UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cláudia Aline Azevedo dos Santos

O Método de Galerkin aplicado a uma classe de Problemas Elípticos

BELÉM-PA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cláudia Aline Azevedo dos Santos

O Método de Galerkin aplicado a uma classe de Problemas Elípticos

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

BELÉM-PA

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Cláudia Aline Azevedo dos Santos

O Método de Galerkin aplicado a uma classe de Problemas Elípticos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 23 de Julho de 2009.

Conceito:_____

Banca Examinadora

_____

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Faculdade de Matemática - UFPA

_____

Prof. Dr. Geraldo Mendes Araújo
Faculdade de Matemática - UFPA

_____

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Departamento de Matemática - UFCG

Dedico esta dissertação aos meus amados pais e irmãos, e ao meu marido e grande amor, Rafael.

Agradecimentos

Os meus sinceros agradecimentos ...

A Deus por toda força, bençãos, saúde e perseverança que me permitiram concluir este trabalho.

Aos meus amados pais, irmãos e marido pelo amor, apoio e incentivo nos momentos mais difíceis e por serem minha inspiração para continuar.

Ao meu orientador e amigo Giovany Figueiredo pela dedicação, paciência, atenção, compreensão e por ser um exemplo de profissional competente.

A família Pastoral da Criança, em especial ao casal Andrey e Luciana, por suas orações e por estarem ao meu lado em todos os melhores momentos de minha vida.

Aos inesquecíveis amigos Michele Barbosa, Rafael Abreu e Amanda Corrêa, pela confiança e amizade verdadeira, e aos queridos amigos Jeremias, Shirleny, Dalmi, Rômulo, Adam, João, Kelmem e Denilson pelo companheirismo, contribuições e bons momentos.

Aos professores Dr. Claudianor Alves e Dr. Geraldo Mendes por terem participado da banca examinadora deste trabalho e por suas prestimosas sugestões.

A todos aqueles que contribuiram direta ou indiretamente com este trabalho e não foram citados.

Ao órgão de fomento CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação abordaremos o Método de Galerkin para uma classe de problemas elípticos. Mais precisamente, o método será aplicado para mostrarmos a existência de solução para problemas envolvendo os operadores Laplaciano, p-Laplaciano e a um sistema.

Palavras-chave: Problemas elípticos, método de Galerkin, grau de Brouwer.

Abstract

In this dissertation we discuss the Galerkin method for a class of elliptic problems. More specifically, the method will be applied to show the existence of solution to problems involving Laplacian and p-Laplacian operators and a system.

Key-words: Elliptic Problems, Galerkin's method, the Brouwer's Degree.

Conteúdo

Introdução **1**

1 O grau topológico de Brouwer **4**

1.1 Definição do Grau 4

1.2 As propriedades do Grau Topológico de Brouwer 11

1.3 Teorema do ponto fixo de Brouwer 14

2 O Método de Galerkin aplicado a uma classe de problemas Elípticos com não linearidade do tipo superlinear **18**

3 Aplicação do método de Galerkin a uma classe de problemas Elípticos com um termo sublinear **27**

3.1 Regularidade da solução do problema auxiliar $(P)_{2,n}$ 35

4 Aplicação do Método de Galerkin a uma classe de Sistemas Elípticos **51**

5 O Método de Galerkin e o Operador p-Laplaciano **59**

5.1 O caso sublinear 60

A Resultados importantes **68**

B Resultados Básicos **75**

Bibliografia **86**

Introdução

O objetivo principal desta dissertação é estudar uma importante ferramenta para resolução de Problemas Diferenciais Elípticos, que é o Método de Galerkin. Este é baseado na Teoria do Grau topológico, e consiste em aproximar os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ por uma sequência de espaços de dimensão finita.

Este estudo será baseado em notas de um minicurso ministrado pelo Prof. Dr. Claudianor O. Alves na Universidade Federal de Campina Grande no ano de 2002, e no segundo capítulo do livro do Kesavan [13]. Aplicaremos o método para estudarmos algumas classes de problemas elípticos que envolvem os operadores Laplaciano e p-Laplaciano, e também a um sistema.

Para uma melhor compreensão este texto será escrito com a seguinte estruturação:

No Capítulo 1 estudaremos os principais resultados da teoria do Grau topológico de Brouwer, o qual pode ser visto em [13].

No Capítulo 2 mostraremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(x,v) \quad em \;\; \Omega \\ v &= 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)_1$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, e a não linearidade f tem crescimento subcrítico ou crítico.

No Capítulo 3, o estudo é desenvolvido para se obter soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^q + f(x,v) \quad em \;\; \Omega \\ v > 0 & \quad em \;\; \Omega \\ v = 0 & \quad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \qquad (P)_2$$

o qual é um problema do tipo côncavo e convexo.

Com o objetivo de ilustrar que esta importante ferramenta é aplicável a diversas classes de problemas elípticos, no Capítulo 4 mostraremos a existência e unicidade de solução para o sistema

$$\begin{cases} -\Delta v + u &= f_1(x,u,v) \quad em \;\; \Omega \\ \Delta u + v &= f_2(x,u,v) \quad em \;\; \Omega \\ u = v &= 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \qquad (S).$$

Vale a pena ressaltar que um dos trabalhos pioneiros envolvendo o método de Galerkin aplicado a sistemas elípticos não-lineares foi publicado por Alves e de Figueiredo [4] em 2003, no qual eles mostram a existência de solução para um sistema do tipo côncavo e convexo.

No Capítulo 5 o método será usado para encontrarmos solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= f(x,v) \quad em \;\; \Omega \\ u &= 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)_3$$

que envolve o operador p-Laplaciano.

Este trabalho possui ainda dois apêndices. No apêndice A destacamos um resultado devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [5], que envolve subsolução e supersolução, e será usado no capítulo 3 para garantir uma boa estimativa para a solução do problema $(P)_2$. No apêndice B, apresentamos algumas definições e teoremas básicos que foram usados neste estudo.

No corpo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int_\Omega f$: denota $\int_\Omega f(x)dx$,

$|f|_s = |f|_{L^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $1 \leq s < \infty$,

$|f|_{s(B_r(x))} = |f|_{L^s(B_r(x))} = \left(\int_{B_r(x)} |f|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $1 \leq s < \infty$,

$\|f\| = \|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

(u, v): produto interno no $\mathbb{R}^N$,

$< f, v >$: par de dualidade, ou seja, $f(v)$,

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$: Espaço dos transformações lineares definidas sobre $\mathbb{R}^N$.

Capítulo 1

O grau topológico de Brouwer

Neste capítulo estudaremos os principais resultados sobre o grau topológico de Brouwer (ver [13] para maiores detalhes).

1.1 Definição do Grau

O grau topológico é uma ferramenta muito utilizada no estudo da existência de soluções para equações não lineares. Neste capítulo estudaremos a versão do grau para dimensão finita conhecido como o grau de Brouwer.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são k vezes diferenciáveis em Ω, tal que estas funções e todas as suas derivadas até ordem k podem ser extendidas continuamente para $\overline{\Omega}$.

Considere $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e recorde que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ e logo, pode ser representado por uma matrix $n \times n$. No que segue considere $S = \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\}$, onde $J_f(x) = det(f'(x))$.

Definição 1.1 *: Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função em $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, definimos o grau topológico de Brouwer de f em relação a Ω no ponto b como*

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 0 & , se\ f^{-1}(b) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) & , se\ f^{-1}(b) \neq \emptyset \end{cases}, \tag{1.1}$$

onde a função sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

e J_fé o determinante de $f'(x)$.

Note que como $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$, então $f'(x)$ está bem definida para $x \in f^{-1}(b)$ e $J_f(x) \neq 0$. Então, $f'(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um isomorfismo para todo $x \in f^{-1}(b)$ e pelo Teorema de função inversa (ver Teorema B.7 no apêndice B) f é invertível em uma vizinhança de x. Consequentemente, como $\overline{\Omega}$ é compacto, temos qie $f^{-1}(b) \subset \overline{\Omega}$ é compacto, e portanto é finito e logo (1.1) está bem definido. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1 *: Seja $I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a função identidade e $f = I|_\Omega$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & , se \quad b \in \Omega \\ 0 & , se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Mais geralmente, se $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é um operador linear inversível, e se $f = T|_\Omega$, temos que

$$d(f, \Omega, b) = \begin{cases} sgn(detT) & , se \quad b \in T(\Omega) \\ 0 & , se \quad b \notin T(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Note que $sgn(detT) = (-1)^\beta$, onde β é a soma das multiplicidades algébricas dos autovalores negativos de T.

Exemplo 1.2 *: Seja $\Omega = (-1, 1)$ e defina*

$$f(x) = x^2 - \varepsilon^2, \text{ para } \varepsilon < 1.$$

Então, $f'(x) = 2x$ e $f^{-1}(0) = \{+\varepsilon, -\varepsilon\}$. Assim,

$$d(f, \Omega, 0) = 0.$$

Vimos que o grau é igual a zero se b não pertence a imagem de f. A recíproca, como vimos no exemplo 1.2, é falsa. Entretanto, se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, o conjunto solução da equação $f(x) = b$ é, de fato, não vazio.

Gostaríamos agora, de estender a definição de grau para funções que são apenas contínuas em $\overline{\Omega}$. Para isto, precisamos de alguns resultados preliminares. Iniciaremos mostrando outra forma de se calcular o grau.

Proposição 1.1 : *Seja $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, existe ε_0 tal que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$d(f, \Omega, b) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx \tag{1.2}$$

onde $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função C^∞ cujo suporte está contido na bola $B(0, \varepsilon)$ de centro 0 e raio ε, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1 \tag{1.3}$$

Demonstração: Se $f^{-1}(b) = \emptyset$, então considere $\varepsilon_0 < \rho(b, f(\overline{\Omega}))$ (onde $\rho(x, A)$ denota a distância do ponto x ao conjunto A). Se φ_ε satisfaz a condição acima, então temos que $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) = 0$ e logo, (1.2) é verdadeira.

Considere agora $f^{-1}(b) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Para cada $1 \leq i \leq m$, temos que $J_f(x_i) \neq 0$, e mais, pelo Teorema da função inversa (ver Teorema B.7 no apêndice B), existe uma vizinhança $\mathcal{U}_i$ de x_i e uma vizinhança $\mathcal{V}_i$ de b tal que as $\mathcal{U}_i$ são disjuntas duas a duas e

$$f|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$$

é um homeomorfismo. Além disso, no interior dessas vizinhanças se necessário, podemos supor que $J_f|_{\mathcal{U}_i}$ tenha sinal constante. Agora, considere $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B(b; \varepsilon_0) \subset \cap_{i=1}^m \mathcal{V}_i.$$

Seja $W_i = f^{-1}(B(b; \varepsilon_0)) \cap \mathcal{U}_i$. Então, os W_i são disjuntos dois a dois e J_f tem sinal constante em cada um deles. Daí, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, como $\varphi_\varepsilon(f(x) - b) = 0$ fora dos W_i, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx &= \sum_{i=1}^m \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) J_f(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^m sgn(J_f(x_i)) \int_{W_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - b) |J_f(x)| dx \\
&= \sum_{i=1}^m sgn(J_f(x_i)) \int_{B(0;\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(y) dy
\end{aligned}$$

por uma mudança de variável em cada W_i e por (1.3), o lado direito é exatamente $d(f, \Omega, b)$.

■

Usaremos a fórmula (1.2) para provar que o grau permanece estável quando b e f são ligeiramente perturbadas. Para isto precisamos dos seguintes resultados técnicos:

Lema 1.1 *: Seja $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{N-1})$ e*

$$B_i = det(\partial g, ..., \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, ..., \partial_n g).$$

Então

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \partial_i B_i = 0 \tag{1.4}$$

■

Lema 1.2 *: Seja $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Seja $A_{ij}(x)$ o cofator da entrada $\partial_i f_j(x)$ em $J_f(x)$. Então para todo $1 \leq j \leq N$,*

$$\sum_{i=1}^{N} \partial_i A_{ij} = 0. \tag{1.5}$$

O Lema anterior é basicamente uma consequência do fato de que a ordem de derivação é irrelevante para funções C^2. Por exemplo, se $N = 2$, então

$$A_{11} = \partial_2 f_2, A_{21} = -\partial_1 f_2$$

$$A_{12} = -\partial_2 f_1, A_{22} = \partial_1 f_1,$$

e verificamos que, se $f \in C^2$,

$$\partial_1 A_{11} + \partial_2 A_{21} = \partial_1 A_{12} + \partial_2 A_{22} = 0.$$

Proposição 1.2 *: Seja $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$, $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) > 0$ e $b_i \in B(b; \rho_0)$ para $i = 1, 2$. Se $b_i \notin f(S)$, temos que*

$$d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_2).$$

Demonstração: Claramente vamos supor, $b_i \notin f(\partial\Omega)$. Assim, por hipótese, o grau $d(f, \Omega, b_i)$ está bem definido para $i = 1, 2$. Seja

$$\delta < \rho_0 - |b - b_i|, i = 1, 2.$$

Então, existe $\varepsilon < \delta$ tal que

$$d(f, \Omega, b_i) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - b_i) J_f(x) dx, i = 1, 2,$$

onde φ_ε satisfaz as mesmas condições da proposição (1.1). Então,

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(y - b_2) - \varphi_\varepsilon(y - b_1) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \\ &= (b_1 - b_2) \int_0^1 \nabla \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2)) dt \\ &= div(w(y)) \end{aligned}$$

onde

$$w(y) = \left(\int_0^1 \varphi_\varepsilon(y - b_1 + t(b_1 - b_2))dt \right) (b_1 - b_2).$$

Agora, se $y \in f(\partial\Omega)$,

$$\begin{aligned} |y - (1-t)b_1 - tb_2| &= |(y-b) + (1-t)(b-b_1) + t(b-b_2)| \\ &> \rho_0 - (1-t)(\rho_0 - \delta) - t(\rho_0 - \delta) \\ &= \delta > \varepsilon. \end{aligned}$$

Como o suporte de φ_ε esta contido na bola $B(0;\varepsilon)$, teremos que $w(y) = 0$ para $y \in f(\partial\Omega)$. Agora, para $1 \leq i \leq N$, definimos

$$v_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^N w_j(f(x))A_{ij}(x), & x \in \overline{\Omega} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Pelas considerações feitas anteriormente, $v_i = 0$, sobre $\partial\Omega$. Agora,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_i}A_{ij}(x) \\ + \sum_{j=1}^N w_j(f(x))\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x). \end{cases}$$

Assim,

$$div(v(x)) = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial w_j}{\partial x_k}(f(x)) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i}A_{ij}(x) \right) \\ + \sum_{j=1}^N w_j(f(x)) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}(x) \right). \end{cases}$$

Pelo Lema (1.2), o segundo termo do lado direito é igual a zero. Note que, pela definição dos A_{ij},

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)A_{ij}(x) = \delta_{jk}J_f(x).$$

Assim,

$$div(v(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f w_j}{\partial x_i}(f(x))J_f(x) = div(w(f(x))J_f(x).$$

Portanto temos que

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,b_2) - d(f,\Omega,b_1) &= \int_\Omega div(w(f(x))J_f(x)dx \\ &= \int_\Omega div(v(x))dx = 0 \end{aligned}$$

visto que v é igual a zero sobre $\partial\Omega$.

■

Seja $f \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e ρ como na proposição anterior. Do Teorema de Sard (ver Teorema B.11 no apêndice), o conjunto $f(S)$ possue medida nula, existem valores

regulares na $B(b;\rho_0)$, ou seja, existem valores $f(b) = y$ tais que $b \notin S$ e o grau é o mesmo em todos estes pontos. Somos assim conduzidos a próxima definição.

Definição 1.2 : *Seja $f \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$, e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$. O grau de f em relação a Ω no ponto b satisfaz*

$$d(f,\Omega,b) = d(f,\Omega,b') \tag{1.6}$$

onde b' é algum valor regular em $B(b,\rho_0)$.

Proposição 1.3 : *Seja $f, g \in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Então, existe $\varepsilon = \varepsilon(f,g,\Omega)$, tal que, para $0 < |t| < \varepsilon$,*

$$d(f + tg, \Omega, b) = d(f,\Omega,b). \tag{1.7}$$

Demonstração: *1º caso:* Seja $b \notin f(\overline{\Omega})$. Então, $d(f,\Omega,b) = 0$ e $\tilde{\rho} = \rho(b, f(\overline{\Omega})) > 0$. Considere $\varepsilon = \tilde{\rho}/2\|g\|_\infty$ (onde $\|.\|_\infty$ denota a norma em $C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$). Se $|t| < \varepsilon$, então $\rho(b, f - tg(\overline{\Omega})) \geq \tilde{\rho}/2 > 0$ e assim $b \notin (f + tg)(\overline{\Omega})$. Portanto, $d(f + tg, \Omega, b) = 0$ e (1.7) se verifica, visto que todos os lados se anulam.

2º caso: Seja $b \notin f(S)$ e $f^{-1}(b) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ tal que $J_f(x_i) \neq 0$ para $1 \leq i \leq m$. Defina

$$h(t,x) = f(x) + tg(x) - b.$$

Então, para $1 \leq i \leq m$,

$$h(0,x_i) = 0$$

$$\partial_x h(0,x_i) = f'(x_i)$$

e $f'(x_i)$ é invertível, por suposição. Logo, pelo Teorema da função implícita (ver Teorema B.8 no apêndice B), existe uma vizinhança $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ de 0 em $\mathbb{R}$, vizinhanças $\mathcal{U}_i$ de x_i em Ω disjuntas duas a duas, e funções $\varphi_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon) \to \mathcal{U}_i$ tais que as soluções de $h(t,x) = 0$ em $(-\varepsilon_i, \varepsilon) \times \mathcal{U}_i$ são da forma $(t, \varphi_i(t))$. Além disso, diminuindo as vizinhanças, se necessário, podemos garantir que $sgn(J_{f+tg}(x)) = sgn(J_f(x_i))$ em cada $\mathcal{U}_i$. Agora considere

$$\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i.$$

A relação (1.7) é consequência da definição de grau para o caso regular.

3º caso: Assuma agora que $b \in f(S)$. Seja ρ_0 a distância de b a $f(\partial\Omega)$. Considere $b_1 \in B(b, \rho_0/3)$ tal que b_1 é regular e existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < |t| < \varepsilon_0$,

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b_1) = d(f, \Omega, b).$$

Agora considere $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \rho_0/3\|g\|_\infty\}$. Claramente, $b \notin (f + tg)(\partial\Omega)$ para $|t| < \varepsilon$. De fato, $\rho(b, (f + tg)(\partial\Omega)) \geq 2\rho_0/3$ quando

$$|b - b_1| < \rho_0/3 \leq \frac{1}{2}\rho(b, (f + tg)(\partial\Omega)).$$

Consequentemente

$$d(f + tg, \Omega, b_1) = d(f + tg, \Omega, b)$$

e a demonstração está completa.

■

Agora estamos em condições de definir o grau para toda função contínua. Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega))$. Podemos sempre encontrar $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $\|g - f\|_\infty < \rho_0/2$. Então, $b \notin g(\partial\Omega)$ e o grau esta bem definido. Se g_1 e g_2 são funções satisfazendo a condição acima, considere $\tilde{g} = g_1 - g_2$. Então, para $0 < t < 1$, temos $\|f - (g_2 - t\tilde{g})\|_\infty < \rho_0$ e, pela proposição 1.3, a função

$$d(t) = d(g_2 + t\tilde{g}, \Omega, b)$$

é localmente constante, e portanto, pela conexidade de $[0, 1]$, é constante neste intervalo. Assim,

$$d(g_1, \Omega, b) = d(g_2, \Omega, b).$$

Este comentário motiva a próxima definição.

Definição 1.3 *: Seja f, b e ρ_0 como acima. Então, o grau de f em relação a Ω no ponto b é dado por*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) \tag{1.8}$$

para algum $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - g\|_\infty < \rho_0/2$.

Proposição 1.4 *: Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0) \tag{1.9}$$

Demonstração: Se $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) = \rho(0, (f-b)(\partial\Omega))$ e se $g \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $\|g - f\|_\infty < \rho_0/2$, então

$$\|(g-b) - (f-b)\|_\infty = \|g - f\|_\infty < \rho_0/2$$

e mais, por definição,

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b) \text{ e } d(f-b, \Omega, 0) = d(g-b, \Omega, 0).$$

Se b é imagem de um ponto em que $J_g(x) = 0$, então podemos encontrar um valor regular b_1 de g tal que

$$|b - b_1| < \rho(b, g(\partial\Omega))/2$$

e

$$d(g - b_1, \Omega, 0) = d(g-b, \Omega, 0) \text{ e } d(g, \Omega, b_1) = d(g, \Omega, b).$$

Como b_1 é um valor regular de g, então

$$d(g, \Omega, b_1) = d(g - b_1, \Omega, 0)$$

e a demonstração esta completa.

■

1.2 As propriedades do Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção demonstraremos algumas propriedades básicas do grau de Brouwer.

Teorema 1.1 ***(i) (Continuidade com relação a função)****: Seja $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f em $C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b) \tag{1.10}$$

(ii) (Invariância do grau por Homotopia)*: Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1]; \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(.,t), \Omega, b)$ é independente de t.*

(iii) *O grau é constante, com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.*

(iv)(Aditividade)*: Seja $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, onde $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b). \tag{1.11}$$

Demonstração: ***(i)*** Defina

$$\mathcal{U} = \{g \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N) |\ \|f - g\|_\infty < \rho_0/4\}$$

onde $\rho_0 = \rho(b, f(\partial\Omega)) \geq 3\rho_0/4$. Assim, $b \notin g(\partial\Omega)$ e o grau está bem definido. Seja $h \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tal que $\|f - h\|_\infty < \rho_0/8$. Então,

$$\|g - h\| < \frac{3}{8}\rho_0 \leq \frac{1}{2}\rho(b, g(\partial\Omega)).$$

Portanto, por definição,

$$d(g, \Omega, b) = d(h, \Omega, b) = d(f, \Omega, b).$$

(ii) Pelo passo anterior, $d(H(., t), \Omega, b)$ é localmente constante, logo, contínuo e portanto constante em $[0, 1]$ por conexidade.

(iii) Em virtude de (1.9), $d(f, \Omega, b) = d(f - b, \Omega, 0)$ e mais, se $|b - b_1|$ é pequeno, $d(f - b, \Omega, 0) = d(f - b_1, \Omega, 0)$. Assim, o grau é localmente constante e, logo, contínuo e constante sobre componentes conexas.

(iv) Seja ρ_0 como em (i) e g uma função C^2 tal que $\|f - g\|_\infty < \rho_0/2$. Então, temos que

$$d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b)$$

$$d(g, \Omega_i, b) = d(f, \Omega_i, b), i = 1, 2.$$

Agora, $B = B(b; \rho_0/2)$ é conexo e está contido em $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega)$, assim como em $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega_i)$ para $i = 1, 2$, e portanto, em uma componente conexa para cada um destes conjuntos. Pelo Teorema de Sard (ver Teorema B.11 no apêndice B), existe $c \in B$ tal que este é um valor regular de g e mais

$$d(g, \Omega, b) = d(g, \Omega, c) \text{ e } d(g, \Omega_i, c) = d(g, \Omega_i, b)$$

para $i = 1, 2$. Como g é C^2 e c é regular, segue imediatamente da definição de grau que

$$d(g, \Omega, c) = d(g, \Omega_1, c) + d(g, \Omega_2, c)$$

e o resultado está demonstrado.

■

Proposição 1.5 *: Se $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\overline{\Omega})$, então $d(f, \Omega, b) = 0$. Equivalentemente, se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = b$.*

Demonstração: Seja $\rho_0 = \rho(b, f(\overline{\Omega}))$. Se g é C^2 tal que $\|f - g\|_\infty < \rho_0/2$, então $b \notin g(\overline{\Omega})$. Assim, como b é um valor regular de g, temos que $d(g, \Omega, b) = 0$ e o resultado segue.

■

Corolário 1.1 *: Se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, então $f(\Omega)$ é uma vizinhança de b.*

Demonstração: Seja C_b uma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ contendo b. Então, para todo, $c \in C_b$, temos $d(f, \Omega, c) \neq 0$ e mais, pela proposição anterior, $C_b \subset f(\Omega)$ e a conclusão segue, pois C_b é aberto.

■

Proposição 1.6 *: Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um conjunto fechado e $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(K)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega \setminus K, b).$$

Demonstração: Considere g, uma função C^2 tal que $d(g, \Omega, b) = d(f, \Omega, b)$ e tal que $b \notin g(K)$. Agora considere c, um valor regular de g, suficientemente próximo de b tal que $c \notin g(K)$ e pertence a alguma componente conexa em $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial\Omega)$ e $\mathbb{R}^N \setminus g(\partial(\Omega \setminus K))$ que contenha b. O resultado segue da definição de grau para o caso regular.

■

Proposição 1.7 *: Seja $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tais que $f = g$ em $\partial\Omega$. Seja $b \notin f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

Demonstração: Defina $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1]; \mathbb{R}^N)$ por

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Então $H(., t) = f = g$ na fronteira, e mais, $d(H(., t), \Omega, b)$ está definido e independe de t. O resultado segue tomando sucessivamente $t = 0$ e $t = 1$.

■

Corolário 1.2 *: Seja $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Assuma que existe $H \in C(\partial\Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ tal que H nunca assuma o valor b e tal que $H(., 0) = f|_{\partial\Omega}$ e $H(., 1) = g|_{\partial\Omega}$. Então*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

Demonstração: Pelo Teorema de Tietze (ver Teorema B.12 no apêndice B), podemos extender H para $\tilde{H} \in C(\overline{\Omega} \times [0,1]; \mathbb{R}^N)$. Considere $\tilde{H}(.,0) = \tilde{f}$ e $\tilde{H}(.,1) = \tilde{g}$. Então, pela invariância do grau por homotopia,

$$d(\tilde{f}, \Omega, b) = d(\tilde{g}, \Omega, b).$$

O resultado segue da proposição anterior, sendo $f = \tilde{f}$ e $g = \tilde{g}$ na fronteira.

■

1.3 Teorema do ponto fixo de Brouwer

Os resultados que seguem são de extrema importância quando aplicamos o Método de Galerkin.

Teorema 1.2 *(Teorema do ponto fixo de Brouwer): Seja $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ a bola de centro em x e raio r e $f : \overline{B}_r(x) \to \overline{B}_r(x)$ uma aplicação contínua. Então, f tem um ponto fixo.*

Demonstração: Vamos mostrar primeiro, o caso em que o centro x da bola é a origem. Neste caso temos $f : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$. Defina a aplicação $\varphi : \overline{B}_r(0) \to \mathbb{R}^N$, dada por $\varphi(y) = y - f(y)$ que é contínua, pois é uma diferença de funções contínuas. Vamos supor que

$$y - f(y) \neq 0, \forall y \in \partial B_r(0)$$

ou equivalentemente,

$$\varphi(y) \neq 0, \forall y \in \partial B_r(0)$$

pois, caso contrário, o teorema já estaria demonstrado para o caso em que $x = 0$.

Agora, defina a seguinte homotopia:

$$\begin{aligned} H : \overline{B}_r(0) \times [0,1] &\to \mathbb{R}^N \\ (y,t) &\mapsto H(y,t) = y - tf(y). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0,1])$$

isto é, $H(y_0, t_0) \neq 0, \forall y_0 \in \partial B_r(0)$ *e* $\forall t_0 \in [0,1]$. Se $t = 1$ temos

$$H(y,1) = y - f(y) = \varphi(y) \neq 0, \forall y \in \partial B_r(0)$$

mostrando que

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times 1).$$

Agora, vamos analisar o caso em que $t \in [0,1)$ e $y \in \partial B_r(0)$. Observe que,

$$\|tf(y)\| = t\|f(y)\| \leq tr < r = |y|$$

e com isso,

$$\|tf(y)\| < |y|.$$

Consequentemente,

$$tf(y) \neq y$$

de onde segue que

$$H(y,t) \neq 0, \forall y \in \partial B_r(0) \ e \ \forall t \in [0,1).$$

Portanto,

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0,1]).$$

Pelo item (ii) do Teorema 1.1, o grau é invariante por homotopia, então:

$$d(H(.,t), B_r(0), 0) = constante, \forall t \in [0,1]$$

e portanto,

$$d(H(.,0), B_r(0), 0) = d(H(.,1), B_r(0), 0).$$

Daí, segue que

$$d(f, B_r(0), 0) = d(I, B_r(0), 0) = 1,$$

então,

$$d(\varphi, B_r(0), 0) = 1 \neq 0.$$

Agora, como consequência das propriedades do grau topológico de Brouwer, existe $y_0 \in B_r(0)$ tal que $\varphi(y_0) = 0$, implicando que

$$y_0 - f(y_0) = 0$$

e com isso $y_0 = f(y_0)$. Portanto, a aplicação f tem um ponto fixo $y_0 \in \overline{B}_r(0)$.

Vamos agora provar o caso geral, onde o centro da bola $\overline{B}_r$ é um ponto qualquer $x \in \mathbb{R}^N$. Considere a aplicação $\varphi : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$, dada por $\varphi(y) = f(x+y) - x$. A aplicação φ é contínua e $\varphi(\overline{B}_r(0)) \subset \overline{B}_r(0)$, pois

$$|\varphi(y)| = |f(x+y) - x| \leq r$$

isto é, $\varphi(y) \in \overline{B}_r(0)$. Assim, φ tem um ponto fixo $z \in \overline{B}_r(0)$, ou seja, $\varphi(z) = z$, implicando que

$$f(x+z) = x+z.$$

Denotando,

$$w = x+z \ \in \ \overline{B}_r(x)$$

concluímos que $f(w) = w$. Mostrando que f tem um ponto fixo em $\overline{B}_r(x)$.

■

O Teorema acima vale em situações mais gerais, como por exemplo

Teorema 1.3 *: Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto e convexo, $f : K \to K$ uma aplicação contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Demonstração: Se K é compacto do $\mathbb{R}^N$, então existe uma bola de centro em 0 e raio R tal que $K \subset \overline{B}_R(0)$. Desde que K é fechado e convexo, seja $P_k : \mathbb{R}^N \to K$ a aplicação definida da seguinte maneira, dado $x \in \mathbb{R}^N$, $P_k(x) \in K$ é o único ponto tal que

$$|x - P_k(x)| = \min_{y \in K} |x - y|.$$

Defina $\tilde{f} : \overline{B}_R(0) \to K \subset \overline{B}_R(0)$ por $\tilde{f}(x) = f(P_k(x))$. Observe que $\tilde{f}$ é contínua pois é composição de funções contínuas. Então, do Teorema do ponto fixo de Brouwer, $\tilde{f}$ possui um ponto fixo x_0. Como a imagem desta aplicação está contida em K, segue da definição de P_k que

$$P_k(x_0) = x_0.$$

Assim, $x_0 = f(P_k(x_0)) = f(x_0)$, o que prova o resultado.

■

Como aplicação do Teorema do ponto fixo de Brouwer, temos o seguinte resultado que tem fundamental importância nesta dissertação:

Teorema 1.4 *(Lema fundamental): Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua tal que $(f(x), x) \geq 0, \ \forall x \in \partial B_R(0)$. Então, existe $x_0 \in \overline{B}_R(0)$ verificando $f(x_0) = 0$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que

$$f(x) \neq 0, \ \forall x \in \overline{B}_R(0)$$

e defina

$$\begin{aligned} g : \overline{B}_R(0) &\to \overline{B}_R(0) \\ x &\mapsto g(x) = \frac{-Rf(x)}{\|f(x)\|}, \end{aligned}$$

observe que g verifica $g(\overline{B}_R(0)) \subset \overline{B}_R(0)$, pois

$$\|g(x)\| = \frac{\|-Rf(x)\|}{\|f(x)\|} = \frac{R\|f(x)\|}{\|f(x)\|} = R,$$

e com isso $g(x) \in \overline{B}_R(0)$. Além disso, g é contínua, pois f é contínua por hipótese. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, a função g tem um ponto fixo em $\overline{B}_R(0)$. Seja x_0 tal ponto fixo de g, isto é, $x_0 = g(x_0)$. Desta forma,

$$\|x_0\| = \|g(x_0)\| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = \|x_0\|^2 = (x_0, x_0) = (x_0, g(x_0)) = \left(x_0, \frac{-Rf(x_0)}{\|f(x_0)\|}\right) = \frac{-R}{\|f(x_0)\|}(x_0, f(x_0)).$$

Desde que, por hipótese,

$$(x_0, f(x_0)) \geq 0$$

temos que,

$$0 < R^2 = \frac{-R}{\|f(x_0)\|}(x_0, f(x_0)) \leq 0$$

o que é um absurdo. Portanto, existe $x_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que $f(x_0) = 0$.

Observe que na reta real o Lema fundamental equivale ao teorema do valor intermediário.

■

Observação 1.1 *: Se $(f(x), x) > 0, \forall x \in \partial B_r(0)$, o ponto y que verifica $f(y) = 0$ deve pertencer ao conjunto $B_r(0)$.*

Capítulo 2

O Método de Galerkin aplicado a uma classe de problemas Elípticos com não linearidade do tipo superlinear

Neste capítulo, baseando-se nas idéias presentes em [3], usaremos o método de Galerkin para mostrar existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(x,v) \quad em \;\; \Omega \\ v &= 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{$(P)_1$}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Carathéodory verificando a seguinte condição de crescimento:

$$|f(x,v)| \leq C(x)|v|^p, \tag{f_1}$$

onde $C : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função em $L^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{cases} 1 < p \;\; \leq \;\; \frac{N+2}{N-2}, & se \; N \geq 3 \\ 1 < p, & se \; N = 2. \end{cases}$$

Observação 2.1 *: A condição (f_1) pode ser trocada por uma condição do tipo*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = 0 \quad e \quad \overline{\lim_{t\to\pm\infty}} \frac{f(x,t)}{|t|^p} < +\infty$$

uniformemente em $x \in \Omega$.

De fato, se $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe δ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ com

$|t| < \delta$, teremos que $\left|\dfrac{f(x,t)}{t}\right| < \epsilon$, logo $|f(x,t)| < \epsilon|t|$. Como ϵ é arbitrário podemos tomar $\epsilon|t| \leq |t|^p$.

E se $\overline{\lim_{t\to\pm\infty}} \dfrac{f(x,t)}{|t|^p} < +\infty$, então dado $C_1 > 0$, existe $k > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| > k$ teremos que $\left|\dfrac{f(x,t)}{|t|^p}\right| < C_1$, logo $\dfrac{|f(x,t)|}{|t|^p} < C_1$, e daí, $|f(x,t)| < C_1|t|^p$, $\forall t \in \mathbb{R}\colon |t| > k$.

Analisemos o caso em que $\delta \leq |t| \leq k$. Como este é um intervalo em $\mathbb{R}$ que é fechado e limitado, então ele é compacto. Sendo f uma função Carathéodory, então $\dfrac{f(x,t)}{|t|^p}$ é uma função contínua, e portanto, aplicada em um conjunto compacto, ela é limitada. Logo, $\dfrac{|f(x,t)|}{|t|^p} \leq C_2$, e portanto $|f(x,t)| \leq C_2|t|^p$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\delta \leq |t| \leq k$.

Agora, seja $C = max\{C_1, C_2, 1\}$, então

$$|f(x,t)| \leq C|t|^p$$

que é exatamente a condição (f_1).

Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert separável, fixe então

$$\beta = \{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$$

uma base Hilbertiana do mesmo. Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina

$$W_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$$

o espaço de dimensão finita gerado pelo conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$. Segue que os espaços $(W_m, \| \ \|,)$ e $(\mathbb{R}^m, | \ |)$ são isomorfos, através da aplicação natural

$$T : W_m \to \mathbb{R}^m$$

dada por

$$v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \mapsto T(v) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) = \xi$$

onde $\| \ . \ \|$ e $| \ . \ |$ são as normas usuais em $H_0^1(\Omega)$ e $\mathbb{R}^m$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \int_\Omega |\nabla v|^2 = \int_\Omega |\nabla \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 |\nabla w_j|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \int_\Omega |\nabla w_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \|w_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \\
&= |\xi|^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|v\| = |\xi| = |T(v)|.$$

Nosso objetivo agora é mostrar que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $v_m \in W_m$ verificando a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \varphi = \int_\Omega f(x, v_m)\varphi, \quad \forall \varphi \in W_m. \tag{2.1}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ defina a seguinte função

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

dada por $F(\xi_1, ..., \xi_m) = (F_1(\xi), F_2(\xi), ..., F_m(\xi))$ sendo

$$F_j(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla w_j - \int_\Omega f(x, v) w_j, \ \forall j = 1, 2, ..., m,$$

onde $\xi \to v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i \in H_0^1(\Omega)$. Queremos mostrar que

i) Existe $r > 0$ tal que $(F(\xi), \xi) \geq 0$ para todo ξ satisfazendo $|\xi| = r$;

ii) $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua.

Observe o seguinte

$$(F(\xi), \xi) = \sum_{j=1}^{m} F_j(\xi)\xi_i.$$

Assim,

$$\xi_j F_j(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla(\xi_j w_j) - \int_\Omega f(x, v)(\xi_j w_j)$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
(F(\xi), \xi) &= \int_\Omega \nabla v \nabla \sum_{j=1}^{m} (\xi_j w_j) - \int_\Omega f(x, v) \sum_{j=1}^{m} (\xi_j w_j) \\
&= \int_\Omega \nabla v \nabla v - \int_\Omega f(x, v) v \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f(x, v) v \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Usando a condição (f_1) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x, v) v &\leq \int_\Omega |f(x, v)||v| \\
&\leq C_1 \int_\Omega |v|^{p+1} \\
&= C_1 |v|_{p+1}^{p+1},
\end{aligned}$$

desde que

$$p+1 \leq \frac{N+2}{N-2}+1 = 2^*$$

das imersões contínuas de Sobolev (Ver Teorema B.26 no apêndice B), existe $C_2 > 0$ tal que

$$|v|_{p+1} \leq C_2\|v\|$$

e como

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 = \|v\|^2,$$

então, de (2.2)

$$(F(\xi),\xi) \geq \|v\|^2 - C\|v\|^{p+1} = \|v\|^2(1-C\|v\|^{p-1}).$$

Note que, fazendo $\|v\| = r$ e $\rho = r^2(1-Cr^{p-1})$, para obtermos

$$(F(\xi),\xi) \geq \rho > 0$$

basta considerar $r = \dfrac{1}{2C^{\frac{1}{p-1}}}$. Logo, para todo $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que $|\xi| = r$ teremos $(F(\xi),\xi) > 0$, visto que $\|v\| = |\xi|$.

Observação 2.2 *: As constantes r e ρ são independentes de $m \in \mathbb{N}$.*

Mostremos que F é contínua. Considere

$$v_n = \sum_{j=1}^m \xi_{nj}w_j \text{ e } v = \sum_{j=1}^m \xi_j w_j$$

onde

$$\xi_n = (\xi_{n1},\xi_{n2},...,\xi_{nm}) \longrightarrow \xi = (\xi_1,\xi_2,...,\xi_m).$$

Então,

$$\begin{aligned}
||v_n - v||^2 &= \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 = \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^m \xi_{nj}w_j - \sum_{j=1}^m \xi_j w_j)|^2 \\
&= \int_\Omega |\nabla \sum_{j=1}^m (\xi_{nj}-\xi_j)w_j|^2 = \sum_{j=1}^m |\xi_{nj}-\xi_j|^2 \int_\Omega |\nabla w_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^m |\xi_{nj}-\xi_j|^2||w_j||^2 = \sum_{j=1}^m |\xi_{nj}-\xi_j|^2 = |\xi_n - \xi|^2.
\end{aligned}$$

Como $\xi_n \to \xi$ temos que $v_n \to v$ em W_m. De acordo com a definição de F_j temos que

$$F_j(\xi_n) = \int_\Omega \nabla v_n \nabla w_j - \int_\Omega f(x,v_n)w_j$$

e

$$F_j(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla w_j - \int_\Omega f(x,v) w_j.$$

Seja $g : W_m \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla w_j, \ \forall u \in W_m.$$

Observe que g é um funcional linear contínuo. De fato, g é linear da linearidade do gradiente e da integral, e sendo $v \in W_m$, pela desigualdade de Hölder obtemos

$$|g(v)| = |\int_\Omega \nabla v \nabla w_j| \leq \int_\Omega |\nabla v \nabla w_j| \leq ||v|| \ ||w_j|| = ||v||.$$

Portanto, $g \in (W_m)'$. Desde que $v_n \to v$ em W_m, temos que $g(v_n) \to g(v)$ em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla w_j \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla w_j. \tag{2.3}$$

Agora mostraremos que

$$\int_\Omega f(x, v_n) w_j \longrightarrow \int_\Omega f(x,v) w_j.$$

Desde que $f(x,.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $v_n \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, por imersão compacta (Ver Teorema B.27 no apêndice B), existe uma subsequência$\{v_{nk}\} \subset \{v_n\}$ tal que $v_{nk} \to v$ em $L^k(\Omega)$ para $1 \leq k < 2^*$ se $N \geq 3$, e para $1 \leq k < +\infty$ se $N = 2$para $k \in [1, 2^*)$. Logo, pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência:

i) $v_{nk}(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|v_{nk}(x)| \leq h(x), \ \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^k(\Omega)$.

De (i) obtemos

$$f(x, v_{nk}(x)) w_j(x) \longrightarrow f(x, v(x)) w_j(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

E mais

$$|f(x, v_{nk}(x)) w_j(x)| \leq C |v_{nk}(x)|^p |w_j(x)| \leq C |h(x)|^p |w_j(x)|.$$

Observe que, em particular, $h \in L^{p+1}(\Omega)$ e $w_j \in L^{p+1}(\Omega)$. Logo, podemos concluir que $|v_{nk}|^p |w_j| \in L^1(\Omega)$. Assim,pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.15 no apêndice B),

$$\int_\Omega f(x, v_{nk}) w_j \longrightarrow \int_\Omega f(x,v) w_j. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (5.3) podemos concluir que

$$\int_\Omega \nabla v_{nk} \nabla w_j - \int_\Omega f(x, v_{nk}) w_j \to \int_\Omega \nabla v \nabla w_j - \int_\Omega f(x, v) w_j,$$

ou seja,

$$F_j(\xi_{nk}) \to F_j(\xi), \forall j \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$F(\xi_{nk}) \to F(\xi).$$

Agora, suponhamos por contradição que a convergência

$$F(\xi_n) \to F(\xi) \tag{2.5}$$

não ocorra, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\{F(\xi_{nj})\} \subset \{F(\xi_n)\}$ tal que

$$|F(\xi_{nj}) - F(\xi)| \geq \varepsilon_0, \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

usando $\{F(\xi_{nj})\}$ na primeira parte da demonstração, obtemos uma subsequência $\{F(\xi_{njk})\} \subset \{F(\xi_{nj})\}$ tal que

$$F(\xi_{njk}) \to F(\xi) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Assim, existe $n_{j0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|F(\xi_{njk}) - F(\xi)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \forall n_{jk} \geq n_{j0}$$

o que é um absurdo por (2.6). Logo, a convergência (2.5) ocorre, mostrando assim que, F é contínua.

Portanto do Teorema 1.4 (Lema fundamental), existe $\xi_m \in \mathbb{R}^m$ com $|\xi_m| \leq r$, tal que $F(\xi_m) = 0$, ou seja, existe v_m em W_m verificando

$$\|v_m\| \leq r, \ \forall m \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ F_j(\xi_m) = 0, \quad \forall j = 1, 2, ..., m,$$

implicando que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla w_j = \int_\Omega f(x, v_m) w_j, \ \forall j = 1, 2, ..., m.$$

Multiplicando a igualdade por um escalar qualquer α_j, para cada $j = 1, 2, ..., m$ e somando-as, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla (\sum_{j=1}^m \alpha_j w_j) dx = \int_\Omega f(x, v_m) (\sum_{j=1}^m \alpha_j w_j),$$

logo

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \varphi = \int_\Omega f(x, v_m)\varphi, \ \forall \varphi \in W_m. \tag{2.7}$$

Como $W_m \subset H_0^1(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}$ e sendo r um número pequeno que não depende de m podemos considerar $r \leq 1$, então a sequência $v_m \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada. Daí, a menos de subsequência, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_m \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Fixe $k \in \mathbb{N}$ e considere $m \geq k$, então $W_k \subset W_m$ e

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \varphi_k = \int_\Omega f(x, v_m)\varphi_k, \ \forall \varphi_k \in W_k.$$

Note que $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_k, \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

é um funcional linear contínuo. De fato, g é linear da linearidade do gradiente e da integral. Mostremos que g é contínuo. Seja $v \in H_0^1(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema B.17 no apêndice B)

$$|g(v)| = |\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_k| \leq \int_\Omega |\nabla v \nabla \varphi_k| \leq \|v\| \|\varphi_k\| \leq C\|v\|.$$

visto que $\|\varphi_k\| \leq C$, pois $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Como $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \varphi_k \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_k, \forall \varphi_k \in W_k \tag{2.8}$$

e mais, por imersão compacta (Ver Teorema B.27 no apêndice B), a menos de subsequência $v_m \to v$ em $L^s(\Omega)$ para $1 \leq s < 2^*$ se $N \geq 3$, e para $1 \leq s < +\infty$ se $N = 2$, e pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência

i) $v_m(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω

ii) $|v_m(x)| \leq h(x), \ \forall m \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^s(\Omega)$.

Desde que $f(x, .)$ é contínua e da convergência em (i) temos que

$$f(x, v_m(x)) \to f(x, v(x)) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega$$

Da condição de crescimento sobre f obtemos

$$|f(x, v_m(x))\varphi_k(x)| \leq C_1|v_m(x)|^p|\varphi_k(x)| \leq C_1|h(x)|^p|\varphi_k(x)|.$$

Desde que $h \in L^s(\Omega)$, temos em particular que $h^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. Além disso, $\varphi_k \in L^{p+1}(\Omega)$. Daí segue que $C|h|^p\varphi_k \in L^1(\Omega)$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B)

$$\int_\Omega f(x, v_m)\varphi_k \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f(x, v)\varphi_k. \tag{2.9}$$

Portanto, da unicidade do limite

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_k = \int_\Omega f(x, v)\varphi_k. \tag{2.10}$$

Sendo $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$ uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$, então todo elemento $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é limite de uma sequência $\{\varphi_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\varphi_k \in W_k$. Ou seja,

$$\varphi_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi \;\; em \;\; H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

Mostremos agora que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_k \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi. \tag{2.12}$$

Observe que, como mostramos anteriormente, a função $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\varphi) = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi,$$

é um funcional linear contínuo. De (2.11), a convergência em (2.12) se verifica.

Ainda de (2.11), por imersão compacta (Ver Teorema B.27 no apêndice B) temos que

$$\varphi_k \to \varphi \text{ em } L^s(\Omega)$$

para $1 \leq s < 2^*$ se $N \geq 3$, e para $1 \leq s < +\infty$ se $N = 2$para $s \in [1, 2^*)$. E daí, pelo Teorema B.16 a menos de subsequência,

i) $\varphi_k(x) \longrightarrow \varphi(x)$ q.t.p. em Ω

ii) $|\varphi_k(x)| \leq h_2(x), \forall k \in \mathbb{N}$, q.t.p em Ω, com $h_2 \in L^s(\Omega)$.

De (i) decorre que

$$f(x, v(x))\varphi_k(x) \longrightarrow f(x, v(x))\varphi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

E, de (ii) decorre que

$$|f(x, v(x))\varphi_k(x)| \leq C_1|v(x)|^p|\varphi_k(x)| \leq C_1|v(x)|^p|h_2(x)|.$$

Desde que $v^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e, em particular $h_2 \in L^p(\Omega)$, segue que $C|v|^p|h_2| \in L^1(\Omega)$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B) temos que

$$\int_\Omega f(x,v)\varphi_k \longrightarrow \int_\Omega f(x,v)\varphi. \tag{2.13}$$

Como φ é arbitrária em $H_0^1(\Omega)$), de (2.10), (2.12), (2.13) e da unicidade do limite, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi = \int_\Omega f(x,v)\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.14}$$

provando que v é uma solução fraca para o problema (P).

Capítulo 3

Aplicação do método de Galerkin a uma classe de problemas Elípticos com um termo sublinear

Neste capítulo, baseando-se em idéias presentes em [3], estudaremos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^q + f(x,v) \qquad em \;\; \Omega \\ v > 0 & \qquad\qquad\qquad\quad em \;\; \Omega \\ v = 0 & \qquad\qquad\qquad\quad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{$(P)_2$}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro, $0 < q < 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é uma função localmente Lipschitz com

$$f(x, 0) = 0 \tag{3.1}$$

e

$$|f(x, v)| \leq C(x)|v|^p, \tag{3.2}$$

onde

$$\begin{cases} 1 < p \;\; \leq \;\; \frac{N+2}{N-2}, & se \; N \geq 3 \\ 1 < p & se \; N = 2. \end{cases}$$

e $C : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função em $L^\infty(\Omega)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave.

Nosso objetivo é mostrar que existe λ^* tal que $(P)_2$ tem uma solução positiva para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Para isso, estudaremos inicialmente o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^q + f(x,v) + \dfrac{1}{n} \quad em \;\; \Omega \\ v > 0 & \qquad\qquad\qquad em \;\; \Omega \\ v = 0 & \qquad\qquad\qquad sobre \;\; \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P)_{2,n}$$

para o qual $v \equiv 0$ não é solução. Note que por (3.1) $v \equiv 0$ é solução do problema $(P)_2$.

Fixe $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m, ...\}$ uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$ e considere

$$W_m = [w_1, w_2, ..., w_m].$$

Novamente identificaremos $(\mathbb{R}^m, |\ |)$ com $(W_m, \|\ \|)$ através da aplicação

$$\begin{aligned} T: \; W_m &\to \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m). \end{aligned}$$

onde $v = \sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i$. Como já mostramos no problema anterior

$$\|v\| = |\xi|.$$

Defina $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, tal que $F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), ..., F_m(\xi))$ onde

$$F_j(\xi) = \int_\Omega \nabla v \nabla w_j - \lambda \int_\Omega v_+^q w_j - \int_\Omega f(x, v_+) w_j - \frac{1}{n} \int_\Omega w_j, \;\; \forall j = 1, 2, ..., m$$

sendo

$$v_+ = \max\{v, 0\}.$$

Note então que

$$F_j(\xi)\xi_j = \int_\Omega \nabla v \nabla \xi_j w_j - \lambda \int_\Omega (v_+)^q \xi_j w_j - \int_\Omega f(x, v_+) \xi_j w_j - \frac{1}{n} \int_\Omega \xi_j w_j,$$

como $(F(\xi), \xi) = \sum_{j=1}^{m} F_j(\xi)\xi_j$, temos que

$$\begin{aligned} (F(\xi), \xi) &= \int_\Omega \nabla v \nabla \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \right) - \lambda \int_\Omega (v_+)^q \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \right) \\ &\quad - \int_\Omega f(x, v_+) \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \right) - \frac{1}{n} \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j \right) \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda \int_\Omega (v_+)^q v - \int_\Omega f(x, v_+) v - \frac{1}{n} \int_\Omega v. \end{aligned}$$

Observe que, sendo $v = v_+ - v_-$ temos $v_+^q v = v_+^{q+1}$, logo

$$(F(\xi), \xi) = \int_\Omega |\nabla v|^2 - \lambda \int_\Omega (v_+)^{q+1} - \int_\Omega f(x, v_+)v - \frac{1}{n}\int_\Omega v. \tag{3.3}$$

Como $0 < q < 1$, então $1 < q+1 < 2 < 2^*$, e sendo $v_+ \leq |v|$, temos que

$$\int_\Omega (v^+)^{q+1} \leq \int_\Omega |v|^{q+1} = |v|_{q+1}^{q+1}.$$

Da condição de crescimento (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x, v_+)v &\leq \int_\Omega |f(x, v_+)||v| \\ &\leq C_1 \int_\Omega |v_+|^{p+1} \\ &\leq C_1 |v|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

E, como $v \in H_0^1(\Omega)$ e Ω é limitado, então $v \in L^1(\Omega)$, da desigualdade de Hölder (ver Teorema B.17 no apêndice B) obtemos

$$\int_\Omega v \leq \left(\int_\Omega 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega||v|_2 \leq C_3|v|_2.$$

Logo, por imersão contínua obtemos

$$\int_\Omega (v_+)^{q+1} \leq |v|_{q+1}^{q+1} \leq C\|v\|^{q+1}, \tag{3.4}$$

$$\int_\Omega f(x, v_+)v \leq C_1|v|_{p+1}^{p+1} \leq C_2\|v\|^{p+1}, \tag{3.5}$$

e também,

$$\int_\Omega v \leq C_3|v|_2 \leq C_4\|v\|. \tag{3.6}$$

De (3.3),(3.4), (3.5) e (3.6) obtemos

$$(F(\xi), \xi) \geq \|v\|^2 - \lambda C\|v\|^{q+1} - C_2\|v\|^{p+1} - \frac{C_4}{n}\|v\|.$$

Vamos considerar $\|v\| = r$ com $r > 0$ a ser fixado posteriormente. Logo,

$$(F(\xi), \xi) \geq r^2 - \lambda C r^{q+1} - C_2 r^{p+1} - \frac{C_4}{n} r.$$

Devemos escolher r tal que

$$r^2 - C_2 r^{p+1} \geq \frac{r^2}{2}$$

ou seja,

$$r \leq \frac{1}{(2C_2)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Escolhendo $r = \dfrac{1}{2(2C_2)^{\frac{1}{p-1}}}$, temos que

$$(F(\xi), \xi) \geq \frac{r^2}{2} - \lambda C r^{q+1} - \frac{C_4}{n} r$$

agora, considerando $\rho = \frac{r^2}{2} - \lambda C r^{q+1}$, vamos escolher $\lambda > 0$ tal que $\rho > 0$, ou seja,

$$\frac{r^2}{2} - \lambda C r^{q+1} > 0$$

implicando que

$$\frac{r^{1-q}}{2C} > \lambda.$$

Logo, escolhendo $\lambda^* = \dfrac{r^{1-q}}{4C}$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{C_4 r}{n} < \frac{\rho}{2}, \forall n \geq n_0$$

obtemos

$$(F(\xi), \xi) \geq \frac{\rho}{2} > 0$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $|\xi| = \|v\| = r$, $n \geq n_0$ e $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Agora, mostremos que F é contínua. Seja $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^m$ e $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\xi_n \to \xi \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Mostraremos que

$$F(\xi_n) \to F(\xi) \quad em \quad \mathbb{R}^m, \tag{3.7}$$

o que é equivalente a mostrar que

$$F_j(\xi_n) \to F_j(\xi), \text{ em } \mathbb{R}, \forall j = 1, 2, ..., m.$$

Seja $v_n = \sum_{j=1}^{m} \xi_{nj} w_j$ e $v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j$. Como $\xi_n \to \xi$ temos que $v_n \to v$ em W_m. Logo,

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla w_j \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla w_j \tag{3.8}$$

visto que, $g : W_m \to \mathbb{R}$ definida por $g(v) = \int_\Omega \nabla v \nabla w_j, \forall v \in W_m$, é um funcional linear contínuo. E também, por imersão compacta (ver Teorema B.27 no apêndice B), a menos de subsequência,

$$v_n \to v \text{ em } L^p(\Omega) \text{ para } 1 \leq p < 2^* \text{ se } N \geq 3, \text{ e para } 1 \leq p < +\infty \text{ se } N = 2 \text{em } L^p(\Omega)$$
$$\text{para } p \in [1, 2^*).$$

Daí, segue que

$$v_{n+} = \frac{v_n + |v_n|}{2} \to \frac{v + |v|}{2} = v_+ \text{ em } L^s(\Omega) \text{ para } s \in [1, 2^*).$$

Pelo Teorema B.16 no apêndice B, temos que existe um subsequência (v_{nk+}) de (v_{n+}) tal que

(i) $v_{nk+}(x) \to v_+(x)$ q.t.p. em Ω;

(ii) $|v_{nk+}(x)| \leq h(x), \forall k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^s(\Omega)$.

Logo,

(iii) $[v_{nk+}(x)]^q w_j(x) \to [v_+(x)]^q w_j(x)$ q.t.p. em Ω;

iv) $|[v_{nk+}(x)]^q w_j(x)| \leq [h(x)]^q w_j(x)$.

Desde que $0 < q < 1$, então, visto que Ω é limitado temos que $h^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$. E como, $w_j \in L^{q+1}(\Omega)$, temos que

$$h^q w_j \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B), decorre que

$$\int_\Omega (v_{nk+})^q w_j \longrightarrow \int_\Omega (v_+)^q w_j \tag{3.9}$$

Mostremos que

$$\int_\Omega f(x, v_{nk+}) w_j \longrightarrow \int_\Omega f(x, v_+) w_j. \tag{3.10}$$

Sendo $f(x, .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, de (iii) decorre que

$$f(x, v_{nk+}(x)) w_j(x) \longrightarrow f(x, v_+(x)) w_j(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|f(x, v_{nk+}(x)) w_j(x)| \leq C|v_{nk+}(x)|^p |w_j(x)| \leq C|h(x)|^p |w_j(x)|.$$

Desde que $h \in L^{p+1}(\Omega)$, e $w_j \in L^{p+1}(\Omega)$, temos que $|h|^p |w_j| \in L^1(\Omega)$. Do teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B), decorre (3.10).

Portanto, de (3.8), (3.9), (3.10) e da definição de $F_j(\xi)$ obtemos

$$F_j(\xi_{nk}) \longrightarrow F_j(\xi), \forall j = 1, 2, ..., m,$$

e portanto,

$$F(\xi_{nk}) \longrightarrow F(\xi) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Agora, suponhamos por contradição que a convergência (3.7) não ocorra, então existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\{F(\xi_{nj})\} \subset \{F(\xi_n)\}$ tal que

$$|F(\xi_{nj}) - F(\xi)| \geq \varepsilon_0, \forall j \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

usando $\{F(\xi_{nj})\}$ na primeira parte da demonstração, obtemos uma subsequência $\{F(\xi_{njk})\} \subset \{F(\xi_{nj})\}$ tal que

$$F(\xi_{njk}) \longrightarrow F(\xi) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Assim, existe $n_{j0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|F(\xi_{njk}) - F(\xi)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \forall n_{jk} \geq n_{j0}$$

o que é um absurdo por (3.11). Logo, a convergência (3.7) ocorre, mostrando assim que, F é contínua.

Portanto, pelo Teorema 1.4 (Lema fundamental), para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $\xi_m \in \mathbb{R}^m$ com $|\xi_m| \leq r$ tal que $F(\xi_m) = 0$, ou seja, existe $v_m \in W_m$ verificando $\|v_m\| \leq r, \forall m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi = \lambda \int_\Omega (v_{m_+})^q \psi + \int_\Omega f(x, v_{m_+})\psi + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi, \forall \psi \in W_m. \tag{3.12}$$

Desde que $W_m \subset H_0^1(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}$, e r não depende de m, então $\{v_m\} \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada. Logo a menos de subsequência, existe $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_m \rightharpoonup v \;\; em \;\; H_0^1(\Omega). \tag{3.13}$$

Desde que $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_j, ...\}$ é uma base hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$, todo elemento $\psi \in H_0^1(\Omega)$ pode ser escrito como limite de uma sequência $\{\psi_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\psi_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j$, isto é , $\psi_k \in W_k$. Assim,

$$\psi_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi \;\; em \;\; H_0^1(\Omega). \tag{3.14}$$

Fixando $k \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq k$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi_k = \lambda \int_\Omega (v_{m_+})^q \psi_k + \int_\Omega f(x, v_{m_+})\psi_k + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi_k, \forall \psi_k \in W_k. \tag{3.15}$$

Agora, sendo $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $g(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_k$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, temos que g é um funcional linear contínuo. De (3.13) temos que

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi_k \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla \psi_k. \tag{3.16}$$

Mostremos que

$$\lambda \int_\Omega (v_{m_+})^q \psi_k + \int_\Omega f(x, v_{m_+})\psi_k + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi_k \longrightarrow \lambda \int_\Omega (v_+)^q \psi_k + \int_\Omega f(x, v_+)\psi_k + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi_k. \tag{3.17}$$

De (3.13), por imersão compacta (ver Teorema B.27 no apêndice B), a menos de subsequência, $v_m \to v$ em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 2^*$ se $N \geq 3$, e para $1 \leq p < +\infty$ se $N = 2$. Logo, $v_{m_+} \to v_+$ em $L^p(\Omega)$, e pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência,

i) $v_{m_+}(x) \to v_+(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|v_{m_+}(x)| \leq h(x)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.

Daí segue que,

$$[v_{m_+}(x)]^q \psi_k(x) \longrightarrow [v_+(x)]^q \psi_k(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\left|[v_{m_+}(x)]^q \psi_k(x)\right| \leq [h(x)]^q |\psi_k(x)|,$$

desde que $1 < q + 1 < 2$ e Ω é limitado, temos que $h^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, e $\psi_k \in L^{q+1}(\Omega)$. E portanto, $h^q|\psi_k| \in L^1(\Omega)$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B) decorre que,

$$\int_\Omega (v_{m_+})^q \psi_k \longrightarrow \int_\Omega (v_+)^q \psi_k. \tag{3.18}$$

Desde que $f(x, .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, temos que

$$f(x, v_{m_+}(x))\psi_k \longrightarrow f(x, v_+(x))\psi_k \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e também,

$$|f(x, v_{m_+}(x))\psi_k(x)| \leq C|v_{m_+}(x)|^p |\psi_k(x)| \leq C[h(x)]^p |\psi_k(x)|.$$

Sendo $1 < p \leq 2^* - 1$, temos que $h \in L^{p+1}(\Omega)$ e $\psi_k \in L^{p+1}(\Omega)$, resultando que $h^p \psi_k \in L^1(\Omega)$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B) decorre que

$$\int_\Omega f(x, v_{m_+})\psi_k \longrightarrow \int_\Omega f(x, v_+)\psi_k. \tag{3.19}$$

De (3.18) e (3.19) obtemos a convergência (3.17). E, de (3.15), (3.16), (3.17) e da unicidade do limite obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi_k = \lambda \int_\Omega (v_+)^q \psi_k + \int_\Omega f(x, v_+)\psi_k + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi_k, \forall \psi_k \in W_k. \tag{3.20}$$

Agora, da convergência em (3.14), e repetindo os argumentos utilizados em (3.16) e (3.17), obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi_k \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla \psi \tag{3.21}$$

e

$$\lambda \int_\Omega (v_+)^q \psi_k + \int_\Omega f(x, v_+)\psi_k + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi_k \longrightarrow \lambda \int_\Omega (v_+)^q \psi + \int_\Omega f(x, v_+)\psi + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi. \tag{3.22}$$

De (3.20), (3.21) e (3.22), e da unicidade do limite obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \lambda \int_\Omega (v_+)^q \psi + \int_\Omega f(x, v_+)\psi + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi, \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.23}$$

Além disso, $v \geq 0$ em Ω. Como $v_- \in H_0^1(\Omega)$, então, de (3.23) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla v_- = \lambda \int_\Omega (v_+)^q v_- + \int_\Omega f(x, v_+)v_- + \frac{1}{n}\int_\Omega v_-.$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla v_- = -\int_\Omega |\nabla v_-|^2 = -\|v_-\|^2.$$

Além disso,

$$\int_\Omega (v_+)^q v_- = 0,$$

$$f(x, v_+(x)) \geq 0, \forall x \in \Omega$$

e

$$v_-(x) \geq 0, \quad q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

Daí, temos que

$$0 \geq -\|v_-\|^2 = \int_\Omega f(x, v_+)v_- + \frac{1}{n}\int_\Omega v_- \geq 0,$$

restando-nos apenas que $\|v_-\|^2 = 0$, ou seja,

$$v_-(x) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, $v(x) = v_+(x) \geq 0$, q.t.p. em Ω.

3.1 Regularidade da solução do problema auxiliar $(P)_{2,n}$

Nesta seção mostraremos primeiramente que as soluções fracas do problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda v^q + f(x,v) + \dfrac{1}{n}, & \Omega \\ v \geq 0, & & \Omega \\ v = 0, & & \partial\Omega. \end{cases}, \tag{3.24}$$

são de fato clássicas, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $\lambda > 0$ é um parâmetro, $0 < q < 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ é uma função localmente Lipschitz com

$$f(x, 0) = 0 \tag{3.25}$$

e

$$|f(x, v)| \leq C(x)|v|^p \tag{3.26}$$

onde

$$\begin{cases} 1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}, & se\ N \geq 3 \\ 1 < p & se\ N = 2. \end{cases}$$

e $C : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função em $L^\infty(\Omega)$.

Demonstremos o seguinte Teorema:

Teorema 3.1 *: Seja $v \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca do problema (3.24). Então v é solução clássica, isto é, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Esta demonstração será dividida em duas partes. Primeiramente, utilizando as idéias de Ambrosetti e Rabinowitz (ver [6]) que podem também ser vista em [12], mostraremos a regularidade para $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e para $1 < p < +\infty$ se $N = 2$.

Considerando $N = 2$, das imersões de Sobolev temos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega), \quad para \quad 1 \leq t < +\infty.$$

Logo, $v \in L^t(\Omega)$ para $1 \leq t < +\infty$. Defina

$$g(x) = \lambda v^q(x) + f(x, v(x)) + \frac{1}{n}, \ com \ \ \lambda > 0, \ q \in (0, 1). \tag{3.27}$$

Observe que $g \in L^s(\Omega)$ onde $s = \frac{t}{p}$. De fato, sendo $v \leq |v|$ e da condição de crescimento (3.26) sobre f obtemos

$$\begin{aligned} g(x) &\leq |v(x)|^q + C|v(x)|^p + \frac{1}{n} \\ &\leq 3.\max\Big\{|v(x)|^q, C|v(x)|^p, \frac{1}{n}\Big\}. \end{aligned}$$

Se

$$\max\Big\{|v(x)|^q, C|v(x)|^p, \frac{1}{n}\Big\} = |v(x)|^q \text{ ou } \max\Big\{|v(x)|^q, C|v(x)|^p, \frac{1}{n}\Big\} = \frac{1}{n}$$

teremos

$$|g(x)| \leq 3C_1.$$

Se

$$\max\Big\{|v(x)|^q, C|v(x)|^p, \frac{1}{n}\Big\} = C|v(x)|^p,$$

teremos

$$|g(x)| \leq 3C|v(x)|^p.$$

Portanto,

$$|g(x)| \leq C_2(1 + |v(x)|^p). \tag{3.28}$$

Assim,

$$|g(x)|^{\frac{t}{p}} \leq C_3(1 + |v(x)|^t).$$

Como $v \in L^t(\Omega)$, concluímos que

$$\int_\Omega |g(x)|^{\frac{t}{p}} < +\infty,$$

isto é, $g \in L^{\frac{t}{p}}(\Omega)$. Assim, do Teorema B.30 no apêndice B, temos que $v \in W^{2,\frac{t}{p}}(\Omega)$. Tomando $t > \frac{NP}{2}$ teremos que $v \in W^{2,r}(\Omega)$ para algum $r > \frac{N}{2}$.

Considerando $N \geq 3$, das imersões contínuas de Sobolev temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega), \text{ para } 1 \leq t \leq \tfrac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Logo, $v \in L^{2^*}(\Omega)$. Considerando $s = \frac{2^*}{p}$, de (3.28) $g \in L^s(\Omega)$, e do Teorema B.30 no apêndice B, $v \in W^{2,s}(\Omega)$. A seguir mostraremos que $v \in W^{2,r}(\Omega)$ para algum $r > \frac{N}{2}$.

Se $2s > N$, basta considerar $r = s$. De fato, note que $r > \frac{N}{2} \geq 1$, pelo que mostramos anteriormente, $g \in L^r(\Omega)$ e, sendo v solução fraca do problema (3.24), pelo Teorema B.30 no apêndice B, temos que $v \in W^{2,r}(\Omega)$.

Agora, suponha que $2s = N$. Como $g \in L^s(\Omega)$ e Ω é limitado, segue que $g \in L^j(\Omega)$ para $1 \leq j \leq s$ tal que $(1+\varepsilon)j > s$. Considere $k = (1+\varepsilon)jp > 1$. Então, visto que $v \in W^{2,s}(\Omega)$ e

$$W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega), \text{ para } 1 \leq t < +\infty, \text{ se } 2s = N,$$

temos que $v \in L^k(\Omega)$. Agora, considere $r = \frac{k}{p}$. Então,

$$r = (1+\varepsilon)j > s > 1.$$

Daí, teremos que $g \in L^r(\Omega)$. E, pelo Teorema B.30 no apêndice B,

$$v \in W^{2,r}(\Omega).$$

E mais, $2r = 2(1+\varepsilon)q > 2s = N$.

Suponha agora que $2s < N$. Para $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ afirmamos que existe único $\varepsilon > 0$ tal que

$$s = (1+\varepsilon)\frac{2N}{N+2}. \tag{3.29}$$

Com efeito, observe que

$$p < \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{N-2}{N+2},$$

sendo $2^* = \frac{2N}{N-2}$, teremos

$$\frac{2^*}{p} > \frac{2N}{N-2}\frac{N-2}{N+2} = \frac{2N}{N+2}.$$

Logo, $s > \frac{2N}{N+2}$. Considerando $\varepsilon = \frac{s(N+2)}{2N} - 1$, obtemos a igualdade (3.29). Agora, considere $p_1 = \frac{Ns}{N-2s}$. Observe que, se $1 < p < \frac{N+2}{N-2} < \frac{2(N+2)}{N-2}$, então

$$\frac{2N}{N-2}.\frac{1}{p} > \frac{N}{N+2},$$

ou seja, $s > \frac{N}{N+2}$, implicando que $sN > N - 2s$. Logo,

$$p_1 = \frac{sN}{N-2s} > 1.$$

Segue do Teorema B.25 no apêndice B, que a seguinte imersão é contínua

$$W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega), \quad 1 \leq t \leq \frac{Ns}{N-2s}.$$

Daí, em particular,

$$W^{2,s}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega),$$

resultando que $v \in L^{p_1}(\Omega)$. Considerando $s_1 = \frac{p_1}{p}$, temos que $s_1 > 1$. De fato,

$$\frac{s_1}{s} = \frac{p_1}{p}.\frac{p}{2^*} = \frac{p_1}{2^*} = \frac{s(N-2)}{2(N-2s)}.$$

De (3.29), obtemos

$$\frac{s_1}{s} = \frac{(1+\varepsilon)2}{(N+2)-4(1+\varepsilon)}.\frac{N-2}{2} > \frac{(1+\varepsilon)(N-2)}{N-2} = 1+\varepsilon > 1.$$

Logo, $s_1 > s$ e $p_1 > 2^*$. Como $p < 2^* - 1$, então $s_1 = \frac{p_1}{p} > 1$. De (3.28) obtemos que $g \in L^{s_1}(\Omega)$. Então, pelo Teorema B.30 no apêndice B,

$$v \in W^{2,s_1}(\Omega).$$

Se $2s_1 \geq N$, então $v \in W^{2,r}(\Omega)$ para algum $r > \frac{N}{2}$. Caso contrário, considere $p_2 = \dfrac{Ns_1}{N-2s_1}$. Então, $p_2 > 1$. De fato, observe que $p_1 > \dfrac{N}{N-2}$, implicando que

$$p_1 > \frac{N}{N+2}.\frac{N+2}{N-2} \geq \frac{Np}{N+2},$$

então temos que $p_1 N > Np - 2p_1$, ou seja,

$$p_2 = \frac{Ns_1}{N-2s_1} > 1.$$

Logo, por imersão contínua, $v \in L^{p_2}(\Omega)$. Daí, $g \in L^{s_2}(\Omega)$ onde $s_2 = \dfrac{p_2}{p}$. E, pelo Teorema B.30 no apêndice B, $v \in W^{2,s_2}(\Omega)$, e mais, $s_2 > s_1$. Com efeito, observe que

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{Ns_1}{N-2s_1}.\frac{N-2s}{Ns} = \frac{s_1}{s}.\frac{N-2s}{N-2s_1} > 1+\varepsilon,$$

visto que $\dfrac{s_1}{s} > 1+\varepsilon$.

Repetindo este argumento, encontramos uma sequência $(s_n) \in \mathbb{R}$, onde $s = \frac{2^*}{p}$ e $s_n = \frac{p_n}{p}, \forall n \in \mathbb{N}$, com $p_1 = \dfrac{sN}{N-2s}$ e $p_n = \dfrac{s_{n-1}N}{N-2s_{n-1}}, \forall n \geq 2$.

Mostremos que a sequência (s_n) é uma sequência crescente. Já vimos que $\dfrac{s_1}{s} > 1+\varepsilon$ e $\dfrac{s_2}{s_1} > 1+\varepsilon$. Vamos supor que $\dfrac{s_k}{s_{k-1}} > 1+\varepsilon$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\frac{s_{k+1}}{s_k} = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{s_k}{s_{k-1}}.\frac{N-2s_{k-1}}{N-2s_k} > 1+\varepsilon.$$

Por indução, podemos concluir que $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} > 1+\varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

Agora, mostremos que

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Suponhamos, por contradição, que

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k > 0.$$

Daí, teremos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) \geq 1+\varepsilon$$

implicando que

$$1 \geq 1+\varepsilon,$$

isto é, $\varepsilon = 0$. Contradição, visto que, por hipótese, $\varepsilon > 0$. Logo,

$$s_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2s_n > N$ e $v \in W^{2,s_n}(\Omega)$. Considerando $r = s_n$ teremos que $v \in W^{2,r}(\Omega)$ para algum r tal que $2r > N$.

Portanto, $v \in W^{2,r}(\Omega)$ para algum r tal que $2r > N$. Do item (ii) do Teorema B.25 no apêndice B segue que $v \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$, com $0 < \lambda < 1$ e portanto $g \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$. Do Teorema B.31 no apêndice B segue que $v \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Agora, seguindo as idéias presentes em [19], mostraremos a regularidade da solução do problema $(P)_{2,n}$ para $p = \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$.

Defina para cada $l > 0$ e $\beta > 1$ as seguintes funções

$$F(v) = \begin{cases} v^{\beta} & , se \quad v \leq l \\ \beta l^{(\beta-1)}(v-l) + l^{\beta} & , se \quad v > l \end{cases} \tag{3.30}$$

e

$$G(v) = \begin{cases} v^{2(\beta-1)+1} & , se \quad v \leq l \\ \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l) + l^{2(\beta-1)+1} & , se \quad v > l \end{cases}. \tag{3.31}$$

Algumas propriedades dessas funções podem ser destacadas:

(i) $G(v) \leq vG'(v)$ q.t.p. em $\mathbb{R}$;

Da definição de G obtemos

$$G'(v) = \begin{cases} (2\beta-1)v^{2(\beta-1)} & , se \quad v < l \\ \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)} & , se \quad v > l \end{cases}.$$

Daí, se $v < l$ então

$$G(v) = v^{2(\beta-1)+1} \leq (2\beta-1)v^{2(\beta-1)+1} = vG'(v).$$

Se $v > l$ então

$$G(v) = \beta 2(\beta - 1)l^{(2\beta-1)}(v - l) + l^{2(\beta-1)+1}$$

$$= \beta(2\beta - 1)l^{2(\beta-1)}v - (\beta - 1)(2\beta + 1)l^{2(\beta-1)+1}$$

$$\leq \beta(2\beta - 1)l^{2(\beta-1)}v = vG'(v)$$

seguindo assim o resultado.

(ii) Para alguma constante c independente de l, temos

$$c[F'(v)]^2 \leq G'(v), \quad q.t.p. \quad em \quad \mathbb{R}.$$

De fato, da definição de $F(v)$ temos que

$$F'(v) = \begin{cases} \beta v^{(\beta-1)} & , se \quad v < 1 \\ \beta l^{(\beta-1)} & , se \quad v > l \end{cases}.$$

Se $v < l$, basta considerar c_1 tal que

$$c_1 \leq \frac{2\beta - 1}{\beta^2}$$

para obtermos a desigualdade. Se $v > l$, basta considerar

$$c_2 \leq \frac{\beta(2\beta - 1)}{\beta^2}$$

e obteremos a desigualdade. Como $\frac{2\beta-1}{\beta^2} < \frac{\beta(2\beta-1)}{\beta^2}$, pois $\beta > 1$, então se considerarmos $c \leq c_1$ obtemos (ii).

(iii) Para alguma constante C independente de l, temos

$$vG(v) \leq C[F(v)]^2;$$

De fato, se $v \geq l$, então

$$vG(v) = v.v^{2(\beta-1)+1} = v^{2\beta} \leq C_1 v^{2\beta} = C_1[F(v)]^2$$

para todo $C_1 \geq 1$. Agora, se $v > l$, temos

$$\begin{aligned} vG(v) &= v[\beta(2\beta - 1)l^{2(\beta-1)}(v - l) + l^{2(\beta-1)+1}] \\ &= v[\beta(2\beta - 1)l^{2(\beta-1)}v - (\beta - 1)(2\beta + 1)l^{2(\beta-1)+1}] \\ &\leq v^2\beta(2\beta - 1)l^{2(\beta-1)}. \end{aligned}$$

E também, sendo $C_2 > 0$ uma constante, temos

$$\begin{aligned} C_2[F(v)]^2 &= C_2[\beta l^{(\beta-1)}(v-l)+l^\beta]^2 \\ &= C_2[\beta l^{(\beta-1)}v-(\beta-1)l^{(\beta-1)}l]^2. \end{aligned}$$

Como $v > l$ temos que

$$\begin{aligned} C_2[F(v)]^2 &> C_2[\beta l^{(\beta-1)}v-(\beta-1)l^{(\beta-1)}v]^2 \\ &= C_2[vl^{(\beta-1)}]^2. \end{aligned}$$

Logo, para encontrarmos C_2 que satisfaça

$$vG(v) \leq C_2[F(v)]^2$$

basta considerar C_2 tal que

$$v^2\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)} \leq C_2v^2l^{2(\beta-1)}$$

ou seja,

$$C_2 \geq \beta(2\beta-1).$$

Como $1 < \beta(2\beta-1)$, considere $C \geq C_2$ e obteremos (iii).

(iv) Se $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, então $F(v), G(v) \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pois F e G são funções Lipschitz;

De fato, note que se $v \leq l$ temos

$$|F(v)| = |v^\beta| = |v^{(\beta-1)}v| \leq l^{(\beta-1)}|v| = k_1|v|,$$

$$|\nabla(F(v))| = |F'(v)\nabla v| = |\beta v^{\beta-1}\nabla v| \leq \beta l^{\beta-1}|\nabla v| = c_1|\nabla v|,$$

e também,

$$|G(v)| = |v^{2(\beta-1)+1}| = |v^{2(\beta-1)}v| \leq l^{2(\beta-1)}|v| = k_2|v|,$$

$$|\nabla(G(v))| = |G'(v)\nabla v| = |(2\beta-1)v^{2(\beta-1)}\nabla v| \leq (2\beta-1)l^{2(\beta-1)}|\nabla v| = c_2|\nabla v|.$$

E, se $v > l$, obtemos

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |\beta l^{(\beta-1)}(v-l)+l^\beta| \\ &= |\beta l^{(\beta-1)}v-(\beta-1)l^\beta| \\ &\leq |\beta l^{(\beta-1)}v| = k_3|v|, \end{aligned}$$

$$|\nabla(F(v))| = |F'(v)\nabla v| = |\beta l^{(\beta-1)}\nabla v| = c_3|\nabla v|$$

e também,

$$\begin{aligned}
|G(v)| &= |\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l)+l^{2(\beta-1)+1}| \\
&= |\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}v-(\beta-1)(2\beta+1)l^{2(\beta-1)+1}| \\
&\leq |\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}v| \\
&= k_4|v|,
\end{aligned}$$

$$|\nabla(G(v))| = |G'(v)\nabla v| = |\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}\nabla v| = c_4|\nabla v|.$$

Tomando $k = \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ e $c = \max\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ obtemos

$$|F(v)| \leq k|v| \ , \quad |\nabla(F(v))| \leq c|\nabla v|$$

e

$$|G(v)| \leq k|v| \ , \quad |\nabla(G(v))| \leq c|\nabla v|$$

para todo valor de v. Logo, visto que $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |F(v)|^2 \leq k^2 \int_\Omega |v|^2 < +\infty,$$

$$\int_\Omega |\nabla(F(v))|^2 \leq c^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty$$

e

$$\int_\Omega |G(v)|^2 \leq k^2 \int_\Omega |v|^2 < +\infty,$$

$$\int_\Omega |\nabla(G(v))|^2 \leq c^2 \int_\Omega |\nabla v|^2 < +\infty.$$

provando assim (iv).

■

Considere agora $\beta > 1$ tal que $2\beta < 2^*$. Considere a função teste

$$\varepsilon = \eta^2 G(v)$$

onde $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ será fixada posteriormente. Assim, definindo

$$g(x,v) = \lambda v^q + f(x,v) + \frac{1}{n},$$

de (3.23) obtemos a equação

$$\int_\Omega \nabla v \nabla[\eta^2 G(v)] = \int_\Omega g(x,v)\eta^2 G(v).$$

Mas, observe que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla[\eta^2 G(v)] = \int_\Omega 2\eta \nabla v \nabla \eta G(v) + \int_\Omega \eta^2 \nabla v G'(v) \nabla v.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2 \eta^2 G'(v) &= \int_\Omega g(x,v)\eta^2 G(v)dx - 2\int_\Omega \eta \nabla v \nabla \eta G(v) \\ &\leq \int_\Omega g(x,v)\eta^2 G(v)dx + 2\int_\Omega \eta |\nabla v||\nabla \eta| G(v). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Da propriedade (i) e da desigualdade de Young com ϵ (ver Teorema B.19 no apêndice B) obtemos:

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega \eta|\nabla v||\nabla \eta| G(v) &\leq \int_\Omega (\epsilon \eta |\nabla v|)\left(\frac{2|\nabla \eta| v}{\epsilon}\right) G'(v) \\ &\leq \int_\Omega \left[\left(\epsilon^2 \eta^2 |\nabla v|^2 . \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{|\nabla \eta|^2 v^2}{\epsilon^2}\right)\right] G'(v) \\ &= \varepsilon \int_\Omega \eta^2 |\nabla v|^2 G'(v) + K_\epsilon \int_\Omega |\nabla \eta|^2 v^2 G'(v). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Agora, dado que

$$vG'(v) = \begin{cases} (2\beta - 1)v^{2(\beta-1)+1} & , se \quad v < l \\ \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}v & , se \quad v > l \end{cases}$$

Se $v < l$,

$$vG'(v) = (2\beta - 1)v^{2(\beta-1)+1} = C_1 G(v).$$

E, se $v > l$,

$$\begin{aligned} vG'(v) &= \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v - l + l) \\ &= \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l) + \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)+1}. \end{aligned}$$

Como $\beta(2\beta - 1) > 1$ temos que

$$\begin{aligned} vG'(v) &\leq \beta(2\beta-1)\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l) + \beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)+1} \\ &= \beta(2\beta-1)[\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l) + l^{2(\beta-1)+1}] \\ &= C_2 G(v). \end{aligned}$$

Considerando $C = \max\{C_1, C_2\}$ teremos que

$$vG'(v) \leq CG(v)$$

para todo valor de v. Usando esta desigualdade em (3.33) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\eta^2 G'(v) \leq \varepsilon \int_\Omega \eta^2|\nabla v|^2 G'(v) + C_\epsilon \int_\Omega |\nabla \eta|^2 v G(v) + \int_\Omega g(x,v)\eta^2 G(v). \tag{3.34}$$

Agora, mostremos que $g(x,v)$ satisfaz a seguinte condição de crescimento

$$|g(x,v)| \leq C(1+|v|^p), \quad com \;\; 1 < p \leq 2^* - 1. \tag{3.35}$$

Da definição de $g(x,v)$ temos

$$g(x,v) = \lambda v^q + f(x,v) + \frac{1}{n}, \; 0 < \lambda, \; 0 < q < 1.$$

Logo,

$$|g(x,v)| = \lambda |v|^q + |f(x,v)| + 1.$$

Da condição de crescimento (3.26) sobre $f(x,v)$,

$$\begin{aligned} |g(x,v)| &\leq \lambda|v|^q + C_1|v|^p + 1 \\ &\leq 3.\max\{|v|^q, C_1|v|^p, 1\}. \end{aligned}$$

Se $\max\{|v|^q, C_1|v|^p, 1\} = 1$ ou $\max\{|v|^q, C_1|v|^p, 1\} = |v|^q$, então temos que $|v(x)| \leq 1$. Assim, obtemos $|g(x,v)| \leq C_2(1+|v|^p)$. E, se $\max\{|v|^q, C_1|v|^p, 1\} = C_1|v|^p$, então, $g(x,v) \leq C_1|v|^p + C_1$. Logo, a desigualdade em (3.35) é satisfeita. Daí, teremos que $g(x,v)$ satisfaz a seguinte condição

$$G(v)g(x,v) \leq C_3(1+v^r G(v)), \quad r = 2^* - 1. \tag{3.36}$$

Com efeito, se $v \leq l$, então

$$\begin{aligned} G(v)g(x,v) &= v^{2(\beta-1)+1} g(x,v) \\ &\leq v^{2(\beta-1)+1} C(1+v^r) \end{aligned}$$

para $l \geq 1$ temos que

$$v^{2(\beta-1)+1} C(1+v^r) \leq C l^{2(\beta-1)+1} + C l^{2(\beta-1)+1} v^{2(\beta-1)+1} v^r,$$

logo,

$$\begin{aligned} G(v)g(x,v) &\leq C l^{2(\beta-1)+1}(1 + v^{2(\beta-1)+1} v^r) \\ &= C_1(1+v^r G(v)). \end{aligned}$$

E, se $v > l$, então

$$\begin{aligned} G(v)g(x,v) &= [\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l)+l^{2(\beta-1)+1}]g(x,v) \\ &\leq [\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}(v-l)+l^{2(\beta-1)+1}]C(1+v^r) \\ &= [\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}v-(\beta-1)(2\beta+1)l^{2(\beta-1)+1}]C+G(v)Cv^r \end{aligned}$$

para $l \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned} &[\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}v-(\beta-1)(2\beta+1)l^{2(\beta-1)+1}]C+G(v)Cv^r \\ &\leq C\beta(2\beta-1)l^{2(\beta-1)}vv^r+G(v)Cv^r, \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} G(v)g(x,v) &\leq C\beta[2(\beta-1)+1]l^{2(\beta-1)}vv^r+G(v)Cv^r \\ &= [CG'(v)v+G(v)C]v^r. \end{aligned}$$

Da propriedade (i) encontramos

$$\begin{aligned} G(v)g(x,v) &\leq [CG(v)+CG(v)]v^r \\ &\leq C_2(1+v^rG(v)). \end{aligned}$$

Considerando $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ obtemos a desigualdade (3.36).

Seja ε suficientemente pequeno. Da propriedade (iii) e, de (3.34) e (3.36) obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^2\eta^2G'(v) &\leq C_1\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2+\int_\Omega \eta^2g(x,v)G(v) \\ &\leq C_1\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2+\int_\Omega C_3\eta^2+\int_\Omega C_3\eta^2v^rG(v). \end{aligned}$$

Como $|\eta|_2 \leq C$, pois $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, e da propriedade (iii),

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\eta^2G'(v) \leq C_1\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2+C_2\int_\Omega \eta^2v^{2^*-2}[F(v)]^2+C_3|\Omega|. \tag{3.37}$$

Note que, usando a propriedade (ii) obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2\eta^2G'(v) \geq c\int_\Omega |\nabla v|^2\eta^2[F'(v)]^2 = c\int_\Omega |\eta F'(v)\nabla v|^2.$$

Daí, de (3.37)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\eta F(v))|^2 &= \int_\Omega |(\nabla\eta\ F(v))+\eta F'(v)\nabla v|^2 \\ &\leq 2^2\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2+\int_\Omega |\eta F'(v)\nabla v|^2\right) \\ &\leq C_4\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2+C_5\int_\Omega \eta^2v^{2^*-2}[F(v)]^2+C_6|\Omega|. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Sobolev (ver Teorema B.28 no apêndice B) obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega [F(v)]^{2^*}\eta^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C\int_\Omega |\nabla(\eta F(v))|^2\\ &\leq C_4\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2 + C_5\int_\Omega \eta^2 v^{2^*-2}[F(v)]^2 + C_6|\Omega|,\end{aligned}$$

e da desigualdade de Hölder (ver Teorema B.17 no apêndice B), com os expoentes $\frac{2^*}{2^*-2}$ e $\frac{2^*}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega [F(v)]^{2^*}\eta^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C_4\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2\\ &\quad + C_5\left(\int_\Omega v^{2^*}\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}\left(\int_\Omega \eta^{2^*}[F(v)]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + C_6|\Omega|, \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então pelo Teorema B.26 no apêndice B, $v \in L^{2^*}(\Omega)$. Daí, obtemos que se $x_0 \in \Omega$

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} |v|^{2^*} = \int_\Omega |v|^{2^*}\chi_{B_\varepsilon(x_0)}.$$

Observe que

$$|v(x)|^{2^*}\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|v(x)|^{2^*}\chi_{B_\varepsilon(x_0)}(x) \leq |v(x)|^{2^*} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B) temos que

$$\int_\Omega |v|^{2^*}\chi_{B_\varepsilon(x_0)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Assim, existe $R > 0$ tal que

$$\int_\Omega |v|^{2^*}\chi_{B_\varepsilon(x_0)} \leq \left(\frac{1}{2C_5}\right)^{\frac{2^*}{2^*-2}}, \text{ para cada } x_0 \in \Omega,\ \forall\varepsilon \leq R.$$

Daí,

$$|v|^{2^*-2}_{2^*(B_R(x_0))} \leq \frac{1}{2C_5}. \qquad (3.39)$$

Agora, considere $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $supp(\eta) = B_R(x_0)$. Então, de (3.39),

$$C_5\left(\int_\Omega v^{2^*}\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}\left(\int_\Omega \eta^{2^*}[F(v)]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$= C_5\left(\int_{B(x_0,R)} v^{2^*}\right)^{\frac{2^*-2}{2^*}}\left(\int_{B(x_0,R)} \eta^{2^*}[F(v)]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \eta^{2^*}[F(v)]^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Logo, substituindo a desigualdade anterior em (3.38) obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega [F(v)]^{2^*}\eta^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq C_7\int_\Omega |\nabla\eta|^2[F(v)]^2 + C_8|\Omega| \\ &\leq C(\eta)\int_\Omega [F(v)]^2 + C_8|\Omega|.\end{aligned}$$

Passando ao limite de $l \to +\infty$ obtemos

$$\left(\int_\Omega \eta^{2^*}v^{\beta 2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C(\eta)\int_\Omega v^{2\beta} + C_8|\Omega|. \tag{3.40}$$

Do Teorema B.29 , podemos considerar $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\eta(x) = 1, \forall x \in B_r(x_0)$, onde $r < R$. Então, de (3.40) temos

$$\left(\int_{B_r(x_0)} v^{\beta 2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_\Omega \eta^{2^*}v^{\beta 2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C(\eta)\int_\Omega v^{2\beta} + C_8|\Omega|.$$

Como $2\beta < 2^*$ e Ω é limitado teremos que

$$|v|^{2\beta}_{\beta 2^*(B_r(x_0))} < +\infty.$$

Portanto,

$$v \in L^{\beta 2^*}_{loc}. \tag{3.41}$$

Agora observe que, v é solução da equação

$$-\Delta v = a(x)v + b(x),$$

onde,

$$a(x) = \begin{cases} 0 & , se \quad v < 1 \\ \dfrac{g(x,v)}{v} & , se \quad v \geq 1 \end{cases}$$

e

$$b(x) = \begin{cases} 0 & , se \quad v \geq 1 \\ g(x,v) & , se \quad v < 1 \end{cases}.$$

Observe que $b(x) \in L^\infty(\Omega)$, visto que, para $v < 1$,

$$|b(x)| = |g(x,v)| \leq |C + Cv^{2^*-1}| \leq C_1.$$

Logo, considerando

$$h(x) = a(x)v + b(x),$$

teremos que $h \in L^r(\Omega)$, com $r > \frac{N}{2}$. Com efeito, considere $r = N$ e $\beta \geq N+2$, assim teremos que

$$\frac{N}{2} < r < \frac{2N\beta}{N+2}. \tag{3.42}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |h|^r &= \int_\Omega |a(x)v + b(x)|^r \\ &\leq C_2 \int_\Omega |a(x)v|^r + C_2 \int_\Omega |b(x)|^r. \end{aligned}$$

Para $v < 1$ obtemos,

$$\int_\Omega |h|^r \leq C_2 \int_\Omega |b(x)|^r \leq C_2|\Omega| < +\infty.$$

Agora, para $v \geq 1$ temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |h|^r &\leq C_2 \int_\Omega |a(x)v|^r \\ &= C_2 \int_\Omega |g(x,v)|^r. \end{aligned}$$

Da condição (3.35) obtemos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |h|^r &\leq C_2 \int_\Omega |C + C|v|^{2^*-1}|^r \\ &\leq C_3|\Omega| + C_3 \int_\Omega |v|^{(2^*-1)r}. \end{aligned}$$

De (3.42) encontramos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |h|^r &\leq C_3|\Omega| + C_3 \int_\Omega |v|^{(2^*-1).\frac{2N\beta}{N+2}} \\ &\leq C_3|\Omega| + C_3 \int_\Omega |v|^{\beta 2^*}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Note que $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=1}^k B_r(x_i)$, onde $x_i \in \Omega$, $\forall i = 1, 2, ..., k$. Logo, de (3.41)

$$\int_\Omega |v|^{\beta 2^*} \leq \int_{\overline{\Omega}} |v|^{\beta 2^*} \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_r(x_i)} |v|^{\beta 2^*} < +\infty.$$

Então, como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, de (3.43)

$$\int_\Omega |h|^r \leq C_3|\Omega| + C_3 \int_\Omega |v|^{\beta 2^*} < +\infty.$$

Daí, nós concluímos pelo item (ii) do Teorema B.30 no apêndice B, que $v \in W^{2,r}(\Omega)$. E, pelo item (ii) do Teorema B.25 no apêndice B , $v \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, com $0 < \lambda < 1$ e assim,

$h \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$. Portanto pelo Teorema B.31 no apêndice B, $v \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$. Logo v é solução clássica de (3.24). ■

Sendo v solução clássica do problema (3.24), então

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} v = 0,$$

e também

$$-\Delta v \geq 0.$$

Daí, se existir $x_0 \in \Omega$ tal que

$$v(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} v = 0,$$

então, pelo princípio de máximo forte (ver Teorema B.32 no apêndice B), v é uma função constante. Como $v(x_0) = 0$, então $v(x) = 0, \forall x \in \Omega$. Absurdo, pois a função nula não é solução do problema $(P)_{2,n}$. Portanto $v > 0$ em Ω, ou seja, v é solução do problema auxiliar $(P)_{2,n}$.

Denotando por v_n a solução de $(P)_{2,n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos que

$$v_m \rightharpoonup v_n \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Daí , pelo Teorema B.22 no apêndice B

$$\|v_n\| \leq \liminf \|v_m\| \leq r, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Como r não depende de n, então

$$\|v_n\| \leq r, \forall n \in \mathbb{N},$$

assim, existe $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Por imersão compacta, a menos de subsequência, temos

$$v_n \to v_0 \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para } 1 \leq s < 2^* \text{ se } N \geq 3 \text{ e para } 1 \leq s < +\infty \text{ se } N = 2,$$

e pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência

i) $v_n(x) \to v_0(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|v_n(x)| \leq h(x), \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^s(\Omega)$.

Observe que a seguinte desigualdade é válida

$$\begin{cases} -\Delta v_n & \geq & \lambda v_n^q & em & \Omega \\ v_n & > & 0 & em & \Omega \\ v_n & = & 0 & sobre & \partial\Omega \end{cases}.$$

Logo, considerando $w_n = \lambda^{\frac{1}{q-1}} v_n$, temos que

$$-\Delta\left(\frac{w_n}{\lambda^{\frac{1}{q-1}}}\right) \geq \lambda\left(\frac{w_n}{\lambda^{\frac{1}{q-1}}}\right)$$

implicando que,

$$-\Delta w_n \geq w_n^q.$$

Sendo $\tilde{w}$ a solução única do problema

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{w} & = & \tilde{w}^q & em & \Omega \\ \tilde{w} & > & 0 & em & \Omega \\ \tilde{w} & = & 0 & sobre & \partial\Omega \end{cases},$$

(ver [9]) segue do Teorema A.1 no apêndice A, que $w_n \geq \tilde{w}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\lambda^{\frac{1}{q-1}} v_n(x) \geq \tilde{w}(x), \text{ q.t.p. em } \Omega, \forall n \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$v_n(x) \geq \lambda^{\frac{1}{1-q}} \tilde{w}(x), \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.44}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ em (3.44), obtemos que

$$v_0(x) \geq \lambda^{\frac{1}{1-q}} \tilde{w}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

mostrando que $v_0 > 0$ em Ω.

Recorde que, de (3.23)

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla\psi = \lambda \int_\Omega (v_n)^q \psi + \int_\Omega f(x, v_n)\psi + \frac{1}{n}\int_\Omega \psi, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega),$$

passando ao limite de $n \to +\infty$ na última igualdade, de (3.16), (3.18) e (3.19) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_0 \nabla\psi = \lambda \int_\Omega (v_0)^q \psi + \int_\Omega f(x, v_0)\psi, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

provando que v_0 é solução do problema $(P)_2$. Da mesma maneira que para v_n, mostra-se que v_0 é na verdade uma solução clássica.

Capítulo 4

Aplicação do Método de Galerkin a uma classe de Sistemas Elípticos

Neste capítulo, usando o Teorema de Lax-Milgran (ver Teorema B.4 no apêndice B) e seguindo as idéias presentes em [3] mostraremos a existência e unicidade de solução para o sistema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta v + u &= f_1(x,u,v) \quad em \;\; \Omega \\ \Delta u + v &= f_2(x,u,v) \quad em \;\; \Omega \\ u = v = 0 & \qquad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{S}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f_1, f_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções Carathéodory verificando a seguinte condição de crescimento

$$|f_1(x,u,v)| \leq C_1(|u|^{p_1} + |v|^{p_2}) \;\; e \;\; |f_2(x,u,v)| \leq C_2(|u|^{q_1} + |v|^{q_2}) \tag{4.1}$$

para $0 < p_1, p_2, q_1, q_2 < 1$.

Ressaltamos que em [3] foi estudado apenas o problema

$$\begin{cases} -\Delta v + u &= f_1 \quad em \;\; \Omega \\ \Delta u + v &= f_2 \quad em \;\; \Omega \\ u = v = 0 & \qquad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{S}$$

onde $f_1, f_2 \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Como foi dito na introdução um dos trabalhos pioneiros envolvendo o método de Galerkin aplicado a sistemas elípticos não-lineares foi publicado por Alves e de Figueiredo [4] em 2002, no qual eles mostram a existência de solução para um sistema do tipo côncavo e convexo.

Vamos tentar associar ao sistema (S) uma forma bilinear sobre o espaço de Hilbert

$$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Note que as funções

$$\|(u,v)\| = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (u,v) \in V \tag{4.2}$$

e

$$|(u,v)| = (|u|^2 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (u,v) \in V \tag{4.3}$$

definem normas no espaço V.

Observe primeiramente que uma solução fraca $(u,v) \in V$ de (S), deve verificar as seguintes igualdades

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \psi + \int_\Omega u\psi = \int_\Omega f_1(x,u,v)\psi, \ \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

e

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = \int_\Omega f_2(x,u,v)\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, uma candidata natural a forma bilinear procurada é

$$a((u,v),(\psi,\varphi)) = \int_\Omega \nabla v \nabla \psi + \int_\Omega u\psi - \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi. \tag{4.4}$$

No entanto, observe que

$$a((u,v),(u,v)) = \int_\Omega |u|^2 + \int_\Omega |v|^2, \ \forall (u,v) \in V,$$

implicando que

$$a((u,v),(u,v)) = |(u,v)|^2, \ \forall (u,v) \in V. \tag{4.5}$$

Como $a(\cdot,\cdot)$ definida como em (4.4) não é coerciva, pois as normas $\|.\|$ e $|.|$ não são equivalentes em V, não podemos aplicar o Teorema de Lax-Milgram ao par (a,V).

A idéia então é usar o Método de Galerkin trabalhando sobre os espaços de dimensão finita W_m, onde duas normas quaisquer são equivalentes.

Fixe $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m, ...\}$ uma base hilbertiana de V e denote por W_m o seguinte subespaço

$$W_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$$

onde $W_m = U_n \times U_n$, sendo $U_n \subset H_0^1(\Omega)$ um subespaço de dimensão finita.

Observe que as funções em (4.2) e (4.3) induzem duas normas em $W_m \subset V$ que são equivalentes, visto que $dimW_m < +\infty$.

De (4.5), e da equivalência das normas temos que existe uma constante $C_m > 0$ tal que

$$a((u,v),(u,v)) = |(u,v)|^2 \geq C_m \|(u,v)\|^2,$$

ou seja, a forma bilinear definida em (4.4) é coerciva em W_m.

Mostremos que a forma bilinear que definimos em (4.4) é contínua. Considerando $(u,v),(\psi,\varphi) \in W_m \subset V$, temos que $u,v,\psi,\varphi \in H_0^1(\Omega)$, logo, por imersão contínua (ver Teorema B.26 no apêndice B) $u,v,\psi,\varphi \in L^2(\Omega)$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} |a((u,v),(\psi,\varphi))|^2 &= \Big|\int_\Omega \nabla v \nabla \psi + \int_\Omega u\psi - \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi\Big|^2 \\ &\leq \Big|\int_\Omega |\nabla v \nabla \psi| + \int_\Omega |u\psi| + \int_\Omega |\nabla u \nabla \varphi| + \int_\Omega |v\varphi|\Big|^2. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder (ver Teorema B.17 no apêndice B) obtemos

$$|a((u,v),(\psi,\varphi))|^2 \leq (|\nabla v|_2 |\nabla \psi|_2 + |u|_2 |\psi|_2 + |\nabla u|_2 |\nabla \varphi|_2 + |v|_2 |\varphi|_2)^2,$$

e por imersão contínua obtemos

$$\begin{aligned} |a((u,v),(\psi,\varphi))|^2 &\leq C_2 \left(|\nabla u|_2 + |\nabla v|_2\right)^2 \left(|\nabla \psi|_2 + |\nabla \varphi|_2\right)^2 \\ &\leq C_3 \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^2 \left(\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2\right)^2 \\ &= C_3 \|(u,v)\|^2 \|(\psi,\varphi)\|^2. \end{aligned}$$

Logo, a é uma forma bilinear contínua.

Portanto, a é W_m-elíptica. Sendo $(W_m, \|\cdot\|)$ um subespaço de V com $dimW_m < +\infty$ munido da norma induzida por V, então $(W_m, \|\cdot\|)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} F_m : \quad W_m &\to \mathbb{R} \\ (\psi,\varphi) &\mapsto F_m(\psi,\varphi) = \int_\Omega (f_1(x,u,v)\psi + f_2(x,u,v)\varphi) \end{aligned}$$

determina um funcional linear contínuo. De fato, da linearidade da integral F_m é linear, e também,

$$\begin{aligned} |F_m(\psi,\varphi)|^2 &= \Big|\int_\Omega f_1(x,u,v)\psi + f_2(x,u,v)\varphi\Big|^2 \\ &\leq \left(\int_\Omega |f_1(x,u,v)||\psi| + \int_\Omega |f_2(x,u,v)||\varphi|\right)^2. \end{aligned}$$

Da condição de crescimento (4.1) obtemos

$$|F_m(\psi,\varphi)|^2 \leq C_3\left(\int_\Omega |u|^{p_1}|\psi| + \int_\Omega |v|^{p_2}|\psi| + \int_\Omega |u|^{q_1}|\varphi| + \int_\Omega |v|^{q_2}|\varphi|.\right)^2$$

Desde que $1 < p_1+1, p_2+1, q_1+1, q_2+1 < 2$ e $u, v, \psi, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, então por imersão contínua temos que $u, v, \psi, \varphi \in L^s(\Omega)$ para $s \in \{p_1+1, p_2+1, q_1+1, q_2+1\}$. Assim, pela desigualdade de Hölder (ver Teorema B.17 no apêndice B) obtemos

$$|F_m(\psi,\varphi)|^2 \leq C_3(|u|_{p_1+1}^{p_1}|\psi|_{p_1+1} + |v|_{p_2+1}^{p_2}|\psi|_{p_2+1} + |u|_{q_1+1}^{q_1}|\varphi|_{q_1+1} + |v|_{q_2+1}^{q_2}|\varphi|_{q_2+1})^2$$

Agora, por imersão contínua obtemos

$$\begin{aligned} |F_m(\psi,\varphi)|^2 &\leq C_4(\|u\|^{p_1}\|\psi\| + \|v\|^{p_2}\|\psi\| + \|u\|^{q_1}\|\varphi\| + \|v\|^{q_2}\|\varphi\|)^2 \\ &\leq C_4(\|\psi\|(\|u\|^{p_1} + \|v\|^{p_2}) + \|\varphi\|(\|u\|^{q_1} + \|v\|^{q_1}))^2 \end{aligned}$$

Logo, para cada $(u,v) \in V$ fixo teremos

$$\begin{aligned} |F_m(\psi,\varphi)|^2 &\leq C_5(\|\psi\| + \|\varphi\|)^2 \\ &\leq C_6\|(\psi,\varphi)\|^2 \end{aligned}$$

de onde resulta que $F_m \in (W_m)'$.

Segue então do Teorema de Lax-Milgran (ver Teorema B.4 no apêndice B) que para cada $m \in \mathbb{N}$, existem únicos $(u_m, v_m) \in W_m$ tais que

$$a((u_m,v_m),(\psi,\varphi)) = \int_\Omega (f_1(x,u_m,v_m)\psi + f_2(x,u_m,v_m)\varphi),\ \forall(\psi,\varphi) \in W_m. \tag{4.6}$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla\psi + \int_\Omega u_m\psi - \int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi + \int_\Omega v_m\varphi = \int_\Omega f_1(x,u_m,v_m)\psi + \int_\Omega f_2(x,u_m,v_m)\varphi. \tag{4.7}$$

Assim, podemos considerar

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla\psi + \int_\Omega u_m\psi = \int_\Omega f_1(x,u_m,v_m)\psi, \tag{4.8}$$

e

$$-\int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi + \int_\Omega v_m\varphi = \int_\Omega f_2(x,u_m,v_m)\varphi, \tag{4.9}$$

para todo $(\psi,\varphi) \in W_m$.

O nosso objetivo a partir daqui é mostrar que a sequência $\{(u_m, v_m)\} \subset V$ é limitada. Segue da caracterização de W_m, que se $(u, v) \in W_m$ então, $(v, -u) \in W_m$, usando tal propriedade de W_m, aplicando em 4.7 o par $(v_m, -u_m)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^2 + \int_\Omega u_m v_m + \int_\Omega |\nabla u_m|^2 - \int_\Omega v_m u_m = \int_\Omega (f_1(x, u_m, v_m)v_m - f_2(x, u_m, v_m)u_m).$$

Da condição de crescimento (4.1) obtemos

$$\|v_m\|^2 + \|u_m\|^2 \leq C_7 \left(\int_\Omega (|u_m|^{p_1}|v_m| + |v_m|^{p_2}|v_m|) + \int_\Omega (|u_m|^{q_1}|u_m| + |v_m|^{q_2}|u_m|) \right). \tag{4.10}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, e por imersão contínua obtemos

$$\|v_m\|^2 + \|u_m\|^2 \leq C_8(\|u_m\|^{p_1}\|v_m\| + \|v_m\|^{p_2+1} + \|u_m\|^{q_1+1} + \|v_m\|^{q_2}\|u_m\|).$$

Observe que se $\|u_m\| \leq \|v_m\|$ teremos que

$$\|u_m\|^{p_1}\|v_m\| \leq \|v_m\|^{p_1+1} \quad e \quad \|v_m\|^{q_2}\|u_m\| \leq \|v_m\|^{q_2+1}. \tag{4.11}$$

Da mesma maneira, se $\|v_m\| \leq \|u_m\|$ então

$$\|u_m\|^{p_1}\|v_m\| \leq \|u_m\|^{p_1+1} \quad e \quad \|v_m\|^{q_2}\|u_m\| \leq \|u_m\|^{q_2+1}. \tag{4.12}$$

Assim, de (4.11) e (4.12) obtemos

$$\|u_m\|^{p_1}\|v_m\| \leq \|u_m\|^{p_1+1} + \|v_m\|^{p_1+1} \leq C_9\|(u_m, v_m)\|^{p_1+1}$$

e

$$\|v_m\|^{q_2}\|u_m\| \leq \|u_m\|^{q_2+1} + \|v_m\|^{q_2+1} \leq C_{10}\|(u_m, v_m)\|^{q_2+1}.$$

Agora, substituindo as desigualdades acima em (4.10) resulta que

$$\begin{aligned} \|(u_m, v_m)\|^2 &\leq C_{11}(\|(u_m, v_m)\|^{p_1+1} + \|v_m\|^{p_2+1} + \|u_m\|^{q_1+1} + \|(u_m, v_m)\|^{q_2+1}) \\ &\leq C_{11}(\|(u_m, v_m)\|^{p_1+1} + \|(u_m, v_m)\|^{p_2+1} + \|(u_m, v_m)\|^{q_1+1} + \|(u_m, v_m)\|^{q_2+1}). \end{aligned}$$

Desde que $1 < p_1+1, p_2+1, q_1+1, q_2+1 < 2$, a desigualdade acima mostra que a sequência $\{(u_m, v_m)\} \subset V$ é limitada.

Considere agora $(u, v) \in V$ satisfazendo

$$(u_m, v_m) \rightharpoonup (u, v) \quad em \quad V, \tag{4.13}$$

ou seja,

$$u_m \rightharpoonup u \text{ e } v_m \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Por imersão compacta temos que

$$u_m \to u \text{ em } L^t(\Omega) \text{ e } v_m \to v \text{ em } L^s(\Omega)$$

para $1 \leq t, s < 2^* - 1$ se $N \geq 3$ e para $1 \leq t, s < +\infty$ se $N = 2$. Pelo Teorema B.16 no apêndice B temos que

$$u_m(x) \to u(x) \;\; e \;\; v_m(x) \to v(x) \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega. \tag{4.14}$$

Além disso,

$$|u_m(x)| \leq h_1(x), \forall m \in \mathbb{N}, \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega, \;\; com \;\; h_1 \in L^t(\Omega) \tag{4.15}$$

e

$$|v_m(x)| \leq h_2(x), \forall m \in \mathbb{N}, \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \Omega, com \;\; h_2 \in L^s(\Omega). \tag{4.16}$$

Considerando $(\psi, \varphi) \in V$ podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \omega_i.$$

Denote $(\psi_k, \varphi_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \omega_i$. Como $\psi_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \psi$ e $\varphi_k \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$(\psi_k, \varphi_k) \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} (\psi, \varphi) \;\; em \;\; V. \tag{4.17}$$

Fixando k tal que $k \leq m$, note que $W_k \subset W_m$. Logo de (4.8) e (4.9),

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \psi_k + \int_\Omega u_m \psi_k = \int_\Omega f_1(x, u_m, v_m) \psi_k$$

e

$$-\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_k + \int_\Omega v_m \varphi_k = \int_\Omega f_2(x, u_m, v_m) \varphi_k,$$

ou seja,

$$a((u_m, v_m), (\psi_k, \varphi_k)) = \int_\Omega (f_1(x, u_m, v_m)\psi_k + f_2(x, u_m, v_m)\varphi_k). \tag{4.18}$$

Da convergência fraca em (4.13) temos que

$$a((u_m, v_m), (\psi_k, \varphi_k)) \overset{m \to +\infty}{\longrightarrow} a((u, v), (\psi_k, \varphi_k)). \tag{4.19}$$

Desde que $f_1(x,.,.)$ e $f_2(x,.,.)$ são contínuas, de (4.14) temos que

$$f_1(x,u_m(x),v_m(x))\psi_k \to f_1(x,u(x),v(x))\psi_k, \quad q.t.p. \ \ em \ \ \Omega,$$

e

$$f_2(x,u_m(x),v_m(x))\varphi_k \to f_2(x,u(x),v(x))\varphi_k, \quad q.t.p. \ \ em \ \ \Omega.$$

Além disso, da condição de crescimento (4.1) e de (4.15) e (4.16) obtemos

$$|f_1(x,u_m(x),v_m(x))\psi_k| \leq C_1(|h_1(x)|^{p_1}|\psi_k| + |h_2(x)|^{p_2}|\psi_k|)$$

e

$$|f_2(x,u_m(x),v_m(x))\varphi_k| \leq C_2(|h_1(x)|^{q_1}|\varphi_k| + |h_2(x)|^{q_2}|\varphi_k|).$$

Desde que $h_1, h_2 \in L^{\frac{t+1}{t}}(\Omega)$ para $t = p_1, q_1, p_2, q_2$, e também , por imersão contínua, $\psi_k, \varphi_k \in L^j(\Omega)$ para $j = p_1+1, p_2+1, q_1+1, q_2+1$, temos que

$$|h_1|^{p_1}|\psi_k|, |h_1|^{q_1}|\varphi_k|, |h_2|^{p_2}|\psi_k|, |h_2|^{q_2}|\varphi_k| \in L^1(\Omega).$$

Assim, do Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema B.15 no apêndice B) temos que

$$\int_\Omega f_1(x,u_m,v_m)\psi_k \to \int_\Omega f_1(x,u,v)\psi_k \tag{4.20}$$

e

$$\int_\Omega f_2(x,u_m,v_m)\varphi_k \to \int_\Omega f_2(x,u,v)\varphi_k. \tag{4.21}$$

Portanto, de (4.18), (4.19), (4.20), (4.21) e da unicidade do limite temos que

$$a((u,v),(\psi_k,\varphi_k)) = \int_\Omega (f_1(x,u,v)\psi_k + f_2(x,u,v)\varphi_k). \tag{4.22}$$

Definindo

$$\begin{array}{rcl} F: \ V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\psi,\varphi) & \longmapsto & F(\psi,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f_1(x,u,v)\psi + f_2(x,u,v)\varphi \end{array}$$

observamos que $F \in V'$, e de (4.22) temos que

$$a((u,v),(\psi_k,\varphi_k)) = F(\psi_k,\varphi_k).$$

Sendo $a(\cdot,\cdot)$ contínua, e usando a convergência forte em (4.17) temos que

$$\begin{aligned} a((u,v),(\psi_k,\varphi_k)) &\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a((u,v),(\psi,\varphi)) \quad \text{e} \\ F(\psi_k,\varphi_k) &\overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} F(\psi,\varphi). \end{aligned}$$

Da unicidade do limite, obtemos

$$a((u,v),(\psi,\varphi)) = F(\psi,\varphi),\ \forall(\psi,\varphi)\in V$$

isto é, $(u,v)\in V$ é a única solução do sistema (S), visto que a sequência $\{(u_m,v_m)\}\subset V$ é obtida de maneira única.

Capítulo 5

O Método de Galerkin e o Operador p-Laplaciano

Neste capítulo, seguindo as idéias presentes em [3] aplicaremos o método de Galerkin a uma classe de problemas do tipo sublinear envolvendo o operador p-Laplaciano.

Iniciemos recordando a seguinte caracterização do operador p-Laplaciano ($p > 1$):

$$\begin{array}{rccc} -\Delta_p : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & (W_0^{1,p}(\Omega))' \\ & u & \longmapsto & -\Delta_p u \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} -\Delta_p u : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & < -\Delta_p u, v > \end{array}$$

com $< -\Delta_p u, v >= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v$.

Fixe $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m, ...\}$ uma base de Schauder para $W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j w_j = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j.$$

Considere para cada $m \in \mathbb{N}$ o subespaço

$$W_m = [w_1, w_2, ..., w_m].$$

Note que um elemento $v \in W_m$ pode ser representado da seguinte forma

$$v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j.$$

Uma norma que utilizaremos sobre o espaço W_m é definida por

$$\|v\|_m = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|.$$

Observe que $(W_m, \|.\|_m)$ é isomorfo e isométrico ao espaço normado $(\mathbb{R}^m, |.|_s)$ onde $|.|_s$ é a norma da soma. Com efeito, basta definir a função

$$\begin{array}{rccc} T: & W_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j & \longmapsto & Tv = \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \end{array}$$

que é linear e bijetiva, pois , como $\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ são vetores da base de Schauder, todos os elementos de W_m são determinados de maneira única. E mais,

$$|\xi|_s = |Tv|_s = \|v\|_m.$$

Tendo em vista que W_m tem dimensão finita, as normas $\|.\|$ e $\|.\|_m$ são equivalentes em W_m.

5.1 O caso sublinear

Vamos usar o Método de Galerkin para mostrar a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= f(x,v) \quad ,\Omega \\ v &= 0 \quad ,\partial\Omega \end{cases} \tag{$(P)_3$}$$

onde Ω é Domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$é uma função Carathéodory verificando a seguinte condição de crescimento

$$|f(x,v)| \leq C|v|^q \tag{5.1}$$

para $0 < q < p - 1$.

Ressaltamos que em [3] foi estudado apenas o problema abaixo

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad ,\Omega \\ u &= 0 \quad ,\partial\Omega \end{cases} \tag{$(P)_4$}$$

onde $p > 1$ e $f \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Defina a função $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi), ..., F_m(\xi))$$

onde

$$F_j(\xi) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla w_j - \int_\Omega f(x,v)w_j$$

com

$$v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j.$$

Observe que

$$\xi_j F_j(\xi) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(\xi_j w_j) - \int_\Omega f(x,v)(\xi_j w_j).$$

Logo, como

$$(F(\xi),\xi) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j F_j(\xi)$$

então,

$$(F(\xi),\xi) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j) - \int_\Omega f(x,v)(\sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j),$$

da definição de v temos

$$\begin{aligned}(F(\xi),\xi) &= \int_\Omega |\nabla v|^p - \int_\Omega f(x,v)v \\ &= \|v\|^p - \int_\Omega f(x,v)v,\end{aligned}$$

e da equivalência das normas obtemos

$$(F(\xi),\xi) \geq \overline{C}_m \|v\|_m^p - \int_\Omega f(x,v)v.$$

Da condição de crescimento (5.1) temos que

$$\int_\Omega f(x,v)v \leq C \int_\Omega |v|^{q+1} = C|v|_{q+1}^{q+1}$$

por imersão contínua e da equivalência das normas obtemos

$$\int_\Omega f(x,v)v \leq C'_m \|v\|_m^{q+1}.$$

Agora, lembrando que $\|v\|_m = |\xi|_s$ e da equivalência das normas em $\mathbb{R}^m$, teremos

$$\begin{aligned}(F(\xi),\xi) &\geq \overline{C}_m \|v\|_m^p - C'_m \|v\|_m^{q+1} \\ &= \overline{C}_m |\xi|_s^p - C'_m |\xi|_s^{q+1} \\ &\geq \hat{C}_m |\xi|^p - \tilde{C}_m |\xi|^{q+1}\end{aligned}$$

onde $|.|$ é a norma usual de $\mathbb{R}^m$.

Para que

$$\hat{C}_m|\xi|^p - \tilde{C}_m|\xi|^{q+1} \geq 0,$$

ou seja,

$$|\xi|^{q+1}(\hat{C}_m|\xi|^{p-(q+1)} - \tilde{C}_m) \geq 0,$$

como $|\xi|^{q+1} \geq 0$, basta considerarmos

$$\hat{C}_m|\xi|^{p-(q+1)} - \tilde{C}_m \geq 0$$

isto é,

$$|\xi| \geq \left(\frac{\tilde{C}_m}{\hat{C}_m}\right)^{\frac{1}{p-(q+1)}}.$$

Assim, se $\rho_m = 2\left(\frac{\tilde{C}_m}{\hat{C}_m}\right)^{\frac{1}{p-(q+1)}}$ e $r = \hat{C}_m|\rho_m|^p - \tilde{C}_m|\rho_m|^{q+1}$ teremos que, para $|\xi| = \rho_m$ obtemos $(F(\xi), \xi) \geq r \geq 0$.

Mostremos que F é contínua. Considere

$$v_n = \sum_{j=1}^{m} \xi_{nj} w_j \text{ e } v = \sum_{j=1}^{m} \xi_j w_j$$

onde

$$\xi_n = (\xi_{n1}, \xi_{n2}, ..., \xi_{nm}) \longrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m).$$

Logo,

$$v_n \to v \quad em \quad W_m.$$

De acordo com a definição de F_j temos que

$$F_j(\xi_n) = \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla w_j - \int_\Omega f(x, v_n) w_j$$

e

$$F_j(\xi) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w_j - \int_\Omega f(x, v) w_j.$$

Afirmamos que existe uma subsequência $\{v_{nj}\} \subset \{v_n\}$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla v_{nj}|^{p-2} \nabla v_{nj} \nabla w_j \to \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w_j. \tag{5.2}$$

Demonstraremos esta afirmação posteriormente. Agora, desde que $f(., u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $v_n \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, por imersão compacta (Ver Teorema B.27 no apêndice B), existe uma subsequência$\{v_{nk}\} \subset \{v_n\}$ tal que $v_{nk} \to v$ em $L^k(\Omega)$ para $k \in [1, p^*)$. Logo, pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência:

i) $v_{nk}(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|v_{nk}(x)| \leq h(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^k(\Omega)$.

De (i) obtemos

$$f(x, v_{nk}(x))w_j(x) \longrightarrow f(x, v(x))w_j(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

E mais

$$|f(x, v_{nk}(x))w_j(x)| \leq C|v_{nk}(x)|^q|w_j(x)| \leq C|h(x)|^q|w_j(x)|.$$

Observe que, em particular, $h \in L^{q+1}(\Omega)$, logo, $|h|^q \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$, e como $w_j \in L^{q+1}(\Omega)$ obtemos

$$|f(x, v_{nk})w_j| \leq C|h|^q|w_j| \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.15 no apêndice B),

$$\int_\Omega f(x, v_{nk})w_j \longrightarrow \int_\Omega f(x, v)w_j. \tag{5.3}$$

De (5.2) e (5.3) podemos concluir que a menos de subsequência

$$\int_\Omega |\nabla v_{nk}|^{p-2}\nabla v_{nk}\nabla w_j - \int_\Omega f(x, v_{nk})w_j \to \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w_j - \int_\Omega f(x, v)w_j,$$

ou seja,

$$F_j(\xi_{nk}) \to F_j(\xi), \forall j \in \mathbb{N},$$

implicando que

$$F_j(\xi_n) \to F_j(\xi), \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mostrando assim que, F é contínua.

Portanto, pelo Teorema (1.4), existe $\xi_m \in \mathbb{R}_m$ com $|\xi_m| \leq \rho_m$ tal que $F(\xi_m) = 0$. Da identificação isométrica dos espaços $(\mathbb{R}^m, |.|_s)$ e $(W_m, \|.\|_m)$, e da equivalência das normas nestes espaços temos que existe $v_m \in W_m$ tal que $\|v_m\| \leq \overline{\rho}_m$ e

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^{p-2}\nabla v_m\nabla\psi = \int_\Omega f(x, v_m)\psi, \quad \forall\psi \in W_m. \tag{5.4}$$

Assim, tomando $v_m \in W_m$ e substituindo na igualdade acima obtemos

$$\|v_m\|^p = \int_\Omega f(x, v_m)v_m. \tag{5.5}$$

Da condição de crescimento (5.1) e por imersão contínua resulta que

$$\|v_m\|^p \leq C\|v_m\|^{q+1}.$$

Desde que $q+1 < p$, podemos concluir que $\{v_m\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Assim, existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência,

$$v_m \rightharpoonup v \quad em \quad W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.6}$$

Logo, por imersão compacta (Ver Teorema B.27 no apêndice B), a menos de subsequência, $v_m \to v$ em $L^k(\Omega)$ para $k \in [1, p^*)$. Logo, pelo Teorema B.16 no apêndice B, a menos de subsequência

i) $v_m(x) \to v(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|v_m(x)| \leq h(x), \ \forall n \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^k(\Omega)$.

Desde que f é uma função Carathéodory e de (i) obtemos

$$f(x, v_m(x))v_m(x) \longrightarrow f(x, v(x))v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$|f(x, v_m(x))v_m(x)| \leq C|v_m(x)|^{q+1} \leq C|h(x)|^{q+1}.$$

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f(x, v_m)v_m \to \int_\Omega f(x, v)v \quad em \quad \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Agora observe que a sequência $\{-\Delta_p v_m\} \subset (W_0^{1,p}(\Omega))'$ é limitada. Seja $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então,

$$| < -\Delta_p v_m, \varphi > | = \Big| \int_\Omega |\nabla v_m|^{p-2} \nabla v_m \nabla \varphi \Big| \leq \int_\Omega |\nabla v_m|^{p-1} |\nabla \varphi|.$$

Como $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $\nabla v_m \in L^p(\Omega)$, logo, $|\nabla v_m|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}, \forall m \in \mathbb{N}$. Desde que $\varphi \in L^p(\Omega)$, aplicando a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{p}{p-1}$ e p obtemos

$$\begin{aligned} | < -\Delta_p v_m, \varphi > | &\leq \left(\int_\Omega |\nabla v_m|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C\|\varphi\| \\ &\leq C, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega); \|\varphi\| \leq 1 \end{aligned}$$

portanto,

$$\| -\Delta_p v_m \| = \sup_{\substack{\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \|\varphi\| \leq 1}} | < -\Delta_p v_m, \varphi > | \leq C.$$

Desde que o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo, segue do Teorema B.5 no apêndice B, $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ é reflexivo. Logo, se $\{-\Delta_p v_m\} \subset \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$ é limitada, então, a menos de subsequência

$$-\Delta_p v_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \text{ em } \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$$

isto é,

$$< -\Delta_p v_m, \psi > \longrightarrow < \chi, \psi >, \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^{p-2} \nabla v_m \nabla \psi \longrightarrow < \chi, \psi >, \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.8}$$

Uma consequência imediata do Teorema B.20 no apêndice B é o fato de o operador $-\Delta_p$ ser monotônico, ou seja,

$$< -\Delta_p v - (-\Delta_p u), v - u > \geq \ 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

isto é,

$$\int_\Omega \left[|\nabla v|^{p-2} \nabla v (\nabla v - \nabla u) - |\nabla u|^{p-2} \nabla u (\nabla v - \nabla u) \right] \geq 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

implicando que,

$$\int_\Omega \left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v - \nabla u \right) \geq 0, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.9}$$

Daí, obtemos

$$\int_\Omega \left(|\nabla v_m|^{p-2} \nabla v_m - |\nabla \psi|^{p-2} \nabla \psi, \nabla v_m - \nabla \psi \right) \geq 0, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Cosequentemente,

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^p - < -\Delta_p v_m, \psi > - < -\Delta_p \psi, v_m > + < -\Delta_p \psi, \psi > \geq \ 0, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

implicando de (5.5) que

$$\int_\Omega f(x, v_m) v_m - < -\Delta_p v_m, \psi > - < -\Delta_p \psi, v_m > + < -\Delta_p \psi, \psi > \geq 0, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.10}$$

Logo, passando ao limite de $m \to +\infty$ em (5.10), e de (5.7) obtemos que

$$\int_\Omega f(x,v)v - < \chi, \psi > - < -\Delta_p \psi, v > + < -\Delta_p \psi, \psi > \geq 0, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.11}$$

Observe que passando ao limite de $m \to +\infty$ em (5.4), das convergências em (5.7) e (5.8) obtemos

$$< \chi, \psi >= \int_\Omega f(x,v)\psi, \ \forall \psi \in W_m \tag{5.12}$$

daí, em particular

$$< \chi, v_m >= \int_\Omega f(x,v)v_m, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

Como $\chi \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, de (5.6), obtemos

$$< \chi, v_m > \to < \chi, v > \text{ em } \mathbb{R}$$

e, da convergência acima, de (5.7) e da unicidade do limite, obtemos

$$< \chi, v >= \int_\Omega f(x,v)v.$$

Logo, substituindo a igualdade em (5.11)

$$< \chi, v > - < \chi, \psi > - < -\Delta_p \psi, v > + < -\Delta_p \psi, \psi > \geq 0, \ \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou seja,

$$< \chi - (-\Delta_p \psi), v - \psi > \geq 0, \ \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.13}$$

Considere $\psi = v - \lambda w$, com $\lambda > 0$, $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De (5.13) temos

$$< \chi - (-\Delta_p(v - \lambda w)), \lambda w > \geq 0, \ \forall \lambda > 0, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou seja,

$$< \chi - (-\Delta_p(v - \lambda w)), w > \geq 0, \ \forall \lambda > 0, w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Passando ao limite de $\lambda \to 0$ na desigualdade acima e da hemicontinuidade de $-\Delta_p$, obtemos

$$< \chi - (-\Delta_p v), w > \geq 0, \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.14}$$

Da desigualdade acima podemos concluir também que

$$< \chi - (-\Delta_p v), -w > \geq 0, \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo, da linearidade do operador $\chi - (-\Delta_p v)$ obtemos

$$< \chi - (-\Delta_p v), w > \leq 0, \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.15}$$

De (5.14) e (5.15) podemos concluir que

$$< \chi - (-\Delta_p v), w >= 0, \ \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

isto é,

$$\chi = -\Delta_p v.$$

Portanto, de (5.8)

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^{p-2} \nabla v_m \nabla \psi \longrightarrow \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \psi, \quad \forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{5.16}$$

e de (5.12),

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega f(x, v)\psi, \quad \forall \psi \in W_m. \tag{5.17}$$

Como m é arbitrário, a igualdade acima é válida para todo $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, v é solução fraca do problema $(P)_4$.

Apêndice A

Resultados importantes

Neste apêndice enunciaremos e demonstraremos um resultado importante utilizado no trabalho.

Definição A.1 *(Sub-solução e Super-solução): Considere o problema:*

$$\begin{cases} -\Delta v & = & f(v) & em & \Omega \\ v & > & 0 & em & \Omega \\ v & = & 0 & sobre & \partial\Omega \end{cases} . \tag{A.1}$$

Dizemos que uma solução $v_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma sub-solução para o problema (A.1) se v_1 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_1 & \leq & f(v_1) & em & \Omega \\ v_1 & > & 0 & em & \Omega \\ v_1 & = & 0 & sobre & \partial\Omega \end{cases} . \tag{A.2}$$

Da mesma forma dizemos que uma solução $v_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma super-solução para o problema (A.1) se v_2 satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta v_2 & \geq & f(v_2) & ,\Omega \\ v_2 & > & 0 & ,\Omega \\ v_2 & = & 0 & ,\partial\Omega \end{cases} . \tag{A.3}$$

Teorema A.1 *(Teorema de Ambrosetti, Brézis e Cerami): Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assuma que $f(t)$ é uma função tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Sejam v_1 e v_2 satisfazendo (A.2) e (A.3). Então, $v_2 \geq v_1$ em Ω.*

Demonstração: Multiplicando (A.2) por $-v_2$ e (A.3) por v_1, obtemos

$$v_2 \Delta v_1 \geq -v_2 f(v_1)$$

$$-v_1 \Delta v_2 \geq v_1 f(v_2).$$

Somando-se as desigualdades acima encontramos

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq -v_2 f(v_1) + v_1 f(v_2)$$

de onde segue que

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right]. \tag{A.4}$$

Seja $\theta(t)$ uma função suave não-decrescente tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq 1 \\ 0, & se \quad t \leq 0 \end{cases}.$$

Definindo para cada $\epsilon > 0$, a função

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

temos que

$$\theta_\epsilon(t) \geq 0, \, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = \begin{cases} 1, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \geq 1 \\ 0, & se \quad \frac{t}{\epsilon} \leq 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t \geq \epsilon \\ 0, & se \quad t \leq 0 \end{cases}.$$

Sendo $\theta(t)$ uma função suave não decrescente, segue que $\theta_\epsilon(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Multiplicando a desigualdade $(A.4)$ por $\theta_\epsilon(v_1 - v_2)$ e integrando em Ω, encontramos

$$\int_\Omega [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] \theta_\epsilon(v_1 - v_2) \geq \int_\Omega \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] \theta_\epsilon(v_1 - v_2). \tag{A.5}$$

Observe que,

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1]\theta_\epsilon(v_1 - v_2) = -\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1. \quad (A.6)$$

Sendo v_1 e $v_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ e θ uma função suave, e usando a primeira identidade de Green temos:

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 = -[\int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\frac{\partial v_2}{\partial \eta} - \int_\Omega \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\nabla v_2]$$

e sendo $v_1 = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 = \int_\Omega \nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\nabla v_2.$$

Calculando

$$\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]$$

e substituindo na igualdade acima encontramos

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 = \int_\Omega [\nabla[\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]v_1 + \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1] \cdot \nabla v_2.$$

Pela linearidade da integral

$$-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 = \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)\nabla(v_1 - v_2)]v_1\nabla v_2 + \int_\Omega \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2. \quad (A.7)$$

Sendo $v_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$, de maneira análoga obtemos

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 = -\int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)\nabla(v_1 - v_2)]v_2\nabla v_1 - \int_\Omega \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2. \quad (A.8)$$

Usando a linearidade do gradiente em $(A.7)$ e $(A.8)$ e depois somando-as obtemos

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_1]\Delta v_2 + \int_\Omega [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)v_2]\Delta v_1 \\
&= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_2 + \int_\Omega \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2 \\
&\quad - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2\nabla v_1 - \int_\Omega \theta_\epsilon(v_1 - v_2)\nabla v_1\nabla v_2 \\
&= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_2 - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_2\nabla v_1.
\end{aligned}$$

Usando a linearidade da integral no primeiro membro da igualdade acima e, somando e subtraindo

$$\int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_1$$

no segundo membro, obtemos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]$$

$$= \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_2 - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1\nabla v_1$$

$$+ \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)v_1\nabla v_1 - \int_\Omega [\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2\nabla v_1$$

$$= \int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)(\nabla v_2 - \nabla v_1) + \int_\Omega (v_1 - v_2)\nabla v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2).$$

Logo,

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]$$

$$= -\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2). \quad \text{(A.9)}$$

Sendo

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 \leq 0,$$

somando a ambos os membros da desigualdade acima a expressão:

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)$$

obtemos

$$-\int_\Omega v_1[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 + \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)$$

$$\leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)$$

Usando a desigualdade acima em $(A.9)$ concluimos que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \int_\Omega (v_1 - v_2)[\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2) \quad \text{(A.10)}$$

Defina

$$\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s \cdot \theta_\epsilon^{'}(s)ds$$

Uma vez que $s \cdot \theta_\epsilon^{'}(s)$ é contínua e $\nabla\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = \gamma_\epsilon^{'}(v_1 - v_2) \cdot \nabla(v_1 - v_2)$, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\gamma_\epsilon^{'}(v_1 - v_2) = (v_1 - v_2)\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2).$$

Logo,

$$\nabla\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = (v_1 - v_2)\theta_\epsilon^{'}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2).$$

Substituindo a desigualdade acima em (A.10) obtemos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]. \tag{A.11}$$

Usando novamente a primeira identidade de Green no lado direito da desigualdade acima, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)] = -\int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)\Delta v_1 + \int_{\partial\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \eta}.$$

Sendo $v_1 - v_2 = 0$ sobre $\partial\Omega$, segue-se que $\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = \gamma_\epsilon(0) = 0$, sobre $\partial\Omega$. Logo,

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)] = \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)(-\Delta v_1).$$

Desde que

$$-\Delta v_1 \leq f(v_1), \ \forall x \in \Omega$$

Segue-se que

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \int_\Omega \gamma_\epsilon(v_1 - v_2) f(v_1). \tag{A.12}$$

Observe que, da definição de $\gamma_\epsilon(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_\epsilon(t) &= \int_0^\epsilon s \cdot \theta_\epsilon^{'}(s)ds + \int_\epsilon^t s \cdot \theta_\epsilon^{'}(s)ds \\
&= s \cdot \theta_\epsilon(s)\Big|_0^\epsilon - \int_0^\epsilon \theta_\epsilon(s)ds + s \cdot \theta_\epsilon(s)\Big|_\epsilon^t - \int_\epsilon^t \theta_\epsilon(s)ds \\
&= \epsilon \cdot \theta_\epsilon(\epsilon) - \int_0^\epsilon \theta_\epsilon(s)ds + s\Big|_\epsilon^t - s\Big|_\epsilon^t \leq \epsilon\theta_\epsilon(\epsilon) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo,

$$0 \leq \gamma_\epsilon \leq \epsilon.$$

Segue-se de (A.12) que

$$\int_\Omega \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \int_\Omega \epsilon \cdot f(v_1)$$

Pela desigualdade $(A.11)$ obtemos

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \int_\Omega \epsilon \cdot f(v_1)$$

e consequentemente,

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \epsilon \cdot \int_\Omega f(v_1).$$

Fixando

$$\int_\Omega f(v_1)dx = M$$

temos que

$$\int_\Omega [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \epsilon \cdot M.$$

Pela desigualdade $(A.4)$ encontramos

$$\int_\Omega \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \epsilon \cdot M,$$

ou equivalentemente,

$$\int_{[v_1 \leq v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]$$

$$+ \int_{[v_1 > v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \epsilon \cdot M. \tag{A.13}$$

Observe que, em $[v_1 \leq v_2]$ temos que $\theta_\epsilon(v_1 - v_2) \equiv 0$. Desta forma

$$\int_{[v_1 \leq v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \equiv 0.$$

Então,

$$\int_{[v_1 > v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq \epsilon \cdot M. \tag{A.14}$$

No conjunto $[v_1 > v_2]$, do fato de $t^{-1}f(t)$ ser decrescente para $t > 0$, temos que:

$$\left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \geq 0$$

e quando $\epsilon \to 0$, obtemos $\theta_\epsilon(v_1 - v_2) \longrightarrow 1$, e logo

$$\left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \longrightarrow \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right]. \tag{A.15}$$

Definindo

$$f_\epsilon(x) = \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)](x) \geq 0$$

com $\Omega = [v_1 > v_2]$ e

$$f(x) = \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1}\right)\right](x)$$

Observe que f_ϵ é contínua e positiva em $\Omega = [v_1 > v_2]$ e de $(A.14)$

$$\int_{[v_1 > v_2]} f_\epsilon \leq \epsilon M.$$

Concluímos, pelo lema de Fatou e por $(A.15)$ que

$$0 \geq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_{[v_1 > v_2]} f_\epsilon(x) \geq \int_{[v_1 > v_2]} f(x) \geq 0$$

ou seja,

$$0 \leq \int_{[v_1 - v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] \leq$$

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_{[v_1 > v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{[v_1 - v_2]} \left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] = 0.$$

Desde que,

$$\left[v_1 v_2 \left(\frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] > 0$$

em $[v_1 > v_2]$ concluímos que

$$med[v_1 > v_2] = 0.$$

Portanto,

$$v_1(x) \leq v_2(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Sendo v_1 e v_2 funções contínuas em $\overline{\Omega}$, temos que $v_1(x) \leq v_2(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

■

Apêndice B

Resultados Básicos

As definições e Teoremas básicos usados no trabalho estão aqui enunciados.

Definição B.1 *: Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é Carathéodory quando $f(x,.)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua para cada $s \in \mathbb{R}$, e $f(.,s) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Definição B.2 *: Sejam X e Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ dizem-se homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

tal que $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se então ***Homotopia*** *entre f e g.*

Definição B.3 *(Ver [16]): Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição B.4 *(Ver [8]): Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H dotado de um produto escalar (u,v) e que é completo com a norma $(u,u)^{\frac{1}{2}}$.*

Definição B.5 *(Ver [8]): Chama-se Base Hilbertiana a toda sequência (e_n) de elementos de H tais que:*

i) $|e_n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $(e_n, e_m) = 0, \forall m, n \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \neq n$*;*

ii) O espaço vetorial gerado pelos vetores (e_n) é denso em H.

Definição B.6 *(Ver [8]): Seja $(E_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de subespaços fechados de H. Diz-se que H é uma soma Hilbertiana dos (E_n) e se escreve $H = \bigoplus_n E_n$ se:*

i) Os subspaços E_n são ortogonais dois a dois, isto é,

$$(u, v) = 0, \ \forall u \in E_m, \ \forall v \in E_n, \ m \neq n;$$

ii) O espaço vetorial gerado pelos (E_n) é denso em H.

Teorema B.1 *(Ver [8]): Suponhamos que H é uma soma Hilbertiana dos $(E_n)_{n\geq 1}$. Seja $u \in H$ e seja $u_n = P_{E_n} u$, onde P_{E_n} é a projeção de u sobre E_n. Então, verificamos que*

a) $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, isto é, $u = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$;

b) $|u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2$ (Desigualdade de Bessel-Parseval).

Reciprocamente, dada uma sequência (u_n) em H tal que $u_n \in E_n$, $\forall n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, então a série $\sum_n u_n$ é convergente e $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ verifica $u_n = P_{E_n} u$.

Observação B.1 *(Ver [8]): Resulta do teorema anterior que se (e_n) é uma base Hilbertiana, então todo $u \in H$ pode ser escrito da seguinte forma*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n \ \text{com} \ |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2.$$

Inversamente, dada uma sequência $(\alpha_n) \in l^2$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge para um elemento denotado por u verificando

$$(u, e_n) = \alpha_n \ \ e \ \ |u|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2.$$

Teorema B.2 *(Ver [8]): Existe uma base Hilbertiana $(e_n)_{n\geq 1}$ em $L^2(\Omega)$ e uma sequência $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de números reais com $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \to \infty$ tais que*

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

e

$$-\Delta e_n = \lambda e_n \ \ em \ \ \Omega.$$

Diz-se que os (λ_n) são os valores próprios de $-\Delta$ e que as (e_n) são as funções próprias associadas.

Observação B.2 *(Ver [8]): Nas hipóteses do teorema acima, demonstra-se que* $e_n \in L^\infty(\Omega)$. *Por outro lado, se* Ω *é de classe* C^∞, *então* $e_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema B.3 *(Ver [8]): Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Definição B.7 *(Ver [8]): Uma forma bilinear* $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ *é:*

i) contínua se existe uma constante C *tal que* $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\| \quad \forall\ u,v \in H$.

ii) coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ *tal que* $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall\ v \in H$.

Teorema B.4 *(Ver [8])(Teorema de Lax-Milgran): Seja* V *um espaço de Hilbert e* $a(\cdot,\cdot)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva . Então, para todo* $\varphi \in V'$, *existe um único* $u \in V$ *tal que* $a(u,v) = \varphi(v)$, $\forall v \in V$.

Definição B.8 *(Ver [8])(Base de Schauder): Diz-se que* $(e_n)_{n\geq 1}$ *é uma base de Schauder do espaço de Banach* E, *se para todo* $u \in E$, *existir uma sequência* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *em* $\mathbb{R}$, *única, tal que* $u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Teorema B.5 *(Ver [14]): Seja* E *um espaço de Banach. Então* E *é reflexivo se, e somente se* E' *é reflexivo.*

Vamos agora recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no $\mathbb{R}^N$ que foram utilizados neste trabalho.

Teorema B.6 *(Ver [15])(Teorema de Weiertrass): Toda sequência limitada em* $\mathbb{R}^N$ *possui uma subsequência convergente.*

Teorema B.7 *(Ver [15])(Teorema da Aplicação Inversa): Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *de classe* C^k $(k \geq 1)$ *definida no aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $x \in \Omega$ *é tal que* $f'(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *é invertível, então existe uma bola aberta* $B = B(x,\delta) \subset \Omega$ *tal que a restrição* $f|_B$ *é um difeomorfismo sobre um aberto* $V \ni f(x)$.

Teorema B.8 *(Ver [15])(Teorema da função implícita): Dada a função* $f : U \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^k (k \geq 1)$ *no aberto* $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$, *seja* $(x_0, y_0) \in U$ *tal que* $f(x_0,y_0) = c$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$. *Existem uma bola* $B = B(x_0 : \delta) \subset \mathbb{R}^N$ *e um intervalo* $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ *com as seguintes propriedades:*

1) $B \times \overline{J} \subset U$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0,\ \forall\ (x,y) \in B \times \overline{J}$*;*

2) para todo $x \in B$ *existe um único* $y = \varepsilon(x)$ *e* J *tal que* $f(x,y) = f(x,\varepsilon(x)) = c$*.*

A função $\varepsilon : B \to J$*, assim definida é de classe* C^k *e suas derivadas parciais em cada ponto* $x \in B$ *são dadas por*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varepsilon(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varepsilon(x))}.$$

Teorema B.9 *(Ver [15])(Teorema de Borel Lebesgue): Seja* $K \subset \mathbb{R}^N$ *um compacto. Então, toda cobertura aberta de* $K \subset \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *admite uma subcobertura finita*

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i}.$$

Teorema B.10 *(Ver [15])(Teorema do Valor Médio): Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *diferenciável no aberto* $U \subset \mathbb{R}^N$*. Se o segmento de reta* $[a, a+v]$ *estiver contido em* U *e existir* $M > 0$ *tal que* $|grad\ f(a+tv)| \leq M$ *para* $t \in [0,1]$ *então,*

$$|f(a+v) - f(a)| \leq M|v|.$$

Teorema B.11 *(Ver [13])(Teorema de Sard): Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *uma função em* $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *e*

$$S = \{x \in \Omega; J_f(x) = 0\},$$

0nde $J_f(x) = det(f'(x))$*. Então, o subconjunto* $f(S)$ *tem medida nula em* $\mathbb{R}^N$*.*

Teorema B.12 *(Ver [17])(Teorema da extensão de Tietze): Dada uma função real contínua* $f : X \to \mathbb{R}$*, definida num subconjunto fechado* $X \subset \mathbb{R}^N$*, existe uma função* $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $F|_X = f$*.*

Teorema B.13 *(Ver [11])(Teorema da Divergência): Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio cuja fronteira* $(\partial\Omega)$ *é uma união finita de curvas suaves . Seja* $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ *um campo vetorial de classe* C^1 *em* $\overline{\Omega}$*. Então,*

$$\int_{\overline{\Omega}} \nabla F dxdy = \int_{\partial\Omega} F.\eta dS,$$

onde η *é a normal externa unitária à* $\partial\Omega$*.*

Teorema B.14 *(Ver [11])(As identidades de Green): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds, \tag{B.1}$$

e

$$\int_{\overline{\Omega}} (v\Delta u - u\nabla v) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds, \tag{B.2}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ é a derivada direcional na direção da normal unitária externa $\hat{n}$.

Agora apresentaremos alguns resultados sobre Teoria da medida e Espaços de Sobolev que foram utilizados neste trabalho.

Teorema B.15 *(Ver [7])(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções integráveis em Ω, convergente quase sempre para uma função f mensurável. Se existir uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ quase em toda parte (q.t.p.) para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e tem-se*

$$\int f = \lim_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Lema B.1 *(Ver [7])(Lema de Fatou): Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que:*

i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ q.t.p. em Ω;

ii) $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$.

para cada $x \in \Omega$ tem-se que $f(x) = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x)$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int f \leq \liminf_{n \to +\infty} \int f_n.$$

Teorema B.16 *(Ver [8]): Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$, e $f \in L^P(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$, tais que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{nk}) tal que:*

i) $f_{nk}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

ii) $|f_{nk}(x)| \leq h(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, q.t.p. em Ω, com $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema B.17 *(Ver [7])(Desigualdade de Hölder): Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $p \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema B.18 *(Ver [10])(Desigualdade de Young): Seja $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab < \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}(a, b > 0). \tag{B.3}$$

onde $a, b > 0$. A igualdade só ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Teorema B.19 *(Ver [10])(Desigualdade de Young com ϵ): Seja $1 < p, q < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q \quad (a, b > 0, \ \epsilon > 0) \tag{B.4}$$

onde $a, b > 0$, $\epsilon > 0$, para $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Teorema B.20 *(Ver [19]): Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então,*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y) \geq \begin{cases} C_p|x - y| & , se \ p \geq 2 \\ C_p \dfrac{|x - y|^p}{1 + |x|^p + |y|^p} & , se \ 1 < p < 2 \end{cases}$$

onde C_p é uma constante positiva.

Definição B.9 *(Ver [8])(Convergência Forte): Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Dizemos que x_n converge forte em X se existe $x \in X$ com $\|x_n - x\| \to 0$, quando $n \to +\infty$. Neste caso, x é o limite de x_n em X.*

Definição B.10 *(Ver [8])(Convergência fraca): Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset X$. Dizemos que x_n converge fraco em X, se existe $x \in X$ verificando:*

$$f(x_n) \to f(x) \quad em \quad \mathbb{R}, \ \forall f \in X'.$$

Neste caso, x é chamado limite fraco de x_n em X, e denotamos $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema B.21 *(Ver [8]): Seja (x_n) uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Então,

a) O limite fraco x de (x_n) é único;

b) Toda subsequência $(x_{nj}) \subset (x_n)$ converge para x;

c) A sequência (x_n) é limitada.

Teorema B.22 *(Ver [8]): Seja (x_n) uma sequência em X. Então,*

a) Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$;

b) Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x_n\|$ é limitado e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

c) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ em X', então $f_n(x_n) \to f(x)$.

Teorema B.23 *(Ver [8]): Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada. Então, existe $(x_{nj}) \subset (x_n)$ que converge fracamente em X, isto é, existe $x \in X$ tal que*

$$x_{nj} \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Definição B.11 *(Ver [8])(Convergência fraca - $\star$): Dizemos que $(f_n) \subset X'$ converge fraco-$\star$, se existir $f \in X'$ tal que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad em \quad \mathbb{R}, \forall x \in X.$$

Notação: $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* X'.

Teorema B.24 *(Ver [8]): Seja $(f_n) \subset X'$. Então:*

i) Se $f_n \to f$ em X', então $f_n \rightharpoonup f$ em X';

ii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em X', então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X';

iii) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X', então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;

iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \rightharpoonup x$, então $f_n(x_n) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$.

Definição B.12 *(Ver [1])(Imersão contínua): Dizemos que o espaço normado $(X, \| \ \|_x)$ está imerso continuamente no espaço $(Y, \| \ \|_y)$ e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

i) X for subespaço vetorial de Y;

ii) A aplicação identidade

$$\begin{aligned} i: X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe $M > 0$ tal que $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Definição B.13 *(Ver [14])(Operador Linear Compacto): Sejam X e Y espaços métricos. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto, se toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ é levada em uma sequência $(y_n = T(x_n))$ que admite uma subsequência convergente em Y.*

Definição B.14 *(Ver [1])(Imersão compacta): Dizemos que o espaço normado X está imerso compactamente no espaço Y e escrevemos $X \hookrightarrow Y$ se:*

$$\begin{aligned} i: X &\to Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é um operador linear compacto.

Teorema B.25 *(Ver [1]): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $(N \geq 2)$ e $1 < p < +\infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$, se $kp < N$ (se $kp = N$, podemos considerar $1 \leq q < +\infty$); Além disso, se Ω é limitado essa imersão é compacta quando $q < \frac{Np}{N-kp}$.

(ii) $W^{k,p} \hookrightarrow C^{m,\lambda}$, se $kp > N$, onde k é um inteiro verificando $m < k - \frac{N}{p} \leq m + 1$ e λ é um real satisfazendo $0 < \lambda \leq k - m - \frac{N}{p} = \lambda_0$, se $\lambda_0 < 1$, e $0 < \lambda < 1$, se $\lambda_0 = 1$.

Em particular temos estes dois Teoremas:

Teorema B.26 *(Ver [18])(Imersões de Sobolev): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, então as seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) \;\; ; \;\; 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} & \textit{para} \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) \;\; ; \;\; 1 \leq s < \infty & \textit{para} \quad \textit{N=1} \quad \textit{ou } N = 2 \end{cases}$$

Teorema B.27 *(Ver [1])(Imersão compacta de Rellich-Kondrachov): Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um Domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, as seguintes imersões são compactas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad para \quad N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < \infty \quad para \quad N{=}1 \quad ou\ N = 2 \end{cases}$$

Teorema B.28 *(Ver [10])(Desigualdade de Sobolev): Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$. Suponha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq N$. Então,temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$. A constante C depende de $p, q, N e \Omega$.

Teorema B.29 *(Ver [18]): Considere dois subconjuntos K e F do $\mathbb{R}^N$ disjuntos, sendo K compacto e F fechado. Então, existe uma função teste φ definida no $\mathbb{R}^N$ tal que*

$$\varphi(x) = 1 \ em\ K,\ \varphi(x) = 0 \ em\ F,\ e\ 0 \leq \varphi(x) \leq 1.$$

Teorema B.30 *(Ver [2]): Suponha que $h \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, e que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ seja solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x) & ,\Omega \\ u = 0 & ,\partial\Omega \end{cases} . \tag{B.5}$$

Então, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe um $C > 0$ (independente de u) tal que

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C||f||_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema B.31 *(Ver [11]): Seja $0 < \alpha \leq 1$ e suponha que $u \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ seja uma solução fraca de (B.5) com $h \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$*

Teorema B.32 *(Ver [10])(Princípio de Máximo forte): Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω. Suponha também que Ω é conexo.*

i) Se

$$Lu \leq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u atinge um máximo não-negativo em um ponto interior do conjunto $\overline{\Omega}$, então u é constante em Ω;

ii) Analogamente, se

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega$$

e u atinge um mínimo não-negativo em um ponto interior do conjunto $\overline{\Omega}$, então u é constante em Ω.

Teorema B.33 *(Ver [9]): O problema*

$$\begin{cases} -\Delta v & = & v^q & em & \Omega \\ v & > & 0 & em & \Omega \\ v & = & 0 & sobre & \partial\Omega \end{cases},$$

onde $0 < q < 1$ possui uma única solução positiva.

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Agmon, R. A., *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, 1959.

[3] Alves, C. O., *Notas de um seminário sobre Equações Diferenciais Parciais não-lineares*, Departamento de matemática da UFCG, Campina-Grande - Paraíba, 2002.

[4] Alves, C. O. e de Figueiredo, D. G., *Nonvariational Elliptic Systems via Galerkin Methods*, DCDS-A, vol 8, nº2, 285-302, 2002.

[5] Ambrosetti, A., Brezis, H. e Cerami, G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Functional Analysis 122, 1994.

[6] Ambrosetti, A. e Rabinowitz, P. H., *Dual Variational methods in critical point theory and apllications*, J. Functional Analysis, vol. 14, 349 - 381, 1973.

[7] Bartle, Robert G., *The Elements of integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[8] Brézis, Haïm, *Análisis Funcional*, Teoria y Applicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.

[9] Brézis,H. e Oswald, L., *Remarks on sublinear elliptic equations* , Nonlinear Analysis, TMA. 10, 1986.

[10] Evans, Laurence C.,*Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.

[11] Gilbarg, David e Trundiger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 3º edition, New York, 2001.

[12] Grajeda, L., *Teoria Geométrica dos pontos Críticos*, 1º Workshop em Análise Não-linear e EDPs, 2002.

[13] Kesavan, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Narosa Publishing House, 1999.

[14] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.

[15] Lima, Elon L., *Análise Real*, vol 2 , Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio deJaneiro, 2004.

[16] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 1997.

[17] Lima, Elon L., *Curso de Análise*, Vol 1, (10ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio deJaneiro, 2002.

[18] Medeiros, L. A. e Milla Miranda, M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogeneos*, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

[19] Peral, I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, ICTP - Triest, 1997.

[20] Teschl, G., *Nonlinear Functional Analysis*, Fakultät für Mathematik, Wien, Aústria, 1998.

[21] Willem, M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.