

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estabilidade de Semigrupo para Equações
de Evolução Lineares Abstratas

Luis Paulo do Vale Matos

Belém - PA
Abril, 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Estabilidade de Semigrupo para Equações
de Evolução Lineares Abstratas**

Autor: Luis Paulo do Vale Matos

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém - PA
Abril, 2009

Vale Matos, Luis Paulo do

Estabilidade de Semigrupo para Equações de Evolução Lineares Abstratas / (Luis Paulo do Vale Matos); Orientador, Mauro de Lima Santos. 2009.

70 p.; 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística, Belém - 2009.

1. Equações Diferenciais Parciais 2. Semigrupos I. Santos, Mauro de Lima, Orient. II. Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística III. Título.

CDD 22 ed. 515.35

Estabilidade de Semigrupo para Equações de Evolução Lineares Abstratas

Luis Paulo do Vale Matos

Dissertação de Mestrado submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará – PPGME - UFPA, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Área: Matemática.

Coordenador(PPGME): Prof. Dr. Mauro de Lima Santos.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (Orientador)

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha (UFSJ)

Prof. Dr. Cristina Lúcia Dias Vaz (UFPA)

Prof. Dr. Valcir João Cunha da Costa (UFPA)

Belém - PA
30 de Abril, 2009

RESUMO

Neste trabalho analisamos a existência de semigrupo e o comportamento assintótico de solução para dois sistemas lineares acoplados de equações diferenciais parciais. A formulação faz uso de operadores abstratos definidos em espaços de Hilbert convenientes. Utilizamos, para esta análise, resultados da Teoria de Semigrupos de Operadores.

ABSTRACT

In this work we analyse the existence of semigroup and asymptotic behavior of solution for two coupled linear systems of partial differential equations. The formulation makes use of abstract operators defined in suitable Hilbert spaces. In this analysis, we use some results of Operators Semigroup Theory.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados Prévios	4
1.1 Espaços de Sobolev	4
1.2 Semigrupos de Operadores	6
1.2.1 Comportamento Assintótico	8
1.3 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert	9
2 Elementos da Teoria de Semigrupos	10
2.1 Introdução	10
2.2 Definições	11
2.3 Semigrupos Uniformemente Contínuos em $\mathcal{B}(X, X)$	12
2.4 Semigrupos Fortemente Contínuos em $\mathcal{B}(X, X)$	18
2.5 O Teorema de Hille-Yosida	20
2.6 O Teorema de Lumer-Phillips	21
3 Problema 1	23
3.1 Introdução	23
3.2 Formulação por Operadores Abstratos	24
3.3 Uma formulação mais geral	27
3.3.1 Hipóteses sobre os Operadores e Notações	28
3.4 Existência de Solução	29
3.5 Estabilidade Exponencial do Semigrupo	34
3.6 Aplicações	39

4	Problema 2	42
4.1	Introdução	42
4.2	Algumas notações e hipóteses	43
4.3	A Energia do Sistema	45
4.4	Existência de Solução	47
4.5	Falta de Decaimento Exponencial	52
4.5.1	Caso $\gamma < 0$ e $\alpha < 1$	52
4.5.2	Caso $\gamma > 0$ e $\alpha \in \mathbf{R}$	56
4.6	Estabilidade Polinomial	58
4.7	Aplicações	65

Notações

- $\mathbf{N}$ corpo dos números naturais.
- $\mathbf{R}$ corpo dos números reais.
- $\mathbf{C}$ corpo dos números complexos.
- $\overline{E}$ o fecho do subconjunto E de um espaço topológico X .
- $C^k(E, F)$ o espaço das funções $f : E \rightarrow F$ k vezes continuamente diferenciáveis do espaço topológico E no espaço topológico F .
- $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço de Banach das funções lineares e contínuas do espaço de Banach E no espaço de Banach F .
- $\mathcal{L}(E)$ o espaço $\mathcal{L}(E, E)$.
- Ω um conjunto aberto do $\mathbf{R}^n$.
- $\partial\Omega$ a fronteira de Ω , isto é, $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.
- $E \subset\subset F$ se $\overline{E} \subset F$ e $\overline{E}$ é compacto.
- $\mathcal{D}(A)$ o domínio do operador A .
- $\rho(A)$ o conjunto resolvente do operador $A : X \rightarrow X$, isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbf{C}$ tais que o operador $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ onde X é Banach.
- $\sigma(A)$ o espectro do operador $A : X \rightarrow X$, isto é, $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$.
- $R(\lambda; A)$ o operador resolvente associado ao operador $A : X \rightarrow X$, isto é, $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$.
- $\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
- $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.
- $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \dots, \partial_{x_n} u)$.
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
- $u * v$ a convolução de u com v , $\int_{-\infty}^t u(t-s)v(s)ds$.

Introdução

Na análise de problemas envolvendo equações diferenciais parciais dependentes do tempo existem diversas técnicas matemáticas que podem ser utilizadas para se obter informações sobre a evolução destes sistemas. Neste trabalho, estudamos a existência de semigrupo e o comportamento assintótico de dois sistemas de equações diferenciais parciais acopladas. A principal ferramenta aqui utilizada é a Teoria de Semigrupos de Operadores.

Os sistemas analisados aparecem em termoelasticidade e viscoelasticidade. No primeiro problema é feita uma formulação abstrata baseada em [4]. No entanto, consideraremos casos mais gerais visto que no trabalho citado faz-se utilização de três operadores, enquanto que, aqui, supomos a possibilidade de mais operadores envolvidos. Para o problema viscoelástico, consideraremos a influência do comportamento passado na dinâmica atual do sistema, ou seja, tem-se a existência do termo de convolução onde aparece uma função *kernel* de memória g . Como será visto, as hipóteses sobre g desempenharão um papel fundamental para garantir a existência de semigrupo.

Em ambos os problemas, fazemos a análise utilizando operadores abstratos, isto é, consideraremos operadores auto-adjuntos e positivos definidos em espaços de Hilbert convenientes. O objetivo nesta análise é englobar diversos problemas.

A organização do trabalho é feita como se segue.

No capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados prévios que serão utilizados com frequência no decorrer do trabalho. Não faremos as demonstrações dos teoremas, porém, deixamos indicadas as referências onde podem ser encontrados os assuntos abordados e suas demonstrações.

Algumas das definições e resultados básicos da Teoria de Semigrupos de Operadores são apresentados no capítulo 2. Alguns dos resultados são demonstrados, no entanto, na maioria deles, apenas os enunciamos deixando

referências para consulta. Apresentamos de forma sistemática um pouco desta elegante teoria de forma a compreender os objetivos, estratégias e a idéia básica de aplicação na solução de problemas de evolução.

No capítulo 3, mostramos a existência de semigrupo e a estabilidade exponencial para o problema abaixo.

Seja $\Omega \in \mathbf{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ regular, $m \neq 0, \alpha, k > 0$. Estudamos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t + \alpha v = 0 \\ v_{tt} - \gamma \Delta v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u + m \Delta \theta = 0 \\ \theta_t - k \Delta \theta - m \Delta v_t = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0 \end{cases}$$

e a condição de contorno

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \theta = 0, \quad \text{em } \partial\Omega.$$

O problema acima motivou uma formulação por operadores abstratos, que será mostrada no desenvolvimento do capítulo 3, com objetivo de ampliar a análise para outros problemas. Neste caso, mostramos a existência de solução e estabilidade exponencial utilizando resultados da Teoria de Semigrupos de Operadores, mais especificamente os Teoremas: de Hille-Yosida, de Lumer-Phillips e de Prüss.

Por fim, no capítulo 4, analisamos as classes de problemas abstratos acoplados

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}u + g * \mathbb{A}^\alpha u + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \mathbb{B}v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } L^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{H})$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1, \end{cases}$$

onde $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são operadores auto-adjuntos e positivos definidos com domínios definidos em um espaço de Hilbert e $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função contínua e integrável.

Neste problema, utilizamos a Teoria de Semigrupos de Operadores para mostrar a existência de solução. Estudamos, também, que condições devem satisfazer os operadores envolvidos para que não haja decaimento exponencial. Isto é, estudamos as propriedades espectrais de $\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}^\alpha$ para que as hipóteses do Teorema de Prüss sejam violadas. Além disso, utilizamos o Método da Energia e funcionais de Lyapunov para mostrar o decaimento polinomial da energia.

Capítulo 1

Resultados Prévios

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições da Análise Funcional, da Teoria de Espaços de Sobolev, Equações Diferenciais Parciais e Semigrupos de Operadores. Por questões óbvias, omitimos as demonstrações dos teoremas apresentados. No entanto, deixamos indicadas as referências para verificação. Tais resultados serão utilizados nos demais capítulos.

1.1 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbf{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tais que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty,$$

se $1 \leq p < \infty$, ou

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| < \infty,$$

se $p = \infty$.

Se $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|.$$

Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{N}^N$ com $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Denotamos por D^α o operador derivada de ordem α , definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Identificamos a derivada de ordem 0 pela própria função, isto é, $D^0 u = u$. A representação de derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pode ser, eventualmente, representada por D_i . Assim, denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ no sentido das distribuições, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbf{N}^N$ com $|\alpha| \leq m$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx.$$

Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são denominados *espaços de Sobolev*.

Em particular, quando $p = 2$ fazemos a denotação $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Este espaço é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx,$$

e norma

$$\|u\|_{H^m}^2 = \langle u, u \rangle_{H^m}.$$

Teorema 1.1.1. (*Desigualdade de Hölder*)

Sejam $1 \leq p, q$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

A **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, freqüentemente utilizada neste texto, é um caso particular da Desigualdade de Hölder, mais especificamente, quando $p = q = 2$.

Teorema 1.1.2. (*Desigualdade de Poincaré*)

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbf{R}^n$. Então, existe uma constante c dependendo de Ω e n tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 1.1.1. (*Desigualdade de Young*) Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

A igualdade ocorre quando $a^p = b^q$. Para $p = q = 2$ tem-se, também, a chamada desigualdade de Young com ϵ . Isto é, seja $\epsilon > 0$, então, sob as mesmas condições do Lema anterior vale a desigualdade

$$ab \leq \frac{\epsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon}.$$

O resultado é obtido tomando $\sqrt{\epsilon}a$ e $\frac{b}{\sqrt{\epsilon}}$ na desigualdade de Young. Este resultado será usado com frequência no desenvolvimento do trabalho.

1.2 Semigrupos de Operadores

Nas definições e teoremas desta seção, consideramos X um espaço de Banach.

Definição 1.2.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X , isto é, $T(t) \in \mathcal{B}(X, X)$, $\forall t \geq 0$, é um semigrupo uniparamétrico de operadores lineares limitados de X em X se

1. $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
2. $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Definição 1.2.2. Quando um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x,$$

dizemos que este é um semigrupo fortemente contínuo ou C_0 -semigrupo.

Definição 1.2.3. O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ com domínio definido por

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e tal que

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}$$

para cada $x \in \mathcal{D}(A)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal, então a função $T : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X, X)$ é diferenciável em norma e satisfaz*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração: [1] Corolário 1.4, página 3.

Definição 1.2.4. *Seja X um espaço de Hilbert munido do produto interno $\langle, \rangle$ e seja $A : X \supset \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ um operador linear em X . Dizemos que A é dissipativo se*

$$\Re \langle AU, U \rangle \leq 0, \quad \forall U \in \mathcal{D}(A).$$

Teorema 1.2.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo gerado por A definido em um espaço de Hilbert H , então $S(t)$ é um semigrupo de contrações (isto é, $\|S(t)\| \leq 1$) se, e somente se, A é dissipativo.*

Demonstração: [2] Teorema 2.7.1, página 62.

Definição 1.2.5. *Seja X um espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$ um operador linear. Chamamos de conjunto resolvente de A e denotamos por $\rho(A)$ ao conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}.$$

Chamamos de espectro de A ao conjunto $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$.

Teorema 1.2.3. (Hille - Yosida) *Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

1. *A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*
2. *O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém $\mathbf{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: [1] Teorema 3.1, página 8.

Teorema 1.2.4. (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X .*

1. Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .
2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: [1] Teorema 4.3, página 14.

Teorema 1.2.5. *Seja A um operador dissipativo em X .*

- (a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então, $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechado, então, $\bar{A}$ também é dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, então, A é fechado.*

Demonstração: [1] Teorema 4.5, página 15.

Teorema 1.2.6. *Seja A um operador dissipativo tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Demonstração: [1] Teorema 4.6, página 16.

1.2.1 Comportamento Assintótico

Teorema 1.2.7. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{\lambda : \Re \lambda \geq 0\} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo λ tal que $\Re \lambda \geq 0$.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.6, página 120.

Teorema 1.2.8. (Prüss) *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de contrações definido num espaço de Hilbert H . Então, $T(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{i\beta : \beta \in \mathbf{R}\} \equiv i\mathbf{R} \subseteq \rho(A)$ e*

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\| \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$ e para todo β real.

Demonstração: [2] Teorema 3.5.5, página 120.

Neste trabalho, além dos teoremas acima mencionados, faremos análise do comportamento assintótico da energia pelo chamado **Método da Energia de Lyapunov**. Este método consiste, basicamente, em construir um funcional adequado $\mathcal{L}$ equivalente a energia do sistema $E(t)$, isto é, que existam constantes a, b tais que

$$aE(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq bE(t)$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\delta E(t).$$

1.3 Operadores Lineares em Espaços de Hilbert

Definição 1.3.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador linear limitado. Um operador linear limitado B sobre $\mathcal{H}$ é chamado de adjunto de A se $\forall x, y \in \mathcal{H}$*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

Dizemos que A é auto-adjunto quando $B = A$.

Para demonstração e aprofundamento dos resultados que seguem, indicamos [7].

Teorema 1.3.1. *(Hellinger - Toeplitz) Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Então, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e é auto-adjunto.

Teorema 1.3.2. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão infinita e seja $\mathbb{O} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto, então existe uma base $\{\beta_i\}$ para $\mathcal{H}$ formada por auto-vetores de $\mathbb{O}$.*

Teorema 1.3.3. *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. T é auto-adjunto $\Leftrightarrow \Re \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.*

Capítulo 2

Elementos da Teoria de Semigrupos

2.1 Introdução

A Teoria de Semigrupo de Operadores teve início em meados da década de 40 com os trabalhos de K. Yosida e E. Hille. Diversos outros matemáticos contribuíram para consolidação da teoria, dentre eles, destacamos Lumer e Phillips. Uma das mais importantes aplicações de semigrupos de operadores ocorre na análise de problemas em equações diferenciais parciais.

No sentido da álgebra abstrata, um *grupo* é uma estrutura $(G, *)$ formada por um conjunto não vazio G e uma lei de composição $(a, b) \mapsto a * b : G \times G \rightarrow G$ satisfazendo os seguintes axiomas: (a) (lei associativa) para todo $a, b, c \in G$, é válido que $(a * b) * c = a * (b * c)$; (b) (existência do elemento identidade) para cada $a \in G$ existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$; (c) (existência de inversa) para cada $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$. Quando (a) e (b) são satisfeitos, mas não necessariamente (c), $(G, *)$ é chamado *semigrupo*.

Em termos de operadores, um semigrupo uniparamétrico é uma família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ definidos num espaço de Banach X satisfazendo as seguintes propriedades: (i) $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ; (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$. Conforme será apresentado neste capítulo, existem algumas classificações para os semigrupos. Os semigrupos de maior interesse prático são os C_0 -semigrupos.

Esta teoria constitui uma forma elegante no trato de Equações Diferenciais Parciais (EDP), em particular, sistemas de evolução. A principal forma de abordagem reside no fato de que, para alguns problemas, a solução para o

problema de Cauchy associado ao problema em questão pode ser definida por um semigrupo. Os Teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips estabelecem as condições para que isto ocorra. Neste capítulo apresentamos elementos da Teoria de Semigrupos de Operadores Limitados e Não-limitados com ênfase na aplicação em EDPs.

2.2 Definições

Definição 2.2.1. *Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X , isto é, $T(t) \in \mathcal{B}(X, X)$, $\forall t \geq 0$, é um semigrupo uniparmétrico de operadores lineares limitados de X em X se*

- $T(0) = I$, onde I é o operador identidade em X ;
- $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupo).

Se, além disso, um semigrupo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz a condição

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$,

dizemos que é um semigrupo uniformemente contínuo.

Definição 2.2.2. *O gerador infinitesimal de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador linear $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X$ domínio definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} \text{ existe em } X \right\}$$

e tal que

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0}$$

para cada $x \in \mathcal{D}(A)$.

É simples verificar que se as 3 primeiras condições são satisfeitas, ou seja, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então

$$\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

De fato, fazendo $s = t + h$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow t} \|T(s) - T(t)\| &= \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t+h) - T(t)\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)T(h) - T(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)(T(h) - I)\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \|T(t)\| \|T(h) - I\| = 0;\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade de semigrupo, o fato de $T(t)$ ser limitado e que o semigrupo é uniformemente contínuo.

2.3 Semigrupos Uniformemente Contínuos em $\mathcal{B}(X, X)$

Antes de mostrarmos alguns resultados relativos aos semigrupos uniformemente contínuos, é conveniente definirmos a integral de Riemann de um semigrupo. Para isto, consideremos o intervalo $[a, b]$, com $0 \leq a \leq b < +\infty$. Consideremos, também, $P = (x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{P}_a^b$, com $x_0 = a$ e $x_N = b$, onde $\mathcal{P}_a^b$ é o conjunto de todas as partições finitas do intervalo $[a, b]$. Assim, para um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{B}(X, X)$, definimos

$$S(P; T) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) T(x_{k-1}).$$

Desta forma, a integral de Riemann do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é dada por

$$\int_a^b T(t) dt = \lim_{\substack{P \in \mathcal{P}_a^b \\ |P| \rightarrow 0}} S(P; T),$$

onde $|P| = \max_{k=1, \dots, N} (x_k - x_{k-1})$.

Como o semigrupo é uniformemente contínuo, então, é fácil mostrar que o limite acima sempre existe. Portanto, temos que $\int_a^b T(t) dt \in \mathcal{B}(X, X)$. É possível provar que se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ são semigrupos uniformemente contínuos e A é um operador linear limitado, então,

$$\int_a^b [AT(t) + S(t)] dt = A \int_a^b T(t) dt + \int_a^b S(t) dt.$$

Também é válido que para todo $t \geq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) ds = T(t).$$

No que se segue enunciamos e demonstramos um teorema que dá a condição necessária e suficiente para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 2.3.1. *Um operador linear A é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado, ou seja, $A \in \mathcal{B}(X, X)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja A um operador linear limitado em X e definamos o operador

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (2.1)$$

Este operador é um semigrupo uniformemente contínuo ¹. De fato, o lado direito da equação (2.1) converge em norma e define um operador linear limitado $T(t)$, pois estamos considerando que A é limitado. Além disso, temos:

- i - $T(0) = I$;
- ii - $T(t+s) = T(t)T(s)$;

Para ver isto, basta expandir a série de potências ou utilizar um fato conhecido da Análise Funcional: $AB = BA \Leftrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$ para $A, B \in \mathcal{B}(X, X)$. Como tA e sA comutam para todo $t, s \geq 0$, segue que $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ mostrando o resultado.

- iii - $\|T(t) - I\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

De fato,

$$\begin{aligned} \|T(t) - I\| &= \left\| \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = t\|A\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \|A\|^{k-1}}{k!} \\ &\leq t\|A\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \|A\|^{k-1}}{(k-1)!} = t\|A\| e^{t\|A\|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

¹Para ser mais correto, $T(t)$ pertence a um semigrupo; lembrar que semigrupo é uma família de operadores.

quando $t \rightarrow 0^+$.

Assim, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é, por definição, um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X . Além disso, A é o gerador infinitesimal deste semigrupo. De fato, notemos que quando $t \rightarrow 0^+$

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| (e^{At} - I) \rightarrow 0.$$

Concluimos que se A é um operador linear limitado, então, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em $\mathcal{B}(X, X)$ e A é o gerador infinitesimal. $\square$

Antes de mostrarmos a reciprocidade, enunciamos e demonstramos um lema que será útil.

Lema 2.3.1. *Seja $A \in \mathcal{B}(X, X)$ satisfazendo $\|A\| < 1$. Então $I - A$ é inversível.*

Demonstração. A função

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

é analítica em $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Logo, como $\|A\| < 1$, temos que $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ é um operador linear limitado em X , isto é, $f(A) \in \mathcal{B}(X, X)$. Além disso, como A comuta com qualquer uma de suas potências, então, pela série de potências temos que

$$(I - A)f(A) = f(A)(I - A) = I.$$

Portanto, $I - A$ é inversível e $(I - A)^{-1} = f(A)$. $\square$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Retornemos a demonstração do Teorema (2.3.1). Reciprocamente, seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo em $\mathcal{B}(X, X)$. Mostraremos que o gerador infinitesimal deste semigrupo é um operador linear limitado em X .

Das propriedades da integral de Riemann de um semigrupo uniformemente contínuo, podemos escolher um $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds \right\| < 1.$$

Considerando isto, pelo lema anterior, temos que $I - (I - \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds) = \rho^{-1} \int_0^\rho T(s)ds$ é um operador inversível e, portanto, $\int_0^\rho T(s)ds$ também é.

Agora, seja $h \in (0, \rho)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[T(h) - I] \int_0^\rho T(s)ds &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right] = \frac{1}{h} \left[\int_h^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^\rho T(s)ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\rho T(s)ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds - \int_h^\rho T(s)ds \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Desde que $\int_0^\rho T(s)ds$ é inversível, segue que

$$\frac{T(h) - I}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds \right] \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$ na igualdade acima concluimos que $h^{-1}[T(h) - I]$ converge em norma e, portanto, fortemente para o operador linear limitado $[T(\rho) - I] \left(\int_0^\rho T(s)ds \right)^{-1}$. Além disso, este último é, por definição, o gerador infinitesimal do semigrupo.

□

Corolário 2.3.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo em X e A seu gerador infinitesimal. Então $\mathcal{D}(A) = X$.*

Demonstração. Como convergência uniforme implica em convergência forte, segue que para todo $x \in X$ existe o $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h}[T(h) - I]$. Portanto, $\mathcal{D}(A) = X$.

□

Pela definição (2.2.2), um semigrupo tem um único gerador infinitesimal e caso este semigrupo seja uniformemente contínuo, pelo Teorema (2.3.1), seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. Além disso, ainda pelo teorema (2.3.1), todo operador linear limitado é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo. O teorema apresentado em seguida mostra que tal semigrupo é único.

Teorema 2.3.2. *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados. Se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t}, \quad (2.2)$$

então $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Fixe $T > 0$. Mostraremos $T(t) = S(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Inicialmente, notemos que as funções $f(t) = \|T(t)\|$ e $g(t) = \|S(t)\|$ são lineares e contínuas. Assim, existe um constante positiva C tal que

$$\|T(t)\| \|S(s)\| \leq C,$$

para todo $t, s \in [0, T]$. Agora, de (2.2) concluímos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{h} \|T(h) - S(h)\| \leq \frac{\epsilon}{TC},$$

para $0 < h \leq \delta$.

Escolhendo $t \in [0, T]$ e um $n \geq 1$ tal que $t/n < \delta$, temos que

$$S(t) - T(t) = S\left(n \frac{t}{n}\right) - T\left(n \frac{t}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[S\left(\frac{n-k}{n}t\right) T\left(\frac{k}{n}t\right) - S\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) T\left(\frac{k+1}{n}t\right) \right]$$

Da soma acima, utilizando a propriedade de semigrupos, concluímos que

$$\begin{aligned} \|S(t) - T(t)\| &= \left\| S\left(n \frac{t}{n}\right) - T\left(n \frac{t}{n}\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[S\left(\frac{n-k}{n}t\right) T\left(\frac{k}{n}t\right) - S\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) T\left(\frac{k+1}{n}t\right) \right] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| S\left(\frac{n-k}{n}t\right) T\left(\frac{k}{n}t\right) - S\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) T\left(\frac{k+1}{n}t\right) \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left[S\left(\frac{n-k-1}{n}t\right) \right] \left[S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(\frac{t}{n}\right) \right] \left[T\left(\frac{k}{n}t\right) \right] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} C \frac{\epsilon}{TC} \frac{t}{n} \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, então $T(t) = S(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Se T tender ao infinito o resultado vale para todo $t \geq 0$. Isto conclui a demonstração.

□

Corolário 2.3.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados. Então*

- (a) *Existe um único operador linear limitado A tal que $T(t) = e^{At}$ e, além disso, A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.*
- (b) *Existe uma constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| = e^{\omega t}$.*
- (c) *A função $T : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{B}(X, X)$ é diferenciável em norma e satisfaz*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração.

- (a) Seja A gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$. Como A é gerador infinitesimal do semigrupos e^{At} , pelo teorema 2.3.2, temos a unicidade $T(t) = e^{At}$.
- (b) Basta verificar que, após aplicarmos a desigualdade triangular na série de potências de e^{At} , é válido $\|T(t)\| = \|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t}$.
- (c) Temos que

$$\begin{aligned} AT(t) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} T(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)T(t) - T(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h+t) - T(t)}{h} = \frac{dT(t)}{dt} \end{aligned}$$

Analogamente, $T(t)A = \frac{dT(t)}{dt}$.

□

Observação: O item (c) do corolário anterior nos permite notar que dado $U_0 \in X$, a função $U(t) = T(t)U_0$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = AU(t), & t > 0. \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.4 Semigrupos Fortemente Contínuos em $\mathcal{B}(X, X)$

Consideraremos X um espaço de Banach.

Na seção anterior vimos alguns resultados concernentes aos semigrupos uniformemente contínuos. Mostramos que quando o semigrupo é uniformemente contínuo, este define uma solução para o problema de Cauchy (2.4). No entanto, em aplicações, raramente o operador A é limitado. Aqui, analisaremos uma classe mais restrita de semigrupos: os *semigrupos fortemente contínuos*. Como veremos adiante, se um semigrupo é uniformemente contínuo, então, ele é fortemente contínuo. No entanto, em geral, a recíproca não é verdadeira.

Definição 2.4.1. *Um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em X é um semigrupo fortemente contínuo em $\mathcal{B}(X, X)$ se para todo $x \in X$*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x.$$

Os semigrupos fortemente contínuos de operadores lineares limitados em X também podem ser chamados de *semigrupos de classe C_0* ou *C_0 -semigrupos*.

O teorema a seguir é relativo à limitação da norma de semigrupos de classe C_0 .

Teorema 2.4.1. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 . Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Inicialmente, motivados pela continuidade forte do semigrupo em $t = 0$, notemos que existem constantes $\xi > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \xi]$. De fato, supondo o caso contrário, existiria uma seqüência $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ com $t_n > 0$, satisfazendo $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$ com $\|T(t_n)\| \geq n$. Assim, pelo Teorema da Limitação Uniforme deve existir um $x \in X$ tal que $T(t_n)x \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas isto é uma contradição ao fato do semigrupo ser de classe C_0 , isto é, contradiz a continuidade forte em $t = 0$. Logo, existem constantes $\xi > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \xi]$. Desde que $T(0) = I$, então $M \geq 1$.

Consideremos, agora, um $t \geq 0$. O Algoritmo de Euclides nos garante que existem constantes $k \in \mathbf{N}$ e $\delta \in [0, \xi]$ tais que $t = k\xi + \delta$. Portanto, pela propriedade de semigrupo

$$\|T(t)\| = \|T(k\xi + \delta)\| = \|T(\delta)T(\xi)^k\| \leq MM^k \leq MM^{t/\xi}.$$

pois $M \geq 1$.

Além disso, temos que $\omega = \xi^{-1} \ln M \geq 0$. Disto, temos que $e^\omega = M^{1/\xi}$. Portanto, para todo $t \geq 0$ vale que $e^{\omega t} = M^{t/\xi}$. Segue o resultado. $\square$

Corolário 2.4.1. *Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo, então, para cada $x \in X$, a função $f_x : \mathbf{R}^+ \rightarrow X$ tal que $f_x(t) = T(t)x$ é contínua.*

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$. Temos que

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\| \rightarrow 0,$$

quando $h \rightarrow 0$.

Além disso, para $0 \leq h \leq t$ segue que

$$\begin{aligned} \|T(t-h)x - T(t)x\| &\leq \|T(t-h)\| \|x - T(h)x\| \\ &\leq Me^{\omega(t-h)} \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \|T(h)x - x\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 2.4.2. *Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então*

1. $\forall x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

2. $\forall x \in X$, $\int_0^t T(s)x ds \in \mathcal{D}(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x.$$

3. $\forall x \in \mathcal{D}(A)$, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

4. $\forall x \in \mathcal{D}(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Corolário 2.4.2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, então $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ e A é um operador linear fechado.

Teorema 2.4.3. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupos com geradores infinitesimais A e B , respectivamente. Então, $A = B$ se, e somente se, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 2.4.4. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Se $\mathcal{D}(A^n)$ é o domínio do operador A^n , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X .

2.5 O Teorema de Hille-Yosida

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Segue do Teorema 2.4.1 que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M > 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.

Definição 2.5.1. Quando $\omega = 0$ dizemos que o semigrupo é uniformemente limitado. Se, além disso, $M = 1$ o chamamos de C_0 -semigrupo de contrações.

Definição 2.5.2. Seja $A : X \rightarrow X$ um operador linear, não necessariamente limitado. O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é dado por

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (\lambda I - A) \text{ é inversível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)\}.$$

Definição 2.5.3. A família $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ de operadores lineares limitados, com $\lambda \in \rho(A)$, é chamada de resolvente de A .

Teorema 2.5.1. (Hille - Yosida) Um operador linear A (não limitado) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,

1. A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, contém $\mathbf{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração: [1].

Lema 2.5.1. Seja A um operador satisfazendo as condições 1. e 2. do Teorema 2.5.1 então para cada $x \in X$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x.$$

Definição 2.5.4. Definimos, para cada $\lambda > 0$, a aproximação de Yosida de A por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

Lema 2.5.2. Seja A um operador satisfazendo as condições 1. e 2. do Teorema 2.5.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então para cada $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Lema 2.5.3. Seja A um operador satisfazendo as condições 1. e 2. do Teorema 2.5.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A , então, A_λ é o gerador infinitesimal de semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} . Além disso, para cada $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$ temos

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

2.6 O Teorema de Lumer-Phillips

Vimos que o Teorema de Hille-Yosida faz uma caracterização de geradores infinitesimais de C_0 -semigrupos de contrações. O Teorema de Lumer-Phillips faz uma caracterização diferente para tais geradores infinitesimais.

Definição 2.6.1. Um operador linear A é dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\Re \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

Teorema 2.6.1. Um operador linear A é dissipativo se, e somente se, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda > 0$

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Teorema 2.6.2. (Lumer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X .

1. Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .
2. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração: [1]

Corolário 2.6.1. *Seja A um operador linear, dissipativo com domínio denso em X . Se $0 \in \rho(A)$, então, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

Teorema 2.6.3. *Seja A um operador dissipativo em X .*

- (a) *Se para algum $\lambda_0 > 0$, $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então, $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*
- (b) *Se A é fechado, então, $\bar{A}$ também é dissipativo.*
- (c) *Se $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, então, A é fechado.*

Teorema 2.6.4. *Seja A um operador dissipativo tal que $\text{Im}(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

Capítulo 3

Problema 1

3.1 Introdução

Sejam $\Omega \in \mathbf{R}^n$ um aberto limitado com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ regular, $m \neq 0, \alpha, k > 0$. Analisaremos um sistema acoplado de equações diferenciais parciais. Temos uma equação de onda com efeito de dissipação (devido às vibrações amortecidas) acoplada com a equação da placa e esta por sua vez acoplada com a equação do calor. O problema é o que se segue

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t + \alpha v = 0 \\ v_{tt} - \gamma \Delta v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u + m \Delta \theta = 0 \\ \theta_t - k \Delta \theta - m \Delta v_t = 0 \end{cases} \text{ em } \Omega \times \mathbf{R}^+ \quad (3.1)$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

e a condição de contorno

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \theta = 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Mostraremos a existência de solução para o problema, a unicidade de solução e o comportamento assintótico do semigrupo associado a este problema. Para isto, faremos uso de resultados conhecidos da Teoria de Semigrupos de Operadores, Análise Funcional, Teoria Espectral e de Sistemas

Dissipativos. No entanto, na abordagem realizada para solução, conforme veremos posteriormente, estendemos o problema para uma classe de problemas mais ampla através de formulação abstrata. Desta forma o problema apresentado poderá ser analisado como caso particular das abstrações apresentadas.

3.2 Formulação por Operadores Abstratos

A formulação abstrata apresentada em seguida segue os trabalhos feitos sobre problemas similares como em [4].

Seja $A_B : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(A_B) \longrightarrow L^2(\Omega)$ o operador $A_B \equiv \Delta^2$ com $\mathcal{D}(A_B) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Este operador tem as seguintes características:

- A_B é positivo definido;
- A_B é auto-adjunto;
- $\mathcal{D}(A_B^{1/4}) = H_0^1(\Omega)$;
- $\mathcal{D}(A_B^{1/2}) = H_0^2(\Omega)$;
- $\mathcal{D}(A_B^{3/4}) = H_0^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Assim, pelo quarto item acima e da formula de Green, segue que para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(A_B^{1/2})$

$$\langle A_B \xi_1, \xi_2 \rangle_{[\mathcal{D}(A_B^{1/2})]^\circ \times \mathcal{D}(A_B^{1/2})} = \langle A_B^{1/2} \xi_1, A_B^{1/2} \xi_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \Delta \xi_1, \Delta \xi_2 \rangle_{L^2(\Omega)},$$

e conseqüentemente,

$$\|\xi\|_{\mathcal{D}(A_B^{1/2})} = \|A_B^{1/2} \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\Delta \xi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Seja $A_D : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(A_D) \longrightarrow L^2(\Omega)$ o operador $A_D \equiv -\Delta$ com $\mathcal{D}(A_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Novamente, conforme apresentado em [4], este operador tem as seguintes características:

- A_D é positivo definido;
- A_D é auto-adjunto;
- $\mathcal{D}(A_D^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.

Dadas as propriedades acima e o Teorema de Green, segue que para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(A_D^{1/2})$

$$\langle A_D \xi_1, \xi_2 \rangle_{[\mathcal{D}(A_D^{1/2})]^\ell \times \mathcal{D}(A_D^{1/2})} = \langle A_D^{1/2} \xi_1, A_D^{1/2} \xi_2 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla \xi_1, \nabla \xi_2 \rangle_{[L^2(\Omega)]^2},$$

e portanto,

$$\|\xi\|_{\mathcal{D}(A_D^{1/2})} = \|A_D^{1/2} \xi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla \xi\|_{[L^2(\Omega)]^2}^2.$$

Agora, seja $\gamma \geq 0$. Definimos o espaço

$$H_{0,\gamma}^1(\Omega) = \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \text{se } \gamma > 0 \\ L^2(\Omega) & \text{se } \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Definimos, também, o operador

$$P_\gamma \equiv I + \gamma A_D. \quad (3.5)$$

No caso em que $\gamma > 0$, munimos os espaço $H_{0,\gamma}^1(\Omega)$ do produto interno dado por

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{0,\gamma}^1(\Omega)} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \gamma \langle \nabla \xi_1, \nabla \xi_2 \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H_0^1. \quad (3.6)$$

Denotando por $H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_{0,\gamma}^1(\Omega)$, então, é simples verificar, a partir das características anteriores do operador A_D , que

$$P_\gamma \in \mathcal{L}(H_{0,\gamma}^1(\Omega), H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega)), \quad (3.7)$$

satisfazendo

$$\langle P_\gamma \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\gamma}^1(\Omega)} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{0,\gamma}^1(\Omega)}. \quad (3.8)$$

Podemos verificar que o operador P_γ é $H_{0,\gamma}^1(\Omega)$ -elíptico, isto é, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$|\langle P_\gamma \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\gamma}^1(\Omega)}| \leq a \|\xi_1\|_{H_{0,\gamma}^1(\Omega)} \|\xi_2\|_{H_{0,\gamma}^1(\Omega)} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H_{0,\gamma}^1(\Omega)$$

e uma constante $b > 0$ tal que

$$\langle P_\gamma \xi, \xi \rangle_{H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega) \times H_{0,\gamma}^1(\Omega)} \geq b \|\xi\|_{H_{0,\gamma}^1(\Omega)}^2 \quad \forall \xi \in H_{0,\gamma}^1(\Omega),$$

o que é trivial, bastando tomar a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da equação (3.8).

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, o operador P_γ é inversível e

$$P_\gamma^{-1} \in \mathcal{L}(H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega), H_{0,\gamma}^1(\Omega)). \quad (3.9)$$

Além disso, o operador $P_\gamma : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(P_\gamma) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é:

- positivo definido;
- auto-adjunto;
- $\mathcal{D}(P_\gamma^{1/2}) = H_{0,\gamma}^1(\Omega)$.

Utilizando os produtos internos (3.6) e (3.8) segue que

$$\langle P_\gamma^{1/2}\xi_1, P_\gamma^{1/2}\xi_2 \rangle_{L^2} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{H_{0,\gamma}^1} \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H_{0,\gamma}^1. \quad (3.10)$$

Se considerarmos o caso $\gamma = 0$, então, $P_\gamma = I$ e pela definição $H_{0,\gamma}^1(\Omega) = L^2(\Omega) = H_{0,\gamma}^{-1}(\Omega)$.

Agora, reescrevendo o sistema considerado (3.1) em termos dos operadores A_B, A_D e P_γ obtemos:

$$\begin{cases} u_{tt} + A_D u + \beta A_D u_t + \alpha v = 0 \\ P_\gamma v_{tt} + A_B v + \alpha u - m A_D \theta = 0 \\ \theta_t + k A_D \theta + m A_D v_t = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+. \quad (3.11)$$

Denotemos por $\mathcal{H}_\gamma$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}_\gamma = \mathcal{D}(A_D^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{D}(A_B^{1/2}) \times H_{0,\gamma}^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (3.12)$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi}, \bar{\zeta} \rangle_{\mathcal{H}_\gamma} &= \left\langle \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}_\gamma} = \\ &= \langle A_D^{1/2}\xi_1, A_D^{1/2}\zeta_1 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \xi_2, \zeta_2 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle A_B^{1/2}\xi_3, A_B^{1/2}\zeta_3 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &+ \langle P_\gamma^{1/2}\xi_4, P_\gamma^{1/2}\zeta_4 \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \xi_5, \zeta_5 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &+ \alpha \langle \xi_1, \zeta_3 \rangle_{L^2(\Omega)} + \alpha \langle \xi_3, \zeta_1 \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)^T, \bar{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5)^T \in \mathcal{H}_\gamma$.

Agora, definimos o operador $\mathcal{A}_\gamma : \mathcal{H}_\gamma \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_\gamma$ tal que

$$\mathcal{A}_\gamma \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -A_D & -\beta A_D & -\alpha I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha P_\gamma^{-1} & 0 & -P_\gamma^{-1} A_B & 0 & m P_\gamma^{-1} A_D \\ 0 & 0 & 0 & -m A_D & -k A_D \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

com domínio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma) &= \{\bar{\xi} \in \mathcal{H}_\gamma : \mathcal{A}_\gamma \bar{\xi} \in \mathcal{H}_\gamma\} \\ &= \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)^T \in \mathcal{H}_\gamma \left| \begin{array}{l} \xi_1 \in H_{0,\gamma}^{-1} \\ A_B \xi_3 \in H_{0,\gamma}^{-1} \\ \xi_2 \in \mathcal{D}(A_D^{1/2}) \\ \xi_4 \in \mathcal{D}(A_B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A_D) \\ \xi_5 \in \mathcal{D}(A_D) \end{array} \right. \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto, se fizermos $U(t) = (u, u_t, v, v_t, \theta)^T \in \mathcal{H}_\gamma$ com $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^T \in \mathcal{H}_\gamma$, então, o problema (3.1)-(3.3) pode ser escrito com uma equação de evolução abstrata da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}_\gamma U(t), & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Embora este sistema seja uma formulação abstrata para o problema original (3.1)-(3.3) podendo ser escrito como um problema de Cauchy abstrato, e portanto, podendo ser estudado segundo a Teoria de Semigrupos de Operadores, consideraremos agora um problema ainda mais abrangente de forma que o sistema acima esteja nas condições de nossa formulação.

3.3 Uma formulação mais geral

Sejam $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{P}$ operadores positivos definidos, auto-adjuntos e com domínios densos num espaço de Hilbert $H = H(\Omega)$.

Estudaremos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}_1 u + \beta \mathbb{B} u_t + \alpha v = 0 \\ \mathbb{P} v_{tt} + \mathbb{A}_2 v - m \mathbb{C} \theta + \alpha u = 0 \\ \theta_t + k \mathbb{A}_3 \theta + m \mathbb{C} v_t = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Em seguida mostraremos que o sistema acima é dissipativo para uma classe adequada de operadores $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{P}$. Estudaremos, também, o comportamento assintótico do semigrupo associado a este sistema, isto é, mostraremos o decaimento exponencial do sistema. Para isto faremos uso do Teorema 2.6.2 de Lumer-Phillips e do Teorema de Prüss.

3.3.1 Hipóteses sobre os Operadores e Notações

Suporemos que os operadores $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ e $\mathbb{P}$ sejam positivos definidos, auto-adjuntos, com domínios densos em um espaço de Hilbert $H = H(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathbb{A}_1) &\subset \mathcal{D}(\mathbb{B}) \\ \mathcal{D}(\mathbb{A}_1), \mathcal{D}(\mathbb{A}_2), \mathcal{D}(\mathbb{A}_3) &\subset \mathcal{D}(\mathbb{P}) \\ \mathcal{D}(\mathbb{A}_2) &\subset \mathcal{D}(\mathbb{A}_1).\end{aligned}$$

Supomos que o operador $\mathbb{P}$ é bijeção em seu domínio. Ou seja, a inversa de $\mathbb{P}$ está bem definida.

Além disso, assumiremos que os operadores $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{B}$ e $\mathbb{P}$ satisfazem

$$\|\xi_1\|^2 \leq c_1 \|\mathbb{A}_1^{1/2} \xi_1\|^2 \quad \forall \xi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \quad (3.19)$$

$$\|\xi_2\|^2 \leq c_2 \|\mathbb{A}_2^{1/2} \xi_2\|^2 \quad \forall \xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}) \quad (3.20)$$

$$\|\xi_3\|^2 \leq c_3 \|\mathbb{A}_3^{1/2} \xi_3\|^2 \quad \forall \xi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_3^{1/2}) \quad (3.21)$$

$$\|\xi_4\|^2 \leq c_4 \|\mathbb{B}^{1/2} \xi_4\|^2 \quad \forall \xi_4 \in \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \quad (3.22)$$

$$\|\xi_5\|^2 \leq c_5 \|\mathbb{P}^{1/2} \xi_5\|^2 \quad \forall \xi_5 \in \mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2}) \quad (3.23)$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 são constantes reais positivas. Além disso, existem $a, b, c > 0$ tais que

$$a \|\mathbb{A}_1^{1/2} \xi\|^2 \leq \|\mathbb{P}^{1/2} \xi\|^2 \leq b \|\mathbb{A}_1^{1/2} \xi\|^2 \leq c \|\mathbb{A}_2^{1/2} \xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}). \quad (3.24)$$

Seja $r \in \mathbf{R}$ e T um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert H ($T : H \supset \mathcal{D}(T) \rightarrow H$). Definimos os produtos internos nos espaços de Hilbert $\mathcal{D}(T^{r/2})$ como segue:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{D}(T^{r/2})} = \langle T^{r/2} \xi_1, T^{r/2} \xi_2 \rangle_H = \langle T^r \xi_1, \xi_2 \rangle_H, \quad (3.25)$$

para todo $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}(T^r)$.

Além disso, $\mathcal{D}(T^{r_1/2}) \subset \mathcal{D}(T^{r_2/2})$ sempre que $r_1 > r_2$.

3.4 Existência de Solução

Para a existência e unicidade de solução do problema abstrato da seção anterior (3.17), usamos técnicas de semigrupos de operadores. Lembrando que todos os operadores são positivos definidos e auto-adjuntos construiremos um espaço de Hilbert e um produto interno neste espaço em conformidade com a energia do sistema.

Inicialmente, para uma adequada formulação, introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \times H \times \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2}) \times H \quad (3.26)$$

munido do produto interno

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})} + \langle u_2, v_2 \rangle + \langle u_3, v_3 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})} + \langle u_4, v_4 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})} \\ &\quad + \langle u_5, v_5 \rangle + \alpha \langle u_1, v_3 \rangle + \alpha \langle u_3, v_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5]^T$, $V = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]^T \in \mathcal{H}$.

Agora, fazendo $u_t = v$, $v_t = \vartheta$ e $U(t) = [u(t), \xi(t), v(t), \omega(t), \theta(t)]^T$, $U_0 = [u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0]^T \in \mathcal{H}$, o problema (3.17) pode ser escrito como um sistema linear de evolução no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com segue

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (3.28)$$

onde o operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbb{A}_1 & -\beta\mathbb{B} & -\alpha I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha\mathbb{P}^{-1} & 0 & -\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}_2 & 0 & +m\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C} \\ 0 & 0 & 0 & -m\mathbb{C} & -k\mathbb{A}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Logo, aplicando $\mathcal{A}$ ao vetor $U(t)$ definido acima, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}U(t) &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbb{A}_1 & -\beta\mathbb{B} & -\alpha I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\alpha\mathbb{P}^{-1} & 0 & -\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}_2 & 0 & +m\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C} \\ 0 & 0 & 0 & -m\mathbb{C} & -k\mathbb{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \xi \\ v \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \xi \\ -\mathbb{A}_1 u - \beta\mathbb{B}\xi - \alpha v \\ \omega \\ -\alpha\mathbb{P}^{-1}u - \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}_2 v + m\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C}\theta \\ -m\mathbb{C}\omega - k\mathbb{A}_3\theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Assim, o domínio do operador $\mathcal{A}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{U \in \mathcal{H} : \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\} \\ &= \left\{ (u, \xi, v, \omega, \theta)^T \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1) \\ \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{B}) \\ v \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2) \\ \omega \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{C}) \\ \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_3) \cap \mathcal{D}(\mathbb{C}) \\ u + \mathbb{A}_2 v + \mathbb{C}\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{P}^{-1}) \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (u, \xi, v, \omega, \theta)^T \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1) \\ \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{B}) \\ v \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2) \\ \omega \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}) \\ \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_3) \end{array} \right. \right\}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mostraremos que o operador $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Utilizaremos para isto dois resultados: o Teorema 2.6.2 de Lumer-Phillips e o Teorema 2.5.1 de Hille-Yosida. Serão dadas duas demonstrações para o teorema que segue.

Teorema 3.4.1. *O operador linear $\mathcal{A}$ em (3.29) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Demonstraremos este teorema de duas maneiras. A primeira considera o Teorema de Lumer-Phillips e a segunda o Teorema de Hille-Yosida.

Demonstração 1

Nesta primeira demonstração, faremos uso de um corolário do Teorema de Lumer-Phillips. Para isso, verificamos que o operador linear $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U = [u, \xi, v, \omega, \theta]^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} \xi \\ -\mathbb{A}_1 u - \beta \mathbb{B} \xi - \alpha v \\ \omega \\ -\alpha \mathbb{P}^{-1} u - \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}_2 v + m \mathbb{P}^{-1} \mathbb{C} \theta \\ -m \mathbb{C} \omega - k \mathbb{A}_3 \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \xi \\ v \\ \omega \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

Utilizando o produto interno (3.27) definido em $\mathcal{H}$ vem que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \xi, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})} + \langle -\mathbb{A}_1 u - \beta \mathbb{B} \xi - \alpha v, \xi \rangle + \langle \omega, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})} \\ &\quad + \langle -\alpha \mathbb{P}^{-1} u - \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}_2 v + m \mathbb{P}^{-1} \mathbb{C} \theta, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})} \\ &\quad + \langle -m \mathbb{C} \omega - k \mathbb{A}_3 \theta, \theta \rangle + \alpha \langle \xi, v \rangle + \alpha \langle \omega, u \rangle. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, desenvolvendo o produto interno acima utilizando o fato de que todos os operadores são auto-adjuntos e assumindo a propriedade (3.25), tomando a parte real e cancelando os termos convenientemente, obtemos

$$\Re \left\{ \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} \right\} = -\beta \|\mathbb{B}^{1/2} \xi\|^2 - k \|\mathbb{A}_3^{1/2} \theta\|^2 \leq 0, \quad (3.33)$$

pois assumimos que $\beta, k > 0$.

Portanto, $\mathcal{A}$ é um operador linear dissipativo. Para completar a demonstração basta ver que $0 \in \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})\}$. De fato, seja $F = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T \in \mathcal{H}$ e consideremos a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ para $\lambda = 0$. Assim, obtemos $-\mathcal{A}U = F$ que em termos de suas componentes torna-se

$$-\xi = F_1 \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \quad (3.34)$$

$$\mathbb{A}_1 u + \beta \mathbb{B} \xi + \alpha v = F_2 \quad \in H \quad (3.35)$$

$$-\omega = F_3 \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2}) \quad (3.36)$$

$$\alpha \mathbb{P}^{-1} u + \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}_2 v - m \mathbb{P}^{-1} \mathbb{C} \theta = F_4 \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2}) \quad (3.37)$$

$$m \mathbb{C} \omega + k \mathbb{A}_3 \theta = F_5 \quad \in H \quad (3.38)$$

Basta mostrar que a solução é única. Notemos que de (3.34) $\exists! \xi \in (\mathbb{A}_1^{1/2})$. De (3.36) e (3.38) segue que $\exists! \omega \in (\mathbb{A}_2^{1/2}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{D}_2)$. Agora substituindo $\omega = -F_3$ em (3.38) vem que $\exists! \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_3)$. Substituindo $\xi = -F_1$ em (3.35) e θ em (3.37) vem que

$$\begin{cases} \mathbb{A}_1 u + \alpha v = \Omega \\ \alpha u + \mathbb{A}_2 v = \Gamma. \end{cases}$$

onde $\Omega = F_2 - \beta \mathbb{B} F_1$ e $\Gamma = \mathbb{P} F_4 + m \mathbb{C} \theta$. Devemos mostrar que existem u e v satisfazendo a equação acima. Para isso, seja $X = \mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})$ e consideremos a forma bilinear $a : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que

$$a(W_1, W_2) = \left\langle (\mathbb{A}_1 u_1 + \alpha v_1, \alpha u_1 + \mathbb{A}_2 v_1), (u_2, v_2) \right\rangle$$

onde $W_1 = (u_1, v_1)$ e $W_2 = (u_2, v_2)$.

A forma bilinear assim definida é limitada e coersiva. De fato, temos que

$$\begin{aligned} |a(W_1, W_2)| &= \left| \langle \mathbb{A}_1 u_1, u_2 \rangle + \alpha \langle v_1, u_2 \rangle + \alpha \langle u_1, v_2 \rangle + \langle \mathbb{A}_2 v_1, v_2 \rangle \right| \\ &\leq C \left(\|\mathbb{A}_1^{1/2} u_1\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2} v_1\|^2 \right) \left(\|\mathbb{A}_1^{1/2} u_2\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2} v_2\|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e utilizamos o fato de que $\|u_i\|^2 \leq c \|\mathbb{A}_j^{1/2} u_i\|^2$ (as hipóteses (3.19) e (3.20)).

Além disso, seja $W = (u, v)$. Logo,

$$a(W, W) = \left\langle (\mathbb{A}_1 u + \alpha v, \alpha u + \mathbb{A}_2 v), (u, v) \right\rangle \geq \|\mathbb{A}_1^{1/2} u\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2} v\|^2.$$

Portanto, pelo teorema de Lax-Milgram existe solução $u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1)$ e $v \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2)$. Concluimos que $\exists! u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_1)$ e $\exists! v \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_2)$. Portanto, $0 \in \rho(\mathcal{A})$ e pelo Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.6.2) segue o resultado.

Demonstração 2

Aqui utilizaremos o conhecido Teorema 2.5.1 de Hille-Yosida. Para isto, iniciemos mostrando que vale a desigualdade abaixo.

$$\left\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\Re\{\lambda\}} \quad \forall \lambda \in \rho(\mathcal{A}) : \Re\{\lambda\} > 0.$$

De fato, seja $F = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5]^T \in \mathcal{H}$. Consideremos a equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, onde $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, em termos de suas componentes,

isto é,

$$\lambda u - \xi = F_1 \quad (3.40)$$

$$\lambda \xi + \mathbb{A}_1 u + \beta \mathbb{B} \xi + \alpha v = F_2 \quad (3.41)$$

$$\lambda v - \omega = F_3 \quad (3.42)$$

$$\lambda \omega + \alpha \mathbb{P}^{-1} u + \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}_2 v - m \mathbb{P}^{-1} \mathbb{C} \theta = F_4 \quad (3.43)$$

$$\lambda \theta + m \mathbb{C} \omega + k \mathbb{A}_3 \theta = F_5 \quad (3.44)$$

Assim, multiplicando (3.40)-(3.44) por $\mathbb{A}_1 u$, ξ , $\mathbb{A}_2 v$, $\mathbb{P} \omega$ e θ , respectivamente, temos que

$$\lambda \|\mathbb{A}_1^{1/2} u\|^2 - \langle \xi, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})} = \langle F_1, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})} \quad (3.45)$$

$$\lambda \|\xi\|^2 + \langle u, \xi \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})} + \beta \|\mathbb{B}^{1/2} \xi\|^2 + \alpha \langle v, \xi \rangle = \langle F_2, \xi \rangle \quad (3.46)$$

$$\lambda \|\mathbb{A}_2^{1/2} v\|^2 - \langle \omega, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})} = \langle F_3, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})} \quad (3.47)$$

$$\lambda \|\mathbb{P}^{1/2} \omega\|^2 + \alpha \langle u, \omega \rangle + \langle v, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_2^{1/2})} - m \langle \theta, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})} = \langle F_4, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})} \quad (3.48)$$

$$\lambda \|\theta\|^2 + m \langle \omega, \theta \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})} + k \|\mathbb{A}_3^{1/2} \theta\|^2 = \langle F_5, \omega \rangle \quad (3.49)$$

Multiplicando (3.40) por αv e (3.42) por αu obtemos

$$\lambda \alpha \langle u, v \rangle - \alpha \langle \xi, v \rangle = \alpha \langle F_1, v \rangle \quad (3.50)$$

$$\lambda \alpha \langle v, u \rangle - \alpha \langle \omega, u \rangle = \alpha \langle F_3, u \rangle \quad (3.51)$$

Somando as equações (3.45)-(3.51) e tomando a parte real verificamos

$$\Re \left\{ \lambda \|U\|^2 + \beta \|\mathbb{B}^{1/2} \xi\|^2 + k \|\mathbb{A}_3^{1/2} \theta\|^2 \right\} = \Re \left\{ \langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} \right\} \leq \|U\| \|F\|$$

Em particular, $\Re \{ \lambda \} \|U\|^2 \leq \|U\| \|F\|$. Utilizando o fato de que $U = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} F$ segue $\left\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \right\| = \sup_{\|F\| \leq 1} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} F\| \leq \frac{1}{\Re \{ \lambda \}}$.

Como, por hipótese, todos os operadores são compactos, segue que o operador $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$. Podemos concluir isto observando que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ e $\mathcal{H}$ é reflexivo e utilizar os Teoremas 2.6.3 e 2.6.4. Portanto, pelo Teorema de Hille-Yosida $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

□

3.5 Estabilidade Exponencial do Semigrupo

Nesta seção mostraremos que o semigrupo associado ao problema (3.17) é exponencialmente estável. Utilizaremos um resultado devido a Prüss (Teorema 1.2.8) bastante conhecido na Teoria de Semigrupos.

Teorema 3.5.1. *O conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$ satisfaz $\rho(\mathcal{A}) \supset \{i\delta : \delta \in \mathbb{R}\}$ e existe $M > 0$ tal que*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < M, \quad \forall \lambda \in i\mathbb{R}.$$

Assim, o semigrupo é exponencialmente estável.

Demonstração. Novamente, consideremos a equação resolvente $\lambda U - \mathcal{A}U = F$, onde $F \in \mathcal{H}$, em termos de suas componentes, considerando que $\lambda = i\sigma$, para algum $\sigma \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lambda u - \xi = F_1 \tag{3.52}$$

$$\lambda \xi + \mathbb{A}_1 u + \beta \mathbb{B} \xi + \alpha v = F_2 \tag{3.53}$$

$$\lambda v - \omega = F_3 \tag{3.54}$$

$$\lambda \omega + \alpha \mathbb{P}^{-1} u + \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A}_2 v - m \mathbb{P}^{-1} \mathbb{C} \theta = F_4 \tag{3.55}$$

$$\lambda \theta + m \mathbb{C} \omega + k \mathbb{A}_3 \theta = F_5. \tag{3.56}$$

Como foi visto na *demonstração 2* de existência de solução baseada no Teorema de Hille-Yosida, temos que

$$\Re\{\lambda\} \|U\|^2 + \beta \|\mathbb{B}^{1/2} \xi\|^2 + k \|\mathbb{A}_3^{1/2} \theta\|^2 \leq \|U\| \|F\|.$$

Mais especificamente, com o mesmo procedimento adotado naquela demonstração, podemos, sem muitas dificuldades, mostrar que

$$\begin{aligned} & \Re\{\lambda\} \left[\|\mathbb{A}_1^{1/2} u\|^2 + \|\xi\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2} v\|^2 + \|\mathbb{P}^{1/2} \omega\|^2 + \|\theta\|^2 \right] \\ & + \beta \|\mathbb{B}^{1/2} \xi\|^2 + k \|\mathbb{A}_3^{1/2} \theta\|^2 + \Re\{\alpha \langle u, \omega \rangle + \alpha \langle v, \xi \rangle\} \\ & \leq C \|F\|^2 + c \left[\|\mathbb{A}_1^{1/2} u\|^2 + \|\xi\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2} v\|^2 + \|\mathbb{P}^{1/2} \omega\|^2 + \|\theta\|^2 \right], \end{aligned}$$

onde a constante positiva c é tão pequena quanto se queira.

Utilizando (3.21), (3.22) e a desigualdade acima segue que existem constantes $a, b \in \mathbf{R}^+$ tais que

$$\begin{aligned} & \Re\{\lambda\} \left[\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \|\xi\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 + \|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 + \|\theta\|^2 \right] \\ & + a\|\xi\|^2 + b\|\theta\|^2 + \Re\{\alpha\langle u, \omega \rangle + \alpha\langle v, \xi \rangle\} \\ & \leq \|F\|^2 + c \left[\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 + \|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dada a desigualdade obtida, notar que os termos $\|\xi\|^2$ e $\|\theta\|^2$ aparecem na norma de $U = [u, \xi, v, \omega, \theta]^T$ ao quadrado. Assim, é razoável obtermos estimativas que nos permitam completar a $\|U\|^2$ com os termos que faltam no lado esquerdo. Isto porque obteríamos algo do tipo $\Re\{\lambda\}\|U\|^2 + C_1\|U\|^2 \leq C_2\|F\|^2$, o que nos permitiria concluir o resultado $\|U\| < M\|F\|$.

Iremos proceder como mencionado, isto é, completaremos a $\|U\|^2$ no lado esquerdo da desigualdade acima. Notar antes que como estamos assumindo que $\lambda = i\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, temos que $\bar{\lambda} = -\lambda$.

Nos concentraremos, inicialmente, nas equações (3.52) e (3.53). Multiplicando (3.53) por u com o produto interno usual em H obtemos

$$\lambda\langle \xi, u \rangle + \|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \beta\langle \xi, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})} + \alpha\langle v, u \rangle = \langle F_2, u \rangle.$$

Agora, multiplicando (3.52) por $-(\lambda/\bar{\lambda})\xi$ vem que

$$-\overline{\lambda\langle \xi, u \rangle} = -\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\|\xi\|^2 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\langle F_1, \xi \rangle.$$

Somando a parte real das duas últimas igualdades segue que

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \Re\{\alpha\langle v, u \rangle\} &= \Re\{\langle F_2, u \rangle\} + \Re\{\langle F_1, \xi \rangle\} \\ &+ \|\xi\|^2 - \Re\{\beta\langle \xi, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})}\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Utilizaremos agora as equações (3.54) e (3.55). Multiplicando a (3.55) por v e tomando o produto interno no domínio de $\mathbb{P}^{1/2}$, obtemos

$$\lambda\langle \omega, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})} + \alpha\langle u, v \rangle + \|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 - m\langle \theta, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})} = \langle F_4, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}.$$

Multiplicando (3.54) por $-(\lambda/\bar{\lambda})\omega$ e aplicando o produto interno em $\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})$ concluimos que

$$-\overline{\lambda\langle \omega, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}} + \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 = -\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\langle F_3, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}.$$

Somando as duas últimas equações e tomando a parte real resulta

$$\begin{aligned} \Re\{\alpha\langle u, v \rangle\} + \|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 &= \|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 + m\Re\{\langle \theta, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})}\} \\ &\quad + \Re\{\langle F_4, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}\} + \Re\{\langle F_3, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Nossa intenção é obter cotas superiores para cada uma das equações (3.57), (3.58) e (3.59) para mostrarmos que as condições do Teorema se verificam em nosso problema.

Sendo assim, primeiramente iremos obter cotas para os termos do lado direito da equação (3.58). Notemos que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, pela desigualdade (3.19) e de Young existem $\delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que

$$\Re\{\langle F_2, u \rangle\} \leq \frac{\delta_1^2}{2\epsilon_1}\|F_2\|^2 + \frac{\epsilon_1}{2}\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 \quad (3.60)$$

$$\Re\{\langle F_1, \xi \rangle\} \leq \frac{\delta_2^2}{2\epsilon_2}\|\mathbb{A}_1^{1/2}F_1\|^2 + \frac{\epsilon_2}{2}\|\xi\|^2. \quad (3.61)$$

Além disso, existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \beta\Re\{\langle \xi, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})}\} &\leq \beta\|\xi\|_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})}\|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})} \\ &\leq \frac{\beta^2 c^2}{2\epsilon_3}\|\mathbb{B}^{1/2}\xi\|^2 + \frac{\epsilon_3}{2}\|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}_1^{1/2})}^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

De (3.58), utilizando (3.60), (3.61) e (3.62), segue que

$$\begin{aligned} k_1\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \Re\{\alpha\langle v, u \rangle\} &\leq \frac{\delta_1^2}{2\epsilon_1}\|F_2\|^2 + \frac{\delta_2^2}{2\epsilon_2}\|\mathbb{A}_1^{1/2}F_1\|^2 \\ &\quad + k_2\|\xi\|^2 + \frac{\beta^2 c^2}{2\epsilon_3}\|\mathbb{B}^{1/2}\xi\|^2, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde $k_1 = 1 - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_3)}{2}$ e $k_2 = 1 + \frac{\epsilon_2}{2}$.

Notar que a condição $k_1 > 0$ é perfeitamente possível para uma escolha adequada dos ϵ_1, ϵ_3 positivos.

Agora obteremos uma cota para os termos do lado direito da equação (3.59). Inicialmente notemos que, pela definição de $\mathbb{P}$ existe uma constante $c > 0$ tal que $\|\mathbb{P}^{1/2}v\| \leq c\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|$ e portanto, por Cauchy-Schwarz e Young

$$\Re\{\langle F_4, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}\} \leq \frac{c^2}{2\epsilon_4}\|\mathbb{P}^{1/2}F_4\|^2 + \frac{\epsilon_4}{2}\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 \quad (3.64)$$

$$\Re\{\langle F_3, \omega \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^{1/2})}\} \leq \frac{k^2}{2\epsilon_5}\|\mathbb{A}_2^{1/2}F_3\|^2 + \frac{\epsilon_5}{2}\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2. \quad (3.65)$$

Além disso, é possível concluir sem muitas dificuldades que

$$m\Re\{\langle\theta, v\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})}\} \leq \frac{q^2}{2\epsilon_6}\|\theta\|^2 + \frac{\epsilon_6}{2}\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2. \quad (3.66)$$

De (3.59), (3.64), (3.65) e (3.66) segue que

$$\begin{aligned} \Re\{\alpha\langle u, v\rangle\} + k_3\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 &\leq k_4\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 + \frac{c^2}{2\epsilon_4}\|\mathbb{P}^{1/2}F_4\|^2 \\ &\quad + \frac{k^2}{2\epsilon_5}\|\mathbb{A}_2^{1/2}F_3\|^2 + \frac{q^2}{2\epsilon_6}\|\theta\|^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde $k_3 = (1 - \frac{\epsilon_4}{2} - \frac{\epsilon_6}{2})$ e $k_4 = (1 + \frac{\epsilon_5}{2})$.

Somando as desigualdades (3.63) e (3.67) vem que

$$\begin{aligned} k_1\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \Re\{\alpha\langle v, u\rangle\} + \Re\{\alpha\langle u, v\rangle\} + k_3\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 \\ \leq k_2\|\xi\|^2 + k_4\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 + \frac{\delta_1^2}{2\epsilon_1}\|F_2\|^2 \\ + \frac{\delta_2^2}{2\epsilon_2}\|\mathbb{A}_1^{1/2}F_1\|^2 + \frac{\beta^2c^2}{2\epsilon_3}\|\mathbb{B}^{1/2}\xi\|^2 + \frac{c^2}{2\epsilon_4}\|\mathbb{P}^{1/2}F_4\|^2 \\ + \frac{k^2}{2\epsilon_5}\|\mathbb{A}_2^{1/2}F_3\|^2 + \frac{q^2}{2\epsilon_6}\|\theta\|^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Além disso, mutiplicando a equação (3.54) por $\mathbb{P}\omega$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Young e lembrando (3.24), então, devem existir $K, c_1, c_2 > 0$ tais que

$$K\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 \leq c_1\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 + c_2\|\mathbb{A}_2^{1/2}F_3\|^2. \quad (3.69)$$

Da equação (3.57) e lembrando que $\lambda = i\sigma$ existem constantes $C_1, C_2, C > 0$ tais que $\min\{C_1, C_2\} > \max\{k_2, \frac{q^2}{2\epsilon_6}\}$ e

$$C_1\|\xi\|^2 + C_2\|\theta\|^2 \leq C\|F\|^2 + c\left[\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + \|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 + \|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2\right]. \quad (3.70)$$

Daí somando estas duas últimas com a equação (3.68) vem que

$$\begin{aligned} (k_1 - c)\|\mathbb{A}_1^{1/2}u\|^2 + (C_1 - k_2)\|\xi\|^2 + \Re\{\alpha\langle v, u\rangle\} + \Re\{\alpha\langle u, v\rangle\} \\ + (k_3 - c)\|\mathbb{A}_2^{1/2}v\|^2 + (K - k_4 - c)\|\mathbb{P}^{1/2}\omega\|^2 + (C_2 - \frac{q^2}{2\epsilon_6})\|\theta\|^2 \\ \leq \frac{\delta_1^2}{2\epsilon_1}\|F_2\|^2 + \frac{\delta_2^2}{2\epsilon_2}\|\mathbb{A}_1^{1/2}F_1\|^2 + \frac{\beta^2c^2}{2\epsilon_3}\|\mathbb{B}^{1/2}\xi\|^2 \\ + \frac{c^2}{2\epsilon_4}\|\mathbb{P}^{1/2}F_4\|^2 + \frac{k^2}{2\epsilon_5}\|\mathbb{A}_2^{1/2}F_3\|^2 + C\|F\|^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Na realidade, para evitar repetições, deixamos subentendido que multiplicamos a equação (3.68) por uma constante suficientemente grande (e redefinimos as constantes envolvidas) tal que no lado esquerdo da equação acima tenhamos algo positivo. O mesmo ocorre para a constante K .

Portanto, escolhendo $\delta = \min \left\{ 1, (k_1 - c), (k_3 - c), (C_1 - k_2), (C_2 - \frac{q^2}{2\epsilon_6}), (K - k_4 - c) \right\}$ concluimos que

$$\delta \|U\|^2 \leq M \|F\|^2,$$

para alguma constante positiva M .

Agora, lembrando que $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$, com $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ segue que $U = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F$ e então

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| = \sup_{\|F\| \leq 1} \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F\| \leq \frac{M}{\delta}.$$

Isto conclui a demonstração.

□

3.6 Aplicações

Há diversos problemas que podem ser citados como exemplos, inclusive aqueles que podem surgir na análise de meios não isotrópicos. Os resultados obtidos na formulação abstrata são válidos para os seguintes casos.

Exemplo 1

O nosso problema original

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t + \alpha v = 0 \\ v_{tt} - \gamma \Delta v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u + m \Delta \theta = 0 \\ \theta_t - k \Delta \theta - m \Delta v_t = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0 \end{cases}$$

e a condição de contorno

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \theta = 0, \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Conforme foi visto na seção 3.2, este problema pode ser escrito como uma equação linear de evolução da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}_\gamma U(t), & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

onde $U(t) = (u, u_t, v, v_t, \theta)^T \in \mathcal{H}_\gamma$, $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^T \in \mathcal{H}_\gamma$ e

$$\mathcal{H}_\gamma = \mathcal{D}(A_D^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{D}(A_B^{1/2}) \times H_{0,\gamma}^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Lembramos que $A_B \equiv \Delta^2$ com $\mathcal{D}(A_B) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $A_D \equiv -\Delta$ com $\mathcal{D}(A_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $P_\gamma \equiv I + \gamma A_D$ com $\mathcal{D}(P_\gamma) = \mathcal{D}(A_D)$ são operadores auto-adjuntos e positivos definidos tais que $\mathcal{D}(A_B) \subset \subset \mathcal{D}(A_D)$. Além disso, são válidas as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\xi_1\|^2 &\leq c_1 \|\mathbb{A}_B^{1/2} \xi_1\|^2 & \forall \xi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_B^{1/2}) \\ \|\xi_2\|^2 &\leq c_2 \|\mathbb{A}_D^{1/2} \xi_2\|^2 & \forall \xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_D^{1/2}) \\ \|\xi_3\|^2 &\leq c_3 \|\mathbb{P}_\gamma^{1/2} \xi_3\|^2 & \forall \xi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{P}_\gamma^{1/2}). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que $\mathcal{A}_\gamma$ é gerador infinitesimal de uma C_0 -semigrupo de contrações em $\mathcal{H}_\gamma$. Quando os dados iniciais $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\gamma)$ existe única solução para este problema. Conforme foi visto, o semigrupo é exponencialmente estável.

Exemplo 2

O problema quando $\mathbb{P} = I$, isto é,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t + \alpha v = 0 \\ v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u + m \Delta \theta = 0 \\ \theta_t - k \Delta \theta - m \Delta v_t = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0 \end{cases}$$

e a condição de contorno

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \theta = 0, \quad \text{em } \partial\Omega,$$

também é um caso particular do problema abstrato analisado neste capítulo. Importante notar que, neste caso a equação de Cauchy associada a este é

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), & \forall t > 0 \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

onde $U(t) = (u, u_t, v, v_t, \theta)^T \in \mathcal{H}_\gamma$, $U_0 = (u_0, u_1, v_0, v_1, \theta_0)^T \in \mathcal{H}_\gamma$ e

$$\mathcal{H}_\gamma = \mathcal{D}(A_D^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times \mathcal{D}(A_B^{1/2}) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Os operadores A_B e A_D são conforme exemplo anterior, mas, $\mathbb{P} = I$. Portanto, o semigrupo associado a este problema é exponencialmente estável.

Exemplo 3

O problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \beta \Delta u_t + \alpha v = 0 \\ v_{tt} - \gamma \Delta v_{tt} + \Delta v + \alpha u + m \Delta \theta = 0 \\ \theta_t - k \Delta \theta - m \Delta v_t = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathbf{R}^+$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x); \\ v(x, 0) = v_0(x), & v_t(x, 0) = v_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0 \end{cases}$$

e a condição de contorno

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \theta = 0, \quad \text{em } \partial\Omega,$$

segue análise similar aos exemplos anteriores. Aqui, $A_B = A_D \equiv -\Delta$ com $\mathcal{D}(A_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $P_\gamma \equiv I + \gamma A_D$ com $\mathcal{D}(P_\gamma) = \mathcal{D}(A_D)$ são operadores auto-adjuntos e positivos definidos. Por ser caso particular do problema analisado neste capítulo, o semigrupo associado a este problema é exponencialmente estável.

Capítulo 4

Problema 2

4.1 Introdução

Denotemos $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ operadores auto-adjuntos e positivos definidos com domínios definidos em $\mathcal{H}$. Os domínios destes operadores são tais que $\mathcal{D}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H}$ com imersões compactas. Seja, também, $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua e integrável. Consideremos as classes de problemas abstratos acoplados

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}u - g * \mathbb{A}^\alpha u + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \mathbb{B}v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } L^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{H}) \quad (4.1)$$

satisfazendo a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1. \end{cases} \quad (4.2)$$

onde u_0 e u_1 são funções pertencentes a espaços definidos posteriormente. Estamos denotando por $*$ o operador de convolução, isto é, $g * \mathbb{A}^\alpha u = \int_{-\infty}^t g(t-s)\mathbb{A}^\alpha u(s)ds = \int_0^\infty g(s)\mathbb{A}^\alpha u(t-s)ds$. Assim, o sistema acima é não autônomo e, portanto, a solução deste não define um semigrupo.

Como nossa intenção é utilizar a Teoria de Semigrupos de Operadores na análise deste problema, utilizaremos um artifício que nos permitirá reescrever o problema acima em um sistema equivalente que seja autônomo. Isto é, para que possamos contornar este obstáculo, definimos a variável

$$\eta^t(s) = u(t) - u(t-s) \quad (4.3)$$

onde $\eta = \eta^t(s)$ é a variável que caracteriza o *passado relativo* ou *história relativa* de u . Esta identidade nos permite obter um sistema autônomo e equivalente ao original, ou seja, com a variável assim definida podemos estudar o comportamento deste sistema segundo a teoria de semigrupos de operadores. Tal variável auxiliar foi introduzida inicialmente por Dafermos.

É fácil ver que

$$\eta_t + \eta_s = u_t(t), \quad (4.4)$$

onde omitimos o sobrescrito t na variável η para não sobrecarregar a notação.

Com isto em mãos, temos que

$$-g * A^\alpha u = - \int_{-\infty}^t g(t-s) A^\alpha u(t) ds = - \int_0^\infty g(s) A^\alpha u(t-s) ds$$

de onde, utilizando a equação (4.3) obtemos

$$-g * A^\alpha u = - \int_0^\infty g(s) A^\alpha [u(t) - \eta^t(s)] ds = \int_0^\infty g(s) A^\alpha \eta^t(s) ds - A^\alpha u(t) \int_0^\infty g(s) ds.$$

Logo podemos reescrever o sistema proposto inicialmente como se segue

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathbb{A}u - \kappa \mathbb{C}u + \int_0^\infty \mathbb{C} \eta^t(s) g(s) ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \mathbb{B}v + \beta u = 0 \\ \eta_t + \eta_s - u_t(t) = 0 \end{cases} \quad \text{em } L^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{H}) \quad (4.5)$$

onde $\kappa = \int_0^\infty g(s) ds$ e $\mathbb{C} \equiv \mathbb{A}^\alpha$.

Denotando por $u_0 = u_0(0)$, $\eta_0(s) = u_0(0) - u_0(s)$ e $\eta^t(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \eta^t(s) = 0$, para todo $t \geq 0$, as condições iniciais para este sistema tornam-se

$$\begin{cases} u(0) = u_0; & u_t(0) = u_1; & \eta^0(s) = \eta_0; \\ v(0) = v_0; & v_t(0) = v_1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Estudaremos a existência de soluções, a unicidade e o comportamento assintótico do sistema (4.5) com as condições dadas em (4.6).

4.2 Algumas notações e hipóteses

Supomos que o operador $\mathbb{B}$ é uma função do operador $\mathbb{A}$ de ordem γ , isto é,

$$\mathbb{B} = f(\mathbb{A}) \quad \text{com} \quad f(s) = o(s^\gamma) \quad \text{quando} \quad s \rightarrow \infty.$$

Seja $r \in \mathbf{R}$, definimos para os espaços de Hilbert em caso os produtos internos ¹

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{r/2})} = \langle \mathbb{A}^{r/2} \xi_1, \mathbb{A}^{r/2} \xi_2 \rangle = \int \mathbb{A}^{r/2} \xi_1 \mathbb{A}^{r/2} \xi_2 dx. \quad (4.7)$$

A imersão $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{r_1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}^{r_2/2})$ é compacta sempre que $r_1 > r_2$. O mesmo é válido para os operadores $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$. Supomos ainda que sejam válidas as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 &\leq C_C \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2, & \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \\ \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 &> C_A \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2, & \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde C_A , C_B e C_C são constantes positivas e κ foi introduzido em (4.5). Estamos denotando a norma e o produto interno no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$, respectivamente, sem o subscrito.

Com relação à função kernel de memória g , estamos supondo que esta é uma função contínua, integrável, positiva e que apresente efeito dissipativo, assim, temos as hipóteses listadas abaixo para a função g :

$$\begin{aligned} g &\in C^1(\mathbf{R}^+) \cap L^1(\mathbf{R}^+), \\ g(s) &\geq 0, \quad g'(s) < 0, \quad \forall s \in \mathbf{R}^+, \\ 0 &< \kappa = \int_0^\infty g(s)ds < +\infty, \\ \exists a, b \in \mathbf{R}^+ : & \quad -ag(s) \leq g'(s) \leq -bg(s), \quad |g''(s)| \leq cg(s) \quad \forall s \in \mathbf{R}^+. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Assumimos a última das hipóteses em (4.9) para estudo do comportamento assintótico de solução do sistema de evolução dado.

Agora, observando o sistema (4.5) e analisando o termo $\int_0^\infty g(s)\mathbb{C}\eta^t(s)ds$ que aparece e as hipóteses acima mencionadas, é razoável introduzirmos, para uma adequada definição do espaço solução posteriormente, um espaço ponderado L^2 com respeito à medida $g(s)ds$, isto é, para $j > 0$ consideremos

$$\chi_j = L_g^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{D}(\mathbb{C}^{j/2})), \quad \Upsilon_j = L_g^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{D}(\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{j/2})), \quad \Lambda_j = L_g^2(\mathbf{R}^+, \mathcal{D}(\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{j/2}))$$

munidos do produto interno usual em $\mathcal{H}$. Assim,

$$\eta \in \chi_j \iff \int \int_0^\infty |\mathbb{C}^{1/2}\eta|^2 g(s)dsdx < +\infty.$$

¹Aqui e no decorrer do capítulo, deixamos subentendido que a integração é efetuada sobre um aberto do $\mathbf{R}^n$ onde estão definidas as variáveis.

Além disso, introduzimos o operador linear $T \equiv -\partial_s$ com domínio

$$\mathcal{D}(T) = \{\eta \in \chi_1 : \eta_s \in \chi_1, \quad \eta(0) = 0\},$$

onde η_s é a derivada de η com relação a s .

Agora, iniciamos as definições para a formulação adequada do problema de evolução segundo a teoria de semigrupos de operadores. Seja o espaço de Hilbert definido por

$$\mathcal{S} = \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{H} \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \times \mathcal{H} \times \chi_1, \quad (4.10)$$

e sejam $\bar{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]^T$, $\bar{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5]^T \in \mathcal{S}$. Então, definimos um produto interno neste espaço da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi}, \bar{\zeta} \rangle_{\mathcal{S}} &= \langle \xi_1, \zeta_1 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})} + \langle \xi_2, \zeta_2 \rangle - \kappa \langle \xi_1, \zeta_1 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})} + \beta \langle \xi_1, \zeta_3 \rangle \\ &\quad + \langle \xi_3, \zeta_3 \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})} + \langle \xi_4, \zeta_4 \rangle + \beta \langle \xi_3, \zeta_1 \rangle + \langle \xi_5, \zeta_5 \rangle_{\chi_1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.3 A Energia do Sistema

Antes de apresentarmos o teorema de existência de soluções, calcularemos a energia do sistema e mostraremos que o produto interno definido anteriormente é coerente com o espaço de energia do sistema. Primeiramente, multiplicando a primeira equação do sistema (4.5) por u_t e integrando na região de análise obtemos a equação mostrada em seguida.

$$\int \left(u_{tt}u_t + \mathbb{A}uu_t - \kappa \mathbb{C}uu_t + \int_0^\infty \mathbb{C}\eta^t(s)u_tg(s)ds + \beta vu_t \right) dx = 0. \quad (4.12)$$

Utilizando o produto interno definido para o espaço ponderado χ_1 segue que ²

$$\int \int_0^\infty \mathbb{C}\eta^t(s)u_tg(s)dsdx = \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}\eta^t(s)g(s)ds, u_t \right\rangle = \langle \eta^t, u_t \rangle_{\chi_1}. \quad (4.13)$$

Daí,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 \right) + \beta \langle v, u_t \rangle = -\langle \eta^t, u_t \rangle_{\chi_1} \quad (4.14)$$

²A comutação dos sinais de integral é justificada pelo Teorema de Fubini.

Agora, multiplicando a segunda equação do sistema (4.5) por v_t , integrando na região de análise temos que

$$\int v_{tt}v_t dx + \int \mathbb{B}vv_t dx + \beta \int uv_t dx = 0.$$

Como o operador $\mathbb{B}$ é auto-adjunto então $\int \mathbb{B}vv_t dx = \langle \mathbb{B}v, v_t \rangle = \langle \mathbb{B}^{1/2}v, \mathbb{B}^{1/2}v_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2$. Disto segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|v_t\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 \right) + \beta \langle u, v_t \rangle = 0. \quad (4.15)$$

Continuando com os cálculos para obtermos a energia do sistema, multiplicamos a última equação do sistema (4.5) por η e tomamos o produto interno definido em χ_1 . Assim,

$$\langle \eta_t, \eta^t \rangle_{\chi_1} + \langle \eta_s, \eta^t \rangle_{\chi_1} - \langle u_t(t), \eta^t \rangle_{\chi_1} = 0.$$

Como $\langle \eta_t, \eta^t \rangle_{\chi_1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta^t\|_{\chi_1}^2$, então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta^t\|_{\chi_1}^2 = -\langle \eta_s, \eta^t \rangle_{\chi_1} + \langle u_t(t), \eta^t \rangle_{\chi_1}. \quad (4.16)$$

Somando as equações (4.14), (4.15) e (4.16) obtemos a equação abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 + \|\eta^t\|_{\chi_1}^2 \right) \\ + \beta \langle v, u_t \rangle + \beta \langle u, v_t \rangle = -\langle \eta_s, \eta^t \rangle_{\chi_1} \end{aligned}$$

Notando que $\beta \langle v, u_t \rangle + \beta \langle u, v_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} 2\beta \langle u, v \rangle$ segue da equação anterior que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_t\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 \right. \\ \left. + \|\eta^t\|_{\chi_1}^2 + 2\beta \langle u, v \rangle \right) = -\langle \eta_s, \eta^t \rangle_{\chi_1}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto a energia do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa \|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \|v_t\|^2 \right. \\ \left. + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 + \|\eta^t\|_{\chi_1}^2 + 2\beta \langle u, v \rangle \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

satisfazendo

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_1(t) = -\langle \eta_s, \eta^t \rangle_{\chi_1}. \quad (4.19)$$

4.4 Existência de Solução

Com a definição do espaço de Hilbert $\mathcal{S}$ dado em (4.10) e do produto interno (4.11) definido neste espaço, definimos o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{S}$, com $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \in \mathcal{S}$ tal que

$$\mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbb{A} + \kappa\mathbb{C} & 0 & -\beta I & 0 & -\mathbb{D} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\beta I & 0 & -\mathbb{B} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & T \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

onde temos que o domínio do operador $\mathcal{A}$ é o que segue

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]^T \in \mathcal{S} \left| \begin{array}{l} \xi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{C}) \\ \xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \cap \chi_1 \\ \xi_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{B}) \\ \xi_4 \in \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \\ \xi_5 \in \mathcal{D}(T) \\ \mathbb{D}\eta^t \in \mathcal{H} \end{array} \right. \right\}, \quad (4.21)$$

o operador $\mathbb{D}$ é tal que

$$\mathbb{D}\eta^t = \int_0^\infty \mathbb{C}\eta g(s)ds, \quad (4.22)$$

e a imersão $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}$ é compacta.

Consideraremos agora o problema (4.5) com as condições dadas em (4.6) e façamos $u_t = \xi$ e $v_t = \varphi$. Assim, consideremos $U = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ e $U_0 = [u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0]^T$ elementos de $\mathcal{S}$.

O problema (4.5) pode ser, então, como uma equação linear de evolução no espaço de Hilbert $\mathcal{S}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), & \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad (4.23)$$

onde $\mathcal{A}$ é o operador definido em (4.20), isto é,

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbb{A} + \kappa\mathbb{C} & 0 & -\beta I & 0 & -\mathbb{D} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\beta I & 0 & -\mathbb{B} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ v \\ v_t \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ -\mathbb{A}u + \kappa\mathbb{C}u - \beta v - \mathbb{D}\eta \\ v_t \\ -\beta u - \mathbb{B}v \\ u_t + T\eta \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Para mostrarmos a existência de soluções do problema apresentado, mostraremos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{S}$. Utilizaremos para isto o Teorema de Lumer-Phillips. Com relação ao tipo de decaimento, estudaremos as condições que devem ser impostas aos operadores $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ para que o sistema decaia exponencialmente e as condições para o não decaimento exponencial. Mostraremos que quando não há decaimento exponencial há, no entanto, decaimento polinomial. Neste caso, nossa análise do comportamento assintótico leva em consideração método da energia.

No que se segue, é apresentado o teorema de existência de soluções para o sistema (4.23).

Teorema 4.4.1. *Considerando que a função kernel de memória g satisfaz as hipóteses (4.9), então o operador linear $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{S}$.*

Demonstração. De fato, mostraremos inicialmente que $\mathcal{A}$ é um operador linear dissipativo. Para tanto, consideremos $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} = \left\langle \begin{pmatrix} u_t \\ -\mathbb{A}u + \kappa \mathbb{C}u - \beta v - \mathbb{D}\eta \\ v_t \\ -\beta u - \mathbb{B}v \\ u_t + T\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ v \\ v_t \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{S}}$$

Utilizando o produto interno definido (4.11) no espaço de Hilbert $\mathcal{S}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} &= \langle u_t, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})} + \langle -\mathbb{A}u + \kappa \mathbb{C}u - \beta v - \mathbb{D}\eta, u_t \rangle - \kappa \langle u_t, u \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{C}^{1/2})} \\ &\quad + \beta \langle u_t, v \rangle + \langle v_t, v \rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})} + \langle -\beta u - \mathbb{B}v, v_t \rangle \\ &\quad + \beta \langle v_t, u \rangle + \langle u_t + T\eta, \eta \rangle_{\chi_1} \end{aligned}$$

Desenvolvendo o produto, utilizando as propriedades de linearidade de produtos internos, de operadores auto-adjuntos e tomando a parte real vem que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} = -\operatorname{Re} \langle \mathbb{D}\eta, u_t \rangle + \operatorname{Re} \langle u_t, \eta \rangle_{\chi_1} + \operatorname{Re} \langle T\eta, \eta \rangle_{\chi_1}. \quad (4.25)$$

Notemos, ainda, que pela definição do operador $\mathbb{D}$ em (4.22) e do espaço

ponderado χ_1 temos que $\mathcal{R}e\langle \mathbb{D}\eta, u_t \rangle = \mathcal{R}e\langle u_t, \eta \rangle_{\chi_1}$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\langle \mathbb{D}\eta, u_t \rangle &= \mathcal{R}e \int \int_0^\infty \mathbb{C}\eta g(s) ds u_t dx = \\ \mathcal{R}e \int \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta \mathbb{C}^{1/2}u_t g(s) ds dx &= \mathcal{R}e\langle u_t, \eta \rangle_{\chi_1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{R}e\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} = \mathcal{R}e\langle T\eta, \eta \rangle_{\chi_1}. \quad (4.26)$$

Lembrando que $T \equiv -\partial_s$ vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{S}} &= \mathcal{R}e\langle -\eta_s, \eta \rangle_{\chi_1} = \mathcal{R}e \int_0^\infty - \int \mathbb{C}^{1/2}\eta_s \mathbb{C}^{1/2}\eta dx g(s) ds = \\ \mathcal{R}e \int_0^\infty -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s) ds &= \frac{1}{2} \mathcal{R}e \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0. \end{aligned}$$

Nos cálculos acima consideramos propriedades de operadores auto-adjuntos, integração por partes considerando que $\|\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s)$ se anula em 0 e $+\infty$ e a segunda hipótese de (4.9), isto é, $g'(s) < 0$.

Para verificar que $\|\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s)$ se anula em 0 e $+\infty$ basta observar pelas condições iniciais que $\eta(0) = 0$ e que $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$. Esta última pode-se mostrar por contradição. Suponhamos que $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = c > 0$. Como $g'(s) < 0$, então, $g(s) > g(\infty)$, $\forall s > 0$. Daí, $\int_0^\infty g(s) ds > \int_0^\infty c ds = \infty$ contradizendo a primeira das hipóteses em (4.9).

Portanto, temos concluído que o operador linear $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Agora, mostraremos que o operador $(I - \mathcal{A})$ é sobrejetivo. Isto é, mostraremos que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{S}$. De fato, considerando a equação resolvente

$$(I - \mathcal{A})U = F,$$

para $F = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5]^T \in \mathcal{S}$ e para $\lambda = 1$ temos que

$$\begin{pmatrix} u - u_t \\ u_t + \mathbb{A}u - \kappa \mathbb{C}u + \beta v + \mathbb{D}\eta \\ v - v_t \\ v_t + \beta u + \mathbb{B}v \\ \eta - u_t - T\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}.$$

Em termos de suas componentes a equação acima nos diz que

$$u - u_t = f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \quad (4.27)$$

$$u_t + \mathbb{A}u - \kappa \mathbb{C}u + \beta v + \int_0^\infty \mathbb{C}\eta g(s)ds = f_2 \in \mathcal{H} \quad (4.28)$$

$$v - v_t = f_3 \in \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \quad (4.29)$$

$$v_t + \beta u + \mathbb{B}v = f_4 \in \mathcal{H} \quad (4.30)$$

$$\eta - u_t + \eta_s = f_5 \in \chi_1 \quad (4.31)$$

Buscamos solução $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Pela equação (4.28) $u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{C})$. Da equação (4.27) temos que $u_t \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})$ e por (4.31) $u_t \in \chi_1$. Daí $u_t \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \cap \chi_1$.

Resolvendo a equação diferencial (4.31) obtemos a solução

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})u_t + e^{-s} \int_0^s e^t f_5(t) dt.$$

Substituindo u_t da equação (4.27) nesta última igualdade vem que

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})u - (1 - e^{-s})f_1 + e^{-s} \int_0^s e^t f_5(t) dt.$$

Agora, substituindo $\eta(s)$ obtida e u_t na equação (4.28) obtemos

$$u + \mathbb{A}u - (\kappa - \kappa_1)\mathbb{C}u + \beta v = \Phi_1,$$

onde $0 < \kappa_1 = \int_0^\infty (1 - e^{-s})g(s)ds < \kappa$ e

$$\Phi_1 = f_2 + f_1 + \kappa_1 \mathbb{C}f_1 - e^{-s} \int_0^s e^t f_5(t) dt \in \mathcal{H}.$$

Substituindo v_t obtida da equação (4.29) na equação (4.30) obtemos

$$v + \mathbb{B}v + \beta u = \Phi_2,$$

onde $\Phi_2 = f_4 + f_3 \in \mathcal{H}$.

Note que para mostrarmos que existe uma solução em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ para o sistema (4.27)-(4.31), basta mostrar que existe uma solução para o sistema

$$\begin{cases} \mathbb{A}'u + \beta v = \Phi_1 \\ \mathbb{B}'v + \beta u = \Phi_2 \end{cases} ,$$

onde $\mathbb{A}' \equiv I + \mathbb{A} - (\kappa - \kappa_1)\mathbb{C}$ e $\mathbb{B}' \equiv I + \mathbb{B}$.

Definimos $\mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \longrightarrow [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})]' \times [\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})]'$ o operador linear dado por

$$\mathcal{L}(u, v) = (\mathbb{A}'u + \beta v, \mathbb{B}'v + \beta u).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(u, v), (u, v) \rangle &= \|u\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - (\kappa - \kappa_1)\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \beta\langle v, u \rangle \\ &\quad + \|v\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 + \beta\langle u, v \rangle \\ &\geq C_A\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 + m_1\|u + v\|^2 \\ &\geq m_2(\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2). \end{aligned}$$

onde $m_1 = \min\{1, \beta\}$, $m_2 = \min\{C_A, 1\}$ e C_A vem da condição (4.8).

Portanto, $\mathcal{B} : [\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})]' \times [\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})]' \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{R}$ a forma bilinear dada por

$$\mathcal{B}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \langle \mathcal{L}(u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle$$

é coersiva.

Além disso, esta forma bilinear é limitada. Isto é, existe $K > 0$ tal que $\mathcal{B}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \leq K\|(u_1, v_1)\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})} \|(u_2, v_2)\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})}$. Para isto, basta mostrar que $\mathcal{L}$ é limitado e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathcal{B}((u_1, v_1), (u_2, v_2))$. De fato, mostraremos que $\mathcal{L}$ é limitado.

Temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(u, v)\|^2 &= \|\mathbb{A}'u + \beta v\|^2 + \|\mathbb{B}'v + \beta u\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + (\kappa - \kappa_1)^2\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \beta^2\|v\|^2 \\ &\quad + \|v\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 + \beta^2\|u\|^2 \\ &\leq K^2(\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2) = K^2\|(u, v)\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2})}^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos o fato de existirem constantes c_1 e c_2 que dependem dos menores autovalores de $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, respectivamente, tais que $\|u\|^2 \leq c_1\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2$ e $\|v\|^2 \leq c_2\|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2$.

Como $\mathcal{S}$ é Hilbert (e conseqüentemente, reflexivo) e $\mathcal{A}$ é dissipativo com $I - \mathcal{A}$ sobrejetivo temos que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{S}$. Portanto, pelo teorema de Lumer-Phillips segue o resultado.

□

4.5 Falta de Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que o operador $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ não é uniformemente limitado para o caso em que $\gamma < 0$ e $\alpha < 1$ ou caso $\gamma > 0$ e α é real. Assim, pelo Teorema de Prüss (Teorema 1.2.8) que estabelece condição necessária e suficiente para que haja decaimento exponencial de um C_0 -semigrupo de contrações, temos que o semigrupo associado ao nosso problema não é exponencialmente estável. Nos cálculos desenvolvidos assumimos que a função *kernel* de memória é dada por $g(s) = e^{-\mu s}$, para todo $s > 0$ e algum $\mu > 0$ fixo. Também consideremos que os operadores $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ têm todos os mesmos autovetores e_m , para os quais temos que $\mathbb{A}e_m = \lambda_m e_m$, $\mathbb{B}e_m = \lambda_m^\gamma e_m$ e $\mathbb{C}e_m = \lambda_m^\alpha e_m$ onde $\lambda_m \rightarrow +\infty$ quando $m \rightarrow +\infty$.

Em seguida os teoremas estabelecem os resultados para o não decaimento exponencial.

4.5.1 Caso $\gamma < 0$ e $\alpha < 1$

Teorema 4.5.1. *Considerando que a função kernel é da forma $g(s) = e^{-\mu s}$ para todo $s > 0$ e algum $\mu > 0$ fixo e que $\alpha < 1$ e $\gamma < 0$, então o semigrupo $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre $\mathcal{S}$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Nossa intenção na demonstração é exibir alguma seqüência de funções $\mathbf{F}_m = [F_{1,m}, F_{2,m}, F_{3,m}, F_{4,m}, F_{5,m}]^T \in \mathcal{S}$ para as quais a seqüência de soluções obtidas da equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$ não seja uniformemente limitada. Desta forma, concluiremos que o operador resolvente $R(\lambda : \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ não é uniformemente limitado, pois, $U_m = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\mathbf{F}_m$.

Assim, seja a equação resolvente

$$(\varpi I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$$

onde $\varpi \in \mathbf{C}$, o conjunto dos números complexos.

Escrevendo a equação resolvente $(\varpi I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$ em termos de suas componentes temos que

$$\varpi u - u_t = F_1 \tag{4.32}$$

$$\varpi u_t + \mathbb{A}u - \kappa \mathbb{C}u + \beta v + \mathbb{D}\eta^t = F_2 \tag{4.33}$$

$$\varpi v - v_t = F_3 \tag{4.34}$$

$$\varpi v_t + \beta u + \mathbb{B}v = F_4 \tag{4.35}$$

$$\varpi \eta - u_t - T\eta^t = F_5 \tag{4.36}$$

onde omitimos o subscrito m para não sobrecarregar a notação.

Façamos $\mathbf{F}_m = [F_{1,m}, F_{2,m}, F_{3,m}, F_{4,m}, F_{5,m}]^T = [0, 0, 0, 0, \lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}} e^{-\mu_m^a s} e_m]^T$, onde a é uma constante pequena que será analisada posteriormente. Agora, supomos soluções da forma

$$U_m = [u_m, u_{t,m}, v_m, v_{t,m}, \eta^t]^T = [pe_m, qe_m, re_m, te_m, \phi(s)e_m]^T,$$

onde $p, q, r, t \in \mathbf{C}$, com $p \neq r$ e $\phi(s) \in L_g^2(\mathbf{R}^+)$.

Assim, substituindo $U_m = [pe_m, qe_m, re_m, te_m, \phi(s)e_m]^T$ e $\mathbf{F}_m = [0, 0, 0, 0, \lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}} e^{-\mu_m^a s} e_m]^T$ no sistema anterior e utilizando $T \equiv -\partial_s$ e (4.22) reescrevemos o sistema na forma abaixo.

$$\varpi p - q = 0 \tag{4.37}$$

$$\varpi q + \lambda_m p - \kappa \lambda_m^\alpha p + \beta r + \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \phi(s) g(s) ds = 0 \tag{4.38}$$

$$\varpi r - t = 0 \tag{4.39}$$

$$\varpi t + \beta p + \lambda_m^\gamma r = 0 \tag{4.40}$$

$$\varpi \phi(s) - q + \phi_s(s) = \lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}} e^{-\lambda_m^a s} \tag{4.41}$$

Da equação (4.37) temos $q = \varpi p$ que substituído em (4.38) resulta

$$\varpi^2 p + \lambda_m p - \kappa \lambda_m^\alpha p + \beta r + \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \phi(s) g(s) ds = 0. \tag{4.42}$$

De (4.39) temos que $t = \varpi r$ e substituindo em (4.40) segue que

$$\varpi^2 r + \beta p + \lambda_m^\gamma r = 0. \tag{4.43}$$

Multiplicando a equação (4.42) por p e a equação (4.43) por r e subtraindo as equações obtidas, resulta que:

$$\varpi^2(p^2 - r^2) + \lambda_m p^2 - \kappa \lambda_m^\alpha p^2 + p \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \phi(s) g(s) ds - \lambda_m^\gamma r^2 = 0. \tag{4.44}$$

Agora, fazendo $\varpi^2(p^2 - r^2) + \lambda_m p^2 - \lambda_m^\gamma r^2 = 0$ e supondo que $r = kp$, com $k \in \mathbf{C}$, segue que

$$\varpi_m = \pm \sqrt{\frac{\lambda_m^\gamma k^2 - \lambda_m}{1 - k^2}}$$

Notemos que ϖ_m tende arbitrariamente ao eixo imaginário quando m tende ao infinito, pois, estamos considerando $\gamma < 0$.

Além disso, com a suposição acima e substituindo κ , da equação (4.44) segue que

$$p \int_0^\infty g(s) ds = \int_0^\infty \phi(s) g(s) ds. \quad (4.45)$$

Resolvendo a equação diferencial (4.41) – basta multiplicar a equação por $e^{\varpi_m s}$ e notar que $\varpi_m \phi(s) e^{\varpi_m s} + \phi_s(s) e^{\varpi_m s} = (\phi(s) e^{\varpi_m s})_s$ – e utilizando (4.37) obtemos a solução

$$\phi(s) = ce^{-\varpi_m s} + p + \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} e^{-\lambda_m^a s}.$$

Das condições iniciais temos que $\eta(0) = 0$, então $0 = \eta(0) = \phi(0)e_m$ donde $\phi(0) = 0$. Utilizando este fato obtemos

$$c = -p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a}.$$

Portanto,

$$\phi(s) = \left(-p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) e^{-\varpi_m s} + p + \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} e^{-\lambda_m^a s}. \quad (4.46)$$

Agora, utilizaremos a hipótese de que $g(s) = e^{-\mu s}$ e substituímos na condição (4.45). Daí

$$p \int_0^\infty e^{-\mu s} ds = \int_0^\infty \phi(s) e^{-\mu s} ds. \quad (4.47)$$

Resolvendo o lado esquerdo da equação acima vem que

$$p \int_0^\infty e^{-\mu s} ds = p \frac{e^{-\mu s}}{-\mu} \Big|_0^\infty = \frac{p}{\mu}. \quad (4.48)$$

Do lado direito, substituindo (4.46), vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \phi(s) e^{-\mu s} ds &= \int_0^\infty \left[\left(-p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) e^{-\varpi_m s} + p + \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} e^{-\lambda_m^a s} \right] e^{-\mu s} ds \\
&= \left(-p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \int_0^\infty e^{-(\varpi_m s + \mu s)} ds + p \int_0^\infty e^{-\mu s} ds \\
&\quad + \left(\frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \int_0^\infty e^{-(\lambda_m^a s + \mu s)} ds \\
&= \left(-p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \frac{1}{\varpi_m + \mu} + \frac{p}{\mu} + \left(\frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \frac{1}{\lambda_m^a + \mu}.
\end{aligned}$$

Logo, igualando os dois últimos resultados obtemos

$$\frac{p}{\mu} = \left(-p - \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \frac{1}{\varpi_m + \mu} + \frac{p}{\mu} + \left(\frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \frac{1}{\lambda_m^a + \mu}$$

donde obtemos

$$\frac{p}{\varpi_m + \mu} = \left(\frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\varpi_m - \lambda_m^a} \right) \left(\frac{1}{\lambda_m^a + \mu} - \frac{1}{\varpi_m + \mu} \right) = \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{(\lambda_m^a + \mu)(\varpi_m + \mu)}.$$

Assim, $p = \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\lambda_m^a + \mu}$. Com efeito, se $\mu > 0$ temos que

$$p = \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\lambda_m^a + \mu} < \frac{\lambda_m^{\frac{-\alpha+a}{2}}}{\lambda_m^a}.$$

Isto implica que $p \approx c_0 \lambda_m^{\frac{-\alpha-a}{2}}$, para algum $c_0 > 0$, quando $\lambda_m \rightarrow +\infty$. Além disso, como $\alpha < 1$, existe um $a > 0$ tal que $\alpha + a < 1$, isto é, $1 - \alpha - a > 0$. Como assumimos que $u = p e_m$, temos que

$$\|u\|_{\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2})} \approx \lambda_m^{1/2} p \approx \lambda_m^{\frac{1-\alpha-a}{2}} \rightarrow +\infty,$$

quando $\lambda_m \rightarrow +\infty$. Portanto a condição do Teorema de Prüss não é satisfeitas para as hipóteses assumidas quando $\gamma < 0$ e $\alpha < 1$.

□

4.5.2 Caso $\gamma > 0$ e $\alpha \in \mathbf{R}$

Teorema 4.5.2. *Considerando que a função kernel é da forma $g(s) = e^{-\mu s}$ para todo $s > 0$ e algum $\mu > 0$ fixo e que $\gamma > 0$, então o semigrupo $T(t) = e^{At}$ sobre $\mathcal{S}$ não é exponencialmente estável.*

Demonstração. Analogamente ao que foi feito no teorema anterior, exibiremos uma seqüência de funções $\mathbf{F}_m = [F_{1,m}, F_{2,m}, F_{3,m}, F_{4,m}, F_{5,m}]^T \in \mathcal{S}$ para as quais a seqüência de soluções obtidas da equação resolvente $(\lambda I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$ não seja uniformemente limitada.

Assim, seja a equação resolvente

$$(\varpi I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$$

onde $\varpi \in \mathbf{C}$, o conjunto dos números complexos.

Considerando nesta equação resolvente $(\varpi I - \mathcal{A})U_m = \mathbf{F}_m$ que

$$\mathbf{F}_m = \left[\frac{\lambda_m^{-1} e_m}{4}, \frac{e_m}{4}, \frac{\lambda_m^{-\gamma} e_m}{4}, \frac{e_m}{4}, 0 \right]^T$$

e supondo soluções da forma $U_m = [pe_m, qe_m, re_m, te_m, \phi(s)e_m]^T$ onde $p, q, r, t \in \mathbf{C}$ e $\phi(s) \in L_g^2(\mathbf{R}^+)$ obtemos

$$\varpi p - q = \frac{\lambda_m^{-1}}{4} \quad (4.49)$$

$$\varpi q + \lambda_m p - \kappa \lambda_m^\alpha p + \beta r + \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \phi(s) g(s) ds = \frac{1}{4} \quad (4.50)$$

$$\varpi r - t = \frac{\lambda_m^{-\gamma}}{4} \quad (4.51)$$

$$\varpi t + \beta p + \lambda_m^\gamma r = \frac{1}{4} \quad (4.52)$$

$$\varpi \phi(s) - q + \phi_s(s) = 0. \quad (4.53)$$

Agora, consideramos que ϖ pertence ao eixo imaginário. Isto é, utilizaremos $\varpi = i\delta$, onde $\delta \in \mathbf{R}$.

Calculando q pela equação (4.49), substituindo o valor encontrado na equação (4.53) e resolvendo a equação diferencial obtida resulta que

$$\phi(s) = p - \frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} + ce^{-i\delta s}.$$

Como, pelas condições iniciais, $\phi(0) = 0$, segue que $c = \frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} - p$. Logo, a equação anterior fica

$$\phi(s) = p - \frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} + \left(\frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} - p \right) e^{-i\delta s}. \quad (4.54)$$

Calculando t pela equação (4.51) e substituindo em (4.52) segue que

$$-\delta^2 r + \beta p + \lambda_m^\gamma r = \frac{1}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-\gamma}}{4}. \quad (4.55)$$

Fazendo $\delta = \lambda_m^{\gamma/2}$ segue da equação anterior que $p \rightarrow 1/(4\beta)$ quando $m \rightarrow \infty$.

Tomando o limite quando λ_m tende ao infinito em (4.54) temos que

$$\phi(s) \rightarrow \frac{1}{4\beta} - \frac{1}{4\beta} e^{-i\delta s}.$$

Agora substituindo q e $\phi(s)$ na equação (4.50) obtemos

$$\begin{aligned} -\delta^2 p + \lambda_m p - \kappa \lambda_m^\alpha p + \beta r + \int_0^\infty \lambda_m^\alpha p g(s) ds - \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} g(s) ds \\ + \int_0^\infty \lambda_m^\alpha \left(\frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} - p \right) e^{-i\delta s} g(s) ds = \frac{1}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-1}}{4}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\delta^2 = \lambda_m^\gamma$ e $g(s) = e^{-\mu s}$ vem que

$$-\lambda_m^\gamma p + \lambda_m p + \beta r - \frac{\lambda_m^{\alpha-1}}{4i\delta\mu} + \frac{\lambda_m^\alpha}{\mu + i\delta} \left(\frac{\lambda_m^{-1}}{4i\delta} - p \right) = \frac{1}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-1}}{4}.$$

Disto, segue que

$$r = \left(\lambda_m^\gamma - \lambda_m + \frac{\lambda_m^\alpha}{\mu + i\delta} \right) \left(\frac{1}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-\gamma}}{4} \right) \beta^{-2} + \frac{\lambda_m^{\alpha-1} \beta^{-1}}{4\mu(\mu + i\delta)} + \frac{\beta^{-1}}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-1} \beta^{-1}}{4}$$

Da equação (4.49) temos

$$q = i\lambda_m^{\gamma/2} \left(\frac{1}{4} + i\delta \frac{\lambda_m^{-\gamma}}{4} \right) \beta^{-1} - \frac{\lambda_m^{-1}}{4}.$$

Observando que

$$\|qe_m\|^2 = |q|^2,$$

temos que

$$\|U_m\| \geq \|qe_m\|^2 = |q|^2 \rightarrow \infty.$$

Portanto, $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ é não limitado quando λ é um imaginário puro. Isto conclui a demonstração. □

4.6 Estabilidade Polinomial

Nesta seção analisaremos o comportamento assintótico da solução do problema (4.5) com as condições iniciais (4.6) quando $\alpha \leq 1$ e $\gamma \geq 1$. Da mesma forma que foi feito na seção anterior, supomos que a função *kernel* de memória decai exponencialmente.

Inicialmente introduzimos o funcional de energia dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(t) &= \mathcal{E}(t), \quad \mathcal{E}_2(t) = \frac{1}{2} \|U_{tt}(t)\|_{\mathcal{S}}^2, \quad \mathcal{E}_3(t) = \frac{1}{2} \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} U(t)\|_{\mathcal{S}}^2 \\ \mathcal{E}_4(t) &= \frac{1}{2} \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2} U(t)\|_{\mathcal{S}}^2, \quad \mathcal{E}_5(t) = \frac{1}{2} \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} U_{tt}(t)\|_{\mathcal{S}}^2, \quad \mathcal{E}_6(t) = \frac{1}{2} \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2} U_{tt}(t)\|_{\mathcal{S}}^2.\end{aligned}\tag{4.56}$$

No que se segue serão enunciados e demonstrados alguns lemas de grande importância na demonstração do teorema sobre decaimento polinomial no final desta seção. Assumimos que sejam válidas as hipóteses (4.9) para a função *kernel* de memória e que os dados iniciais

$$(u_0, u_1, v_0, v_1, \eta^0) \in \mathcal{D}(\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1-\alpha/2}) \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2}) \times \Lambda_1 \tag{4.57}$$

Lema 4.6.1. *Supondo que $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ é solução de (4.5), então, os funcionais de energia satisfazem*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathcal{E}_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2} \eta_{tt}^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}_4(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}_5(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta_{tt}^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0 \\ \frac{d}{dt} \mathcal{E}_6(t) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta_{tt}^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0.\end{aligned}\tag{4.58}$$

Demonstração. Se tomarmos $\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} U = [\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} u, \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} u_t, \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} v, \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} v_t, \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} \eta]^T$ no Teorema 4.4.1, ao invés de $U(t)$, concluímos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_3(t) = \langle \mathcal{A} \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} U, \mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} U \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g'(s) ds \leq 0.$$

□

Nossa intenção é obter um funcional de Lyapunov adequado $\mathcal{L}(t)$ satisfazendo a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = -\delta\mathcal{E}_1(t).$$

Para isso, construiremos funcionais auxiliares cujas derivadas forneçam termos negativos da energia $\mathcal{E}_1(t)$ até que possamos reescrever toda a primeira energia. Um funcional adequado será a soma destes funcionais auxiliares. Assim, sejam os funcionais

$$\Gamma_1(t) = \langle u_t, u \rangle \quad (4.59)$$

$$\Gamma_2(t) = -\left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle \quad (4.60)$$

$$\Gamma_3(t) = \langle v_t, v \rangle \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_4(t) = & \langle u_{tt}, v_t \rangle + \langle \mathbb{A}^{1/2}u_t, \mathbb{A}^{1/2}v \rangle - \kappa \langle \mathbb{C}^{1/2}u_t, \mathbb{C}^{1/2}v \rangle \\ & + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds, \mathbb{C}^{1/2}v \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Lema 4.6.2. *Supondo que $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ é solução de (4.5), então, o funcional Γ_1 satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma_1(t) = & \|u_t\|^2 - \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \kappa\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 \\ & - \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds, \mathbb{C}^{1/2}u \right\rangle - \beta\langle v, u \rangle. \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação em (4.5) por u e integrando em $\mathcal{H}$ obtemos

$$\langle u_{tt}, u \rangle + \langle \mathbb{A}u, u \rangle - \kappa \langle \mathbb{C}u, u \rangle + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}\eta^t(s)g(s)ds, u \right\rangle + \beta\langle v, u \rangle = 0.$$

Substituindo $\langle u_{tt}, u \rangle = \frac{d}{dt}\langle u_t, u \rangle - \|u_t\|^2$ vem que

$$\frac{d}{dt}\langle u_t, u \rangle - \|u_t\|^2 + \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 - \kappa\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds, \mathbb{C}^{1/2}u \right\rangle + \beta\langle v, u \rangle = 0.$$

Disto, segue o resultado. □

Lema 4.6.3. *Supondo que $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ é solução de (4.5), então, o funcional Γ_2 satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma_2(t) = & -\kappa\|u_t\|^2 - \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g'(s)ds \right\rangle + \left\langle \mathbb{A}^{1/2}u, \int_0^\infty \mathbb{A}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds \right\rangle \\ & - \kappa \left\langle \mathbb{C}^{1/2}u, \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds \right\rangle + \beta \left\langle v, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle \\ & + \left\| \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds \right\|^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a primeira equação em (4.5) por $\int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds$ e integrando em $\mathcal{H}$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left\langle u_{tt}, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle + \left\langle \mathbb{A}u, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \kappa \left\langle \mathbb{C}u, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle \\ & + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}\eta^t(s)g(s)ds, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle + \beta \left\langle v, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Fazendo $X = \left\langle u_{tt}, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle$ vem que

$$X = \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta_t^t(s)g(s)ds \right\rangle.$$

Lembrando (4.4) temos que $\eta_t + \eta_s = u_t(t)$, logo

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t, \int_0^\infty u_t g(s)ds \right\rangle + \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta_s(s)g(s)ds \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \left\langle u_t, u_t \int_0^\infty g(s)ds \right\rangle + \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta_s(s)g(s)ds \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \kappa\|u_t\|^2 + \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta_s(s)g(s)ds \right\rangle. \end{aligned}$$

Agora, lembrando que $\eta^t(s)g(s)$ se anula em 0 e $+\infty$ segue que $\int_0^\infty \eta_s(s)g(s)ds = -\int_0^\infty \eta^t(s)g'(s)ds$ após integrarmos por partes. Assim,

$$X = \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g(s)ds \right\rangle - \kappa\|u_t\|^2 - \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s)g'(s)ds \right\rangle.$$

Agora, substituindo X em (4.63) segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle - \kappa \|u_t\|^2 - \left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s) g'(s) ds \right\rangle \\ & + \left\langle \mathbb{A}^{1/2} u, \int_0^\infty \mathbb{A}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle - \kappa \left\langle \mathbb{C}^{1/2} u, \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle \\ & + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds, \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle + \beta \left\langle v, \int_0^\infty \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dai, segue o resultado. $\square$

Lema 4.6.4. *Supondo que $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ é solução de (4.5), então, o funcional Γ_3 satisfaz*

$$\frac{d}{dt} \Gamma_3(t) = \|v_t\|^2 - \|\mathbb{B}^{1/2} u\|^2 - \beta \langle u, v \rangle.$$

Demonstração. Multiplicando a segunda equação em (4.5) por v e integrando em $\mathcal{H}$ obtemos

$$\langle v_{tt}, v \rangle + \langle \mathbb{B} v, v \rangle + \beta \langle u, v \rangle = 0.$$

Substituindo $\langle v_{tt}, v \rangle = \frac{d}{dt} \langle v_t, v \rangle - \|v_t\|^2$ vem que

$$\frac{d}{dt} \langle v_t, v \rangle - \|v_t\|^2 + \langle \mathbb{B}^{1/2} v, \mathbb{B}^{1/2} v \rangle + \beta \langle u, v \rangle = 0.$$

Isto conclui a demonstração. $\square$

Lema 4.6.5. *Supondo que $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$ é solução de (4.5), então, o funcional Γ_4 satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Gamma_4(t) = & -\beta \|v_t\|^2 - \beta \langle u_{tt}, u \rangle - \langle \mathbb{B}^{1/2} u_{tt}, \mathbb{B}^{1/2} v \rangle + \langle \mathbb{A}^{1/2} u_{tt}, \mathbb{A}^{1/2} v \rangle \\ & - \kappa \langle \mathbb{C}^{1/2} u_{tt}, \mathbb{C}^{1/2} v \rangle + \left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2} \eta_{tt}(s) g(s) ds, \mathbb{C}^{1/2} v \right\rangle. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta derivar a primeira equação de (4.5) e substituir u_{ttt} e v_{tt} em

$$\frac{d}{dt} \langle u_{tt}, v_t \rangle = \langle u_{ttt}, v_t \rangle + \langle u_{tt}, v_{tt} \rangle.$$

Segue o resultado. $\square$

Lema 4.6.6. *Com a hipótese dos lemas anteriores, os funcionais satisfazem as desigualdades abaixo.*

1. Para o funcional $\Gamma_1(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma_1(t) \leq & \|u_t\|^2 - \|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \left(\kappa + \frac{\epsilon}{2}\right)\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 + \\ & \frac{1}{2\epsilon}\|\eta^t\|_{\chi_1} - \beta\langle v, u \rangle; \end{aligned}$$

2. equanto que Γ_2 satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma_2(t) \leq & -\left(\kappa - \frac{\epsilon}{2}\right)\|u_t\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|\mathbb{C}^{1/2}u\|^2 \\ & + \frac{C}{2\epsilon} \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)\|^2 g(s) ds + \frac{\epsilon}{2}\|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 \\ & + \left(1 + \frac{C(a^2) + \kappa^2 + C(\beta^2)}{2\epsilon}\right) \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)\|^2 g(s) ds. \end{aligned}$$

3. e para $\Gamma_4(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Gamma_4(t) \leq & -\beta\|v_t\|^2 + \frac{\beta^2 C(\Omega)}{2\epsilon}\|\mathbb{A}^{1/2}u\|^2 + C_2\|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2 \\ & + x_1 \int_0^\infty \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{1/2}\eta_{tt}(s)\|^2 g(s) ds + x_2 \int_0^\infty \|\mathbb{B}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s) ds \\ & + x_3 \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{1/2}\eta_{tt}(s)\|^2 g(s) ds + x_4 \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2}\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s) ds \\ & + x_5 \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2}\eta_{tt}(s)\|^2 g(s) ds + x_6 \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2}\eta(s)\|^2 g(s) ds. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Demonstração. 1. Para mostrar a primeira desigualdade, basta aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz no termo $\left\langle \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds, \mathbb{C}^{1/2}u \right\rangle$, notar que $\left\| \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2}\eta^t(s)g(s)ds \right\| \leq \|\eta^t\|_{\chi_1}$ e aplicar a desigualdade de Young.

2. A última das hipóteses em (4.9) nos diz que $-ag(s) \leq g'(s) \leq -bg(s)$ e, além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, Young e positividade

dos operadores segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle u_t, \int_0^\infty \eta^t(s) g'(s) ds \right\rangle &\leq \frac{\epsilon}{2} \|u_t\|^2 + \frac{C(a^2)}{2\epsilon} \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g(s) ds, \\
\left\langle \mathbb{A}^{1/2} u, \int_0^\infty \mathbb{A}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle &\leq \frac{\epsilon}{2} \|\mathbb{A}^{1/2} u\|^2 + \frac{C}{2\epsilon} \int_0^\infty \|\mathbb{A}^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g(s) ds \\
\kappa \left\langle \mathbb{C}^{1/2} u, \int_0^\infty \mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle &\leq \frac{\epsilon}{2} \|\mathbb{C}^{1/2} u\|^2 + \frac{\kappa^2}{2\epsilon} \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g(s) ds \\
\beta \left\langle v, \int_0^\infty \eta^t(s) g(s) ds \right\rangle &\leq \frac{\epsilon}{2} \|\mathbb{B}^{1/2} v\|^2 + \frac{C(\beta^2)}{2\epsilon} \int_0^\infty \|\mathbb{C}^{1/2} \eta^t(s)\|^2 g(s) ds.
\end{aligned}$$

3. Novamente, basta lembrar da última das hipóteses em (4.9), usar a relação $\eta_{tt} - \eta_{ss} = u_{tt}$, a positividade dos operadores, o fato de que $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{r_1}) \subset \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}^{r_2})$ quando $0 \leq r_2 \leq r_1$, em particular, a desigualdade decorrente da imersão compacta $\mathcal{D}(\mathbb{A}^\gamma) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A})$ (pois $\gamma \geq 1$) e aplicar as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young.

□

As constantes envolvidas nos lemas anteriores são todas positivas e podem ser explicitamente encontradas. Do fato das escolhas dos ϵ serem arbitrárias podemos obter o seguinte

Teorema 4.6.1. *Supondo que $\alpha \leq 1$ e $\gamma \geq 1$, existe uma constante positiva M' tal que*

$$\mathcal{E}_1(t) \leq \frac{M'}{t} \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(0)$$

Demonstração. Dos lemas anteriores, podemos escolher constantes positivas M_i e δ_j , tais que o funcional

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{i=1}^6 M_i \mathcal{E}_i(t) + \sum_{j=1}^4 \delta_j \Gamma_j(t)$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -C \mathcal{E}_1(t) - K_1 \int_0^\infty \|\mathbb{A}_1^{1/2} \eta\|^2 g(s) ds - K_2 \int_0^\infty \|\mathbb{B}^{1/2} \eta\|^2 g(s) ds. \quad (4.66)$$

onde $K_1, K_2 > 0$.

Então, temos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C\mathcal{E}_1(t),$$

onde $C = C(\delta_j, M_i)$.

Portanto, integrando a desigualdade (4.66) acima no intervalo $[0, t]$ vem que

$$\mathcal{L}(t) + C \int_0^t \mathcal{E}_1(s) ds \leq \mathcal{L}(0) \leq \sum_{i=1}^6 M_i \mathcal{E}_i(0).$$

Logo,

$$\int_0^t \mathcal{E}_1(s) ds \leq \frac{M}{C} \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(0).$$

Como $\frac{d}{dt} [t\mathcal{E}_1(t)] = \mathcal{E}_1(t) + t\frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) \leq \mathcal{E}_1(t)$ vem que

$$t\mathcal{E}_1(t) \leq \int_0^t \mathcal{E}_1(s) ds \leq \frac{M}{C} \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(0).$$

Disto concluímos o resultado

$$\mathcal{E}_1(t) \leq \frac{1}{t} \frac{M}{C} \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(0).$$

□

4.7 Aplicações

Exemplo 1

O sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s) \Delta u(t-s) ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} - \Delta v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{R}^+ \times \Omega$$

satisfazendo a condição de contorno $u = v = 0$ sobre $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$ e a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1, \end{cases}$$

é uma caso particular do problema abstrato deste capítulo. Neste caso, temos $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Além disso, $\mathbb{A} : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(\mathbb{A}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ com $\mathbb{A} = -\Delta$ e $\mathcal{D}(\mathbb{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Temos que $\mathbb{B} \equiv \mathbb{A}$ com $\mathcal{D}(\mathbb{A}) = \mathcal{D}(\mathbb{B})$ e $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) = \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.

Temos a seguinte caracterização para $\mathbb{A}$

1. é positivo definido;
2. é auto-adjunto;
3. $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.

A energia é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \Big(& \int |u_t|^2 dx + \int |\nabla u|^2 dx - \kappa \int |\nabla u|^2 dx + \int |v_t|^2 dx \\ & + \int |\nabla v|^2 dx + \int_0^\infty \int |\nabla \eta^t|^2 dx g(s) ds + 2\beta \int u.v dx \Big). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Este problema pode ser escrito como uma equação de evolução definida em $\mathcal{S} = \mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) \times \mathcal{H} \times \mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) \times \mathcal{H} \times \chi_1 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \chi_1$ na forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}U(t), & \forall t > 0, \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad (4.68)$$

onde o operador $\mathcal{A}$ foi definido no decorrer do capítulo e $U(t) = [u, u_t, v, v_t, \eta]^T$, $U(t) = [u_0, u_1, v_0, v_1, \eta_0]^T \in \mathcal{S}$.

O operador $\mathcal{A}$, associado a esta equação, é dissipativo e satisfaz as condições do Teorema de Lumer-Phillips, portanto, é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração em $\mathcal{S}$. Quando $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe solução única para o problema.

Como a caracterização acima é caso particular da formulação feita neste capítulo segue a existência de solução única para este problema. Além disso, como $\gamma = 1$ e $\alpha = 1$ segue que este sistema não é exponencialmente estável, todavia, é polinomialmente estável.

Exemplo 2

O sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \Delta^2 v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{R}^+ \times \Omega$$

satisfazendo a condição de contorno $u = v = \Delta v = 0$ sobre $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$ e a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1. \end{cases}$$

também é caso particular. Neste problema, temos $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Além disso, $\mathbb{A} : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(\mathbb{A}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ com $\mathbb{A} = -\Delta$ e $\mathcal{D}(\mathbb{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

O operador $\mathbb{B} : L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(\mathbb{B}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é tal que $\mathbb{B} = \Delta^2$ e $\mathcal{D}(\mathbb{B}) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Também $\mathcal{D}(\mathbb{A}^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\mathbb{B}^{1/2}) = H_0^2(\Omega)$.

Todos os resultados do exemplo 1 também são válidos neste exemplo.

Exemplo 3

Seja

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)u(t-s)ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} - \Delta v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{R}^+ \times \Omega$$

satisfazendo a condição de contorno $u = v = 0$ sobre $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$ e a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1. \end{cases}$$

O semigrupo associado a este problema não decai exponencialmente, no entanto, temos decaimento polinomial da energia.

Exemplo 4

O sistema abaixo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^\infty g(s)u(t-s)ds + \beta v = 0 \\ v_{tt} + \Delta^2 v + \beta u = 0 \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{R}^+ \times \Omega$$

satisfazendo a condição de contorno $u = v = \Delta v = 0$ sobre $\mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$ e a condição inicial

$$\begin{cases} u(-t) = u_0(t), & \forall t \geq 0; & v(0) = v_0; \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1. \end{cases}$$

também possui decaimento polinomial da energia.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Pazy, **Semigroups of Linear Operators and Applications for Partial Differential Equations**, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] J. E. M. Rivera, **Estabilização de Semigrupos e Aplicações**, Série de Métodos Matemáticos - EAC, Rio de Janeiro, 2008.
- [3] K. Yosida, **Functional Analysis**, Classical Mathematics, Springer, 2003.
- [4] G. Avalos, **Exact Controllability of a Thermoelastic System with Control in the Thermal Component Only**, IMA Preprints Series, 1532, 1998.
- [5] J. E. M. Rivera, M. G. Nazo, **Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory**, J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 691-707.
- [6] A. F. Pazoto, J. C. V. Bravo, J. E. M. Rivera, **Asymptotic Stability of Semigroups Associated to Linear Weak Dissipative Systems**, Mathematical and Computer Modelling, 2003.
- [7] C. R. Oliveira, **Introdução à Análise Funcional**, Publicações Matemáticas, IMPA, 2006.