

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Manoel Lucival da Silva Oliveira

EQUAÇÃO NÃO LINEAR DA VIGA COM DISSIPACÃO INTERNA

Belém

2009

Manoel Lucival da Silva Oliveira

EQUAÇÃO NÃO LINEAR DA VIGA COM DISSIPACÃO INTERNA

Dissertação de Mestrado apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática e Estatística. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Universidade Federal do Pará. Área de concentração: Equações diferenciais parciais. Orientador Prof. Dr. Ducival Cavalho Pereira.

Belém

2009

Oliveira, Manoel Lucival da Silva

Equação não linear da viga com dissipação interna/(Manoel Lucival da Silva Oliveira); orientador, Ducival Carvalho Pereira.-2009.

51 f. 28 cm

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém, 2009.

1. Equações diferenciais parciais. I. Pereira, Ducival Carvalho, orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e estatística. III. Título.

CDD 22. ed. 515.353

Manoel Lucival da Silva Oliveira

EQUAÇÃO NÃO LINEAR DA VIGA COM DISSIPACÃO INTERNA

Esta dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 17 de abril de 2009

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Coordenador do PPGME - UFPA

Banca Examinadora

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira (**Orientador**)
Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGME

Prof. Dr. João dos Santos Protázio (**Membro**)
Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGME

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (**Membro**)
Universidade Federal do Pará – UFPA – PPGME

Aos meus familiares, professores, orientador e amigos pelo constante apoio e incentivo, que ao longo desta jornada me ajudaram neste trajeto de dificuldades, lutas e conquistas.

AGRADECIMENTOS

À Deus pai, fonte de vida e sabedoria, que sempre esteve ao meu lado, me dando força necessária para concluir este trabalho.

Aos meus pais, Terezinha e Josué, que sempre me inspiraram, sem eles não seria possível este momento.

As minhas irmãs e namorada: Alessandra, Lucivânia, Marta e Elizama, que nunca deixaram de acreditar em mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira, que compartilhou comigo seu conhecimento, sua atenção e humildade, sempre esclarecendo minhas dúvidas, para condução deste trabalho.

Aos colegas de curso, que me acompanharam e ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas, em especial: Manoel Jeremias, meu amigo na graduação, especialização e mestrado, que sempre esteve disposto em me ajudar.

A Universidade Federal do Pará.

Ao professor Mauro, pela forma como coordena o nosso programa.

A todos que de modo direto ou indireto contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho vamos estudar a existência, unicidade e comportamento assintótico da solução do problema misto **(P)**

$$(\mathbf{P}) \left\{ \begin{array}{l} u''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - M\left(x, t, \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx\right) \Delta u(x, t) + \delta u'(x, t) = 0 \text{ em } Q; \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \text{ em } \sum = \partial\Omega \times]0, T[; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega; \\ u'(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Para a existência de solução global utilizamos o método de Faedo-Galerkin, o teorema de compacidade de Aubin-Lions e desigualdades importantes da Análise Funcional, para unicidade usaremos as idéias de Ladyzhenskaya-Visik[9] e para o decaimento exponencial o método da energia.

PALAVRAS-CHAVE: Existência de solução global fraca, Unicidade de solução global fraca e Comportamento assintótico.

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness and asymptotic behaviour of global weak solutions for the mixed problem (P)

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} u''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - M\left(x, t, \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx\right) \Delta u(x, t) + \delta u'(x, t) = 0 \text{ em } Q; \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \text{ em } \sum = \partial\Omega \times]0, T[; \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega; \\ u'(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

For the existence we used Faedo-Galerkin Method, Aubin Lions theorem of compctness, important inequalities of Functional Analysis, for the uniqueness we used the ideas of Ladyzhenskaya-Visik[9] and for the asymptotic behavior we used the energy method.

KEYWORDS: Existence global weak solution, Uniqueness global weak solution and Asymptotic behavior.

Introdução

Woinowsky-krieger [21] em 1950 introduziu um modelo matemático para o movimento transversal de uma viga extensível de comprimento L , cujos extremos estavam presos a uma distância fixa

$$(I) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\beta + \int_0^L u_\xi^2(\xi, t) d\xi \right) \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0,$$

sendo α uma constante positiva, β uma constante não necessariamente positiva e o termo não linear representa a mudança na tensão da viga devido a sua extensibilidade. Este modelo também foi estudado por Dickey [5], Ball [2], [3] e por Menzala [15] que estudou a equação (I) com $x \in \mathbb{R}^n$ e a não linearidade do tipo

$$\left[\beta + M \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \right) \right] (-\Delta u),$$

sendo M uma função real com $M(\lambda) \geq m_0 > 0$, $\forall \lambda \geq 0$. A formulação abstrata de (I) é representada pela equação

$$(II) \quad u'' + \alpha A^2 u + M(|A^{1/2}u|^2) Au = 0,$$

sendo A um operador auto-adjunto não limitado de um espaço de Hilbert H , com a norma $|\cdot|$, mostra-se que existe A^{-1} totalmente definido em H , sendo A^{-1} compacto e M é uma função real.

Este modelo foi estudado por Medeiros [13] supondo que $M \in C^1[0, \infty[$ com $M(\lambda) \geq m_0 + m_1 \lambda$, $\forall \lambda \geq 0$ e m_0, m_1 constantes positivas. Considerando a equação (II) com um termo dissipativo, isto é,

$$(III) \quad u'' + \alpha A^2 u + M(|A^{1/2}u|^2) Au + \delta u' = 0,$$

sendo δ uma constante positiva. Brito[7] e Biler [6] estudaram também a equação

$$(III) \text{ considerando } M \in C^1[0, \infty[\text{ e } M(\lambda) \geq m_0 + m_1 \lambda, \forall \lambda \geq 0 \quad m_1 > 0 \text{ e } m_0 > -\lambda_1$$

onde λ_1 é o primeiro valor próprio de $A^2 u - \lambda A u = 0$.

Pereira [18] estudou a existência, unicidade comportamento assintótico das soluções do problema misto associado a equação

$$(IV) \quad K u'' + A^2 u + M(|A^{1/2}u|^2) Au + u' = 0,$$

sendo A um operador definido nas hipóteses (II), K um operador linear simétrico definido

em todo H com $(Ku, u) \geq 0$, $\forall u \in H$ e M uma função contínua com $M(\lambda) \geq -\beta$, $0 < \beta < \lambda_1$, sendo que λ_1 é o primeiro valor próprio de $A^2u - \lambda Au = 0$. Neste trabalho estamos considerando o termo não linear, que representa a mudança de tensão da viga devido sua extensibilidade, dependendo da variável espacial e do tempo. Nosso trabalho é baseado no artigo de J. Límaco, H. R. Clark e A. J. Feitosa ver [10] que estudam a equação de evolução da viga com coeficientes variáveis. No entanto, consideraremos uma função M mais geral que no trabalho dos autores citados, conforme Pereira[18].

Consideremos o problema misto (P), abaixo, para a equação da viga n -dimensional, onde nosso objetivo é analisar a existência e unicidade de solução global fraca e comportamento assintótico.

$$(P) \begin{cases} u''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - M\left(x, t, \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx\right) \Delta u(x, t) + \delta u'(x, t) = 0 \text{ em } Q \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \text{ em } \sum = \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega \times [0, T[$, com $T > 0$ um cilindro com fronteira lateral, $|\nabla u(x, t)|$ é a norma no $\mathbb{R}^n$ do vetor $\nabla u(x, t)$. Por $'$ denotaremos $\frac{\partial}{\partial t}$, enquanto ν é o vetor normal unitário exterior para $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$, sendo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ a derivada da norma e δ um parâmetro positivo. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma em $L^2(\Omega)$ com produto interno e $\cdot$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^n$, enquanto $|\cdot|$ representa a norma Euclidiana em $\mathbb{R}$.

Inicialmente demonstramos a existência de solução global fraca, onde utilizamos o método de Faedo-Galerkin, o teorema de compacidade de Aubin-Lions e desigualdades importantes da Análise Funcional. Para a unicidade usamos as idéias de Ladyzhenskaya-Visik[9] e para o decaimento exponencial o método da energia.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaços Métricos	5
1.1.1 Espaços Normados	5
1.1.2 Espaços Métricos Completos	6
1.1.3 Espaços de Banach	6
1.1.4 O Espaço Dual	7
1.2 O Espaço $L^p(\Omega)$	7
1.3 Teoria das Distribuições Escalares	10
1.3.1 Espaços das Funções Testes	10
1.3.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	11
1.3.3 Espaços de Sobolev	14
1.3.4 Distribuições Vetoriais	18
1.3.5 Funções de Valores Vetoriais Fracamente e Fortemente Mensuráveis	19
1.3.6 Distribuições Vetoriais	22
1.3.7 O Teorema Espectral	22
1.4 Outros Resultados Importantes	23
2 Existência de solução global fraca	29
2.1 Hipóteses	30
2.2 Problema Aproximado	31
2.3 Estimativas	32
2.3.1 Passagem ao Limite	38
2.3.2 Condições iniciais:	40

3	Unicidade de solução global fraca	44
3.1	Unicidade	44
4	Decaimento exponencial	51
4.1	Decaimento exponencial	51
5	Conclusão	54
	Referências Bibliográficas	55

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições, conceitos e resultados que serão utilizados na resolução do nosso problema.

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1. Define-se uma métrica em um conjunto M , a função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que faz associar a cada par $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, denominado a distância de x a y . Para tal função, e considerando-se $x, y, z \in M$, devem ser satisfeitas as condições

1. $d(x, x) = 0$;
2. Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.1.1 Espaços Normados

Definição 1.1.2. Seja E um espaço vetorial real, uma norma é uma aplicação $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

1. $\|\varphi\| \geq 0$ para todo $\varphi \in E$ e $\|\varphi\| = 0 \iff \varphi = 0$;
2. $\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\|\varphi + \phi\| \leq \|\varphi\| + \|\phi\|$ para todo $\varphi, \phi \in E$.

Exemplo 1.1.1. Seja $L^1(a, b)$ o espaço de todas as funções definidas sobre $[a, b]$ e integráveis a Lebesgue. É fácil verificar que este é um espaço normado munido da seguinte norma

$$\|\cdot\| : L^1(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx.$$

1.1.2 Espaços Métricos Completos

Definição 1.1.3. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita de Cauchy no espaço métrico M , se dado $\varepsilon > 0$, de modo arbitrário, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Definição 1.1.4. Um espaço métrico é dito completo, quando toda sequência de Cauchy nele é convergente.

Exemplo 1.1.2. Seja $M = C(a, b)$ o espaço métrico das funções contínuas no intervalo $[a, b]$ com a métrica

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Podemos verificar que $C(a, b)$ é um espaço métrico completo.

1.1.3 Espaços de Banach

Definição 1.1.5. Um espaço normado é dito um espaço de Banach, se o mesmo é completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy converge em E .

Vamos, a partir de agora, estender o conceito de convergência. O que faremos é enfraquecer nossa condição de convergência. Vejamos:

Se a sequência x_m é convergente, então para toda função contínua φ teremos que $\varphi(x_m)$ também é convergente. Definamos então uma condição mais fraca que a anterior. Em vez de exigir que a convergência se realize para toda função contínua, exigiremos apenas para as lineares e contínuas. Diremos dessa forma que uma sequência (x_n) converge fracamente para x , se $f(x_n)$ converge para $f(x)$, para todas as funções lineares e contínuas definidas nela. Este espaço é denominado espaço dual.

1.1.4 O Espaço Dual

Definição 1.1.6. (Espaço dual algébrico): O espaço dual de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é denotado por V' ou V^* e também é um espaço vetorial sobre o mesmo corpo uma vez definida as operações de soma e multiplicação por escalar como:

$$(\varphi + \phi)(x) = \varphi(x) + \phi(x)$$

$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha(\varphi(x)),$$

para todo $\varphi, \phi \in V^*$, com $\alpha \in \mathbb{K}$.

Proposição 1.1.1. Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, ela é limitada.

Demonstração:

Com efeito, usando a continuidade de f , temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon$. Isso significa que para cada $y \neq 0$, com $y \in E$, temos que $\frac{\delta}{\|y\|}y$ satisfaz a condição $\left\| \frac{\delta}{\|y\|}y \right\| \leq \delta$, daí então segue-se que

$$\left| f\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right) \right| \leq \varepsilon \implies |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|, \text{ donde concluimos que } f \text{ é uma função limitada.}$$

De maneira recíproca, vamos supor que f seja limitada. Agora iremos mostrar que f deve ser contínua. Como f é limitada então existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se:

$$\|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \text{ Basta tomar } \delta = \frac{\varepsilon}{C} \text{ e aplicar a linearidade de } f.$$

1.2 O Espaço $L^p(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$, os espaços denotados por $L^p(\Omega)$, são espaços vetoriais formados pelas classes de funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx$ é finito, ou seja

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensuráveis; } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

O espaço vetorial acima torna-se um espaço vetorial normado quando o dotamos com a seguinte norma

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$ é constituído das classes de funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são essencialmente limitadas, isto é

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável; } \exists M > 0, |u(x)| \leq M \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Antes de falarmos da norma neste espaço, faremos duas definições, uma de *supremo essencial* e a outra de *ínfimo essencial*. Para isto, consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $f \in L^\infty(\Omega)$, definimos

$$[f > k] = \{x \in \Omega; f(x) > k\}.$$

Esta notação pode ser estendida analogamente para $[f \leq k]$, $[f \geq k]$ e $[f < k]$. Chamamos de *supremo essencial* e *ínfimo essencial* respectivamente os seguintes números

$$\begin{aligned} \sup \text{ess } f &= \inf\{k; \mu([f > k]) = 0\}, \\ \inf \text{ess } f &= \sup\{k; \mu([f < k]) = 0\}. \end{aligned}$$

Assim, definimos a norma no espaço $L^\infty(\Omega)$, pela relação

$$\|u\|_\infty = \sup \text{ess } |u|,$$

sendo μ a medida em $\mathbb{R}^n$. O teorema seguinte estabelece algumas propriedades importantes dos espaços $L^p(\Omega)$ e pode-se encontrar sua demonstração em [1].

Teorema 1.2.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $1 \leq p \leq \infty$, então

- a) $L^p(\Omega)$ é espaço de Banach;
- b) Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo e uniformemente convexo;
- c) Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável.

Falaremos agora um pouco sobre o dual topológico de $L^p(\Omega)$. O dual topológico de um espaço normado X é o espaço vetorial de todas as formas lineares (funcionais lineares) contínuas definidas em X . Chamaremos daqui em diante ao dual topológico de um espaço normado X apenas de dual e o denotaremos por X' .

Enunciaremos a seguir o teorema da representação de Riesz, que relaciona todo elemento do dual de um espaço $L^p(\Omega)$ com um elemento do espaço $L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (neste caso temos q sendo o expoente conjugado de p ; quando $p = 1$, consideramos $q = \infty$ e vice-versa). A demonstração pode ser encontrada em [1], pág. 47.

Teorema 1.2.2. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in [L^p(\Omega)]'$, então existe $u \in L^q(\Omega)$, tal que

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} v(x)u(x) \, dx$$

para toda $v \in L^p(\Omega)$.

Lema 1.2.1. (Desigualdade de Young): Sejam a e b números reais e considere $0 < p, q \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$|a||b| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $|a|^p = |b|^q$.

Demonstração:

Se $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda \implies \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$. Se $\lambda - 1 < 0$ temos que

- $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1 \implies \varphi$ é decrescente;
- $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1 \implies \varphi$ é crescente.

Logo, φ é decrescente em $t = 1$. Isto significa que para $t \neq 1$, temos $\varphi(t) > \varphi(1)$.

Portanto, $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$

(a igualdade só vale se $t = 1$)

Se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por $\frac{a^q}{b^p}$. Por outro lado, se $b = 0$, o lema é trivial.

Lema 1.2.2. (Desigualdade de Hölder): Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e além disso

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Demonstração:

Os casos em que $p = 1$ ou $p = \infty$ seguem de modo imediato. Agora se $1 < p < \infty$ temos que

$$|u(x)||v(x)| \leq \frac{1}{p}|u(x)|^p + \frac{1}{q}|v(x)|^q, \text{ devido a desigualdade de Young.}$$

Dessa forma, temos que

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \, dx \leq \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{q}\|v\|_q^q,$$

mostrando portanto, que $u \cdot v \in L^1(\Omega)$. Substituindo u por λu , $\lambda > 0$, segue-se que

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|v\|_{L^q}^q.$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$, temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|u\|_{L^p}^{-1} \|v\|_{L^q}^{q/p}$ e o resultado segue.

Teorema 1.2.3. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja (f_n) , uma sequência de funções reais definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, integráveis tais que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, q.t.p em Ω . Se existe uma função $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, tal que para todo n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω , então

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Demonstração: Ver [5].

Outros espaços derivados dos espaços $L^p(\Omega)$ que são de grande importância em análise, são os espaços $L_{loc}^p(\Omega)$, que são constituídos das funções (classes de funções) $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tais que para todo compacto $K \subset \Omega$

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty.$$

Lema 1.2.3. Du Bois Raymond Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, com $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Então $u(x) = 0$ q.t.p. em Ω .

Demonstração: Ver [13].

Observação 1.2.1. Quando $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, isto é, um espaço de Banach, com um produto interno $(\cdot, \cdot)_2$ definido sobre ele e dado pela fórmula

$$(u, v)_2 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Observe que pela desigualdade de Hölder a integral acima é finita.

1.3 Teoria das Distribuições Escalares

1.3.1 Espaços das Funções Testes

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto, limitado e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em Ω com valores reais. Chamamos de suporte de f , ao conjunto denotado e definido por

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $\text{supp}(f)$ é o menor fechado fora do qual f se anula e valem as seguintes relações:

- 1) $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$;
- 2) $\text{supp}(fg) \subset \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g)$;
- 3) $\text{supp}(\lambda f) = \lambda \text{supp}(f), \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Com esta definição, fica claro que nem sempre o suporte de uma função é um subconjunto de seu domínio.

Definição 1.3.1. Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções vetoriais continuamente indefinidamente deriváveis em Ω , com suporte compacto contido em Ω .

Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω . Seja agora, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice de números inteiros não negativos. Representaremos a derivada parcial de uma função da seguinte maneira

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad D^0 u = u.$$

Definiremos a seguir a convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, que introduz uma topologia neste espaço, que fará com que possamos falar em funcional contínuo em $C_0^\infty(\Omega)$, importante para o conceito de Distribuição.

1.3.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.3.2. Seja (φ_n) uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que φ_n converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ e denotamos por

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{em} \quad C_0^\infty(\Omega). \quad (1.1)$$

Se existe um compacto $K \subset \Omega$, tal que $\text{supp}(\varphi), \text{supp}(\varphi_n) \subset K$ e para todo multi-índice α

$$D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi \quad \text{uniformemente em } K, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ ao espaço vetorial topológico formado por $C_0^\infty(\Omega)$ munido da convergência acima.

Exemplo 1.3.1. Sendo Ω limitado, existe uma imersão contínua $D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall p$ satisfazendo $1 \leq p < \infty$.

Demonstração:

De fato, dado $\varphi \in D(\Omega)$, tem-se que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica.

Para a continuidade, seja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $D(\Omega)$. Mostra-se que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

De fato, note que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Definição 1.3.3. Denomina-se distribuição escalar T sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que satisfaz as condições:

- i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

É importante observarmos da definição acima que uma distribuição é um elemento do espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Iremos denotar o espaço de todas as distribuições sobre Ω , por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e algumas vezes usaremos a convenção $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$. Não é difícil ver que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial. Para isso recordemos a definição de soma e produto por escalar definidos na álgebra linear para elementos do dual. Se $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \langle T + S, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle; \\ \langle \alpha T, \varphi \rangle &= \alpha \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Usando as propriedades de limite de sequência na reta teremos $T + S, \alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. É importante observar e pode ser visto com mais detalhes em [1], p. 38, que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e além disso $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.3.4. Uma função $u : (\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por L_1^{loc} , sendo representada por

$$u \in L_1^{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |u(x)| dx < \infty \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Vejamos abaixo um exemplo de distribuição.

Exemplo 1.3.2. Seja $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, definimos T_u pela fórmula

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

Observemos que T_u é um funcional e devido a unicidade da integral, está bem definido. Como

$$\begin{aligned} \langle T_u, \alpha \varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} u(x) (\alpha \varphi_1(x) + \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \alpha u(x) \varphi_1(x) dx + \int_{\Omega} u(x) \varphi_2(x) dx \\ &= \alpha \langle T_u, \varphi_1 \rangle + \langle T_u, \varphi_2 \rangle, \end{aligned}$$

então T_u é linear. Além disso, se $\varphi_n \rightarrow \varphi$, então $\text{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K \subset \Omega$, para algum K e daí

$$|\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |u(x)| dx.$$

Logo, quando $n \rightarrow \infty$, $\max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$ e portanto $|\langle T_u, \varphi_n - \varphi \rangle| \rightarrow 0$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_u, \varphi_n \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle.$$

A definição que daremos a seguir é a de derivada distribucional em $D'(\Omega)$, proposta por Sobolev, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $D'(\Omega)$.

Definição 1.3.5. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Definimos por

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha} \varphi \rangle,$$

a distribuição que chamamos de derivada de T , e denotamos por $D^{\alpha} T$, como

$$\langle D^{\alpha} T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 1.3.6. Seja (T_i) , uma sequência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que (T_i) converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando $i \rightarrow \infty$ e denotamos por

$$T_i \rightarrow T \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

se, e somente se,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle T_i, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uma aplicação bem concreta do conceito de distribuição escalar, encontra-se na definição de Espaços de Sobolev, que daremos a seguir.

1.3.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, apresentando fronteira regular τ . Observa-se que se $u \in L^p(\Omega)$, então u possui derivada de todas as ordens no sentido das distribuições. Mostra-se, também, que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Entretanto, estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribuicionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados de Espaços de Sobolev.

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ é o espaço das classes de funções reais $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável à *Lebesgue* em (Ω) . Este espaço, quando munido da norma

$$|u|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de *Banach*, ver [4].

O conjunto de todas as funções mensuráveis u que sejam essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$. Define-se a norma de u por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad \forall u \in L^\infty(\Omega)$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach*, ver [4].

No caso particular quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno será representado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

cuja norma induzida é

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Os espaços de Sobolev, são subespaços dos espaços $L^p(\Omega)$ cujos elementos possuem derivadas distribucionais, ainda nos espaços $L^p(\Omega)$. Se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, p um número real tal que $1 \leq p \leq \infty$ e m é um inteiro não negativo, definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

sendo D^α uma derivada no sentido das distribuições.

Observação 1.3.1. Quando dizemos que a derivada $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ de u é no sentido das distribuições, significando que existe uma função $w = D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nos espaços de Sobolev, podemos definir uma norma que leva em conta, as derivadas das funções. Esta norma é definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *Espaços de Banach*.

Observação 1.3.2. Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são espaços de *Hilbert*, denotados por

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} dx, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

A norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)_{L_2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Agora, mostraremos alguns casos particulares dos espaços de *Sobolev*:

Para dimensão $n = 1$, tem-se

$$H^1(a, b) = \{u \in L^2(a, b); u' \in L^2(a, b)\}, \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Para dimensão $n \geq 2$, tem-se

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(a, b); \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

De forma mais precisa, podemos escrever

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} [u]^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na *Teoria dos Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$:

Demonstra-se que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas, na norma de $H^m(\Omega)$, por uma função de $D(\overline{\Omega})$, onde $D(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi|_{\overline{\Omega}}; \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ que pode ser definido pela restrição à fronteira τ de Ω . Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $D(\overline{\Omega})$, tal que

$$\varphi_\nu \rightarrow \varphi \in H^1(\Omega).$$

Define-se o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\tau)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{K \rightarrow \infty} \varphi_K|_{\tau},$$

considerando o limite na norma de $L^2(\tau)$. O operador γ_0 , denominado operador traço, é contínuo, linear, e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples, podemos escrever $\varphi|_{\tau}$ em vez de $\gamma_0(\varphi)$. Sendo assim, o espaço $H_0^1(\Omega)$ pode ser caracterizado por

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\tau} = 0\}.$$

A generalização do operador traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, tem-se

$$H_0^2(\Omega) = \{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_\tau = 0; \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\tau = 0\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representa-se por $W_0^{-m,q}(\Omega)$, se $1 \leq p < \infty$, sendo que p e q são índices conjugados. Se $\varphi \in W_0^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{D(\Omega)} \in D'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual topológico recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$. Agora, enunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o espaço $W_0^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.3.1. Seja $T \in D'(\Omega)$. Então, $T \in W_0^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$, tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.

Demonstração: Ver[17].

Proposição 1.3.1. (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$): Se T é uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n + 1$ funções $u_0, u_1, \dots, u_n$ em $L^2(\Omega)$, tais que

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: Ver[11].

Lema 1.3.1. (Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração:

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1 . Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções $D(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como Ω é limitado, na direção x_1 , existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que, $\forall x \in \Omega$, $a < \text{proj } x < b$, onde a $\text{proj } x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1 . Agora, dado $\varphi \in D(\Omega)$ e $\varphi(a, x_1, \dots, x_n) = 0$, temos que

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi,$$

e da desigualdade de *Schwarz*, obtém-se

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi.$$

Aplicando o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a) \int_{\Omega} \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi dx \leq \\ &(b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, obtemos

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Lema 1.3.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Então, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes no espaço $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração:

De fato, considere a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = |u|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2 \geq |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da *Desigualdade de Poincaré-Friedrichs*, obtemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1+C) |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Dessa forma, das desigualdades acima concluímos que, em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.3.4 Distribuições Vetoriais

Nesta secção, faremos alguns comentários a respeito do conceito de distribuições vetoriais, conceito este de extrema importância na teoria das Equações Diferenciais Parciais.

O próximo resultado, não será demonstrado aqui, porém sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 1.3.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e m um inteiro não negativo. Então

a) $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach;

b) Se $1 \leq p < \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é separável;

c) Se $1 < p < \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo.

Um espaço que podemos definir neste trabalho é o $W_0^{1,p}(\Omega)$, representado por

$$W_0^{1,p}(\Omega) \equiv \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ no espaço } W^{1,p}(\Omega).$$

Denotaremos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 1.3.3. Se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, então existem $f_0, f_1, \dots, f_N$ em $L^{p'}(\Omega)$ tais que

$$\langle f, u \rangle = \int_{\Omega} f_0(x)u(x) \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx,$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observemos que no sentido distribucional temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx &= - \int_{\Omega} -f_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx, \\ &= \langle D(-f_i), \varphi \rangle \\ &= - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Esta relação justifica a notação $W^{-1,p'}(\Omega)$ para o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.3.5 Funções de Valores Vetoriais Fracamente e Fortemente Mensuráveis

Seja X um espaço de Banach, com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E . Então, uma função vetorial $\varphi :]0, T[\rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Seja a função simples $\varphi :]0, T[\rightarrow X$, com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} \varphi_j,$$

onde cada $E_j \subset (0, T)$ é mensurável, com $j = 1, 2, \dots, n$, e os conjuntos E_i são disjuntos dois a dois, sendo que $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X, i = 1, 2, \dots, n$. Define-se a integral de φ como sendo o vetor de X , representado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^n m(E_j) \varphi_j.$$

Definição 1.3.7. Sejam $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de medida e X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$, com dual X' . Uma função $x : S \rightarrow X$ é dita *fracamente mensurável*, se para toda $f \in X'$, a função

$$t \mapsto \langle f, x(t) \rangle \quad \text{é mensurável.}$$

Definição 1.3.8. Sejam $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de medida e X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$. Uma função $x : S \rightarrow X$ é dita *fortemente mensurável* ou apenas *mensurável*, se existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para x q.t.p.

Observação 1.3.3. Seja (x_n) uma sequência em um espaço de Banach X , diz-se que esta sequência converge fortemente para o elemento x , se $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$.

Definição 1.3.9. Uma função x definida em um espaço de medida $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ com valores em um espaço de Banach X é dita *Bochner integrável* ou apenas *integrável*, se existe uma sequência de funções simples $x_n : S \rightarrow X$ tal que, para todo n , a função

$$t \mapsto \|x_n(t) - x(t)\|_X$$

é integrável. Além disso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \|x_n(t) - x(t)\|_X d\mu = 0.$$

Não é difícil ver que o limite acima independe da escolha da sequência de funções. Isto pode ser visto com mais detalhes em [4], pág. 137. O próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [20], pág. 133, relaciona a norma de uma função com sua integral de Bochner.

Teorema 1.3.4. (de Bochner): Sejam X um espaço de Banach e $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de medida. Uma função fortemente mensurável $x : S \rightarrow X$ é Bochner integrável se, e somente se, $\|u(\cdot)\|_X$ é integrável em S .

Definição 1.3.10. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, e X um espaço de Banach, denotamos por

$$L^p(a, b; X), \quad 1 \leq p < \infty,$$

o espaço das classes de funções fortemente mensuráveis $f : (a, b) \rightarrow X$, tais que

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Podemos munir este espaço com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dx \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ temos um espaço de Hilbert. Sendo o espaço $L^2(a, b; X)$ também um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (u(s), v(s))_H ds.$$

Agora, denotamos por $L^\infty(a, b; X)$ o espaço das funções essencialmente limitadas em (a, b) .

Sendo assim, existe um M tal que

$$\|f(t)\|_X \leq M \quad \text{q.t.p. em } (a, b).$$

Quando introduzimos em $L^\infty(a, b; X)$ a norma

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in (a,b)} \|f(t)\|_X,$$

ele torna-se um espaço vetorial normado. Se X é um espaço reflexivo e separável, com $1 < p < \infty$, então $L^p(a, b; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(a, b; X')$. Sendo p e q índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(a, b; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(a, b; X')$.

Exemplo 1.3.3. Sejam $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in D(0, T)$. Considere a função $T_u : D(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\varphi(s)ds,$$

sendo a integral calculada no sentido de Bochner em X . A aplicação T_u é linear e contínua de $D(0, T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, pode-se identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0, T; X) \hookrightarrow D'(0, T; X)$ com imersão contínua e densa. O espaço das aplicações lineares e contínuas $D(0, T)$ em X , denomina-se espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , e é denotado por $D'(0, T; X)$.

1.3.6 Distribuições Vetoriais

Definição 1.3.11. Uma distribuição vetorial sobre o intervalo (a, b) , com valores em um espaço de Banach X , é uma transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(a, b) &\rightarrow X, \\ \varphi &\mapsto \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

contínua em $\mathcal{D}(a, b)$. Isto é, para toda sequência (φ_i) , com $\varphi_i \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(a, b)$, temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle T, \varphi_i \rangle = \langle T, \varphi \rangle \text{ em } X.$$

Neste trabalho denotaremos por $\mathcal{D}'(a, b; X)$, o espaço das distribuições vetoriais sobre (a, b) com valores em X .

Definição 1.3.12. Seja $T \in \mathcal{D}'(a, b; X)$. Então, para todo inteiro não-negativo k , definimos uma nova distribuição denotada por $T^{(k)}$ da seguinte maneira

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \left\langle T, \frac{d^k \varphi}{dt^k} \right\rangle.$$

Esta distribuição é chamada de k -ésima derivada de T em (a, b) e será algumas vezes denotada por $\frac{d^k T}{dt^k}$.

1.3.7 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\| \cdot \|$, $((\cdot, \cdot))$ e $| \cdot |$, $(\cdot, \cdot)$. Suponhamos que $V \subset H$, sendo que V é denso em H e a injeção de V em H é contínua.

A terna $\{V, H, ((\cdot, \cdot))\}$ determina um operador linear A caracterizado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u, v)) = (f, v), \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

O domínio do operador A é o subespaço vetorial de $D(A)$ de V , e

$$((u, v)) = (Au, v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V.$$

Demonstra-se em [17], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, ver[14],

que existe um sistema ortonormal completo de H , enumerável, $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ constituído de autovetores de A , cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$, satisfazendo

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \lambda_j \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Para cada α real, o operador A^α é caracterizado por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu \in H, \quad u \in D(A^\alpha).$$

Dado $u \in H$, então

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu \in H, \quad u \in D(A^\alpha).$$

Em $D(A^\alpha)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

e

$$|u|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|.$$

Temos que $D(A^\alpha)$ munido do produto interno $(u, v)_{D(A^\alpha)}$ é um espaço de Hilbert e dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, com $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão de $D(A^{\alpha_1})$ em $D(A^{\alpha_2})$ é compacta. Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido e é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = V, \quad |A^{\frac{1}{2}}| = \|u\|, \quad \forall u \in V.$$

Portanto, segue-se que o operador A será definido pela terna $\{V, H((u, v))\}$, nas condições do Teorma Espectral.

1.4 Outros Resultados Importantes

Definição 1.4.1. (Convergência Fraca): Sejam E um Espaço de Banach, e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então diz-se que, u_ν converge fracamente para u e denota-se por $u_\nu \rightarrow u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$.

Definição 1.4.2. (Convergência Fraca Estrela): Sejam E um Espaço de Banach, com $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E' . Então diz-se que, φ_ν tem convergência fraco estrela para φ e denota-se por $\varphi_\nu \xrightarrow{*} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle$, $\forall u \in E$.

Definição 1.4.3. (Norma do Supremo): Seja f uma função limitada representada na forma $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$. A norma do supremo, denotada por $\| \cdot \|_\infty$, é definida da por

$$\| f \|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in \text{domínio de } f \}.$$

Definição 1.4.4. Sejam $(E, \| \cdot \|_E)$ e $(V, \| \cdot \|_V)$ espaços normados. Toda aplicação

$$T : E \longrightarrow V$$

é chamada de *operador* e o valor de T no ponto $x \in E$ é denotado por Tx ou $T(x)$.

Definição 1.4.5. Um operador $T : E \longrightarrow V$ é dito *limitado*, se existe um número real positivo k , tal que

$$\|Tx\|_V \leq k\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Definição 1.4.6. Um operador $T : E \rightarrow V$ é dito *contínuo no ponto* $x_0 \in E$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\forall x \in E, \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\|_E < \varepsilon.$$

Se T é contínuo em todo $x \in E$, então dizemos que T é um *operador contínuo*.

Quando um operador $T : E \rightarrow V$ é limitado, podemos definir sua *norma* pela expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in E} \left\{ \frac{\|Tx\|_V}{\|x\|_E}; x \neq 0 \right\}.$$

Definição 1.4.7. Seja H um espaço de Hilbert. Denominamos de base Hilbertiana H uma sequência de elementos (ω_n) de H , tais que

1. $|\omega_n| = 1 \quad \forall n$, com $(\omega_m, \omega_n) = 0$, $\forall m, n$ com $m \neq n$;
2. O espaço gerado pela ω_n é denso em H .

Proposição 1.4.1. (Desigualdade de Minkowski): Seja X um espaço normado, e $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(X)$. Então $f+g \in L^p(X)$, e temos a *Desigualdade de Minkowski*:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

A igualdade acontece somente no caso em que f e g forem linearmente dependentes.

Demonstração: Ver[4].

Proposição 1.4.2. (Compacidade de Aubin-Lions): Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach, sendo B_0, B_1 reflexivos, com imersão de B_0 em B compacta, B imerso continuamente em B_1 , e

$$W = \{u \in L^2(0, T; B_0); u' \in L^2(0, T; B_1)\},$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^2(0, T; B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^2(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [11].

Observação 1.4.1. Como consequência da compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Portanto, segue que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B_0)$.

Lema 1.4.1. Se V tem imersão contínua em H e $u \in L^\infty(0, T; V)$, $u' \in L^2(0, T; H)$ então $u \in C^0([0, T], H)$ e $u \in C_s^0([0, T], V)$. ($C_s^0([0, T], V)$ é o espaço das funções fracamente contínuas de $[0, T]$ em V).

Demonstração: Ver [12].

Lema 1.4.2. (Lema de Gronwall): Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não negativas. Se

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_\alpha^t \varphi(s)\psi(s)ds, \text{ (com } \alpha > 0), \text{ então } \varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_\alpha^t \psi(s)ds \right], \forall t \in [a, b]$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$,

então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração:

Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_\alpha^t \varphi(s)\psi(s)ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo Teorema Fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) \leq \omega(t)\psi(t)$. Daí segue

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade em $[a, t]$, obtém-se

$$\int_\alpha^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_\alpha^t \psi(s) ds.$$

Sendo assim,

$$\int_\alpha^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s)) ds \leq \int_\alpha^t \psi(s) ds.$$

Logo,

$$\ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)} \right) \leq \int_a^t \psi(s) ds,$$

ou seja,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \psi(s) ds \right) \forall t \in [a, b].$$

Portanto, desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue-se o lema.

Lema 1.4.3. Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0, T]$. Se

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t [\gamma(s) + \gamma(s)^2] ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

então existem $T_0 > 0$ e $C_0 > 0$ tais que

$$\gamma(t) \leq C, \quad \forall t \in [0, T_0] \quad C_1, C_2 \geq 0.$$

Demonstração:

Seja $\varphi(t) = \int_a^t [\gamma(s) + \gamma(s)^2] ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2 \varphi(t)$. Decorre da hipótese que

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \varphi(t),$$

ou ainda,

$$\gamma^2(t) \leq [C_1 + C_2 \varphi(t)]^2.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue-se que

$$\varphi'(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2. \quad (1.2)$$

Logo,

$$\varphi'(t) \leq Y(t) + Y^2(t).$$

Por outro lado, $Y'(t) = C_2 \varphi'(t) \leq C_2[Y(t) + Y^2(t)]$. Daí segue-se que

$$Y'(t) \leq C_2[Y(t) + Y^2(t)], \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}[Y(t)e^{-c_2 t}] = Y'(t)e^{-c_2 t} + C_2 Y(t)e^{-c_2 t}$$

e aplicando em (1.5) segue-se que

$$\frac{d}{dt}[Y(t)e^{-c_2t}] \leq C_2Y^2(t)e^{-c_2t}. \quad (1.4)$$

Integrando a última desigualdade de 0 até t e notando que $Y(0) = C_1$, obtemos

$$Y(t) \leq C_1e^{c_2t} + C_2e^{c_2t} \int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds. \quad (1.5)$$

Seja $z(t) = \int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds$. Assim resulta de (1.4) que $Y(t) \leq [C_1 + C_2z(t)]e^{c_2t}$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$z'(t) = Y^2(t)e^{-c_2t}dt.$$

Logo,

$$z'(t) \leq [C_1 + C_2z(t)]^2e^{c_2t},$$

o que resulta em

$$\frac{z'(t)}{[C_1 + C_2z(t)]^2} \leq e^{c_2t}.$$

Integrando a última desigualdade de 0 até t , obtemos

$$\int_0^t \frac{z'(t)}{[C_1 + C_2z(t)]^2} \leq \int_0^t e^{c_2t}.$$

Daí segue-se que

$$-\frac{1}{[C_1 + C_2z(t)]} + \frac{1}{C_1} \leq \frac{e^{c_2t}}{C_2} - \frac{1}{C_2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{[C_1 + C_2z(t)]} \geq \frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}.$$

Agora suponhamos que

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{c_2t}}{C_2} \iff C_2t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Portanto, conclui-se que

$$t < \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Seja

$$T^* = \frac{1}{C_2} \ln \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right),$$

sendo $T^* > 0$ e seja T_0 tal que $0 < T_0 < T^*$. Então $0 \leq t \leq T_0$, isto implica que

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1},$$

ou ainda,

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right]^{-1}.$$

Sendo assim,

$$Y(t) \leq (C_1 + C_2 z(t)) e^{c_2 t}.$$

Por outro lado,

$$(C_1 + C_2 z(t)) e^{c_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2} \right] e^{c_2 T_0}.$$

Portanto,

$$Y(t) \leq C, \quad 0 \leq t \leq T_0.$$

Desta desigualdade e $\gamma(t) = Y(t)$, segue o lema.

Capítulo 2

Existência de solução global fraca

Neste capítulo investigaremos a existência de solução global fraca para o sistema (P), que trabalha com a equação da viga n-dimensional.

Para mostrar a existência, usamos o método de Faedo-Galerkin e teorema de compacidade de Aubin-Lions. Por simplicidade, dividimos a demonstração nas seguintes etapas:

I- Definiremos o problema (P), em um espaço de dimensão finita conveniente, que denominamos Problema Aproximado;

II - Mostraremos que esse problema aproximado possui solução (local), que chamamos Solução Aproximada;

III - Obteremos estimativas a priori sobre a sequência de soluções aproximadas, que nos permitam efetuar a "passagem ao limite". Sendo assim, nos permitirá prolongar a solução no intervalo $[0, T]$;

IV - Essa passagem ao limite é o passo seguinte, onde devemos mostrar, a partir das estimativas a priori, que a sequência de soluções aproximadas converge, numa topologia conveniente, para a solução do problema (P).

$$(P) \begin{cases} u''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta u(x, t) + \delta u'(x, t) = 0 & \text{em } Q; \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 & \text{em } \sum = \partial\Omega \times]0, T[; \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega \times]0, T[$, com $T > 0$ um cilindro com fronteira lateral, $|\nabla u(x, t)|$ é a norma no $\mathbb{R}^n$ do vetor $\nabla u(x, t)$. Por $'$ denotaremos $\frac{\partial}{\partial t}$, enquanto ν é o vetor normal unitário exterior para $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$, sendo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ a derivada da norma e δ um parâmetro positivo. Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma em $L^2(\Omega)$

com produto interno e $\cdot$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^n$, enquanto $|\cdot|$ representa a norma Euclidiana em $\mathbb{R}$.

2.1 Hipóteses

Consideremos as seguintes hipóteses sobre o sistema (P)

$$\text{H.1)} \quad u_0 \in H_0^2(\Omega) \text{ e } u_1 \in L_2(\Omega);$$

$$\text{H.2)} \quad M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \text{ é uma função de classe } C^1 \text{ nas variáveis } x \in \Omega, t \geq 0 \text{ e } \lambda \geq 0;$$

$$\text{H.3)} \quad M(x, t, \lambda) \geq -\beta, \text{ sendo } 0 < \beta < \frac{\lambda_1}{2}, \lambda_1 \text{ é o primeiro autovalor de } \Delta^2 u - \lambda \Delta u = 0;$$

$$\text{H.4)} \quad |\nabla M(x, t, \lambda)| \leq C_1 |\lambda|^p, \text{ com } p \geq 1;$$

$$\text{H.5)} \quad |M'(x, t, \lambda)| \leq C_2 |\lambda|^p \text{ e } \left| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right| \leq C_3 |\lambda|^{p-1}, \text{ com } p \geq 1;$$

$$\text{H.6)} \quad C_7 H^p(0) < \frac{\delta}{4},$$

onde C_7 e H^p serão definidos em (2.29).

Definição 2.1.1. A solução fraca do problema (P) é a função real $u = u(x, t)$ definida em Q tal que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{com } T > 0 \text{ e "u" satisfazendo}$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_\Omega u'(x, t) \chi'(x, t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \Delta u(x, t) \Delta \chi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \nabla \chi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega \left[(\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t)) \right] \chi(x, t) \, dx \, dt \\ & + \delta \int_0^T \int_\Omega u'(x, t) \chi(x, t) \, dx \, dt = 0, \end{aligned}$$

$$\forall \chi \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)), \quad \chi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{com } \chi(x, 0) = \chi(x, T) = 0$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x, 0), \quad u'(x, 0) = u_1(x).$$

Teorema 2.1.1. Assumindo as hipóteses (H.1) – (H.6) então existe uma solução fraca do problema (P).

Demonstração: Usaremos o método de aproximação de Faedo-Galerkin.

2.2 Problema Aproximado

Seja $B = (w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma base Hilbertiana do espaço de Sobolev $H_0^2(\Omega)$. Se $\mathbb{V}_m$ é o subespaço de $H_0^2(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores de $B = \{w_1, w_2, \dots\}$, ou seja, $\mathbb{V}_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, então nosso problema aproximado consistirá em determinar uma função da forma

$$u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x) \text{ em } \mathbb{V}_m,$$

satisfazendo

$$\begin{cases} (u_m''(x, t), w) + (\Delta u_m(x, t), \Delta w) + (M(x, t, \|u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t), \nabla w) \\ + (\nabla M(x, t, \|u_m(x, t)\|^2) \cdot \nabla u_m(x, t), w) + \delta(u_m'(x, t), w) = 0, \forall w \in \mathbb{V}_m; \\ u_m(x, 0) = u_{0m}(x) \longrightarrow u_0(x) \text{ em } H_0^2(\Omega); \\ u_m'(x, 0) = u_{1m}(x) \longrightarrow u_1(x) \text{ em } L^2(\Omega); \end{cases} \quad (2.1)$$

Assim sendo, existe uma solução local $u_m = u_m(x, t)$ de (2.1) no intervalo $[0, t_m[$. A estimativa que segue permite estender a solução u_m no intervalo $[0, T[$, para todo $T > 0$ e passar o limite em (2.1).

Daqui em diante, para simplicidade de notação escreveremos u em vez de u_m .

Consideremos as desigualdades

$$\|u(t)\| \leq C \|\nabla u(t)\|; \quad (2.2)$$

$$\|\nabla u(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\Delta u(t)\|; \quad (2.3)$$

$$\|u(t)\| \leq C \|\Delta u(t)\|, \forall u \in H_0^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Notemos que C depende da medida de Ω .

Observação 2.2.1. Seja λ_1 o primeiro autovalor de $\Delta^2 u - \lambda \Delta u = 0$. Então

$$\lambda_1 = \inf \frac{\|\Delta u\|^2}{\|\nabla u\|^2} > 0 \Rightarrow \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|\Delta u\|^2, \text{ ver [15].}$$

2.3 Estimativas

Estimativa I: Fazendo $w = u'(x, t)$ em (2.1) temos

$$(u''(x, t), u'(x, t)) + (\Delta u(x, t), \Delta u'(x, t)) + (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t), \nabla u'(x, t)) + (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), u'(x, t)) + \delta(u(x, t), u'(x, t)) = 0. \quad (2.5)$$

Analisemos agora os termos de (2.5)

- Primeiro termo

$$(u''(x, t), u'(x, t)) = \left(\frac{d}{dt} u'(x, t), u'(x, t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'(t)\|^2. \quad (2.6)$$

- Segundo termo

$$\begin{aligned} (\Delta u(x, t), \Delta u'(x, t)) &= (\Delta u(x, t), \frac{d}{dt} \Delta u(x, t)) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Delta u(x, t), \Delta u(x, t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u(x, t)\|^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

- Terceiro termo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \nabla u'(x, t) dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \frac{d}{dt} |\nabla u(x, t)|^2 dx - \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} M'(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx - \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx \right) \\ &= (\nabla u(x, t), \nabla u'(x, t)). \end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \nabla u'(x, t) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx - \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} M'(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx + \\ &= \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx \right) (u'(x, t), \Delta u(x, t)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Quinto termo

$$\delta(u'(x, t), u'(x, t)) = \delta \|u'(t)\|^2. \quad (2.9)$$

Podemos escrever (2.5) na forma

$$(u''(x, t), u'(x, t)) + (\Delta u(x, t), \Delta u'(x, t)) + (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t), \nabla u'(x, t)) +$$

$$\delta(u'(x, t), u'(x, t)) = -(\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), u'(x, t))$$

Substituindo (2.6) – (2.9) na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)| + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] dx + \\ & \delta \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx = - \int_{\Omega} [\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t) u'(x, t)] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega} M'(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx - \\ & \left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx \right) (u'(x, t), \Delta u(x, t)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

O lado direito da equação acima pode ser modificado, usando (H.4) e (2.3). Logo

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} [\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) u'(x, t)] dx \right| \leq \\ & \int_{\Omega} \left| \nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) u'(x, t) \right| dx \leq \\ & \int_{\Omega} C_1 \|\nabla u(x, t)\|^{2p} |\nabla u(x, t)| |u'(x, t)| dx \leq \\ & \int_{\Omega} \frac{C_1}{\lambda_1^p} \|\Delta u(x, t)\|^{2p} |\nabla u(x, t)| |u'(x, t)| dx \leq \\ & \frac{C_1}{\lambda_1^p} \|\Delta u(t)\|^{2p} \|\nabla u(t)\| \|u'(x, t)\| \leq \\ & \frac{C_1}{\lambda_1^p} \|\Delta u(t)\|^{2p} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\Delta u(t)\| \|u'(x, t)\| \leq \\ & \leq \frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+1} \|u'(t)\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Usando (H.5) e (2.3) temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} [M'(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] dx \right| \leq \\ & \int_{\Omega} \left| [M'(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] \right| dx \leq \\ & C_2 \int_{\Omega} \|\nabla u(t)\|^{2p} \cdot |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq C_2 \|\nabla u(t)\|^{2p} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq \\ & C_2 \|\nabla u(t)\|^{2p} \|\nabla u(t)\|^2 \leq C_2 \|\nabla u(t)\|^{2p+2} \leq \frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} \|\Delta u(t)\|^{2p+2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx \right| \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\| \leq \\
& \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right| dx \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\| \leq \\
& C_3 \int_{\Omega} (\|\nabla u(t)\|^2)^{p-1} |\nabla u(x, t)|^2 dx \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\| \leq \\
& C_3 \|\nabla u(t)\|^{2p-2} \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\| \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx \leq \\
& C_3 \|\nabla u(t)\|^{2p-2} \|\nabla u(t)\|^2 \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\| \leq C_3 \|\nabla u(t)\|^{2p} \|\Delta u(t)\| \|u'(t)\| \leq \\
& \frac{C_3}{\lambda_1^p} \|\Delta u(t)\|^{2p} \|\Delta u(t)\| \|u'(t)\| \leq \frac{C_3}{\lambda_1^p} \|\Delta u(t)\|^{2p+1} \|u'(t)\|.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Observamos que nos casos acima usamos as desigualdades de Cawchy-Schwarz e Sobolev.

Substituindo (2.11) – (2.13) na equação (2.10) temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \right] dx + \\
& \delta \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx \leq \frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+1} \|u'(x, t)\| + \\
& \frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} \|\Delta u(t)\|^{2p+2} + \frac{C_3}{\lambda_1^p} \|\Delta u(t)\|^{2p+1} \|u'(t)\| = \\
& \|\Delta u(t)\|^2 \left[\left(\frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{C_3}{\lambda_1^p} \right) \|\Delta u(t)\|^{2p-1} \|u'(t)\| + \frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} \|\Delta u(t)\|^{2p} \right].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Estimativa II: Fazendo $w = u(x, t)$ em (2.1) temos que

$$\begin{aligned}
& (u''(x, t), u(x, t)) + (\Delta u(x, t), \Delta u(x, t)) + \\
& (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t), \nabla u(x, t)) + \\
& (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), u(x, t)) + \delta (u'(x, t), u(x, t)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Analisemos agora os termos de (2.15)

- Primeiro termo

$$\begin{aligned}
(u''(x, t), u(x, t)) &= \int_{\Omega} u''(x, t) u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx - \\
& \int_{\Omega} u'(x, t) u'(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx - \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

- Segundo termo

$$(\Delta u(x, t), \Delta u(x, t)) = \|\Delta u(x, t)\|^2 = \int_{\Omega} |\Delta u(t)|^2 dx. \tag{2.17}$$

- Quarto termo

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), u(x, t)) \right| \leq \\
& \int_{\Omega} |\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)| \cdot |\nabla u(x, t)| |u(x, t)| dx \leq \\
& C_1 \|\nabla u(t)\|^{2p} \int_{\Omega} C |\Delta u(t)| |\nabla u(x, t)| dx \leq \\
& C_1 \|\nabla u(t)\|^{2p} C \|\Delta u(t)\| \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)| dx \leq \\
& C_1 C \|\nabla u(t)\|^{2p} \|\nabla u(t)\| \|\Delta u(t)\| \leq \\
& \frac{C_1 C}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+1} \|\Delta u(t)\| \leq \frac{C_1 C}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+2}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

- Quinto termo

$$\delta(u'(x, t), u(x, t)) = \delta \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u(x, t), u(x, t)) dx = \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx. \tag{2.19}$$

Substituindo (2.16) – (2.19) em (2.15) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx - \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta u(x, t)|^2 dx + \\
& \int_{\Omega} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx + \\
& \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 \leq \frac{C_1 C}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(x, t)\|^{2p+2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Multiplicando (2.20) por $(\delta/2)$ teremos

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx - \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} |u'(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} |\Delta u(x, t)|^2 dx + \\
& \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx + \frac{\delta^2}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx \leq \\
& \frac{\delta}{2} \frac{C_1 C}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+2}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Somando as equações (2.14) e (2.21) obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx - \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} |u'(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} |\Delta u(x, t)|^2 dx + \\
& \int_{\Omega} \frac{\delta}{2} M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 dx + \frac{\delta^2}{4} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \\
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx + \\
& \delta \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx \leq \frac{\delta}{2} \frac{C_1 C}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \|\Delta u(t)\|^{2p+2} + \\
& \|\Delta u(t)\|^2 \left[\left(\frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{C_3}{\lambda_1^p} \right) \|\Delta u(t)\|^{2p-1} \|u'(t)\| + \frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} \|\Delta u(x, t)\|^{2p} \right],
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[\delta u'(x, t) u(x, t) + \frac{\delta^2}{2} |u(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + \right. \\
& \left. M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \left[|u'(x, t)|^2 + \right. \\
& \left. |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx - \\
& \|\Delta u(t)\|^2 \left[\left(\frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{C_3}{\lambda_1^p} \right) \|\Delta u(t)\|^{2p-1} \|u'(t)\| + \right. \\
& \left. \left(\frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} + \frac{\delta C_1 C}{2 \lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} \right) \|\Delta u(t)\|^{2p} \right] \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Seja $H(t) = H(u(t))$ a função dada por

$$\begin{aligned}
H(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\delta u'(x, t) u(x, t) + \frac{\delta^2}{2} |u(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + \right. \\
\left. M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Operando com o primeiro termo da igualdade acima, obtemos a estimativa seguinte

$$\delta \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx \geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx - \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx. \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em (2.23) temos

$$\begin{aligned}
H(t) & \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \geq \\
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 - \beta |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \geq \\
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |u'(x, t)|^2 + \left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1} \right) |\Delta u(x, t)|^2 \right] dx \geq C_6 (\|u'(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2) \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

sendo $C_6 = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\lambda_1} \right) \right) \right\}$

Definamos agora

$$\gamma(t) = C_4 \|u'(t)\| \|\Delta u(t)\|^{2p-1} + C_5 \|\Delta u(t)\|^{2p}, \quad (2.26)$$

$$\text{sendo } C_4 = \frac{C_1}{\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{C_3}{\lambda_1^p} \text{ e } C_5 = \frac{C_2}{\lambda_1^{p+1}} + \frac{\delta C_1 C}{2\lambda_1^{p+\frac{1}{2}}}.$$

Das hipóteses (2.22), (2.23) e (2.26) obtemos

$$\frac{d}{dt} H(t) + \|\Delta u(t)\|^2 \left(\frac{\delta}{4} - \gamma(t) \right) \leq 0. \quad (2.27)$$

De (2.25) podemos escrever

$$\|u'(t)\| \leq \sqrt{\frac{1}{C_6} H(t)} \text{ e } \|\Delta u(t)\| \leq \sqrt{\frac{1}{C_6} H(t)}. \quad (2.28)$$

De (2.23), (2.26) e (2.28) nós obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\leq C_4 \sqrt{\frac{H(t)}{C_6}} \left(\sqrt{\frac{H(t)}{C_6}} \right)^{2p-1} + C_5 \left(\sqrt{\frac{H(t)}{C_6}} \right)^{2p} \leq \\ &\frac{C_4}{C_6} H^p(t) + \frac{C_5}{C_6} H^p(t) = \frac{C_4 + C_5}{C_6^p} H^p(t). \end{aligned}$$

Fazendo $C_7 = \frac{C_4 + C_5}{C_6^p}$, temos que

$$\gamma(t) \leq C_7 H^p(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Nosso próximo passo é mostrar que $H(t)$ é limitada para todo $t \geq 0$. De fato, se considerarmos $\gamma(t) \leq \frac{\delta}{4}$, para todo $t \geq 0$, segue de (2.27) que $\frac{d}{dt} H(t) \leq 0$, logo $H(t) \leq H(0)$, $\forall t \geq 0$ o que nos dá uma estimativa global para as soluções aproximadas.

No entanto, se $\gamma(t) > \frac{\delta}{4}$, para algum $t \geq 0$, mostraremos que essa hipótese implica numa contradição. De fato, de acordo com (H.6) e (2.29), $\gamma(0) < C_0 H^p(0) < \frac{\delta}{4}$. A função $\gamma(t)$ é contínua para todo $t > 0$, então existe um $t^* > 0$ tal que $t^* = \min \left\{ t > 0; \gamma(t) = \frac{\delta}{4} \right\}$. Sendo assim nós teremos

$$\begin{cases} \gamma(t) < \frac{\delta}{4}; & 0 \leq t < t^*; \\ \gamma(t^*) = \frac{\delta}{4}. \end{cases} \quad (2.30)$$

De (2.27) e (2.30)₁, temos que $H(t) \leq H(0)$, para todo $0 \leq t \leq t^*$, logo, $H(t^*) \leq H(0)$.

De (H.6) e (2.29) temos

$$\gamma(t^*) \leq C_7 H^p(t^*) \leq C_7 H^p(0) < \frac{\delta}{4},$$

o que é contradição de acordo com (3.30)₂. Então segue-se que

$$0 < \gamma(t) < \frac{\delta}{4}, \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$H(t) \leq H(0) < \left(\frac{\delta}{4C_7} \right)^{1/p}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Voltando à notação da solução aproximada $u = u_m(x, t)$, que é solução do problema aproximado (2.1), (2.25) e (2.31) temos

$$\|u'_m(x, t)\|^2 + \|\Delta u_m(x, t)\|^2 \leq H(t) \leq C_8, \quad (2.32)$$

sendo $C_8 > 0$, uma constante independente de m e t .

2.3.1 Passagem ao Limite

Limite de soluções aproximadas:

De (2.32) temos que

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (2.33)$$

e

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.34)$$

Convergência dos termos lineares

Usando o fato que,

$$L^\infty(0, T, X) \hookrightarrow L^2(0, T; X),$$

de (2.33) segue-se que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H_0^2(\Omega)),$$

isto é,

$$(\Delta u_m, w) \rightarrow (\Delta u, w) \quad \forall w \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

De (2.34), temos que

$$u'_m \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

isto é,

$$(\Delta u'_m, w) \rightarrow (\Delta u', w) \quad \forall w \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Convergência dos termos não-lineares

Das estimativas obtidas em (2.33) e (2.34), existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_m \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (2.35)$$

e

$$u'_m \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.36)$$

Agora, consideremos $B_0 = L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$, $B = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $B_1 = L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Então, pelo teorema de Aubin-Lions [11], existe uma subsequência de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$u_m \rightarrow u \text{ converge forte em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.37)$$

ou seja, $\|u_m(t)\|_{H_0^1} \rightarrow \|u(t)\|_{H_0^1}$ em $L^2(0, T)$.

De (2.35), (2.36), (2.37) e usando o seguinte resultado de Análise Funcional, ver[4]: Se $u_m \rightarrow u$ em $L^p(0, T; X)$, então $\|u_m\|_X \rightarrow \|u\|_X$ em $L^p(0, T)$. Portanto,

$$\|u_m\| \rightarrow \|u\| \text{ em } L^2(0, T).$$

E considerando uma subsequência de (u_m) , temos que

$$\|u_m\|^2 \rightarrow \|u\|^2 \text{ quase sempre em } [0, T].$$

E de acordo com (H.2), M é de classe C^1 . Então

$$M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \rightarrow M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \text{ em } L^2(0, T); \quad (2.38)$$

$$\nabla M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \rightarrow \nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \text{ em } L^2(0, T); \quad (2.39)$$

$$M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t) \rightharpoonup M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \text{ em } L^2(0, T); \quad (2.40)$$

$$\nabla M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \cdot \nabla u_m(x, t) \rightharpoonup M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \text{ em } L^2(0, T). \quad (2.41)$$

Passagem ao limite

Multiplicando (2.1) por $\theta \in D(0, T)$ e integrando de 0 a T, temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_m''(x, t), w) \theta(t) dt + \int_0^T (\Delta u_m(x, t), \Delta w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t), \nabla w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (\nabla M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t), w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T \delta(u_m'(x, t), w) \theta(t) dt = 0, \quad \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u_m'(x, t) w(x) \theta'(t) dt dx + \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u_m(x, t) \Delta w(x) \theta(t) dt dx + \\ & \int_0^T \int_{\Omega} (M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t) \nabla w(x) \theta(t) dt dx + \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \left[(\nabla M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \cdot \nabla u_m(x, t)) \right] w(x) \theta(t) dt dx + \\ & \delta \int_0^T \int_{\Omega} u_m'(x, t) w(x) \theta(t) dt dx = 0, \quad ; \quad \forall \theta \in D(0, T), \quad \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ e observando as convergências anteriores, temos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} u'(x, t) w(x) \theta'(t) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \Delta w(x) \theta(t) dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\Omega} (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t) \nabla w(x) \theta(t) dx dt + \\ & \int_0^T \int_{\Omega} \left[(\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t)) \right] w(x) \theta(t) dx dt + \\ & \delta \int_0^T \int_{\Omega} u'(x, t) w(x) \theta(t) dx dt = 0, \quad \forall \theta \in D(0, T), \quad \forall w \in V_m. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Sendo assim, obtemos a função u definida em $Q = \Omega \times [0, \infty[$ com valores em $\mathbb{R}$ satisfazendo (P) e a definição (2.1.1).

2.3.2 Condições iniciais:

a) $u(0) = u_0$

De (2.35) temos que:

$$u \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega)).$$

e, usando resultado de regularidade, Lema (1.4.1), concluimos que

$$u \in C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

Dessa forma faz sentido calcularmos $u(0)$ e $u'(0)$. Consideremos $\theta \in C^1([0, T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como

$$u'_m \longrightarrow u, \quad \forall u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

ou,

$$((u'_m, w)) \longrightarrow ((u', w)), \quad \forall w \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.43)$$

Multiplicando (2.43) por θ e integrando de 0 a T , obtemos

$$\int_0^T (u'_m, w) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u', w) \theta(t) dt.$$

Fazendo a integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} (u_m(t), w) \theta(t) - (u_m(0), w) \theta(0) - \int_0^T (u_m, w) \theta'(t) dt &\longrightarrow (u(t), w) \theta(t) - \\ &\quad (u(0), w) \theta(0) - \int_0^T (u, w) \theta'(t) dt. \end{aligned}$$

Dessa maneira temos

$$-(u_m(0), w) \theta(0) - \int_0^T (u_m, w) \theta'(t) dt \longrightarrow -(u(0), w) \theta(0) - \int_0^T (u, w) \theta'(t) dt.$$

Usando a convergência de (2.35) temos que

$$(u_m(t), w) \theta(t) (u_m(0), w) \longrightarrow (u(0), w), \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Mas, como u_{0m} converge forte para u_0 em $H_0^2(\Omega)$, então u_{0m} converge fraco para u_0 em $L^2(\Omega)$. Portanto,

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } H_0^2(\Omega).$$

Logo,

$$(u_m(0), w) \longrightarrow (u(0), w), \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Portanto, temos que

$$(u_0, w) = (u(0), w),$$

ou seja, $u(0) = u_0$.

b) $u'(0) = u_1$

De (2.36) temos que

$$u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

e, usando o resultado de regularidade, lema (1.4.1), concluimos que

$$u' \in C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

Dessa forma, vamos calcular $u'(0)$. Seja $\theta \in C^1([0, T])$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Multiplicando $(P)_1$ por θ , integrando de 0 a T e efetuando a primeira integral por partes, obtemos

$$\begin{aligned} & -(u_{1m}, w) - \int_0^T (u'_m(x, t), w) \theta'(t) dt + \int_0^T (\Delta u_m(x, t), \Delta w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \nabla u_m(x, t), \nabla w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (\nabla M(x, t, \|\nabla u_m(x, t)\|^2) \cdot \nabla u_m(x, t), w) \theta(t) dt + \delta \int_0^T (u'_m(x, t), w) \theta(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$ e observando as convergências (2.36) e (2.38)–(2.41), temos

$$\begin{aligned} & -(u_1, w) - \int_0^T (u'(x, t), w) \theta'(t) dt + \int_0^T (\Delta u(x, t), \Delta w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t), \nabla w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), w) \theta(t) dt + \delta \int_0^T (u'(x, t), w) \theta(t) dt = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_m. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned} & -(u_1, w) + (u'(0), w) + \int_0^T \left(\frac{d}{dt} (u'(x, t), w) \right) \theta(t) dt + \int_0^T (\Delta u(x, t), \Delta w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \nabla u(x, t), \nabla w) \theta(t) dt + \\ & \int_0^T (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \cdot \nabla u(x, t), w) \theta(t) dt + \delta \int_0^T (u'(x, t), w) \theta(t) dt = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_m. \end{aligned}$$

De (2.42) temos que

$$-(u_1, w) + (u'(0), w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_m.$$

Pela densidade de $\mathbb{V}_m$ em $L^2(\Omega)$ temos que

$$(u'(0), w) = (u_1, w), \quad \forall w \in L^2(\Omega),$$

ou seja, $u'(0) = u_1$.

Capítulo 3

Unicidade de solução global fraca

3.1 Unicidade

Neste capítulo, nosso objetivo é mostrar a unicidade de solução global fraca para o problema (P). Usaremos a técnica de Ladyzhenskaia-Visik[9], devido o método da energia ser ineficaz para os espaços escolhidos.

Consideremos as hipóteses

$$(H.7) \quad M \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, T], [0, C_9]) \text{ e } \nabla M, \Delta M \in L^\infty(\Omega \times [0, T]).$$

Teorema 3.1.1. Sejam as hipóteses (H.1)-(H.7). Então a solução fraca do problema (P) é única em $[0, T]$, $\forall t \geq 0$.

Observação 3.1.1. A constante C_9 é definida por $\|\nabla u(t)\|^2 \leq C_9$ e por questão de simplicidade, usaremos a mesma constante C_9 , satisfazendo $\|\Delta u(t)\|^2 \leq C_9$.

Demonstração: Sejam u e $\hat{u}$ soluções de (P). Então, consideremos a função $\phi = u - \hat{u}$ que satisfaz

$$u''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta u(x, t) + \delta u'(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

$$\hat{u}''(x, t) + \Delta^2 \hat{u}(x, t) - M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) \Delta \hat{u}(x, t) + \delta \hat{u}'(x, t) = 0. \quad (3.2)$$

Fazendo a subtração de (3.1) por (3.2) temos

$$\begin{aligned} u''(x, t) - \hat{u}''(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta^2 \hat{u}(x, t) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta u(x, t) + \\ M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta \hat{u}(x, t) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta \hat{u}(x, t) + \\ M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) \Delta \hat{u}(x, t) + \delta u'(x, t) - \delta \hat{u}'(x, t) = 0. \end{aligned}$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi''(x, t) + \Delta^2 \phi(x, t) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta \phi(x, t) + \\ [M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)] \Delta \hat{u}(x, t) + \delta \phi'(x, t) = 0; \\ \phi(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x, t) = 0 \text{ em } \Sigma; \\ \phi(x, 0) = 0 \text{ em } \Omega; \\ \phi'(x, 0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Da regularidade das soluções (Lema-1.4.1), definição (2.1.1) e das hipóteses (H.1) e (H.6), obtemos

$$\phi' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \phi'' \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$$

Portanto, a dualidade

$$\langle \phi''(t), \phi'(t) \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

não faz sentido. Assim, o método da energia não pode ser usado. Portanto, usaremos a técnica de Ladyzhenskaya-Visik[9].

Seja $\psi(t)$ uma função real definida em $]0, T[$ por

$$\psi(x, t) = \begin{cases} -\int_t^s \phi(x, r) dr, & \text{se } 0 < t < s \\ 0, & \text{se } s \leq t < T, \end{cases}$$

sendo ϕ a solução fraca de (3.3).

Observemos que $\phi(t) \in H_0^2(\Omega)$ e

$$\psi'(x, t) = \phi(x, t) \text{ e } \psi(x, s) = 0. \quad (3.4)$$

Por outro lado, se $\psi_1(x, t) = \int_0^t \phi(x, r) dr$, então

$$\psi(x, t) = \int_0^t \phi(x, r) dr - \int_0^s \phi(x, r) dr = \int_s^t \phi(x, r) dr \text{ e } \psi(x, 0) = -\psi_1(x, s). \quad (3.5)$$

Fazendo o produto escalar em $L^2(\Omega)$ de 2ψ com (3.3)₁ e integrando de 0 a s , temos

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^s \langle \phi''(x, t), \psi(x, t) \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} dt + \\ & 2 \int_0^s \langle \Delta^2 \phi(x, t), \psi(x, t) \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} dt \\ & - 2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta \phi(x, t), \psi(x, t)) dt + 2\delta \int_0^s (\phi'(x, t), \psi(x, t)) dt + \\ & 2 \int_0^s ([M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)] \Delta \hat{u}(x, t), \psi(x, t)) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora analizaremos os termos de (3.6)

- Integrando por partes o primeiro termo e usando (3.3)₄ e (3.4)₁, temos

$$\begin{aligned}
2 \int_0^s < \phi''(x, t), \psi(x, t) > dt &= 2 < \phi'(x, t), \psi(x, t) > \Big|_0^s - \\
2 \int_0^s < \phi'(x, t), \psi'(x, t) > dt &= 2 < \phi'(x, s), \psi(x, s) > - \\
2 < \phi'(x, 0), \psi(x, 0) > - 2 \int_0^s (\phi'(x, t), \psi'(x, t)) dt &= \\
2 < \phi'(x, s), 0 > - 2 < 0, \psi(x, 0) > - 2 \int_0^s (\phi'(x, t), \phi(x, t)) dt &= \\
- 2 \int_0^s (\phi'(x, t), \phi(x, t)) dt &= - 2 \int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\phi(t)\|^2 dt = - \|\phi(s)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

- No segundo termo usamos (3.3)₂, (3.4)₁ e (3.5) e o Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}
2 \int_0^s < \Delta^2 \phi(x, t), \psi(x, t) > dt &= 2 \int_0^s \Delta \phi(x, t) \Delta \psi(x, t) dt = \\
2 \int_0^s \Delta \psi'(x, t) \Delta \psi(x, t) dt &= 2 \int_0^s \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \psi(t)\|^2 dt = \\
\|\Delta \psi(s)\|^2 - \|\Delta \psi(0)\|^2 &= - \|\Delta \psi_1(s)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

- No terceiro termo aplicamos duas vezes o Teorema de Green. Logo

$$\begin{aligned}
- 2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \Delta \phi(x, t), \psi(x, t)) dt &= \\
- 2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \Delta \psi(x, t)) dt &- \\
4 \int_0^s (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \nabla \psi(x, t)) dt &- \\
2 \int_0^s (\Delta M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \psi(x, t)) dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

- No quarto termo usamos integração por partes, (3.3)₃ e (3.4)₂, temos

$$\begin{aligned}
2\delta \int_0^s (\phi'(x, t), \psi(x, t)) dt &= 2\delta (\phi(x, t), \psi(x, t)) \Big|_0^s - \\
2\delta \int_0^s (\phi(x, t), \psi'(x, t)) dt &= 2\delta [(\phi(x, s), \psi(x, s)) - (\phi(x, 0), \psi(x, 0)) - \\
\int_0^s (\phi(x, t), \psi'(x, t)) dt] &= 2\delta [(\phi(x, s), 0) - (0, \psi(x, 0)) - \\
\int_0^s (\phi(x, t), \phi(x, t)) dt] &= - 2\delta \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.7) – (3.10) em (3.6), temos

$$\begin{aligned}
& \|\phi(s)\|^2 + \|\Delta\psi_1(s)\|^2 = -2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \Delta\psi(x, t)) dt - \\
& 4 \int_0^s (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \nabla\psi(x, t)) dt - \\
& 2 \int_0^s (\Delta M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \psi(x, t)) dt - 2\delta \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \\
& 2 \int_0^s [(M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)) \Delta \hat{u}(x, t), \psi(x, t)] dt.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De (H.7) existem constantes positivas C_{10} , C_{11} e C_{12} tal que

$$\begin{aligned}
C_{10} &= \sup_{\bar{\Omega} \times [0, T] \times [0, C_9]} |M(x, t, \lambda)|, \\
C_{11} &= \sup_{\Omega \times [0, T] \times [0, C_9]} |\nabla M(x, t, \lambda)| \quad e \\
C_{12} &= \sup_{\Omega \times [0, T] \times [0, C_9]} |\Delta M(x, t, \lambda)|.
\end{aligned}$$

Portanto, analisemos agora os termos do segundo membro de (3.11)

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \Delta\psi(x, t)) dt - 4 \int_0^s (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \\
& \phi(x, t), \nabla\psi(x, t)) dt - 2 \int_0^s (\Delta M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \psi(x, t)) dt \leq \\
& 2C_{10} \int_0^s \|\phi(t)\| \|\Delta\psi(t)\| dt + 4C_{11} \int_0^s \|\phi(t)\| \|\nabla\psi(t)\| dt + 2C_{12} \int_0^s \|\phi(t)\| \|\psi(t)\| dt = \\
& 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta\psi(t)\| + \|\nabla\psi(t)\| + \|\psi(t)\|) dt = \\
& 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\| + \|\nabla\psi_1(t)\| + \|\nabla\psi_1(s)\| + \\
& \|\psi_1(t)\| + \|\psi_1(s)\|) dt \leq 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta\psi_1(t)\| + \\
& \|\Delta\psi_1(s)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\Delta\psi_1(t)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\Delta\psi_1(s)\| + C \|\Delta\psi_1(t)\| + C \|\Delta\psi_1(s)\|) dt \leq \\
& 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\|) + \\
& C (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\|)) dt \leq 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \int_0^s \|\phi(t)\| (1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + C) \\
& (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\|) dt \leq 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) (1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + C) \int_0^s \|\phi(t)\| \\
& (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\|) dt \leq C_{13} \left[\int_0^s \|\phi(t)\| \|\Delta\psi_1(t)\| dt + \int_0^s \|\phi(t)\| \|\Delta\psi_1(s)\| dt \right] \leq \\
& \frac{C_{13}}{2} \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{C_{13}}{2} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\|^2 dt + \frac{C_{13}^2}{4} \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \int_0^s \|\Delta\psi_1(s)\|^2 dt =
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} \right) \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{C_{13}}{2} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\|^2 dt + s\|\Delta\psi_1(s)\|^2.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} & -2 \int_0^s (M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \Delta\psi(x, t)) dt - 4 \int_0^s (\nabla M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \\ & \phi(x, t), \nabla\psi(x, t)) dt - 2 \int_0^s (\Delta M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \phi(x, t), \psi(x, t)) dt \leq \\ & \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} \right) \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{C_{13}}{2} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\|^2 dt + s\|\Delta\psi_1(s)\|^2, \\ & \text{sendo } C_{13} = 2(C_{10} + 2C_{11} + C_{12}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + C \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analizando o termo abaixo do segundo membro de (3.11) e usando a hipótese (H.7), então existe uma constante $C_{14} > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^s [(M(x, t, \|\nabla \hat{u}(x, t)\|^2) - M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)) \Delta \hat{u}(x, t), \psi(x, t)] dt \leq \\ & 2C_{14} \int_0^s \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 - \|\nabla u(t)\|^2 \|\Delta \hat{u}(t)\| \|\psi(t)\| dt. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o segundo termo da desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \|\nabla \hat{u}(t)\|^2 - \|\nabla u(t)\|^2 \right| = \left| (\Delta \hat{u}(t), \hat{u}(t)) - (\Delta u(t), u(t)) \right| = \\ & \left| (\Delta u(t) - \Delta \phi(t), \hat{u}(t)) - (\Delta u(t), \phi(t) + \hat{u}(t)) \right| = \\ & \left| (\Delta u(t), \hat{u}(t)) - (\Delta \phi(t), \hat{u}(t)) - (\Delta u(t), \hat{u}(t)) - (\Delta u(t), \phi(t)) \right| = \\ & \left| (\Delta u(t), \phi(t)) + (\Delta \phi(t), \hat{u}(t)) \right| = \left| (\Delta u(t), \phi(t)) + (\phi(t), \Delta \hat{u}(t)) \right| \leq \\ & \|\phi(t)\| (\|\Delta u(t)\| + \|\Delta \hat{u}(t)\|). \end{aligned}$$

Sabendo que $\|\Delta u(t)\| \leq \sqrt{C_9}$ e usando a desigualdade $\|\psi(t)\| \leq C\|\Delta\psi(t)\|$, temos que

$$\begin{aligned}
& 2C_{14} \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta u(t)\| + \|\Delta \hat{u}(t)\|) \|\Delta \hat{u}(t)\| \|\psi(x, t)\| dt \leq \\
& 2C_{14} \int_0^s \|\phi(t)\| (\sqrt{C_9} + \sqrt{C_9}) \sqrt{C_9} C \|\Delta\psi(t)\| dt \leq 4CC_9C_{14} \int_0^s \|\phi(t)\| \|\Delta\psi(t)\| dt \leq \\
& 4CC_9C_{14} \int_0^s \|\phi(t)\| (\|\Delta\psi_1(t)\| + \|\Delta\psi_1(s)\|) dt \leq 4CC_9C_{14} \int_0^s (\|\phi(t)\| \|\Delta\psi_1(t)\| + \\
& \|\phi(t)\| \|\Delta\psi_1(s)\|) dt \leq \frac{4CC_9C_{14}}{2} \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{4CC_9C_{14}}{2} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\|^2 dt + \\
& \frac{4C^2C_9^2C_{14}^2}{4} \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \int_0^s \|\Delta\psi_1(s)\|^2 dt = (2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2) \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \\
& 2CC_9C_{14} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\|^2 dt + s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq \\
& (2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2) \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + s\|\Delta\psi_1(s)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\phi(s)\|^2 + \|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} \right) \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{C_{13}}{2} \int_0^s \|\Delta\psi_1(t)\| dt + \\
& s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 + (2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2) \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + \\
& s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 - 2\delta \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt \leq \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} \right) \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + \\
& (2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2) \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + 2s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 + \\
& 2\delta \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt \leq \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} + 2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2 \right) \\
& \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + 2\delta \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + 2s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq \\
& \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} + 2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2 + 2\delta \right) \\
& \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt + 2s\|\Delta\psi_1(s)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, segue-se que

$$\|\phi(s)\|^2 + \|\Delta\psi_1(s)\|^2 - 2s\|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq C_{15} \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt,$$

ou ainda,

$$\|\phi(s)\|^2 + (1 - 2s) \|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq C_{15} \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt,$$

sendo $C_{15} = \left(\frac{C_{13}}{2} + \frac{C_{13}^2}{4} + 2CC_9C_{14} + C^2C_9^2C_{14}^2 + 2\delta \right) > 0$.

Consideremos $s_0 > 0$, tal que $s_0 < \frac{1}{2}$. Então, para todo $s \in [0, s_0]$ temos que $1 - 2s >$

$1 - 2s_0 > 0$. Logo

$$\begin{aligned} \|\phi(s)\|^2 + (1 - 2s_0) \|\Delta\psi_1(s)\|^2 &\leq \|\phi(s)\|^2 + (1 - 2s) \|\Delta\psi_1(s)\|^2 \leq \\ C_{14} \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\phi(s)\|^2 + \|\Delta\psi_1(s)\|^2 &\leq \frac{C_{15}}{1 - 2s_0} \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt = \\ C_{16} \int_0^s (\|\phi(t)\|^2 + \|\Delta\psi_1(t)\|^2) dt. \end{aligned}$$

sendo $C_{16} = \frac{C_{15}}{1 - 2s_0}$.

Portanto, pelo Lema de Gronwall, temos que $\phi(x, s) = 0$ quase sempre em $[0, s_0]$.

Desde que $u \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$, $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $u'' \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, temos que: $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $u' \in C_s([0, T]; L^2(\Omega))$. Consequentemente

$$\phi(x, 0) = 0 = \phi'(x, s_0). \quad (3.15)$$

De forma análoga, repetimos o processo para o problema (3.3)₁, (3.3)₂ e (3.15), obtendo $\phi(x, s) = 0$, quase sempre em $[0, 2s_0]$. Sendo assim,

$$\phi(x, s) = 0 \text{ quase sempre em } [0, 2s_0].$$

Portanto, se repetirmos o processo um número finito de vezes, teremos que

$$\phi(x, t) = 0 \text{ quase sempre em } [0, T].$$

Capítulo 4

Decaimento exponencial

4.1 Decaimento exponencial

Nosso objetivo agora é mostrar que a energia total do sistema decai exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. Sendo assim, mostraremos o decaimento exponencial da energia para a solução aproximada u_m . A estimativa obtida em (2.32) nos permite concluir o mesmo resultado. Por motivo de simplicidade, também, escreveremos u em vez de u_m .

Teorema 4.1.1. Assumindo as hipóteses do teorema (2.1.1), então

$$E(t) \leq 2C_{19} \exp\{-C_{18}t\} \forall t \geq 0, \quad (4.1)$$

sendo

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] dx \quad (4.2)$$

e C_{18} é uma constante real positiva definida (4.5) e $C_{19} = H(0)$.

Demonstração:

De (2.23), (2.26) e (2.31), substituindo em (2.22), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + \\ M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] dx + \gamma(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\gamma(t) > 0$, segue-se que

$$\frac{d}{dt} H(t) + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2] dx \leq 0. \quad (4.3)$$

Consideremos agora o termo

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} u'(x, t) u(x, t) dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx + \\ \frac{\delta^2}{8} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx + \\ \frac{\delta^2 C^2}{8} \int_{\Omega} |\Delta u(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade na função $H(t)$, temos que

$$\begin{aligned} H(t) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[|u'(x, t)|^2 + \frac{1}{2} |u'(x, t)|^2 + \frac{\delta^2 C^2}{8} |\Delta u(x, t)|^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta^2}{2} |u(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \leq \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{3}{2} |u'(x, t)|^2 + \frac{\delta^2 C^2}{8} |\Delta u(x, t)|^2 + \frac{\delta^2 C^2}{2} |\Delta u(x, t)|^2 + \right. \\ &\quad \left. |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx \leq \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{3}{2} |u'(x, t)|^2 + \left(\frac{\delta^2 C^2}{8} + \frac{\delta^2 C^2}{2} + 1 \right) |\Delta u(x, t)|^2 + \right. \\ &\quad \left. M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Vamos considerar a constante $C_{17} > 0$, tal que

$$C_{17} = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{3}{2}, 1 + \frac{5\delta^2 C^2}{8} \right\}. \text{ Portanto}$$

$$H(t) \leq C_{17} \int_{\Omega} \left[|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) |\nabla u(x, t)|^2 \right] dx. \quad (4.4)$$

Fazendo $C_{18} = \frac{\delta}{2C_{17}}$, temos de (4.4) e (4.3), que

$$\frac{d}{dt} H(t) + C_{18} H(t) \leq 0. \quad (4.5)$$

Sabendo-se que $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1 \in L^2(\Omega)$. Então de (4.5), temos

$$H(t) \leq C_{19} \exp \{-C_{18} t\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.6)$$

De (4.6) podemos concluir a desigualdade (4.1). De fato, consideremos a inequação (2.25).

Então

$$H(t) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2) \right] dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo,

$$2H(t) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + 2|\Delta u(x, t)|^2 + 2M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)] dx \geq$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [|u'(x, t)|^2 + |\Delta u(x, t)|^2 + M(x, t, \|\nabla u(x, t)\|^2)] dx.$$

Da desigualdade acima e da definição de $E(t)$ em (4.2), segue-se que

$$2H(t) \geq E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

Finalmente, de (4.7) e (4.6) concluímos a demonstração do teorema 4.1.1

Capítulo 5

Conclusão

Diante dos resultados obtidos, conseguimos mostrar a existência, unicidade e comportamento assintótico para o problema (P). Portanto, dessa maneira podemos afirmar que a solução decai exponencialmente com o tempo de acordo com as hipóteses adotadas.

Para trabalhos futuros, podemos estudar a possibilidade de existência e unicidade de solução global forte, decaimento exponencial e sistema acoplado, onde devemos analisar se os espaços usados para solução global fraca são possíveis ou se será necessário usar outros espaços, de modo que o problema fique bem posto. Portanto, devemos verificar, também, se as hipóteses escolhidas para solução global fraca serão mantidas e/ou se haverá necessidade de novas hipóteses, métodos e técnicas para o problema (P).

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., FOURNIER, J. J. F. - **Sobolev Spaces**, Second Edition, Academic Press, New York, 2006.
- [2] BALL, J. M. - Initial-boundary value problems for an extensible beam. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 42, 61-90, 1973.
- [3] BALL, J. M. - Stability theory for an extensible beam. **Journal diff. eqns.** 14, 399-418, 1973.
- [4] BRÉZIS, H. - **Analyse fonctionnelle, théorie et applications**. Dunod, Paris, 2005.
- [5] BRÉZIS, H. - **Análisis funcional. Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.
- [6] BILER, P. - Remark on the decay for damped string and beam equation. **Nonlinear Analysis**. 10, 839-842. 1986.
- [7] BRITO, E. H. - Decay estimates for generalized damped extensible string beam equation. **Nonlinear Analysis**. 8, 1489-1496, 1984.
- [8] DICKEY, R. W. - Free vibrations and dynamic buckling of extensible beam. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 29, 443-454, 1969.
- [9] LADYZHENSKAIA, O. A., VISIK, M. I. - On boundary value problems for PDE and certain class of operators equations. **American Mathematical Society Translations Series**. 2, 10 (1958).
- [10] LÍMACO, J., CLARK, H. R., FEITOSA, A. J. - Beam evolution equation with variable coefficients. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**. 28, 457-478, 2005.

- [11] LIONS, J. L. - **Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires**. Dunod, Paris, 1969.
- [12] LIONS, J. L., MAGENES, E. - **Problèmes aux Limites non Homogènes et applications**. Vol. 1, Dunod, Paris, 19689.
- [13] MEDEIROS, L. A. - On a new class of nonlinear wave equations. **Journal of Mathematical Analysis and applications**. 69, 252-262, 1979.
- [14] MEDEIROS, L. A., MIRANDA, M. M. - Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais. **Textos de Métodos Matemáticos**. n° 25, IM-UFRJ, 1993.
- [15] MENZALA, G. P. - On global classical solutions of non-linear wave equation. **Journal appl. Analysis**. 10, 179-195, 1980.
- [16] MIKHLIN, S. G. - **Variational methods in mathematical Physics**. Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [17] MIRANDA, M. M. - Análise Espectral em Espaços de Hilbert. **Texto de Métodos Matemáticos**. n° 28, IM-UFRJ, 1990.
- [18] PEREIRA, D. C. - Existence, uniqueness and asymptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation. **Nonlinear Analisis, Theory, Methods & Applications**. Vol. 14. n° 8, 613-623, 1990.
- [19] RIVERA, J. E. M. - **Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**, LNCC, Petrópolis, 2005.
- [20] YOSIDA, K. - **Functional Analysis**, Sixth dition, Springer-Verlar, Berlin, 1995.
- [21] WOINOWSKY-KRIEGER, S. - The effect of axial force on the vibration of hinged bars. **Journal Application Mech.** 17, 35-36, 1950.