathbb{R}^N} &= t\,(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)\,(y|y)_{\mathbb{R}^N} \\ &= (y|y)_{\mathbb{R}^N} = |y|^2 = R^2 > 0 \end{aligned}$$

enquanto que se $t \in (0,1]$,

$$\begin{aligned} (t\beta(\Phi_{\delta,y}) + (1-t)y|y)_{\mathbb{R}^N} &= t\,(\beta(\Phi_{\delta,y})|y)_{\mathbb{R}^N} + (1-t)\,(y|y)_{\mathbb{R}^N} \\ &> (1-t)\,(y|y)_{\mathbb{R}^N} = (1-t)|y|^2 = (1-t)R^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Segue então que ocorre (2.56) e portanto $(0,1/2) \notin Z([0,1] \times \Lambda_4)$.

Concluimos então que $(0,1/2) \notin Z([0,1] \times \partial V)$ e daí, $d\,(F,V,(0,1/2))$, $d\,(I_{\overline{V}},V,(0,1/2))$ e $d\,(Z(t,.),V,(0,1/2))$ estão bem definidos e da invariância do grau por homotopia temos

$$d\,(Z(0,.),V,(0,1/2)) = d\,(Z(1,.),V,(0,1/2))\,,$$

ou seja,

$$d\,(F,V,(0,1/2)) = d\,(I_{\overline{V}},V,(0,1/2))\,.$$

Desde que $(0,1/2) \in V$, concluimos que

$$d\,(F,V,(0,1/2)) = d\,(I_{\overline{V}},V,(0,1/2)) = 1.$$

■

**Lema 15** *: Se $A \in \Gamma$, então $A \cap \Upsilon \neq \emptyset$.*

**Demonstração:**

Primeiramente recordemos que

$$\Upsilon = \{u \in M : \alpha(u) = (0, 1/2)\}.$$

Se $A \in \Gamma$, então $A \subset (\Sigma \cap M)$ e daí basta provar que para todo $A \in \Gamma$, existe $u \in A$ tal que $\alpha(u) = (0, 1/2)$. Mas desde que, para todo $A \in \Gamma$ temos $A = h(\Theta)$ com $h \in H$ e $\Theta = Q(\overline{V})$, é suficiente provar que para todo $h \in H$, existe $(y_0, \delta_0) \in \overline{V}$ tal que $(\alpha \circ h \circ Q)(y_0, \delta_0) = (0, 1/2)$.

Dada arbitrariamente $h \in H$, consideremos a função $F_h : \overline{V} \to \mathbb{R}^{N+1}$ dada por

$$F_h(y, \delta) = (\alpha \circ h \circ Q)(y, \delta).$$

Desde que $\alpha$, $h$ e $Q$ são contínuas, temos que $F_h$ é contínua.

Notemos que $F_h = F$ em $\partial V$. De fato, temos que

$$\partial V = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3, \tag{2.58}$$

onde

$$\Pi_1 = \{(y, \delta_1) : |y| \leq R\},$$

$$\Pi_2 = \{(y, \delta_2) : |y| \leq R\}$$

e

$$\Pi_3 = \{(y, \delta) : |y| = R \text{ e } \delta \in [\delta_1, \delta_2]\}.$$

Se $(y, \delta) \in \Pi_1$, então $(y, \delta) = (y, \delta_1)$ e do ítem (a) do Lema 11 segue que

$$f(Q(y, \delta)) = f(Q(y, \delta_1)) = f(\Phi_{\delta_1, y}) < \frac{S + c_0}{2}\ ,\ \forall (y, \delta) \in \Pi_1. \tag{2.59}$$

Se $(y, \delta) \in \Pi_2$, então $(y, \delta) = (y, \delta_2)$ e do ítem (a) do Lema 12 segue que

$$f(Q(y, \delta)) = f(Q(y, \delta_2)) = f(\Phi_{\delta_2, y}) < \frac{S + c_0}{2}\ ,\ \forall (y, \delta) \in \Pi_2. \tag{2.60}$$

Se $(y, \delta) \in \Pi_3$, então $|y| = R$ e $\delta \in [\delta_1, \delta_2]$ e do ítem (a) do Lema 13 segue que

$$f(Q(y, \delta)) = f(\Phi_{\delta, y}) < \frac{S + c_0}{2}\ ,\ \forall (y, \delta) \in \Pi_3. \tag{2.61}$$

Segue então de (2.58), (2.59), (2.60) e (2.61) que

$$f(Q(y,\delta)) < \frac{S+c_0}{2} \ , \ \forall (y,\delta) \in \partial V$$

e portanto, da definição de $H$, temos que para todo $h \in H$,

$$h(Q(y,\delta)) = Q(y,\delta) \ , \ \forall (y,\delta) \in \partial V.$$

Daí,

$$\begin{aligned} F_h(y,\delta) &= (\alpha \circ h \circ Q)(y,\delta) = (\alpha \circ h)Q(y,\delta) \\ &= (\alpha \circ Q)(y,\delta) = F(y,\delta) \ , \ \forall (y,\delta) \in \partial V. \end{aligned}$$

Agora, desde que $F_h, F \in C(\overline{V}, \mathbb{R}^{N+1})$ e que $F_h = F$ em $\partial V$, segue da propriedade dependência na fronteira da Teoria do Grau que para todo $b \notin F(\partial V)$ tem-se $d\,(F,V,b) = d\,(F_h,V,b)$ e desde que $(0,1/2) \notin F(\partial V)$, concluimos que

$$d\,(F,V,(0,1/2)) = d\,(F_h,V,(0,1/2))\,.$$

Do Lema 14 segue que

$$d\,(F_h,V,(0,1/2)) = d\,(F,V,(0,1/2)) = 1,$$

e portanto, existe $(y_0,\delta_0) \in V$ tal que

$$F_h(y_0,\delta_0) = (\alpha \circ h \circ Q)(y_0,\delta_0) = (0,1/2)$$

e o Lema está demonstrado.

■

**Demonstração do Teorema 3:**

Primeiramente consideremos

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} f(u) \tag{2.62}$$

e para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$f^s = \{u \in (\Sigma \cap M) : f(u) \leq s\}.$$

Observamos que $c$ definido por (2.62) de fato existe, pois para todo $A \in \Gamma$ temos que $A$ é compacto e desde que $f \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, segue que existe $\max_{u \in A} f(u)$ para todo

$A \in \Gamma$. Agora, desde que $f$ é uma função não-negativa, segue que para todo $A \in \Gamma$ temos $\max_{u \in A} f(u) \geq 0$ e portanto, existe $\inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} f(u)$.

Vamos verificar que $c$ definido por (2.62) satisfaz

$$S < c < 2^{p/N} S. \tag{2.63}$$

De fato, temos que

$$\max_{u \in \Theta} f(u) = \sup_{u \in \Theta} f(u) = \sup_{(y,\delta) \in \overline{V}} (f \circ Q)(y, \delta) = \sup_{(y,\delta) \in \overline{V}} f(\Phi_{\delta,y}).$$

Desde que $\overline{V} \subset \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$, obtemos

$$\max_{u \in \Theta} f(u) = \sup_{(y,\delta) \in \overline{V}} f(\Phi_{\delta,y}) \leq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y})$$

e do Lema 7 segue que

$$\max_{u \in \Theta} f(u) \leq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y}) < 2^{p/N} S.$$

Temos também que $\Theta \in \Gamma$, pois $I \in H$, $\Theta \subset (\Sigma \cap M)$ e $\Theta = I(\Theta)$. Assim,

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} f(u) \leq \max_{u \in \Theta} f(u) \leq \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^N \\ \delta \in (0,+\infty)}} f(\Phi_{\delta,y}) < 2^{p/N} S.$$

Por outro lado, do Lema 15, temos que $A \cap \Upsilon \neq \emptyset$ para todo $A \in \Gamma$ e portanto, para todo $A \in \Gamma$, existe $\bar{u} \in A \cap \Upsilon$. Daí,

$$c_0 = \inf_{u \in \Upsilon} f(u) \leq f(\bar{u}) \leq \max_{u \in A} f(u) \ , \ \forall A \in \Gamma,$$

e com isso obtemos

$$c_0 \leq c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} f(u) < 2^{p/N}. \tag{2.64}$$

Do Lema 10 temos que $S < c_0$ e de (2.64) concluímos que (2.63) de fato ocorre.

Agora, da definição de $c$, segue que existe uma seqüência $(A_n) \subset \Gamma$ tal que $\max_{u \in A_n} f(u) \to c$. Da definição de máximo, segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in A_n \subset (\Sigma \cap M)$ tal que $f(u_n) = \max_{u \in A_n} f(u)$. Portanto,

$$\exists (u_n) \subset (\Sigma \cap M) : f(u_n) \to c. \tag{2.65}$$

Vamos agora provar que a seqüência $(u_n)$ dada em (2.65) satisfaz

$$f'\big|_M (u_n) \to 0.$$

De fato, suponhamos por contradição que $f'\big|_M(u_n) \not\to 0$.

Segue então que existe $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que $||f'\big|_M(u_{n_j})||_* \geq K > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Usando um conhecido Lema de Deformação (veja o Lema 21), segue que existem uma aplicação $\eta : [1,0] \times (\Sigma \cap M) \to (\Sigma \cap M)$ contínua e $\varepsilon_0 > 0$ tais que:

1 - $\eta(0,u) = u$;

2 - $\eta(t,u) = u$ , $\forall u \in f^{c-\varepsilon_0} \cup \{(\Sigma \cap M) \backslash f^{c+\varepsilon_0}\}$ , $\forall t \in [0,1]$;

3 - $\eta(1, f^{c+\frac{\varepsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\varepsilon_0}{2}}$.

De (2.62), segue que existe $\tilde{A} \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{u \in \tilde{A}} f(u) < c + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Observemos que

$$\tilde{A} \subset f^{c+\frac{\varepsilon_0}{2}}. \tag{2.66}$$

De fato,

$$u \in \tilde{A} \Rightarrow f(u) \leq \max_{u \in \tilde{A}} f(u) < c + \frac{\varepsilon_0}{2} \Rightarrow u \in f^{c+\frac{\varepsilon_0}{2}}.$$

Desde que $\tilde{A} \in \Gamma$, temos que $\tilde{A} \subset (\Sigma \cap M)$ e existe $\bar{h} \in H$ tal que

$$\bar{h}(\Theta) = \tilde{A}. \tag{2.67}$$

Da definição de $\eta$, segue que

$$\eta(1, \tilde{A}) \subset (\Sigma \cap M). \tag{2.68}$$

Agora consideremos $\hat{h} : (\Sigma \cap M) \to (\Sigma \cap M)$ dada por $\hat{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u))$.

Vale observar que, desde que $\bar{h} \in C(\Sigma \cap M, \Sigma \cap M)$, temos que $\hat{h} \in C(\Sigma \cap M, \Sigma \cap M)$.

Notemos que

$$f^{c+\varepsilon_0} \backslash f^{c-\varepsilon_0} \subset f^{2^{p/N}S} \backslash f^{(S+c_0)/2}. \tag{2.69}$$

De fato, para todo $u \in f^{c+\varepsilon_0} \backslash f^{c-\varepsilon_0}$ temos que

$$c - \varepsilon_0 < f(u) \leq c + \varepsilon_0$$

e de (2.63) segue que

$$c - \varepsilon_0 < f(u) \leq c + \varepsilon_0 < 2^{p/N}S \tag{2.70}$$

para $\varepsilon_0$ suficientemente pequeno.

Além disso, do fato de que $S < c_0$ obtemos

$$S < \frac{S + c_0}{2} < c_0$$

e de (2.64) segue que

$$\frac{S + c_0}{2} < c_0 - \varepsilon_0 \leq c - \varepsilon_0 < 2^{p/N}$$

para $\varepsilon_0$ suficientemente pequeno e daí, lembrando que $u \in f^{c+\varepsilon_0} \backslash f^{c-\varepsilon_0}$, segue

$$\frac{S + c_0}{2} < c_0 - \varepsilon_0 \leq c - \varepsilon_0 < f(u). \tag{2.71}$$

De (2.70) e (2.71) temos

$$u \in f^{2^{p/N}S} \backslash f^{(S+c_0)/2}$$

e portanto, (2.69) de fato ocorre.

Seja agora $u \in (\Sigma \cap M)$ tal que

$$f(u) < \frac{S + c_0}{2}. \tag{2.72}$$

Lembrando que $\bar{h} \in H$, segue que

$$\bar{h}(u) = u.$$

Além disso, de (2.72) temos que $u \notin f^{2^{p/N}S} \backslash f^{(S+c_0)/2}$ e portanto, de (2.69), temos $u \notin f^{c+\varepsilon_0} \backslash f^{c-\varepsilon_0}$ e daí, segue que

$$u \in f^{c-\varepsilon_0} \cup \{(\Sigma \cap M) \backslash f^{c+\varepsilon_0}\}$$

e do Lema de Deformação, temos

$$\eta(1, u) = u.$$

Portanto,

$$\hat{h}(u) = \eta(1, \bar{h}(u)) = \eta(1, u) = u$$

e daí, concluimos que $\hat{h} \in H$.

Temos então que

$$\hat{h}(\Theta) = \eta(1, \bar{h}(\Theta))$$

e de (2.67),

$$\hat{h}(\Theta) = \eta(1, \bar{h}(\Theta)) = \eta(1, \tilde{A}). \tag{2.73}$$

De (2.68) e (2.73) obtemos

$$\eta(1, \tilde{A}) \in \Gamma$$

e de (2.62) segue que

$$c = \inf_{A \in \Gamma} \max_{u \in A} f(u) \leq \max_{u \in \eta(1, \tilde{A})} f(u). \tag{2.74}$$

Do Lema de Deformação temos $\eta(1, f^{c+\frac{\varepsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\varepsilon_0}{2}}$ e de (2.66)

$$\eta(1, \tilde{A}) \subset \eta(1, f^{c+\frac{\varepsilon_0}{2}}) \subset f^{c-\frac{\varepsilon_0}{2}}.$$

Segue então que

$$f(u) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2} \ , \ \forall u \in \eta(1, \tilde{A}).$$

Portanto,

$$\max_{u \in \eta(1, \tilde{A})} f(u) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

e de (2.74) concluimos que

$$c \leq \max_{u \in \eta(1, \tilde{A})} f(u) \leq c - \frac{\varepsilon_0}{2}$$

o que é um absurdo.

Concluimos então que existem $(u_n) \subset (\Sigma \cap M)$ e $c \in (S, 2^{p/N} S)$ tais que

$$f(u_n) \to c \ \text{ e } \ f'\Big|_M (u_n) \to 0$$

e daí, a menos de subseqüência, $u_n \to \tilde{u}_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $(\Sigma \cap M)$ é fechado, temos $\tilde{u}_0 \in (\Sigma \cap M)$ e portanto $\tilde{u}_0$ é uma função positiva.

Do fato de que $f \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e da unicidade do limite

$$f(\tilde{u}_0) = c \ \text{ e } \ f'\Big|_M (\tilde{u}_0) = 0$$

e de (2.63)

$$S < f(\tilde{u}_0) < 2^{p/N} S$$

e a demonstração do teorema está concluída.

■

# Apêndice A

# A Regularidade do Funcional $I$ e Resultados Importantes

**Definição 1** *: Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço de Banach $X$. Dizemos que $\varphi$ possui uma derivada de Gateaux $f \in X'$ em $u \in A$ se, para qualquer $h \in X$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u + th) - \varphi(u) - f(th)\right] = 0.$$

*A derivada de Gateaux em $u$ é denotado por $\varphi'(u)$.*

**Definição 2** *: Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço de Banach $X$. Dizemos que $\varphi$ possui uma derivada de Fréchet $f \in X'$ em $u \in A$ se*

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{1}{||h||} \left|\varphi(u + h) - \varphi(u) - f(h)\right| = 0.$$

**Definição 3** *: Dizemos que o funcional $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de $\varphi$ existe e é contínua em $A$.*

**Observação 1** *: A derivada de Gateaux é dada por*

$$\varphi'(u)h = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u + th) - \varphi(u)\right].$$

**Observação 2** *: Toda derivada de Fréchet é uma derivada de Gateaux.*

**Proposição 1** *: Seja $\varphi : A \to \mathbb{R}$ onde $A$ é um subconjunto aberto de um espaço de Banach $X$. Se $\varphi$ possui derivada de Gateaux contínua em $A$, então $\varphi \in C^1(A, \mathbb{R})$.*

**Demonstração:**

Consideremos $u \in A$ e $\varphi'(u)$ a derivada de Gateaux de $\varphi$ em $u$. Pelo o Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h)| &= |\varphi'(u+\theta h)(h) - \varphi'(u)(h)| \\ &\leq ||\varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u)||_{X'}||h||. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Como $\varphi$ possui derivada de Gateaux contínua em $A$, então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $||h|| < \delta$ temos

$$||\varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u)||_{X'} < \epsilon.$$

Segue então de (A.1) que

$$|\varphi(u+h) - \varphi(u) - \varphi'(u)(h)| < \epsilon||h||$$

de onde concluímos que $\varphi$ possui uma derivada de Frechet e esta é contínua.

■

A partir de agora, estamos interessados em mostrar que o funcional $I$ definido em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx$$

é de classe $C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Para tal, consideremos os funcionais $I_1, I_2, I_3 : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \ , \ I_2(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx \ , \ I_3(u) = \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx.$$

**Proposição 2** *: O funcional* $I = I_1 + I_2 - I_3 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Demonstração:**

É suficiente provar que as derivadas de Gateaux de $I_1$, $I_2$ e $I_3$ existem e são contínuas.

Primeiramente observaremos que o funcional $I = I_1 + I_2 - I_3$ está bem definido. De fato,

(i) Para todo $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que $|\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e portanto
$I_1(u) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx < +\infty$;

(ii) Para todo $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ obtemos pela a desigualdade de Hölder com expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$ que $a(x)|u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto $I_2(u) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p dx < +\infty$;
(iii) Para todo $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e portanto
$I_3(u) = \dfrac{1}{p^*}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx < +\infty$.

De (i), (ii) e (iii) concluímos que o funcional $I$ está bem definido.

**Afirmação 1** *O funcional* $I_1 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Demonstração:**

**Existência da derivada de Gateaux de $I_1$**

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \dfrac{1}{p}|\nabla u + st\nabla v|^p$. Temos que:

**(a)** $f'(s) = t|\nabla u + st\nabla v|^{p-2}(\nabla u + st\nabla v)\nabla v$;
**(b)** $f(1) = \dfrac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p$;
**(c)** $f(0) = \dfrac{1}{p}|\nabla u|^p$.

Sendo $f$ diferenciável em $(0,1)$, então pelo o Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p = t|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v.$$

Daí,

$$\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t} = |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v.$$

Notemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - \frac{1}{p}|\nabla u(x)|^p}{t} = |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t}\right| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|$$

onde $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx.$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned} I_1'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{p}|\nabla u + t\nabla v|^p - \frac{1}{p}|\nabla u|^p}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de $I_1$ em $u$ com

$$I_1'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx \ , \ \forall v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Continuidade da derivada de Gateaux de $I_1$**

Consideremos $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Temos então que

$$|\nabla u_n| \to |\nabla u| \text{ em } L^p(\mathbb{R}^N)$$

e segue que existe uma subseqüência de $(u_n)$, que ainda denotaremos por $(u_n)$, e uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$|\nabla u_n(x)| \to |\nabla u(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.2}$$

e

$$|\nabla u_n| \leq g \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.3}$$

onde $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Para toda $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla v dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right| |\nabla v| dx \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$ obtemos

$$\begin{aligned} |I_1'(u_n)v - I_1'(u)v| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} ||v|| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||I_1'(u_n) - I_1'(u)||_{D'} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{A.4}$$

Segue de (A.2) que

$$\left| |\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \right|^{p/(p-1)} \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

enquanto que de (A.3),

$$\left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} \leq 2^{\frac{p}{p-1}}(g^p + |\nabla u|^p) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $g^p, |\nabla u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto, $2^{\frac{p}{p-1}}(g^p + |\nabla u|^p) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então, pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right|^{p/(p-1)} dx = 0.$$

Logo, de (A.4) concluimos que

$$||I_1'(u_n) - I_1'(u)||_{D'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$I_1'(u_n) \to I_1'(u) \text{ em } \left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$$

mostrando que a aplicação $u \mapsto I_1'(u)$ é contínua e o funcional $I_1 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Afirmação 2** *O funcional* $I_2 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Demonstração:**

**Existência da derivada de Gateaux de $I_2$**

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \dfrac{1}{p}a(x)|u + stv|^p$ onde $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$. Temos que:

**(a)** $f'(s) = ta(x)|u + stv|^{p-2}(u + stv)v$;

**(b)** $f(1) = \dfrac{1}{p}a(x)|u + tv|^p$;

**(c)** $f(0) = \dfrac{1}{p}a(x)|u|^p$.

Sendo $f$ diferenciável em $(0,1)$, então pelo o Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p}a(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}a(x)|u|^p = ta(x)|u+\lambda tv|^{p-2}(u+\lambda tv)v.$$

Daí,

$$\frac{\frac{1}{p}a(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}a(x)|u|^p}{t} = a(x)|u+\lambda tv|^{p-2}(u+\lambda tv)v.$$

Notemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p}a(x)|u(x)+tv(x)|^p - \frac{1}{p}a(x)|u(x)|^p}{t} = a(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\frac{\frac{1}{p}a(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}a(x)|u|^p}{t}\right| \leq a(x)(|u|+|v|)^{p-1}|v|$$

onde $a(x)^{(p-1)/p}(|u|+|v|)^{p-1} \in L^{p/(p-1)}(\mathbb{R}^N)$ e $a(x)^{1/p}|v| \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e portanto, pela a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$, temos que

$$a(x)^{(p-1)/p}(|u|+|v|)^{p-1}a(x)^{1/p}|v| = a(x)(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p}a(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}a(x)|u|^p}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{p-2}uvdx.$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} I_2'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_2(u+tv)-I_2(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p}a(x)|u+tv|^p - \frac{1}{p}a(x)|u|^p}{t}dx = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{p-2}uvdx \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de $I_2$ em $u$ com

$$I_2'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{p-2}uvdx \ , \ \forall v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Continuidade da derivada de Gateaux de $I_2$**

Consideremos $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Segue que $(u_n)$ é limitada em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e usando a imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos também que $(u_n)$ é limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Para toda $v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||v|| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned}
|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^{p-2}u_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{p-2}uv dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^N} a(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)v dx\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right||v| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} a(x)^{(p-1)/p}\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right| a(x)^{1/p}|v| dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p/(p-1)$ e $p$ obtemos

$$\begin{aligned}
&|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v|^p dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com expoentes $N/p$ e $N/(N-p)$ segue que

$$|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} |a|_{N/p}^{1/p}|v|_{p^*}$$

e usando a imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
&|I_2'(u_n)v - I_2'(u)v| \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} |a|_{N/p}^{1/p}||v|| \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} |a|_{N/p}^{1/p}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&||I_2'(u_n) - I_2'(u)||_{D'} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} a(x)\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} |a|_{N/p}^{1/p}. \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\left||u_n(x)|^{p-2}u_n(x) - |u(x)|^{p-2}u(x)\right|^{p/(p-1)} \to 0 \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\left(\left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)}\right)^{p^*/p} dx &\leq 2^{p^*/(p-1)}(|u_n|_{p^*}^{p^*} + |u|_{p^*}^{p^*}) \\
&\leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Portanto, desde que $\dfrac{p^*}{p} > 1$, temos pelo o Lema de Brézis-Lieb que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} \varphi dx \to 0 \ , \ \forall \varphi \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$$

e desde que $a \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x) \left||u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right|^{p/(p-1)} dx \to 0.$$

Logo, de (A.5) obtemos

$$||I_2'(u_n) - I_2'(u)||_{D'} \to 0,$$

ou seja,

$$I_2'(u_n) \to I_2'(u) \text{ em } \left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)'$$

mostrando que a aplicação $u \mapsto I_2'(u)$ é contínua e o funcional $I_2 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Afirmação 3** *O funcional* $I_3 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

**Demonstração:**

**Existência da derivada de Gateaux de $I_3$**

Consideremos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(s) = \dfrac{1}{p^*}|u + stv|^{p^*}$. Temos que:

**(a)** $f'(s) = t|u + stv|^{p^*-2}(u + stv)v$;

**(b)** $f(1) = \dfrac{1}{p^*}|u + tv|^{p^*}$;

**(c)** $f(0) = \dfrac{1}{p^*}|u|^{p^*}$.

Sendo $f$ diferenciável em $(0,1)$, então pelo o Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda),$$

ou seja,

$$\frac{1}{p^*}|u + tv|^{p^*} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*} = t|u + \lambda tv|^{p^*-2}(u + \lambda tv)v.$$

Daí,

$$\frac{\frac{1}{p^*}|u + tv|^{p^*} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}}{t} = |u + \lambda tv|^{p^*-2}(u + \lambda tv)v.$$

Notemos que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{p^*}|u(x)+tv(x)|^{p^*}-\frac{1}{p^*}|u(x)|^{p^*}}{t}=|u(x)|^{p^*-2}u(x)v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|\frac{\frac{1}{p^*}|u+tv|^{p^*}-\frac{1}{p^*}|u|^{p^*}}{t}\right|\leq(|u|+|v|)^{p^*-1}|v|$$

onde $(|u|+|v|)^{p^*-1}|v|\in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p^*}|u+tv|^{p^*}-\frac{1}{p^*}|u|^{p^*}}{t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*-2}uvdx.$$

Concluímos então que

$$\begin{aligned} I_3'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{I_3(u+tv)-I_3(u)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\frac{1}{p^*}|u+tv|^{p^*}-\frac{1}{p^*}|u|^{p^*}}{t}dx=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*-2}uvdx, \end{aligned}$$

mostrando que existe a derivada de Gateaux de $I_3$ em $u$ com

$$I_3'(u)v=\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*-2}uvdx\ ,\ \forall v\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

**Continuidade da derivada de Gateaux de $I_3$**

Consideremos $(u_n)\subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n\to u$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Temos então que

$$u_n\to u \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

e segue que existe uma subseqüência de $(u_n)$, que ainda denotaremos por $(u_n)$, e uma função $g\in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$u_n(x)\to u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{A.6}$$

e

$$|u_n|\leq g\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{A.7}$$

Para toda $v\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $||v||\leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |I_3'(u_n)v-I_3'(u)v| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p^*-2}u_nvdx-\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*-2}uvdx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N}(|u_n|^{p^*-2}u_n-|u|^{p^*-2}u)vdx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left||u_n|^{p^*-2}u_n-|u|^{p^*-2}u\right||v|dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $p^*/(p^*-1)$ e $p^*$ obtemos

$$|I_3'(u_n)v - I_3'(u)v| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} |v|_{p^*}$$

e usando a imersão contínua $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} |I_3'(u_n)v - I_3'(u)v| &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} ||v|| \\ &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||I_3'(u_n) - I_3'(u)||_{D'} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}}. \tag{A.8}$$

Segue de (A.6) que

$$\left||u_n(x)|^{p^*-2}u_n(x) - |u(x)|^{p^*-2}u(x)\right|^{p^*/(p^*-1)} \to 0 \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

enquanto que de (A.7),

$$\left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} \leq 2^{\frac{p^*}{p^*-1}}(g^{p^*} + |u|^{p^*}) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $g^{p^*}, |u|^{p^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto, $2^{\frac{p^*}{p^*-1}}(g^{p^*} + |u|^{p^*}) \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Então, pelo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left||u_n|^{p^*-2}u_n - |u|^{p^*-2}u\right|^{p^*/(p^*-1)} dx = 0.$$

Logo, de (A.8) concluímos que

$$||I_3'(u_n) - I_3'(u)||_{D'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty,$$

ou seja,

$$I_3'(u_n) \to I_3'(u) \text{ em } \left(D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right)',$$

mostrando que a aplicação $u \mapsto I_3'(u)$ é contínua e o funcional $I_3 \in C^1(D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$. Isso encerra a demonstração da proposição 2.

■

**Lema 16** *: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e seja $(.,.)$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^N$. Então*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) \geq C_p|x-y|^p \text{ se } p \geq 2,$$

*ou,*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y) \geq \frac{C_p|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \text{ se } 1 < p < 2.$$

**Demonstração:**

Por homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Além disso, escolhendo uma base conveniente no $\mathbb{R}^N$ podemos assumir

$$x = (1, 0, 0, \ldots, 0) \ , \ y = (y_1, y_2, 0, \ldots, 0) \text{ e } \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

**(i) Caso** $1 < p < 2$**.** Está claro que a desigualdade é equivalente a

$$\left\{\left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2+y_2^2)^{(2-p)/2}}\right)(1-y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^{(2-p)/2}}\right\} \frac{(1-\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{2-p}}{(1-y_1)^2+y_2^2} \geq C.$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{2-p}} \geq (p-1)(1-y_1) \text{ se } 0 \leq y_1 \leq 1$$

e

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2+y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1) \text{ se } y_1 \leq 0.$$

Então,

$$(p-1)\{(1-y_1)^2 + y_2^2\}\frac{(1+y_1+y_2)^{(2-p)/2}}{(1-y_1)^2+y_2} \geq p-1.$$

**Caso** $p \geq 2$**.** A desigualdade é equivalente a

$$\frac{[1 - y_1(y_1^2+y_2^2)^{(p-2)/2}](1-y_1) + y_2^2(y_1^2+y_2^2)^{(p-2)/2}}{((1-y_1)^2+y_2^2)^{p/2}} \geq C.$$

Denotando $t = |y|/|x|$ e $s = (x,y)/(|x||y|)$ então, temos que mostrar que a função

$$f(t,s) = \frac{1 - (t^{p-1}+t)s + t^p}{(1-2ts+t^2)^{p/2}}$$

é limitada inferiormente.

Um cálculo direto mostra que, fixando $t$, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, se

$$1 - (t^{p-1}+t)s + t^p = \frac{t^{p-2}+1}{p}(1-2ts+t^2)$$

então

$$f(t,s) = \frac{t^{p-2}+1}{p(1-2ts+t^2)^{(p-2)/2}} \geq \frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p},$$

o que conclui a demonstração do Lema.

■

**Definição 4** *: Sejam $X$ um espaço normado, $\psi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $V = \{v \in X : \psi(v) = 1\}$. O conjunto*

$$T_vV := \{y \in X : \psi'(v)y = 0\}$$

*é definido o espaço tangente de $V$ em $v$.*

*Dados $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $v \in V$ temos que a norma da derivada da restrição de $\varphi$ a $V$ em $v$ é dada por*

$$||\varphi'(v)||_* := \sup_{\substack{y\in T_vV\\ ||y||\leq 1}} |\varphi'(v)y|.$$

*O ponto $v$ é dito ponto crítico da restrição de $\varphi$ a $V$ se $\varphi'(v)y = 0$ para todo $y \in T_vV$.*

**Lema 17** *: Seja $X$ um espaço normado. Se $f, g \in X'$, então*

$$\sup_{\substack{g(y)=0\\ ||y||\leq 1}} |f(y)| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} ||f-\lambda g||_{X'}.$$

**Demonstração:**

Para todo $y \in X$ tal que $g(y) = 0$ e $||y|| \leq 1$ temos

$$|f(y)| = |f(y) - \lambda g(y)| \leq ||f-\lambda g||_{X'}||y|| \leq ||f-\lambda g||_{X'}\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

e portanto,

$$\sup_{\substack{g(y)=0\\ ||y||\leq 1}} |f(y)| \leq ||f-\lambda g||_{X'}\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Pelo o Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional $\tilde{f} \in X'$ tal que $\tilde{f}(y) = f(y)$ para todo $y \in \ker g$ e

$$\sup_{\substack{g(y)=0\\ ||y||\leq 1}} |f(y)| = ||\tilde{f}||_{X'}.$$

Desde que $\ker(f-\tilde{f}) \subset \ker g$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f - \tilde{f} = \lambda g$ e portanto obtemos

$$\sup_{\substack{g(y)=0\\ ||y||\leq 1}} |f(y)| = ||\tilde{f}||_{X'} = ||f-\lambda g||_{X'}.$$

■

**Proposição 3** *: Sejam $X$ um espaço normado, $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X : \psi(v) = 1\}$. Se $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V$, então*

$$||\varphi'(u)||_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)||_{X'}.$$

**Demonstração:**

É conseqüência imediata do Lema 17.

■

**Observação 3** *: $u$ é ponto crítico de $\varphi\Big|_V$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi'(u) = \lambda\psi'(u).$$

**Definição 5** *: Sejam $X$ um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que a seqüência $(u_n) \subset X$ é Palais-Smale de nível $c$ para $\varphi$ se as seguintes convergências ocorrem:*

$$\varphi(u_n) \to c \quad e \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

*Dizemos que o funcional $\varphi$ satisfaz a condição Palais-Smale no nível $c$ se toda seqüência Palais-Smale de nível $c$ possui subseqüência convergente em $X$.*

# Apêndice B

# Resultados Básicos

**Teorema 4** *:* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$ *é um espaço de Banach reflexivo.*

**Demonstração:** Ver [5].

**Teorema 5** *: Seja* $(x_n)$ *uma seqüência fracamente convergente no espaço normado* $X$*, isto é, existe* $x \in X$ *tal que* $x_n \rightharpoonup x$*. Então:*
*1 - O limite fraco* $x$ *de* $(x_n)$ *é único;*
*2 - Qualquer subseqüência de* $(x_n)$ *converge fracamente para* $x$*;*
*3 - A seqüência* $(x_n)$ *é limitada em* $X$*.*

**Demonstração:** Ver [9].

**Teorema 6** *: Seja* $X$ *um espaço de Banach reflexivo. Se* $(x_n)$ *é uma seqüência limitada em* $X$*, então existem uma subseqüência* $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ *e* $x \in X$ *tais que*

$$x_{n_j} \to x \text{ em } X.$$

**Demonstração:** Ver [5].

**Teorema 7** *(da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja* $(f_n)$ *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$*. Suponhamos que:*
*(a)* $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* $\Omega$*;*
*(b) Existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
*Então* $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

**Demonstração:** Ver [3].

**Lema 18** *: Sejam $(f_n)$ uma seqüência de funções em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ tal que*
*(a) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\Omega$.*
*(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em $\Omega$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

**Demonstração:** Ver [5].

**Lema 19** *(de Brézis-Lieb): Sejam $\Omega$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponhamos que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\Omega$ e que exista $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p dx \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Então*

$$\int_\Omega f_n \varphi dx \to \int_\Omega f \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

*onde* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

**Demonstração:** Ver [8].

**Teorema 8** *(de Brézis-Lieb): Seja $\Omega$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se*
*(a) $(u_n)$ é limitada em $L^p(\Omega)$;*
*(b) $u_n \to u$ q.t.p. em $\Omega$,*
*então $|u_n|_p^p = |u|_p^p + |u_n - u|_p^p + o_n(1)$.*

**Demonstração:** Ver [15].

**Lema 20** *(Desigualdade de Young): Sejam $p$ e $q$ números reais satisfazendo $1 < p < +\infty$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então, para todos $A$ e $B$ não-negativos e para todo $\epsilon$ positivo, vale a desigualdade*

$$AB \leq C(\epsilon)A^p + \epsilon B^q$$

**Demonstração:** Ver [7].

**Teorema 9** *(Desigualdade de Hölder): Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < +\infty$ e $(1/p) + (1/q) = 1$. Então $fq \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega fgdx \leq ||f||_p||g||_q$$

**Demonstração:** Ver [3].

**Teorema 10** *(do Valor Intermediário): Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

**Demonstração:** Ver [10].

**Teorema 11** *: Se $X$ é um espaço normado de dimensão finita, então todas as normas em $X$ são equivalentes.*

**Demonstração:** Ver [9].

**Teorema 12** *: Seja $X$ um espaço normado de dimensão finita. Então para todo $M \subset X$ temos que $M$ compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

**Demonstração:** Ver [9].

**Teorema 13** *: Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos e consideremos uma aplicação $T : X \to Y$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
*(i) $T$ é contínua;*
*(ii) Se $A$ é aberto em $Y$, então $T^{-1}(A)$ é aberto em $X$;*
*(iii) Se $F$ é fechado em $Y$, então $T^{-1}(F)$ é fechado em $X$.*

**Demonstração:** Ver [9].

**Teorema 14** *: Sejam $X$ e $Y$ espaços métricos e $T : X \to Y$ uma aplicação contínua. Então a imagem $T(M)$ de um conjunto compacto $M \subset X$ é um subconjunto compacto de $Y$.*

**Demonstração:** Ver [9].

**Teorema 15** *(Princípio de Concentração e Compacidade de Lions): Seja* $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *uma seqüência tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*. Suponhamos que*

$$\nu_n = |u_n|^{p^*} \to \nu \text{ e } \mu_n = |\nabla u_n|^p \to \mu$$

*no sentido das medidas de Radon, onde* $\nu$ *e* $\mu$ *são medidas limitadas e não-negativas sobre* $\mathbb{R}^N$*. Então:*

*1- Existe um conjunto* $J$ *no máximo enumerável, duas famílias* $\{\nu_j\}_{j\in J}$ *e* $\{\mu_j\}_{j\in J}$ *de números não-negativos e uma família de pontos* $\{x_j\}_{j\in J}$ *do* $\mathbb{R}^N$ *tais que*

$$\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}$$

*onde* $\delta_{x_j}$ *é a medida de Dirac de massa 1 concentrada em* $x_j \in \mathbb{R}^N$*.*

*2-* $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}$ *tal que* $S\nu_j^{p/p^*} \leq \mu_j$*, para todo* $j \in J$*, onde* $S$ *é a melhor constante de Sobolev na imersão* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$*. Em particular* $\sum_{j\in J} \nu_j^{p/p^*} < +\infty$*.*

**Demonstração:** Ver [8].

**Lema 21** *(de Deformação): Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $\varphi, \psi \in C^1(X, \mathbb{R})$*,* $V = \{v \in X : \psi(v) = 1\}$*,* $S \subset V$*,* $c \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon, \delta > 0$ *tais que*

$$||\varphi'(u)||_* \geq 8\varepsilon/\delta \ , \ \forall u \in \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

*Então existe* $\eta \in C([0,1] \times V, V)$ *tal que*

*(i)* $\eta(t,u) = u$ *se* $t = 0$ *ou se* $u \notin \varphi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\varepsilon}$*;*

*(ii)* $\eta(1, \varphi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\varepsilon}$*;*

*(iii)* $\varphi(\eta(., u))$ *é não-crescente para todo* $u \in V$*.*

**Demonstração:** Ver [15].

**Teorema 16** *(Princípio Variacional de Ekeland): Sejam* $X$ *um espaço de Banach,* $G \in C^1(X, \mathbb{R})$ *tal que* $G'(v) \neq 0$ *para todo* $v \in V = \{v \in X : G(v) = 1\}$*,* $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ *limitado inferiormente em* $V$*,* $v \in V$ *e* $\varepsilon, \delta > 0$*. Se*

$$F(v) \leq \inf_V F + \varepsilon,$$

*então existe* $u \in V$ *tal que*

$$F(u) \leq \inf_V F + 2\varepsilon \ \ , \ \ \min_{\lambda\in\mathbb{R}} ||F'(u) - \lambda G'(u)|| \leq 8\varepsilon/\delta \ \ , \ \ ||u - v|| \leq 2\delta.$$

**Demonstração:** Ver [15].

# Apêndice C

# O Grau Topológico de Brower

Neste apêndice estudaremos os principais resultados sobre o grau topológico de Brower.

## C.1 Definição do Grau

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são $k$ vezes diferenciáveis em $\Omega$, tal que estas funções e todas as suas derivadas de ordem $k$ podem ser extendidas continuamente para $\overline{\Omega}$.

Seja $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Recorde que $f'(x) \in L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e logo, pode ser representado por uma matrix $n \times n$.

Seja $S$ o conjunto de todos os pontos críticos de $f$.

**Definição 6** *: Sejam $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, definimos o grau topológico de Brower da aplicação $f$ em relação a $\Omega$ no ponto $b$ como sendo o número inteiro*

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0 & , se\ f^{-1}(b) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) & , se\ f^{-1}(b) \neq \emptyset \end{cases},$$

*onde $sgn$ é a função sinal que é definida por*

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

*e $J_f$ representa a matrix jacobiana de $f$.*

Observemos que se $d(f,\Omega,b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = b$.

Gostaríamos agora de estender a definição de grau para funções que são apenas contínuas em $\overline{\Omega}$. Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares. Iniciaremos mostrando outra forma de se calcular o grau.

**Proposição 4** *: Seja $f \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, existe $\varepsilon_0$ tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$d(f,\Omega,b) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-b)J_f(x)dx, \tag{C.1}$$

*onde $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função $C^\infty$ cujo suporte está contido na bola $B_\varepsilon(0)$ e tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1 \tag{C.2}$$

**Demonstração:**

Se $f^{-1}(b) = \emptyset$, então tomemos $\varepsilon_0 < \rho(b, f(\overline{\Omega}))$, onde $\rho(x,A)$ denota a distância do ponto $x$ ao conjunto $A$. Se $\varphi_\varepsilon$ satisfaz a condição acima, então temos que $\varphi_\varepsilon(f(x)-b) = 0$ e logo, (C.1) é verdadeira.

Tomemos agora $f^{-1}(b) = x_1, x_2, ..., x_m$. Para cada $1 \leq i \leq m$, temos que $J_f(x_i) \neq 0$, e mais, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_i$ de $x_i$ e uma vizinhança $\mathcal{V}_i$ de $b$ tal que as $\mathcal{U}_i$ são disjuntas duas a duas e

$$f|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$$

é um homeomorfismo. Além disso, no interior dessas vizinhanças se necessário, podemos supor que $J_f|_{\mathcal{U}_i}$ tenha sinal constante. Agora, tomemos $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B_{\varepsilon_0}(b) \subset \bigcap_{i=1}^m \mathcal{V}_i.$$

Seja $W_i = f^{-1}(B_{\varepsilon_0}(b)) \cap \mathcal{U}_i$. Então, os $W_i$ são disjuntos dois a dois e $J_f$ tem sinal constante em cada um deles. Daí, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, como $\varphi_\varepsilon(f(x)-b) = 0$ fora dos $W_i$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x)-b)J_f(x)dx &= \sum_{i=1}^m \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x)-b)J_f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^m sgn(J_f(x_i)) \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x)-b)|J_f(x)|dx \\
&= \sum_{i=1}^m sgn(J_f(x_i)) \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(y)dy
\end{aligned}$$

por uma mudança de variável em cada $W_i$ e por (C.2), o lado direito é exatamente $d(f, \Omega, b)$.

■

Usaremos a fórmula (C.1) para provar que o grau permanece estável quando $b$ e $f$ são ligeiramente perturbadas. Para isto precisamos do seguinte resultado técnico.

**Lema 22** *: Seja $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-1})$ e*

$$B_i = det(\partial g, ..., \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, ..., \partial_n g).$$

*Então*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \partial_i B_i = 0. \tag{C.3}$$

**Demonstração:**

Seja $1 \leq i \leq N$ e $C_{ii} = 0$. Se $j < i$ defina

$$C_{ij} = det(\partial_1 g, ..., \partial_{j-1}, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g, ..., \partial_{i-1} g, \partial_{i+1}, ..., \partial_N g),$$

e se $j > i$, defina

$$C_{ij} = det(\partial_1 g, ..., \partial_{i-1}, \partial_{i+1} g, ..., \partial_{j-1} g, \partial_{ij} g, \partial_{j+1} g ..., \partial_N g).$$

Então, $\partial_i B_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}$, pela regra de diferenciação de determinantes. Assim, o lado esquerdo de (C.3) será igual a

$$\sum_{i,j=1}^{n} (-1)^i C_{ij}.$$

Como $g \in C^2$, $\partial_{ij} g = \partial_{ji} g$ e mais, pela propriedade dos determinantes relacionada com a transposição de colunas, vemos que

$$C_{ij} = (-1)^{j+i-1} C_{ji}$$

e o Lema está demonstrado.

■

**Lema 23** *: Seja $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Seja $A_{ij}(x)$ o cofator da entrada $\partial_i f_j(x)$ em $J_f(x)$. Então, para todo $1 \leq j \leq N$,*

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij} = 0.$$

**Demonstração:**

Lembrando que $A_{ij}$ é dada por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(\partial_l f_k)_{k\neq j, l\neq i},$$

basta tomar $j$ fixo, e aplicar o lema anterior para

$$g = (f_1, ..., f_{j-1}, j_{j+1}, ..., f_N)$$

para obter o resultado desejado.

■

O Lema anterior é basicamente uma consequência do fato de que a ordem de derivação é irrelevante para funções $C^2$. Por exemplo, se $N = 2$, então

$$A_{11} = \partial_2 f_2, A_{21} = -\partial_1 f_2$$

$$A_{12} = -\partial_2 f_1, A_{22} = \partial_1 f_1,$$

e verificamos que, se $f \in C^2$,

$$\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{21} = \partial_1 A_{12} + \partial_2 A_{22} = 0.$$

**Proposição 5** *: Seja $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$, $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) > 0$ e $b_i \in B_{\rho_0}(b)$ para $i = 1, 2$. Se $b_i \notin f(S)$, temos que*

$$d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_2).$$

**Demonstração:**

Claramente vamos supor, $b_i \notin f(\partial\Omega)$. Assim, por hipótese, o grau $d(f, \Omega, b_i)$ está bem definido para $i = 1, 2$. Seja

$$\delta < \rho_0 - |b - b_i| \ , \ i = 1, 2.$$

Então, existe $\varepsilon < \delta$ tal que

$$d(f, \Omega, b_i) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - b_i) J_f(x) dx \ , \ i = 1, 2,$$

onde $\varphi_\varepsilon$ satisfaz as mesmas condições da proposição 4. Então,

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(y - b_2) - \varphi_\varepsilon(y - b_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \\ &= (b_1 - b_2) \int_0^1 \nabla \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \\ &= div(w(y)), \end{aligned}$$

onde

$$w(y) = \left(\int_0^1 \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2))dt\right)(b_1 - b_2).$$

Agora, se $y \in f(\partial\Omega)$,

$$\begin{aligned} |y - (1-t)b_1 - tb_2| &= |(y-b) + (1-t)(b-b_1) + t(b-b_2)| \\ &> \rho_0 - (1-t)(\rho_0 - \delta) - t(\rho_0 - \delta) \\ &= \delta > \varepsilon. \end{aligned}$$

Como o suporte de $\varphi_\varepsilon$ esta contido na bola $B_\varepsilon(0)$, teremos que $w(y) = 0$ para $y \in f(\partial\Omega)$. Agora, para $1 \leq i \leq N$, definimos

$$v_i = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^N w_j(f(x))A_{ij}(x), & x \in \overline{\Omega} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Pelas considerações feitas anteriormente, $v_i = 0$, sobre $\partial\Omega$. Agora,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_i}A_{ij}(x) + \sum_{j=1}^N w_j(f(x))\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x).$$

Assim,

$$div(v(x)) = \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x))\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i}A_{ij}(x)\right) + \sum_{j=1}^N w_j(f(x))\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x)\right).$$

Pelo Lema 23, o segundo termo do lado direito é igual a zero. Notemos que, pela definição dos $A_{ij}$,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)A_{ij}(x) = \delta_{jk}J_f(x).$$

Assim,

$$div(v(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f w_j}{\partial x_i}(f(x))J_f(x) = div(w(f(x))J_f(x).$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,b_2) - d(f,\Omega,b_1) &= \int_\Omega div(w(f(x))J_f(x)dx \\ &= \int_\Omega div(v(x))dx = 0, \end{aligned}$$

visto que $v$ é igual a zero sobre $\partial\Omega$.

■

Seja $f \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho$ como na proposição anterior. Como, pelo teorema de Sard, os valores singulares de $f$ possuem medida nula, existem valores regulares em

$B_{\rho_0}(b)$ e o grau é o mesmo em todos estes pontos. Somos assim conduzidos a próxima definição.

**Definição 7** : *Seja $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$, e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$. Definimos grau da aplicação $f$ em relação a $\Omega$ no ponto $b$ no que segue-se:*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega, b'),$$

*onde $b'$ é algum valor regular em $B_{\rho_0}(b)$.*

**Proposição 6** : *Seja $f, g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Então, existe $\varepsilon = \varepsilon(f, g, \Omega)$ tal que, para $0 < |t| < \varepsilon$,*

$$d(f + tg, \Omega, b) = d(f, \Omega, b). \tag{C.4}$$

**Demonstração:**

**1º caso:** Seja $b \notin f(\overline{\Omega})$. Então, $\tilde{\rho} = \rho(b, f(\overline{\Omega})) > 0$. Tomemos $\varepsilon = \tilde{\rho}/2||g||_\infty$, onde $||.||_\infty$ denota a norma em $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Se $|t| < \varepsilon$, então $\rho(b, f - tg(\overline{\Omega})) \geq \tilde{\rho}/2 > 0$ e assim $b \notin (f + tg)(\overline{\Omega})$. Portanto, (C.4) se verifica, visto que todos os lados se anulam.

**2º caso:** Seja $b \notin f(S)$ e $f^{-1}(b) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ tal que $J_f(x_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq m$. Definamos

$$h(t, x) = f(x) + tg(x) - b.$$

Então, para $1 \leq i \leq m$,

$$h(0, x_i) = 0,$$

$$\partial_x h(0, x_i) = f'(x_i)$$

e $f'(x_i)$ é invertível, por suposição. Logo, pelo Teorema da função implícita, existe uma vizinhança $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ de 0 em $\mathbb{R}$, vizinhanças $\mathcal{U}_i$ de $x_i$ em $\Omega$ disjuntas duas a duas, e funções $\varphi_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon) \to \mathcal{U}_i$ tais que as soluções de $h(t, x) = 0$ em $(-\varepsilon_i, \varepsilon) \times \mathcal{U}_i$ são da forma $(t, \varphi_i(t))$. Além disso, para diminuir as vizinhanças, se necessário, podemos garantir que $sgn(J_{f+tg}(x)) = sgn(J_f(x_i))$ em cada $\mathcal{U}_i$. Agora tomemos

$$\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i.$$

A relação (C.4) será consequência da definição de grau para o caso regular.

**3º caso:** Assumamos agora que $b \in f(S)$. Seja $\rho_0$ a distância de $b$ a $f(\partial\Omega)$. Tomemos $b_1 \in B_{\rho_0/3}(b)$ tal que $b_1$ é regular e existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $0 < |t| < \varepsilon_0$,

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b).$$

Agora tomemos $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \rho_0/3\|g\|_\infty\}$.

Claramente, $b \notin (f+tg)(\partial\Omega)$ para $|t| < \varepsilon$. De fato, $\rho(b, (f+tg)(\partial\Omega)) \geq 2\rho_0/3$ quando

$$|b - b_1| < \rho_0/3 \leq \frac{1}{2}\rho(b, (f + tg)(\partial\Omega)).$$

Consequentemente,

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f + tg, \Omega, b)$$

e a demonstração está completa.

■

Agora estamos em condições de definir o grau para toda função contínua. Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$. Podemos sempre encontrar $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $||g - f||_\infty < \rho_0/2$. Então, $b \notin g(\partial\Omega)$ e o grau esta bem definido. Se $g_1$ e $g_2$ são funções satisfazendo a condição acima, tome $\tilde{g} = g_1 - g_2$. Então, para $0 < t < 1$, temos $||f - (g_2 - t\tilde{g})||_\infty < \rho_0$ e, pela proposição 6, a função

$$d(t) = d(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b)$$

é localmente constante, e portanto, pela conexidade de $[0, 1]$, é constante neste intervalo. Assim,

$$d(g_1, \Omega, b) = d(g_2, \Omega, b).$$

Este comentário motiva a próxima definição.

**Definição 8** *: Seja $f, b$ e $\rho_0$ como acima. Então, o grau da aplicação $f$ em relação a $\Omega$ no ponto $b$ é dado por*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

*para algum $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $||f - g||_\infty < \rho_0/2$.*

**Proposição 7** *: Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0). \tag{C.5}$$

**Demonstração:**

Se $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) = \rho(0, (f-b)(\partial\Omega))$ e se $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $||g - f||_\infty < \rho_0/2$, então

$$||(g-b) - (f-b)||_\infty = ||g - f||_\infty < \rho_0/2$$

e mais, por definição,

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) \;\text{ e }\; d(f-b, \Omega, 0) = d(g-b, \Omega, 0)).$$

Se $b$ é um valor singular de $g$, então podemos encontrar um valor regular $b_1$ de $g$ tal que

$$|b - b_1| < \rho(b, g(\partial\Omega))/2$$

e

$$d(g - b_1, \Omega, 0) = d(g - b, \Omega, 0) \;\text{ e }\; d(g, \Omega, b_1) = d(g, \Omega, b).$$

Como $b_1$ é um valor regular de $g$, então

$$d(g, \Omega, b_1) = d(g - b_1, \Omega, 0)$$

e a demonstração esta completa.

■

## C.2 Propriedades do Grau Topológico de Brower

Nesta seção demonstraremos algumas propriedades do grau topológico de Brower.

**Teorema 17** *(Continuidade): Sejam $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $f$ na topologia de $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que, para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

**Demonstração:**

Definamos

$$\mathcal{U} = \{g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N) : \; ||f - g||_\infty < \rho_0/4\}$$

onde $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) \geq 3\rho_0/4$. Assim, $b \notin g(\partial\Omega)$ e o grau está bem definido. Seja $h \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $||f - h||_\infty < \rho/8$. Então,

$$||g - h|| < \frac{3}{8}\rho_0 \leq \frac{1}{2}\rho(b, g(\partial\Omega)).$$

Portanto, por definição,

$$d(g, \Omega, b) = d(h, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

■

**Teorema 18** *(Invariância do grau por Homotopia): Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1]; \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(.,t), \Omega, b)$ é independente de $t$.*

**Demonstração:**

Pelo passo anterior, $d(H(.,t), \Omega, b)$ é localmente constante, logo, contínuo e portanto constante em $[0,1]$ por conexidade.

■

**Teorema 19** *: O grau é constante, com relação a $b$ em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.*

**Demonstração:**

Em virtude de (C.5), $d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0)$ e mais, se $|b - b_1|$ é pequeno, então $d(f - b, \Omega, 0) = d(f - b_1, \Omega, 0)$. Assim, o grau é localmente constante e, logo, contínuo e constante sobre componente conexa.

■

**Teorema 20** *(Aditividade): Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com $\Omega_1$, $\Omega_2$ abertos, disjuntos e limitados e seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Se $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, então temos que*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

**Demonstração:**

Seja $\rho_0$ como no teorema 17 e $g$ uma função de classe $C^2$ tal que $||f - g||_\infty < \rho_0/2$. Então, temos que

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b)$$

$$d(g, \Omega_i, b) = d(f, \Omega_i, b), i = 1, 2.$$

Agora, $B = B_{\rho_0/2}(b)$ é conexo e está contido em $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega)$, assim como em $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega_i)$ para $i = 1, 2$, e portanto, em uma componente conexa para cada um destes conjuntos. Pelo teorema de Sard, existe $c \in B$ tal que este é um valor regular de $g$ e mais,

$$d(g,\Omega,b) = d(g,\Omega,c) \text{ e } d(g,\Omega_i,c) = d(g,\Omega_i,b)$$

para $i = 1, 2$. Como $g$ é de classe $C^2$ e $c$ é regular, segue imediatamente da definição de grau que

$$d(g,\Omega,c) = d(g,\Omega_1,c) + d(g,\Omega_2,c)$$

e o resultado está demonstrado.

■

**Teorema 21** *(Normalização): Seja $I$ a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, isto é, $I : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ é dada por $I(x) = x$. Então,*

$$d(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1 \ se \ b \in \Omega \\ 0 \ se \ b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

**Demonstração:**

Se $b \in \Omega$, então

$$d(I,\Omega,b) = \sum_{x \in I^{-1}(b)} sgn(J_I(x)) = sgn(J_I(x)).$$

Como $J_I(x) = 1 > 0$, temos que

$$d(I,\Omega,b) = 1.$$

Agora, se $b \notin \overline{\Omega}$, temos

$$d(I,\Omega,b) = \sum_{x \in I^{-1}(b)} sgn(J_I(x)) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(I(x) - b) J_I(x) dx$$

Notemos que $\{x \in \Omega : |I(x) - b| < \varepsilon\} = \emptyset$ e portanto,

$$\int_\Omega \varphi_\varepsilon(I(x) - b) J_I(x) dx = \int_{\{x \in \Omega : |I(x) - b| < \varepsilon\}} \varphi_\varepsilon(I(x) - b) J_I(x) dx = 0.$$

Logo,

$$d(I,\Omega,b) = 0.$$

■

**Teorema 22** *(Existência de Solução): Sejam $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Se $d(f,\Omega,b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = b$.*

**Demonstração:**

Suponhamos por contradição que $b \notin f(\overline{\Omega})$ e seja $\rho_0 = \rho(b, f(\overline{\Omega}))$. Se $g$ é de classe $C^2$ tal que $||f - g||_\infty < \rho_0/2$, então $b \notin g(\overline{\Omega})$. Assim, como $b$ é um valor regular de $g$, temos que

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) = 0,$$

o que é uma contradição.

■

**Teorema 23** *(Dependência na Fronteira): Suponhamos que $f = g$ em $\partial\Omega$ e $f, g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Então, tem-se que*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

*para todo $b \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$.*

**Demonstração:**

Consideremos a aplicação $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ dada por

$$H(x, t) = t.f(x) + (1 - t).g(x).$$

Observemos que

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]).$$

De fato, pois caso contrário existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t \in [0, 1]$ tal que $b = H(x_0, t)$. Desde que, por hipótese, $f = g$ em $\partial\Omega$, temos que, para todo $x \in \partial\Omega$

$$H(x, t) = t.f(x) + (1 - t).f(x) = f(x) = g(x).$$

Considerando $x = x_0$, segue que

$$b = H(x_0, t) = f(x_0)$$

e isso contradiz o fato de que $b \notin f(\partial\Omega)$.

Sendo o grau topológico de Brower invariante por homotopia, concluimos que

$$d(H(., 0), \Omega, b) = d(H(., 1), \Omega, b),$$

de onde segue que

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b).$$

■

# Bibliografia


[1] ALVES, C. O. Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian, **Nonlinear Analysis.** 51, 1187-1206, 2002.

[2] AUBIN, T. Problems isoperimetriques et espaces of Sobolev, **J. Differential Geom.** 11, 573-598, 1976.

[3] BARTLE, R. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure.** New York: John Wiley and Sons, 1995.

[4] BENCI, V.; CERAMI, G. Existence of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ em $\mathbb{R}^N$, **J. Funct. Anal.** 88, 91-117, 1990.

[5] BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle, théorie et applications.** Paris: Dunod, 2005.

[6] BREZIS, H.; LIEB, E. A Relation between pointwise convergence of functions and convergence of functional, **Proc. Amer. Math. Soc.** 88, 486-490, 1983.

[7] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[8] KAVIAN, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.** Université de Nancy, 1993.

[9] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** New York: John Wiley and Sons, 1989.

[10] LIMA, E. L. **Curso de Análise, v.1.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[11] LIONS, P. L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations: the limit case, **Rev. Mat. Iberoamericana.** 1, 145-201, 1985.

[12] STRUWE, M. A global compactness result for elliptic boundary value problem involving limiting nonlinearities, **Math. Z.** 187, 511-517, 1984.

[13] STRUWE, M. **Variational Methods.** Berlin: Springer, 1990.

[14] TALENTI, G. Best constant in Sobolev inequality, **Ann. Math.** 110, 353-372, 1976.

[15] WILLEM, M. **Minimax theorems.** Boston: Birkhäuser, 1996.