

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marcos Paulo Cintra da Silva

ÁLGEBRAS DE POTÊNCIAS ASSOCIATIVAS

Belém
2009

MARCOS PAULO CINTRA DA SILVA

ÁLGEBRAS DE POTÊNCIAS ASSOCIATIVAS

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática e em Estatística.

Programa de Pós-Graduação em Matemática e em Estatística. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Universidade Federal do Pará. Área de concentração: Álgebra.

Orientadora Prof^a. Dr^a. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra.

Belém
2009

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Marcos Paulo Cintra da Silva

ÁLGEBRAS DE POTÊNCIAS ASSOCIATIVAS

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática e em Estatística. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Universidade Federal do Pará.

DATA DA APROVAÇÃO: Belém-PA. 18-06-2009.

Banca Examinadora

Prof^a. Dr^a. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra (orientadora)

ICEN - UFPA

Valcir João da Cunha Farias.

Faculdade de Matemática - UFPA Castanhal

Sheila Campos Chagas

Departamento de Matemática - UFAM

AGRADECIMENTOS

À Deus que no decorrer desses anos me deu saúde para que este trabalho fosse realizado.

À minha família que sempre me incetivou a nunca desistir do curso devido às dificuldades.

Aos meus professores que me deram a base necessária para a construção desse trabalho, alguns até se dispondo mesmo sem a obrigação de me auxiliar. Em particular, ao Prof. Dr. Juaci Picanço (ICEN-UFPA) e à Prof^a. Dra. Lúcia Satie Ikemoto Murakami (IME-USP) pelas valiosas sugestões e correções para este trabalho.

Aos meus colegas de curso pela ajuda nos estudos e nas dificuldades e pelos momentos de descontração.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar as álgebras de potências associativas, as train álgebras de posto 3 e as álgebras de Jordan e de Bernstein-Jordan, provando uma condição de equivalência das mesmas e analisando a nilpotência do quadrado do barideal de uma álgebra de Bernstein. Deduz-se identidades válidas em álgebras de potências associativas que permitem obter uma decomposição de Peirce relativa a um idempotente. Em seguida, é dada a definição de álgebras báricas. Depois, determina-se uma série de identidades válidas em train álgebras de posto 3 e em as álgebras de Jordan e de Bernstein-Jordan, que resultarão na decomposição de Peirce destas álgebras. Finalmente, determina-se um índice de nilpotência do quadrado do barideal da álgebra de Bernstein e condições de equivalência entre as álgebras abordadas neste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra de potências associativas. Train álgebra de posto 3. Álgebra de Jordan. Álgebra de Bernstein-Jordan.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the power associative algebras, the train algebras of rank 3 and the Jordan and Bernstein-Jordan algebras, showing a condition of equivalence between them and analyse the nilpotency of the square of the barideal of a Bernstein algebra. It is proved some identities on power associative algebras that provide the Peirce decomposition. Then, the baric algebras are defined. After that, it is proved identities on train algebras of rank 3 and on Jordan and Bernstein-Jordan algebras, the will result in the Peirce decomposition of this algebras. Finally, it is given an index of nilpotency of the square of the barideal of a Bernstein algebra and conditions of equivalence between the algebras studied in this work.

KEYWORDS: Power associative algebra, train algebra of rank 3, Bernstein algebra, Bernstein-Jordan algebra.

Sumário

Introdução	1
1 Álgebras de potências associativas	3
1.1 Definições iniciais	3
1.2 Potências associativas	4
1.3 A álgebra $A^{(+)}$	9
1.4 Identidades envolvendo L_x e R_x	10
1.5 Nilálgebras e nilideais	12
1.6 Idempotentes em álgebras comutativas	15
1.7 Idempotentes em álgebras não comutativas	18
1.8 Álgebras flexíveis	21
1.9 Idempotentes principais de uma álgebra	23
2 Train álgebras de posto 3	25
2.1 Álgebras básicas	25
2.2 Train álgebras	25
3 Álgebras de Bernstein e de Bernstein-Jordan	34
3.1 Álgebras de Bernstein	34
3.2 Álgebras de Bernstein-Jordan	43
4 Nilpotência das álgebras de Bernstein	46
4.1 Barideal	46
4.2 Álgebras de Bernstein e de potências associativas	56
Bibliografia	61

Introdução

Este trabalho estuda basicamente três tipos de álgebras: as de potências associativas, as train álgebras de posto 3 e álgebras de Bernstein. Os principais objetivos são obter um índice de nilpotência para o quadrado do barideal de uma álgebra de Bernstein e estabelecer uma condição de equivalência entre as álgebras de potências associativas, as train álgebras de posto 3 e as álgebras de Bernstein.

Em 1948, A. Albert estabeleceu vários resultados que caracterizam os anéis de potências associativas, que são aqueles que em que a subálgebra gerada por um elemento arbitrário é de potências associativas. No capítulo 1 encontram-se as adaptações desses resultados para álgebras de potências associativas. Em seguida, define-se uma álgebra $A^{(+)}$ associada à álgebra A , modificando apenas o seu produto, de modo que $A^{(+)}$ também seja de potências associativas e um conjunto A_x que contem os operadores de multiplicação à direita e à esquerda do elemento x . Demonstra-se que esse conjunto também contem todas as potências do elemento x . Trabalhando com um elemento idempotente $e \in A$, consegue-se decompor uma álgebra A comutativa de potências associativas em uma soma direta de três subálgebras, denominada decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e e usando a álgebra $A^{(+)}$, e obtém-se um resultado análogo para o caso em que A não é necessariamente uma álgebra comutativa. A fim de obter resultados mais relevantes sobre a estrutura de uma álgebra de potências associativas A , acrescenta-se a hipótese de flexibilidade, isto é, que $x(yx) = (xy)x$, para quaisquer $x, y \in A$.

As álgebras básicas são álgebras constituídas de um par ordenado (A, ω) , onde A é uma álgebra sobre o corpo F e ω é um homomorfismo de A em F e foram introduzidas por I. Etherington com objetivo de resolver problemas sobre Genética de Populações. Estas álgebras são subdivididas em outras classes impondo-se determinadas condições, normalmente sob o contexto da Genética, definindo-se assim álgebras como as train álgebras, as álgebras de Bernstein e as álgebras de Bernstein-Jordan. O capítulo 2 começa com a definição de álgebras básicas e, em particular, a definição de train álgebra de posto n . Sejam (A, ω) uma álgebra básica de dimensão finita sobre o corpo F , com característica diferente de 2 e n um inteiro positivo fixo. Diz-se que A é uma train álgebra de posto n , se a igualdade

$$x^n + \gamma_1 \omega(x) x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)^{n-1} x = 0$$

é válida para qualquer $x \in A$. Nos últimos vinte anos tem-se estudado com muito esforço as train álgebras sob vários pontos de vista, principalmente álgebras de baixo posto e pouco se sabe ainda sobre train álgebras de posto arbitrário. As atenções deste trabalho são

voltadas especificamente para o caso em que $n = 3$. A partir daí, deduz-se identidades que fornecem a decomposição de Peirce relativa a um idempotente e da *train* álgebra de posto 3 e o conjunto de idempotentes. Além disso, outras identidades são estabelecidas como consequência dessa decomposição, assim como relações de inclusões envolvendo os somandos dessa decomposição.

O capítulo 3 trata de um outro tipo de álgebra básica: a álgebra de Bernstein, isto é, uma álgebra comutativa para qual

$$(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2$$

qualquer que seja $x \in A$. Resultados análogos aos que foram provados no capítulo anterior são demonstrados estuda-se também as álgebras de Bernstein-Jordan, isto é, álgebras de Bernstein para as quais vale a identidade de Jordan, a saber: $x^2(yx) = (x^2y)x$, quaisquer que sejam os elementos x e y da álgebra de Bernstein-Jordan. As álgebras de Jordan tem origem na formulação da Mecânica Quântica.

O capítulo 4 está baseado no artigo On the Nilpotency of the Barideal of a Benstein Algebra (1998). São apresentadas uma série de identidades que resultarão na obtenção de índice de nilpotência para o quadrado do barideal N de uma álgebra de Jordan e uma condição de equivalência envolvendo as álgebras estudadas. Até o momento ainda não se sabe se o índice de nilpotência obtido pode ser aprimorado.

Capítulo 1

Álgebras de potências associativas

Neste capítulo vamos apresentar os resultados sobre álgebras de potências associativas que, posteriormente, serão utilizados na obtenção dos resultados principais deste trabalho.

1.1 Definições iniciais

Definição 1.1. Uma **álgebra** A é um espaço vetorial sobre um corpo F , onde está definida uma operação denominada **multiplicação** que associa todo par de elementos $x, y \in A$ ao produto $xy \in A$, a qual as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\alpha(xy) &= x(\alpha y) = y(\alpha x), \\ x(y+z) &= xy + xz, \\ (y+z)x &= yx + zx,\end{aligned}$$

quaisquer que sejam os elementos $x, y, z \in A$ e $\alpha \in F$.

Definição 1.2. Uma **subálgebra** S da álgebra A é um subespaço vetorial. Uma subálgebra S para a qual $ax, xa \in S$, para quaisquer $a \in A$ e $x \in S$ é chamada **ideal** de A .

Definição 1.3. Uma álgebra A é denominada uma **álgebra comutativa** se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in A$ e **álgebra associativa** se $(xy)z = x(yz)$, para quaisquer $x, y, z \in A$.

Definição 1.4. As **potências principais à direita** da álgebra A são definidas por $x^1 = x$ e $x^n = x^{n-1}x$, onde $n \in \mathbb{N}$. As **potências principais à esquerda** da álgebra A são definidas por ${}^1x = x$ e ${}^nx = x({}^{n-1}x)$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.5. Dados $x, y \in A$, define-se o **comutador** de x com y pela fórmula

$$[x, y] = xy - yx.$$

Obsevermos que o comutador é bilinear e anti-simétrico, isto é, dados $x, y, z \in A$, tem-se, respectivamente, que $[x, y+z] = [x, y] + [x, z]$ e $[x, y] = -[y, x]$.

1.2 Potências associativas

Definição 1.6. Uma álgebra A é uma **álgebra de potências associativas** se a subálgebra gerada por todo elemento $x \in A$ é associativa.

De modo equivalente, podemos afirmar que uma álgebra A é de potências associativas se, e somente se, $x^m x^n = x^{m+n}$ para quaisquer $x \in A$ e inteiros positivos m e n .

Lema 1.1. Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja característica é diferente de 2. Se $xx^2 = x^2x$, para todo $x \in A$, então para quaisquer $x, y, z \in A$, tem-se que

$$[xy + yx, z] + [yz + zy, x] + [zx + xz, y] = 0. \quad (1.1)$$

Demonstração. Por hipótese, temos que $[x^2, x] = 0$. Em particular, substituindo x por $x + \lambda y$, onde $\lambda \in F$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= [x^2, x] \\ &= [(x + \lambda y)^2, x + \lambda y] \\ &= [x^2 + \lambda xy + \lambda yx + \lambda^2 y^2, x + \lambda y] \\ &= [x^2, x] + \lambda ([x^2, y] + [xy + yx, x]) + \lambda^2 ([y^2, x] + [yx + xy, y]) + \lambda^3 [y^2, y] \\ &= \lambda T(x, y) + \lambda^2 U(y, x), \end{aligned}$$

em que, $T(x, y) = [x^2, y] + [xy + yx, x]$ e $U(y, x) = [y^2, x] + [yx + xy, y]$. Tomando $\lambda = 1$, obtemos $T(x, y) + U(y, x) = 0$ e $\lambda = -1$, fornece $-T(x, y) + U(y, x) = 0$. Então $2T(x, y) = 0$, ou seja, $T(x, y) = 0$. O próximo passo é substituir x por $x + \mu z$, onde $\mu \in F$ e $z \in A$, em $T(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= T(x + \mu z, y) \\ &= [(x + \mu z)^2, y] + [(x + \mu z)y + y(x + \mu z), x + \mu y] \\ &= [x^2 + \mu xz + \mu zx + \mu^2 z^2, y] + [xy + \mu zy + yx + \mu yz, x + \mu z] \\ &= [x^2, y] + [xy + yx, x] + \mu ([xz + zx, y] + [zy + yz, x] + [xy + yx, z]) \\ &\quad + \mu^2 ([z^2, y] + [zy + yz, z]) \\ &= T(x, y) + \mu W(x, y, z) + \mu^2 T(z, y), \end{aligned}$$

em que $W(x, y, z) = [xz + zx, y] + [zy + yz, x] + [xy + yx, z]$. Como $T = 0$, obtemos a igualdade fazendo $\mu = 1$. ■

Notemos que se a característica de F for diferente de 2 e de 3, então fazendo $x = y = z$ em (1.1), temos $3[2x^2, x] = 0$. Logo, $6[x^2, x] = 0$. Assim $x^2x = xx^2$.

Lema 1.2. Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja característica é diferente de 2. Se $x^i x^j = x^{i+j}$ para todo $x \in A$ para todos os inteiros positivos i e j tais que $i + j < n$ e $n \geq 4$, então

$$n[x^{n-1}, x] = 0, \quad [x^{n-\alpha}, x^\alpha] = \alpha[x^{n-1}, x], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

Demonstração. Sejam α e β inteiros positivos com $\alpha + \beta < n$. Substituindo x, y e z por x^α , x^β e $x^{n-(\alpha+\beta)}$, respectivamente, na identidade (1.1), temos que $[x^\alpha x^\beta + x^\beta x^\alpha, x^{n-(\alpha+\beta)}] + [x^\beta x^{n-(\alpha+\beta)} + x^{n-(\alpha+\beta)} x^\beta, x^\alpha] + [x^{n-(\alpha+\beta)} x^\alpha + x^\alpha x^{n-(\alpha+\beta)}, x^\beta] = 0$. Logo $[x^{\alpha+\beta}, x^{n-(\alpha+\beta)}] + [x^{n-\alpha}, x^\alpha] + [x^{n-\beta}, x^\beta] = 0$ e, então

$$[x^{n-(\alpha+\beta)}, x^{\alpha+\beta}] = [x^{n-\alpha}, x^\alpha] + [x^{n-\beta}, x^\beta].$$

Usaremos esta última igualdade para provar o lema. Fazendo $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ e $\beta = 1$, temos, respectivamente

$$[x^{n-2}, x^2] = [x^{n-1}, x] + [x^{n-1}, x],$$

$$[x^{n-3}, x^3] = [x^{n-2}, x^2] + [x^{n-1}, x],$$

.....

$$[x^{n-(k-1)}, x^{k-1}] = [x^{n-(k-2)}, x^{k-2}] + [x^{n-1}, x],$$

$$[x^{n-k}, x^k] = [x^{n-(k-1)}, x^{k-1}] + [x^{n-1}, x].$$

Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos $[x^{n-k}, x^k] = k[x^{n-1}, x]$. E para $k = n-1$, segue da identidade anterior que $n[x^{n-1}, x] = 0$. ■

Lema 1.3. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F , cuja característica é diferente de 2. Se $x^2x^2 = (x^2x)x$, para todo $x \in A$, então*

$$\sum_6 (xy + yx)(zw + wz) = \sum_4 \left[\sum_3 (zw + wz)y \right] x. \quad (1.3)$$

onde as somas acima são obtidas por todas as seleções possíveis dos símbolos envolvidos e Σ_k tem k parcelas.

Demonstração. Substituindo x por $x + \lambda y$ na hipótese, em que $x, y \in A$ e $\lambda \in F$, tem-se que

$$(x + \lambda y)^2(x + \lambda y)^2 - [(x + \lambda y)^2(x + \lambda y)](x + \lambda y) = 0.$$

Efetuada os cálculos, chegamos à $K + \lambda L + \lambda^2 M + \lambda^3 N + \lambda^4 P = 0$, onde

$$K = K(x) = x^2x^2 - x^3x = 0,$$

$$P = K(y) = y^2y^2 - y^3y = 0,$$

$$L = L(x, y) = x^2(xy) + x^2(yx) + (xy)x^2 + (yx)x^2 - x^3y - ((xy)x)x - ((yx)x)x - (x^2y)x,$$

$$M = M(x, y) = x^2y^2 + (xy)^2 + (xy)(yx) + (yx)(xy) + (yx)^2 + y^2x^2 - ((xy)y)x - ((yx)x)y - (xy^2)x - (y^2x)x - (x^2y)y - ((yx)x)y - ((yx)y)x,$$

$$N = L(y, x) = y^2(yx) + y^2(xy) + (yx)y^2 + (xy)y^2 - y^3x - ((yx)y)y - ((xy)y)y - (y^2x)y.$$

Segue que $\lambda L + \lambda^2 M + \lambda^3 N = 0$. Quando $\lambda = 1$, temos que $L + M + N = 0$ e quando $\lambda = -1$, temos que $-L + M - N = 0$. Logo, $M(x, y) = 0$ e substituindo x por $x + \mu z$, onde

$\mu \in F$ e $z \in A$ obtemos

$$\begin{aligned} M(x + \mu z, y) &= (x + \mu z)^2 y^2 + [(x + \mu z)y]^2 + [(x + \mu z)y][y(x + \mu z)] \\ &\quad + [y(x + \mu z)][(x + \mu z)y] + [y(x + \mu z)]^2 + y^2(x + \mu z)^2 \\ &\quad - [y^2(x + \mu z)](x + \mu z) - [((x + \mu z)y)y](x + \mu z) \\ &\quad - [(y(x + \mu z))y](x + \mu z) - [((x + \mu z)y)(x + \mu z)]y \\ &\quad - [(y(x + \mu z)(x + \mu z))]y - [((x + \mu z)^2 y)y] \end{aligned}$$

e isto fornece a equação $M(x + \mu z, y) = M(x, y) + \mu Q(x, y, z) + \mu^2 M(z, y)$, onde

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= y^2(xz + zx) + (xz + zx)y^2 + (xy + yx)(zy + zy) + (zy + zy)(xy + yx) \\ &\quad - (y^2x)z - z(y^2x) - [(xy + yx)y]z - [(zy + yz)y]x - [(xy + yx)z]y - \\ &\quad [(zy + yz)x]y - [(xz + zx)y]y. \end{aligned}$$

Mas, como vimos acima, $M = 0$ e, assim, $Q(x, y, z) = 0$. Agora, substituindo y por $y + \alpha w$, encontramos a igualdade $Q(x, y, z) + \alpha R(x, y, z, w) + \alpha^2 Q(x, w, z) = 0$. Lembrando que Q é nula e fazendo $\alpha = 1$, obtemos o resultado, ou seja

$$\begin{aligned} (xy + yx)(zw + wz) + (xz + zx)(yw + wy) + (xw + wx)(zy + yz) + (zy + yz)(xw + wx) \\ + (yw + wy)(xz + zx) + (zw + wz)(xy + yx) = [(zw + wz)y + (wy + yw)z + (yz + zy)w]x \\ [(zw + wz)x + (wx + xw)z + (xz + xy)w]y + [(xw + wx)y + (wy + yw)x + (yx + xy)w]z \\ [(zx + xz)y + (xy + yx)z + (yz + zy)x]w. \end{aligned}$$

E assim fica provada a equação (1.3). ■

Observemos que se a característica de F for diferente de 2 e de 3, então fazendo $x = y = z = w$ em (1.3), obtemos $x^2 x^2 = x^3 x$.

Lema 1.4. *Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2, de 3 e de 5. Se $n \geq 5$ e $x^\lambda x^\mu = x^{\lambda+\mu}$, quaisquer que sejam os inteiros positivos λ e μ , com $\lambda + \mu < n$, então*

$$x^{n-\alpha} x^\alpha = x^{n-1} x + \frac{\alpha-1}{2} [x^{n-1}, x], \quad \alpha = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.4)$$

Demonstração. Consideremos os inteiros positivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$. Substituindo x por x^α , y por x^β , z por x^γ e w por x^δ em (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} 4x^{\alpha+\beta} x^{\gamma+\delta} + 4x^{\alpha+\gamma} x^{\beta+\delta} + 4x^{\alpha+\delta} x^{\beta+\gamma} + 4x^{\beta+\gamma} x^{\alpha+\delta} + 4x^{\beta+\delta} x^{\alpha+\gamma} + 4x^{\gamma+\delta} x^{\alpha+\beta} = \\ 6x^{\beta+\gamma+\delta} x^\alpha + 6x^{\alpha+\gamma+\delta} x^\beta + 6x^{\alpha+\beta+\delta} x^\gamma + 6x^{\alpha+\beta+\gamma} x^\delta, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$2(x^{\alpha+\beta} x^{\gamma+\delta} + x^{\alpha+\gamma} x^{\beta+\delta} + x^{\alpha+\delta} x^{\beta+\gamma}) = 3(x^{n-\alpha} x^\alpha + x^{n-\beta} x^\beta + x^{n-\gamma} x^\gamma + x^{n-(\alpha+\beta+\gamma)} x^{\alpha+\beta+\gamma}).$$

Calculando $x^{n-\delta}x^\delta$, $x^{\alpha+\beta}x^{\gamma+\delta}$, $x^{\alpha+\gamma}x^{\beta+\delta}$ e $x^{\alpha+\delta}x^{\beta+\gamma}$ no Lema 1.2, obtemos os resultados que são aplicados na igualdade anterior de modo que

$$\begin{aligned} 3(x^{n-\alpha}x^\alpha + x^{n-\beta}x^\beta + x^{n-\gamma}x^\gamma + x^{n-(\alpha+\beta+\gamma)}x^{\alpha+\beta+\gamma}) &= 4(x^{n-(\alpha+\beta)}x^{\alpha+\beta} + x^{n-(\alpha+\gamma)}x^{\alpha+\gamma}) \\ &\quad + 4(x^{n-(\beta+\gamma)}x^{\beta+\gamma}) \\ &\quad - (\alpha + \beta + \gamma)[x^{(n-1)}, x]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Vamos discutir os casos em que $\alpha + \beta + \gamma = 3, 4$ e 5 . No primeiro caso, obrigatoriamente $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e aplicando acima, temos que

$$\begin{aligned} 3(x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-3}x^3) &= 4(x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2) - 3[x^{n-1}, x], \\ x^{n-3}x^3 &= 4x^{n-2}x^2 - 3x^n - [x^{n-1}, x]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se $\alpha + \beta + \gamma = 4$, pode ser que $\alpha = 2$ e $\beta = \gamma = 1$. Aplicados na equação (1.5) e usando (1.6), fornecem

$$\begin{aligned} 3(x^{n-2}x^2 + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-4}x^4) &= 4(x^{n-3}x^3 + x^{n-3}x^3 + x^{n-2}x^2) - 4[x^{n-1}, x], \\ 3x^{n-2}x^2 + 6x^{n-1}x + 3x^{n-4}x^4 &= 8x^{n-3}x^3 + 4x^{n-2}x^2 - 4[x^{n-1}, x], \\ x^{n-4}x^4 &= 11x^{n-2}x^2 - 10x^n - 4[x^{n-1}, x]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Os casos em que $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 2$ e em que $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 2$ fornecem uma igualdade semelhante a (1.6) pela simetria em relação à α, β e γ . Agora, vejamos o que ocorre quando $\alpha + \beta + \gamma = 5$. Então $n > 6$ e se $\alpha = \beta = 2$ e $\gamma = 1$, segue de (1.5) que

$$\begin{aligned} 3(x^{n-2}x^2 + x^{n-2}x^2 + x^{n-1}x + x^{n-5}x^5) &= 4(x^{n-4}x^4 + x^{n-3}x^3 + x^{n-3}x^3) - 5[x^{n-1}, x], \\ 6x^{n-2}x^2 + 3x^n + 3x^{n-5}x^5 &= 4x^{n-4}x^4 + 8x^{n-3}x^3 - 5[x^{n-1}, x]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Se $\alpha = 3$ e $\beta = \gamma = 1$, então

$$\begin{aligned} 3(x^{n-3}x^3 + x^{n-1}x + x^{n-1}x + x^{n-5}x^5) &= 4(x^{n-4}x^4 + x^{n-4}x^4 + x^{n-2}x^2) - 5[x^{n-1}, x], \\ 3x^{n-3} + 6x^n + 3x^{n-5}x^5 &= 8x^{n-4}x^4 + 8x^{n-2}x^2 - 5[x^{n-1}, x]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Subtraindo membro a membro (1.8) e (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} 3x^{n-3} + 3x^n - 6x^{n-2}x^2 &= 4x^{n-4}x^4 + 4x^{n-2}x^2 - 8x^{n-3}x^3 \\ 3x^n + 11x^{n-3}x^3 - 10x^{n-2}x^2 &= 4x^{n-4}x^4. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Usando (1.6) e (1.7) em (1.10)

$$\begin{aligned} 3x^n + 11(4x^{n-2}x^2 - 3x^n - [x^{n-1}, x]) - 10x^{n-2} &= 4(11x^{n-2} - 10x^n - 4[x^{n-1}, x]), \\ x^{n-2}x^2 &= x^n + \frac{1}{2}[x^{n-1}, x]. \end{aligned}$$

que é o resultado do lema para $\alpha = 2$. Agora vamos proceder por indução. Suponhamos que (1.4) seja válida para $\alpha = 1, 2, \dots, k-2$, onde $k \geq 1$. Substituindo $\beta = \gamma = 1$ e $\alpha = k-1$ em (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} 3(x^{n-(k-1)}x^{k-1} + 2x^{n-1}x + x^{n-(k+1)}x^{k+1}) &= 4(2x^{n-k}x^k + x^{n-2}x^2) - (k+1)[x^{n-1}, x], \\ 3x^{n-(k-1)}x^{k-1} + 6x^{n-1}x + 3x^{n-(k+1)}x^{k+1} &= 8x^{n-k}x^k + 4x^{n-2}x^2 - (k+1)[x^{n-1}, x], \\ 3x^{n-(k+1)}x^{k+1} &= 8x^{n-k}x^k + 4x^{n-2}x^2 - 3x^{n-(k-1)}x^{k-1} - \\ &\quad 6x^{n-1}x - (k+1)[x^{n-1}, x]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Fazendo $\alpha = k - 1$ e $\alpha = k$ na hipótese de indução, obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} x^{n-(k+1)}x^{k+1} &= x^{n-1}x + \frac{k-2}{2} [x^{n-1}, x], \\ x^{n-k}x^k &= x^{n-1}x + \frac{k-1}{2} [x^{n-1}, x] \end{aligned}$$

Levando esses resultados em (1.12), concluímos que

$$\begin{aligned} 3x^{n-(k+1)}x^{k+1} &= 8 \left(x^{n-1}x + \frac{k-1}{2} [x^{n-1}, x] \right) + 4 \left(x^{n-1}x + \frac{1}{2} [x^{n-1}, x] \right) \\ &\quad - 6 \left(x^{n-1}x + \frac{k-1}{2} [x^{n-1}, x] \right) - (k+1)[x^{n-1}, x] \\ &\quad - 3 \left(x^{n-1}x + \frac{k-2}{2} [x^{n-1}, x] \right), \\ x^{n-(k+1)}x^{k+1} &= x^{n-1}x + \frac{k}{2} [x^{n-1}, x]. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado também é válido para $\alpha = k$ e isso encerra a demonstração. ■

Corolário 1.1. *Sejam $n \geq 5$ um inteiro e A álgebra sobre um corpo F com a característica diferente de n , então $[x^{n-\alpha}, x^\alpha] = \alpha[x^{n-1}, x]$, $n[x^{n-1}, x] = 0$ e $x^{n-\alpha}x^\alpha = x^n$.*

Teorema 1.1. *Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo F com característica diferente de 2, 3 e 5 e suponha que $x^2x^2 = (x^2x)x$ para qualquer $x \in A$. Então A é de potências associativas.*

Demonstração. Se A for um álgebra comutativa, então $[x^{n-1}, x] = 0$, isto é, $x^{n-1}x = xx^{n-1}$ e de (1.4) conclui-se que as n -ésimas potências são associativas e o mesmo vale para as k -ésimas potências, com $k < n$ e $n \geq 5$.

Teorema 1.2. *Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo F com característica zero e suponha que $x^2x = xx^2$ e $x^2x^2 = (x^2x)x$ para qualquer $x \in A$. Então A é de potências associativas.*

Apresentemos, agora, alguns contra-exemplos que mostram a importância da hipótese sobre a característica do Teorema 1.1. Esses contra-exemplos e outro sobre a característica zero para o Teorema 1.2 estão na referência [1].

Exemplo 1.1. Seja A uma álgebra comutativa com uma base formada pelos elementos $a, a^2, a^3, a^4 = a^2a^2$ e $a^5 = a^6$ sobre o corpo $F = \{0, 1\}$ de característica 2 e tal que $a^2a^3 = a^2a^4 = a^2a^5 = a^3a^3 = a^3a^4 = a^3a^5 = a^4a^4 = a^4a^5 = a^5a^5 = 0$. Notemos que A não é de potências associativas, pois $a^5 \neq a^2a^3$. Dado qualquer $x \in A$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_5 \in F$, tais que $x = \alpha_1a + \alpha_2a^2 + \alpha_3a^3 + \alpha_4a^4 + \alpha_5a^5$ e temos sucessivamente que

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2a^2 + \alpha_2^2a^4, \\ x^2x^2 &= \alpha_1^4a^4, \\ x^2x &= \alpha_1^3a^3 + \alpha_1^2\alpha_2^2a^5, \\ (x^2x)x &= \alpha_1^4a^4 + (\alpha_2^2\alpha_1^2 + \alpha_1^3\alpha_2)a^5. \end{aligned}$$

Mas, como $F = \{0, 1\}$, a soma $\alpha_2^2\alpha_1^2 + \alpha_1^3\alpha_2$ se anula. Logo $x^2x^2 = (x^2x)x$.

Exemplo 1.2. Seja A uma álgebra comutativa com base $\{a, a^2, a^3, a^4 = a^2a^2, a^5, a^2a^3\}$ sobre um corpo qualquer cuja característica é 3. Consideremos que todos os produtos de seis ou mais fatores de A seja nulo. Dado $x = \alpha_1a + \alpha_2a^2 + \alpha_3a^3 + \alpha_4a^4 + \alpha_5a^5 + \alpha_6a^2a^3 \in A$, onde $\alpha_i \in F$, para $i = 1, 2, \dots, 6$, temos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2a^2 + 2\alpha_1\alpha_2a^3 + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2)a^4 + 2\alpha_1\alpha_4a^5 + 2\alpha_1\alpha_3a^2a^3, \\ x^2x^2 &= \alpha_1^4a^4 + \alpha_1^3\alpha_2a^2a^3, \\ x^2x &= \alpha_1^3a^3 + (\alpha_2^2\alpha_1 + 2\alpha_1^2\alpha_3)a^5 + (2\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3)a^2a^3, \\ (x^2x)x &= \alpha_1^4a^4 + \alpha_1^3\alpha_2a^2a^3. \end{aligned}$$

Então $x^2x^2 = (x^2x)x$, porém A não é uma álgebra de potências associativas, pois $a^5 \neq a^2a^3$.

Exemplo 1.3. Seja A uma álgebra sobre um corpo F de característica 5, cuja base é $\{a, a^2, a^3, a^4 = a^2a^2, a^5 = a^2a^3, a^2a^4, a^3a^3\}$. Suponhamos ainda que essa álgebra seja comutativa, que o produto de potências de a com sete ou mais fatores se anule e que as identidades $a^6 = 3a^3a^3 - 2a^2a^4$ e $3a^3a^3 = 4a^2a^4 - 3a^6$ sejam válidas. Desse modo, temos para um elemento arbitrário $x = \alpha_1a + \alpha_2a^2 + \alpha_3a^3 + \alpha_4a^4 + \alpha_5a^5 + \alpha_6a^2a^4 + \alpha_7a^3a^3$, onde $\alpha_i \in F$, para $i = 1, 2, \dots, 7$, que

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2a^2 + 2\alpha_1\alpha_2a^3 + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2)a^4 + 2(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)a^5 - 2\alpha_2\alpha_4a^2a^4 \\ &\quad + (\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_5)a^3a^3. \end{aligned}$$

Fazendo $-2\alpha_2\alpha_4 = \alpha \in F$ e $\alpha_3^2 + \alpha_1\alpha_5 = \beta \in F$, temos

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha_1^2a^2 + 2\alpha_1\alpha_2a^3 + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2)a^4 + 2(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3)a^5 + \alpha a^2a^4 + \beta a^3a^3, \\ x^2x^2 &= \alpha_1^4a^4 + 4\alpha_1^3\alpha_2a^5 + 2\alpha_1^2(\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_3)a^2a^4 + 4\alpha_1^2\alpha_2^2a^3a^3. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos ainda

$$x^2x = \alpha_1^3a^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2a^4 + 3(\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3)a^5 + \lambda a^2a^4 + \gamma a^3a^3,$$

onde $\lambda = \alpha_3^2 + 2\alpha_1^2\alpha_4 + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e $\gamma = \alpha_1^2\alpha_4 + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Além disso,

$$(x^2x)x = \alpha_1^4a^4 + 4\alpha_1^3\alpha_2a^5 - 3(\alpha_1^2\alpha_2^2 + 2\alpha_1^3\alpha_3)a^2a^4 + (9\alpha_1^2\alpha_2^2 + 10\alpha_1^3\alpha_3)a^3a^3.$$

Porém, $-3\alpha_1^2\alpha_2^2 - 6\alpha_1^3\alpha_3 = 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1^3\alpha_3$ e $9\alpha_1^2\alpha_2^2 + 10\alpha_1^3\alpha_3 = 4\alpha_1^2\alpha_2^2$. Portanto,

$$(x^2x)x = \alpha_1^4a^4 + 4\alpha_1^3\alpha_2a^5 + (2\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1^3\alpha_3)a^2a^4 + 4\alpha_1^2\alpha_2^2a^3a^3 = x^2x^2.$$

mas A não é uma álgebra de potências associativas, já que $a^3a^3 \neq a^2a^4$.

1.3 A álgebra $A^{(+)}$

Veremos agora que, a partir de uma álgebra A dada, podemos construir uma nova álgebra, apenas modificando o produto. A álgebra que veremos agora será útil no estudo das álgebras de potências associativas não comutativas.

Seja A uma álgebra, na qual a equação $2x = a$ admite uma única solução $x \in A$ qualquer que seja $a \in A$. Definiremos, agora, uma álgebra associada $A^{(+)}$ cuja adição é a mesma da álgebra A , mas com produto denotado por $x \cdot y$ e definido em função do produto xy em A da seguinte maneira

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

Temos que a álgebra $A^{(+)}$ é comutativa, pois $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx) = \frac{1}{2}(yx + xy) = y \cdot x$. Definimos as potências de $A^{(+)}$ por $x^{\cdot 1} = x$ e $x^{\cdot n} = x^{\cdot(n-1)}x$, onde $n > 1$ é inteiro. Essas potências coincidem com as de A . De fato, suponhamos por indução que isso seja verdade para o inteiro positivo k , ou seja, $x^{\cdot k} = x^k$, então

$$x^{\cdot(k+1)} = x^{\cdot k}x = x^kx = x^{k+1}$$

Então $A^{(+)}$ é uma álgebra de potências associativas, se A for de potências associativas. Porém, é possível construir uma álgebra $A^{(+)}$ de potências associativas, sem que A seja de potências associativas.

Exemplo 1.4. Seja A uma álgebra sobre um corpo F com base $\{a, a^2, a^2a, aa^2\}$ definida de modo que os produtos $a \cdots a$ com quatro ou mais fatores sejam iguais a zero. Então, para todo $x \in A^{(+)}$, temos

$$\begin{aligned} x &= \alpha a + \beta a^2 + \gamma aa^2 + \delta a^2a, \\ x^2 &= (\alpha a + \beta a^2 + \gamma aa^2 + \delta a^2a)(\alpha a + \beta a^2 + \gamma aa^2 + \delta a^2a) = \alpha^2 a^2 + \alpha\beta aa^2 + \alpha\beta a^2a, \\ x^2 &= (\alpha a + \beta a^2 + \gamma aa^2 + \delta a^2a)(\alpha^2 a^2 + \alpha\beta aa^2 + \alpha\beta a^2a) = \alpha^3 aa^2 = x^2x, \\ x \cdot x^2 &= \frac{1}{2}(xx^2 + x^2x) = \frac{\alpha^3 aa^2}{2} = \frac{1}{2}(xx^2 + x^2x) = x^2 \cdot x. \end{aligned}$$

E como $x^\alpha x^\beta = 0$, para $\alpha + \beta \geq 4$, teremos sempre que $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, para todos os inteiros positivos α e β . Portanto, $A^{(+)}$ é de potências associativas, onde A não o é, pois $aa^2 \neq a^2a$.

1.4 Identidades envolvendo L_x e R_x

Nesta seção, vamos definir os operadores de multiplicação em uma álgebra e estabelecer algumas identidades envolvendo tais operadores.

Definição 1.7. Sejam A uma álgebra sobre o corpo F e $x \in A$. O operador linear R_x sobre A definido por $aR_x = ax$ é denominado **operador de multiplicação à direita por x** . Analogamente, o operador linear L_x definido por $aL_x = xa$ é denominado **operador de multiplicação à esquerda por x** .

Com isso a multiplicação por x em $A^{(+)}$ é unicamente representada pela aplicação:

$$T_x = \frac{1}{2}(R_x + L_x).$$

Reescrevendo a identidade (1.1) em termos de multiplicação à direita e à esquerda, temos

$$L_{xy+yx} - R_{xy+yx} + (L_y + R_y)x - x(L_y + R_y) + (L_x + R_x)y - y(L_x + R_x) = 0,$$

que pode ainda ser reescrita como segue

$$(R_x + L_x)(R_y - L_y) + (R_y + L_y)(R_x - L_x) = R_{xy+yx} - L_{xy+yx}. \quad (1.12)$$

Reescrevendo a identidade (1.3) em termos de multiplicação à esquerda e à direita temos que:

$$\begin{aligned} (xy + yx)(R_z + L_z) + (xz + zx)(R_y + L_y) + (R_x + L_x)(zy + yz) + (zy + yz)(R_x + L_x) \\ + (R_y + L_y)(xz + zx) + (R_z + L_z)(xy + yx) = [(R_z + L_z)y + (R_y + L_y)z + L_{yz+zy}]x + \\ + [(R_x + L_x)y + (R_y + L_y)x + L_{xy+yx}]z + [(R_z + L_z)x + (R_x + L_x)z + L_{xz+zx}]y + \\ L_{(xz+zx)y} + L_{(xy+yx)z} + L_{(yz+zy)x} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{(xz+zx)y} + L_{(xy+yx)z} + L_{(yz+zy)x} = (R_x + L_x)(R_{yz+zy} + L_{yz+zy} - R_y R_z - R_z R_y) + \\ (R_y + L_y)(R_{xz+zx} + L_{xz+zx} - R_x R_z - R_z R_x) + \\ (R_z + L_z)(R_{xy+yx} + L_{xy+yx} - R_x R_y - R_y R_x) - \\ (L_{xy+yx} R_z + L_{xz+zx} R_y + L_{yz+zy} R_x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Fazendo $x = y$ em (1.12), temos que $R_{2xx} - L_{2xx} = 2(R_x + L_x)(R_x - L_x)$, ou ainda

$$R_{xx} - L_{xx} = (R_x + L_x)(R_x - L_x) \quad (1.14)$$

e quando $x = y = z$, segue de (1.13), temos que

$$\begin{aligned} 3L_{2(xx)x} = 3(R_x + L_x)(R_{2xx} + L_{2xx} - 2R_x^2) - 3L_{2xx}R_x, \\ L_{(xx)x} = (R_x + L_x)(R_{xx} + L_{xx} - R_x^2) - L_{xx}R_x. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Lema 1.5. *Sejam A uma álgebra, $x \in A$ e A_x o conjunto de todas as somas finitas de produtos de um número finito de fatores da forma R_x , L_x ou R_{xx} . Então A_x contém todos os elementos da forma R_w e L_w , onde $w = x^k$ e k é um inteiro positivo.*

Demonstração. É claro que o resultado é válido para $k = 1$ e segue de (1.14) que o resultado também vale para $k = 2$. Suponhamos que esse resultado seja válido para todos os expoentes inteiros k tais que $k \leq t + 1$. Escrevendo $y = x^{t+1}$ e $w = x^{t+2}$ e como $xy + yx = xx^{t+1} + x^{t+1}x = 2x^{t+2} = 2w$, segue de (1.12) que

$$2(R_w - L_w) = (R_x + L_x)(R_y - L_y) + (R_y + L_y)(R_x - L_x) \quad (1.16)$$

O próximo passo é substituir z por x^t e y por x em (1.13). Notemos que dessa maneira $(xy + yx)z = (xx + xx)x^t = 2x^{t+2} = 2w$ e, analogamente, $(xy + yx)z = (yz + zy)x = (xz + zx)y$. Então

$$6L_w = (R_x + L_x)(2R_{x^{t+1}} - 2L_{x^{t+1}} - R_x R_{x^t} - R_{x^t} R_x) + (R_{x^t} + L_{x^t})(2R_{x^2} + 2L_{x^2} - 2R_x)$$

Consequentemente, pela hipótese de indução, temos que $L_x \in A_x$ e por (1.16) temos que $L_w \in A_x$. ■

No caso particular em que $x = e = e^2$, a fórmula (1.14) se transforma em $R_{ee} - L_{ee} = (R_e + L_e)(R_e - L_e)$, de onde segue que $(R_e + L_e)(R_e - L_e) - (R_e - L_e) = 0$. Logo,

$$(R_e + L_e - I)(R_e - L_e) - (R_e - L_e) = 0. \quad (1.17)$$

Fazendo $x = e = e^2$ também em (1.15), obtemos $L_{(ee)e} = (R_e + L_e)(R_e + L_e - R_e^2) - L_e R_e$, ou ainda, $R_e^2 + R_e L_e - R_e R_e^2 + L_e R_e + L_e^2 - L_e R_e^2 - L_e R_e - L_e = 0$. Assim, temos

$$(R_e + L_e)^2 - (R_e + L_e)R_e^2 - L_e(R_e + I) = 0. \quad (1.18)$$

onde I é o operador identidade em A . Não é possível deduzir a partir de (1.17) e (1.18) equações que só contenham R_e ou L_e . Quando A é comutativa, segue de (1.13) que

$$\begin{aligned} 2R_{x(yz)} + 2R_{y(zx)} + 2R_{z(xy)} &= (R_x + L_x)(4R_{yz} - R_y R_z - R_z R_y) + \\ &\quad (R_y + R_y)(4R_{zx} - R_z R_x - R_x R_z) + \\ &\quad (R_z + R_z)(4R_{xy} - R_x R_y - R_y R_x) - \\ &\quad 2(R_{xy} R_z + R_{zx} R_y + R_{yz} R_x). \end{aligned}$$

portanto, temos

$$\begin{aligned} R_{x(yz)} + R_{y(zx)} + R_{z(xy)} &= 4(R_x R_{yz} + R_y R_{zx} + R_z R_{xy}) - (R_{yz} R_x + R_{zx} R_y + R_{xy} R_z) - \\ &\quad [R_x(R_y R_z + R_z R_y) + R_y(R_z R_x + R_x R_z) + R_z(R_x R_y + R_y R_x)]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Além disso, (1.12) e (1.14) se anulam, pois $L_x = R_x$, para todo $x \in A$. A igualdade (1.15) se torna $R_{(xx)x} = 2R_x(R_{xx} - R_x^2) - R_{xx}R_x$, ou seja,

$$R_{(xx)x} = 4R_x R_{xx} - 2R_x^3 - R_{xx}R_x. \quad (1.20)$$

Finalmente, usando a expressão (1.19) com $y = x$ e $z = x^2$ e a expressão (1.20), chegamos à identidade

$$R_{(xx)(xx)} = R_{xx}^2 + 10R_x^2 R_{xx} - 6R_x R_{xx} R_x - 4R_x^4. \quad (1.21)$$

1.5 Nilálgebras e nilideais

Veremos agora uma condição para que, dados uma álgebra de potências associativas A e um elemento $x \in A$ qualquer, a álgebra A_x seja nilpotente e um exemplo de álgebra não comutativa A , em que A_x não é nilpotente.

Definição 1.8. *Seja A uma álgebra de potências associativas. Dizemos que um elemento $x \in A$ é **nilpotente** existe um inteiro r tal que $x^r = 0$. O menor inteiro positivo r para o qual $x^r = 0$ é denominado **nilíndice** ou **índice de nilpotência** de x .*

Definição 1.9. *Diz-se que A é uma **nilálgebra** se todos os elementos de A forem nilpotentes. O **nilíndice** da álgebra A é definido como sendo o menor inteiro positivo para o qual todos os elementos de A são nilpotentes.*

Definição 1.10. *Se todos os elementos do ideal B da álgebra A forem nilpotentes, então B é denominado um **nilideal**.*

Notemos que a soma de nilideais também é um nilideal. De fato, sejam B e C nilideais, de nilíndices k e t , respectivamente. Sendo assim, $b^k = c^t = 0$ para quaisquer $b \in B$ e $c \in C$. Como cada elemento de $B + C$ é da forma $b + c$, temos

$$(b + c)^{kt} = [(b + c)^k]^t = [b^k + c_0]^t = c_0^t = 0$$

onde $c_0 = \sum (b_i c_j + c_j b_i) \in C$ é uma soma de produtos de elementos envolvendo $b_i \in B$ e $c_i \in C$ e os índices i e j são inteiros positivos. Disso se conclui que a soma $B_1 + \cdots + B_r$ de uma quantidade finita de nilideais também é um nilideal. Define-se também a **soma** $\mathfrak{R}$ dos nilideais de A como sendo o conjunto de todas as somas finitas da forma $b = b_i + \cdots + b_r$, onde cada $b_i \in B_i$, $i = 1, \dots, r$. Evidentemente, b é nilpotente com índice de nilpotência igual ao mínimo múltiplo comum dos índices dos b_i e $\mathfrak{R}$ é chamado de **nilradical** de A .

Teorema 1.3. *Seja A um álgebra comutativa de potências associativas sobre um corpo de característica diferente de 2 com nilíndice $t \leq 4$. Então A_x é nula ou é uma álgebra associativa nilpotente, para todo $x \in A$.*

Demonstração. Suponhamos que $t = 2$. Então, para quaisquer $a, b \in A$, temos que $(a+b)^2 = 0$, ou ainda, $a^2 + 2ab + b^2 = 0$. Assim, $ab = 0$. Neste caso A é nula e A_x só contém o homomorfismo nulo. Suponhamos agora que $t = 3$. Assim, pela definição de índice de nilpotência, deve existir $z \in A$ tal que $z^2 \neq 0$ e, logicamente, $R_z \neq 0$. Segue de $x^2x = 0$ que

$$(xy)z + (xz)y + (yz)x = 0$$

onde $x, y, z \in A$. Portanto, temos

$$R_{xy} + R_x R_y + R_y R_x = 0. \quad (1.22)$$

Fazendo $x = y$ em (1.22) temos $R_{xx} + R_x R_x + R_x R_x = 0$. Logo

$$R_{xx} = -2R_x^2, \quad (1.23)$$

multiplicando por R_x à esquerda, obtemos

$$R_x R_{xx} = -4R_x^3. \quad (1.24)$$

Notemos que R_{xx} comuta com R_x , pois

$$\begin{aligned} R_{xx} R_x &= -2R_x^2 R_x = -2R_x^3, \\ R_x R_{xx} &= R_x (-2R_x^2) = -2R_x^3. \end{aligned}$$

Daí segue que, para todo $y \in A$

$$\begin{aligned} yR_{xx}R_x &= yR_xR_{xx}, \\ (y(xx))x &= (yx)(xx), \\ (x^2y)x &= x^2(yx). \end{aligned}$$

Substituindo y por xx em (1.22), obtemos $R_{x(xx)} + R_xR_{x(xx)} + R_{x(xx)}R_x = 0$. Assim, $R_{x(xx)} = -2R_xR_{xx}$ e, portanto,

$$R_xR_{xx} = 0$$

pois, $x^3 = 0$, e segue de (1.24) que R_x é nilpotente. Quando o índice de nilpotência for 4, temos por linearização de $(xx)(xx) = 0$ que

$$\begin{aligned} (xy)(wz) + (xz)(yw) + (xw)(yz) &= 0, \\ R_zR_{xy} + R_{zx} + R_xR_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

onde $x, y, z, w \in A$. Fazendo $x = y = z$ acima, obtemos $R_xR_{xx} = 0$ e de (1.21) obtemos $R_{xx}^2 = 4R_x^4$. Portanto, multiplicando por R_x à esquerda, $R_x^5 = 0$, ou seja, R_x é nilpotente. Agora vamos demonstrar que A_x é nilpotente. Lembramos que cada elemento desse conjunto é uma soma de produtos de uma quantidade finita de elementos iguais a R_x ou R_{xx} , ou seja:

$$A = P_1P_2 \cdots P_{k_1} + P_1P_2 \cdots P_{k_2} + \cdots + P_1P_2 \cdots P_{k_r}$$

onde k e r são inteiros positivos e cada P_i é R_x ou R_{xx} e modo que cada produto de seis elementos de A_x é uma soma finita de produtos da forma $P = S_1S_2 \cdots S_n$, $n \geq 6$. Se $S_1 = R_x$, então P é sempre zero pois, se $S_2 = R_{xx}$ vamos ter $P = R_xR_{xx} \cdots = 0$ e caso $S_2 = R_x$ devemos olhar para o valor de S_3 . Se este for R_{xx} , então $P = R_xR_xR_{xx} \cdots = 0$, caso contrário continuamos esse processo até S_5 e aí só pode ocorrer $P = R_x^5 \cdots = 0$ ou $P = R_x^3R_xR_{xx} \cdots = 0$. Supondo que $S_1 = S_2 = R_{xx}$, segue que $S_1 = S_2 = 4R_x^2$ e, para qualquer S_3 , P se anula novamente. Fixando $S_1 = R_{xx}$ e $S_2 = R_x$, podemos ter $R_{xx}R_x \cdots R_xR_{xx} \cdots = 0$ ou $R_{xx}R_xR_{xx} \cdots = 0$, ou mesmo $R_{xx}R_x^5 \cdots = 0$. Portanto, A_x é nilpotente. ■

Vejamos um exemplo de álgebra não comutativa e que não possui a propriedade do Teorema 1.3.

Exemplo 1.5. Seja A uma álgebra sobre um corpo F com base $\{u, v, uv\}$ tal que $u^2 = v^2 = (uv)^2 = 0$, $uv + vu = 0$, $(uv)u = -u(uv) = v$ e $(uv)v = -v(uv) = u$. Então dado qualquer $x \in A$, existem $\lambda, \gamma, \varphi \in F$ tais que $x = \lambda u + \mu v + \varphi uv$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} x^2 &= \gamma^2 u^2 + \lambda\mu uv + \lambda\varphi u(uv) + \lambda\mu v u + \mu^2 v^2 + \mu\varphi v(uv) + \lambda\varphi(uv)u + \mu\varphi(uv)v + \varphi^2 v^2 \\ &= \lambda\mu(uv + vu) + \lambda\varphi[u(uv) + (uv)u] + \mu\varphi[v(uv) + (uv)v] = \lambda\varphi(-v + v) + \mu\varphi(-u + u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então A tem nilíndice 2 e é de potências associativas. Porém as aplicações R_u e R_v não são nilpotentes. De fato, construindo as matrizes dessas mesmas, temos

$$\begin{aligned} uR_u &= u^2 = 0 = 0u + 0v + 0uv, \\ vR_u &= vu = 0u + 0v - uv, \\ (uv)R_u &= (uv)u = v = 0u + v + 0uv. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} uR_v &= uv = 0u + 0v + 1uv, \\ vR_v &= v^2 = 0u + 0v + 0uv, \\ (uv)R_v &= (uv)v = u = 1u + v + 0uv. \end{aligned}$$

Logo, as matrizes dos operadores R_u e R_v são dadas por

$$[R_u] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[R_v] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, podemos constatar que R_u^4 e R_v^2 são idempotentes, ou seja, $(R_u^4)^2 = R_u^4$ e $(R_v^2)^2 = R_v^2$. Assim, nenhuma potência de R_u e R_v será nula. Consequentemente, qualquer $R_x \neq 0$ e A_x não é nilpotente.

1.6 Idempotentes em álgebras comutativas

Nesta seção consideraremos um idempotente e de uma álgebra comutativa e de potências associativas A . Provaremos que os autovalores do operador R_e são 0, 1 e $\frac{1}{2}$. A partir desses autovalores, construiremos subespaços que decompõem A em soma direta. Depois estudaremos como se comporta o produto de dois desses subespaços.

Seja A uma álgebra comutativa. Com isso a igualdade (1.18) se torna $-2R_e^3 + 3R_e^2 - R_e = 0$. Daí

$$\begin{aligned} (2R_e^2 - 3R_e + I)R_e &= 0, \\ (2R_e^2 - 2R_e - R_e + I)R_e &= 0, \\ [2R_e(R_e - I) - (R_e - I)]R_e &= 0, \\ (2R_e - I)(R_e - I)R_e &= 0. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Para todo idempotente $e \in A$. Definimos o conjunto $A_e(\lambda)$ como sendo o conjunto dos elementos $a_e(\lambda) \in A$ tais que

$$ea_e(\lambda) = \lambda a_e(\lambda). \tag{1.26}$$

Então dado qualquer $x \in A_e(\lambda)$, temos que $ex = \lambda e$ e segue de (1.25) que

$$\begin{aligned} x[(2R_e - I)(R_e - I)R_e] &= 0, \\ (2\lambda - 1)x[(R_e - I)R_e] &= 0, \\ (2\lambda - 1)(\lambda - 1)xR_e &= 0, \\ (2\lambda - 1)(\lambda - 1)\lambda x &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\lambda \in \{0, 1, 1/2\}$. Mostremos agora que $A_e(\lambda)$ é um subespaço de A . Dados $x, y \in A_e(\lambda)$ e $\varphi \in F$, tem-se que $ex = \lambda x$ e $ey = \lambda y$, logo

$$\begin{aligned} e(x - y) &= ex - ey = \lambda x - \lambda y = \lambda(x - y), \\ e(\varphi x) &= \varphi(ex) = \varphi(\lambda x) = \lambda(\varphi x). \end{aligned}$$

Logo, $x - y \in A_e(\lambda)$ e $\varphi x \in A_e(\lambda)$. Além disso, a álgebra A é a soma direta

$$A = A_e(0) \oplus A_e(1) \oplus A_e(1/2). \quad (1.27)$$

De fato, pois dados $a \in A$ e o operador identidade I sobre A , temos que

$$\begin{aligned} a &= aI - 3aR_e + 2aR_e^2 + 4aR_e - 4aR_e^2 + 2aR_e^2 - aR_e \\ &= a(I - 3R_e + 2R_e^2) + 4a(R_e - R_e^2) + a(2R_e^2 - R_e) \\ &= x + y + z, \end{aligned}$$

onde $x = a(I - 3R_e + 2R_e^2)$, $y = 4a(R_e - R_e^2)$, $z = a(2R_e^2 - R_e)$. Observemos que $x \in A_e(0)$, $y \in A_e(1/2)$ e $z \in A_e(1)$, já que, usando o fato de que $2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0$, temos

$$\begin{aligned} ex &= ea(I - 3R_e + 2R_e^2) = ae - 3aeR_e + 2aeR_e^2 = a(R_e - 3R_e^2 + 2R_e^3) = 0, \\ ey &= 4ea(R_e - R_e^2) = 4aeR_e - 4aeR_e^2 = 4aR_e^2 - 4aR_e^3. \end{aligned}$$

Mas como $2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 0$ implica $2^{-1}(R_e - R_e^2) = R_e^2 - R_e^3$, então

$$\begin{aligned} ey &= 4(aR_e^2 - aR_e^3) = 2^{-1}a(R_e^2 - R_e^3) = \frac{y}{2}, \\ ez &= a(2R_e^2 - R_e) = 2aeR_e^2 - aeR_e = 2aR_e^3 - aR_e^2 = a(2R_e^3 - R_e^2). \end{aligned}$$

Porém $2R_e^3 - 3R_e^2 + R_e = 2R_e^3 - R_e^2 - 2R_e^2 + R_e = 0$. Então $2R_e^3 - R_e^2 = 2R_e^2 - R_e$ e obtemos $ez = a(2R_e^3 - R_e^2) = a(2R_e^2 - R_e) = z$.

E para provar que a soma é direta, multiplicamos duas vezes por e a igualdade $a_e(0) + a_e(1) + a_e(1/2) = 0$ e usamos a definição de $a_e(\lambda)$

$$\begin{aligned} ea_e(0) + ea_e(1) + ea_e(1/2) &= 0, \\ a_e(1) + 2^{-1}a_e(1/2) &= 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} ea_e(1) + e2^{-1}a_e(1/2) &= 0, \\ a_e(1) + 4^{-1}a_e(1/2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Resolvendo o sistema formado por (1.28) e (1.29), obtemos a solução trivial e também concluímos que $a_e(0) = 0$.

Definição 1.11. Diz-se que os subespaços B e C da álgebra A são **ortogonais** quando $xy = 0$, para quaisquer $x \in B$ e $y \in C$.

Teorema 1.4. Os subespaços $A_e(1)$ e $A_e(0)$ num álgebra comutativa de potências associativas são nulos ou subálgebras ortogonais de A e são válidas as seguintes inclusões

$$\begin{aligned} A_e(1/2) A_e(1/2) &\subseteq A_e(1) + A_e(0), \\ A_e(1) A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(0), \\ A_e(0) A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(1). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Demonstração. Inicialmente, obsevermos que a linearização de $x^2x^2 = (x^2x)x$ fornece a identidade

$$\begin{aligned} 4[(xy)(wz) + (xz)(yw) + (xw)(yz)] &= x[y(zw) + z(wy) + w(yz)] \\ &\quad + y[x(zw) + z(wx) + w(xz)] \\ &\quad + z[x(yw) + y(wx) + w(xy)] \\ &\quad + w[x(yz) + y(xz) + z(xy)] \end{aligned}$$

Em particular, quando $z = w = e$, obtemos a seguinte identidade

$$4[(xy)e + 2(xe)(ye)] = x[ye + 2(ye)e] + y[xe + 2(xe)e] + 2e[x(ye) + y(xe) + (xy)e]. \quad (1.31)$$

Sejam $x, y \in A_e(1)$, então $xe = x$ e $ye = y$. Fazendo essas substituições em (1.31) temos $4(xy)e + 8xy = 6xy + 4e(xy) + 2((xy)e)e$. Logo, $((xy)e)e - xy = (xy)(R_e^2 - I)$. Segue daí que $(xy)(R_e - I) = 0$. Assim, $e(xy) = xy$ e, portanto, $xy \in A_e(1)$. Então A é uma subálgebra. Agora consideremos $x, y \in A_e(0)$, de modo que $xe = ye = 0$. Com isto, a equação (1.31) se reduz à $4(xy)e = 2((xy)e)e$, que pode ainda se reescrita como $((xy)e)e - 2(xy)e = 0$. Logo $(xy)(R_e^2 - 2R_e) = (xy)R_e(R_e - 2I) = 0$. Assim, $(xy)R_e = 0$, ou seja $(xy)e = 0$. Portanto, $xy \in A_e(0)$ e fica provado que $A_e(0)$ também é uma subálgebra. Vamos provar que elas são ortogonais. Dados $x \in A_e(1)$ e $y \in A_e(0)$. Segue de (1.31) que $4(xy)e = 3xy + 2(xy)e + 2((xy)e)e$. Portanto, $0 = (xy)(2R_e^2 - R_e + 3I) = (xy)R_e(R_e^2 + 2I) = (xy)R_e = (xy)e$. Então, segue de $4(xy)e = 3xy + 2(xy)e + 2((xy)e)e$, que $3xy = 0$ e assim $xy = 0$. Logo, as subálgebras $A_e(1)$ e $A_e(0)$ são ortogonais.

Resta provar as inclusões. Consideremos $x, y \in A_e(1/2)$ e isto significa que $xe = \frac{x}{2}$ e $ye = \frac{y}{2}$. De (1.31) vem $((xy)e)e - (xy)e = 0$, $(xy)R_e(R_e - I) = 0$ e $(xy)R_e = 0$ e assim $xy \in A_e(0) \subseteq A_e(0) + A_e(1)$.

Se $x \in A_e(1)$ e $y \in A_e(1/2)$, isto é, se $xe = x$ e $ye = \frac{y}{2}$, obtemos $2((xy)e)e - (xy)e = 0$, $(xy)R_e(2R_e - I) = 0$, $(xy)(2R_e - I) = 0$ e $e(xy) = (xy)/2$. Logo, $xy \in A_e(1/2) \subseteq A_e(0) + A_e(1/2)$.

Finalmente, quando $x \in A_e(0)$ e $y \in A_e(1/2)$, isto é, se $xe = 0$ e $ye = \frac{y}{2}$. Então $2((xy)e) - 3(xy)e + xy = 0$, $(xy)(2R_e - I)(R_e - I) = 0$, $(xy)(2R_e - I) = 0$. Portanto, $xy \in A_e(1/2) \subseteq A_e(1) + A_e(1/2)$ e isto encerra a demonstração. ■

Quando A é uma álgebra de Jordan, isto é, uma álgebra comutativa para qual $x^2(yx) = (x^2y)x$, para quaisquer $x, y \in A$, as duas últimas inclusões do Teorema 1.4 se reduzem a

$$A_e(1) A_e(1/2) \subseteq A_e(1/2), \quad A_e(0) A_e(1/2) \subseteq A_e(1/2). \quad (1.32)$$

Entretanto, as inclusões em (1.32) não são válidas para todos os álgebras comutativas de potências associativas.

Exemplo 1.6. Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo F cuja característica é diferente de 2, 3 e 5, tal que $\{e, f, g, h\}$ seja uma base para A de modo que $e^2 = e$, $ef = f$, $eg = \frac{1}{2}g$, $gh = f$, $eh = f^2 = g^2 = h^2 = fg = fh = 0$. Então $A_e(1/2) = gF$, pois dado $x \in gF$, então x é da forma $x = \alpha g$ e $ex = e(\alpha g) = \frac{1}{2}\alpha g = \frac{1}{2}x$ e assim $x \in A_e(1/2)$. Agora, dado $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h \in A_e(1/2)$, temos

$$\begin{aligned} ex &= \frac{1}{2}x, \\ e(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h) &= \frac{1}{2}(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h), \\ \alpha e + \beta f - \delta h &= 0. \end{aligned}$$

Segue que $\alpha = \beta = \delta = 0$, pois os elementos da base são linearmente independentes e concluímos assim que $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h = \gamma g \in gF$. Também temos que, $A_e(0) = hF$, pois dado $x \in hF$, temos que $x = \alpha h$ e $ex = e(\alpha h) = \alpha(eh) = \alpha 0 = 0$, daí $x \in A_e(0)$. Dado $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h \in A_e(0)$, temos

$$\begin{aligned} ex &= 0, \\ e(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h) &= 0, \\ \alpha e + \beta f + \frac{1}{2}\gamma g &= 0. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pois os elementos da base são linearmente independentes e concluímos assim que $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h = \delta h \in hF$. Finalmente, $A_e(1/2)A_e(0) = (hF)(gF) = (hg)F = fF \subset A_e(1)$ e $fF \not\subset A_e(1/2)$, já que $x = \lambda f \in fF$ implica $ex = \lambda ef = \lambda f \neq \frac{1}{2}x$. Então não vale (1.32), embora A seja uma álgebra de potências associativas, pois dado qualquer $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h \in A$, tem-se que

$$\begin{aligned} x^2 &= (\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)^2 = \alpha^2 e + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)f + \alpha\gamma g, \\ x^2 x^2 &= \alpha^4 e + 4\alpha^2(\alpha\beta + \gamma\delta)f + \alpha^3 \gamma g, \\ x^2 x &= (\alpha^2 e + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)f + \alpha\gamma g)(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h) = \alpha^3 e + 3\alpha(\alpha\beta + \gamma\delta)f + \alpha^2 \gamma g, \\ (x^2 x) &= (\alpha^3 e + 3\alpha(\alpha\beta + \gamma\delta)f + \alpha^2 \gamma g)(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h) = x^2 x^2. \end{aligned}$$

1.7 Idempotentes em álgebras não comutativas

Seja A uma álgebra de potências associativas não necessariamente comutativa. Como já foi visto, as potências de A coincidem com as potências de $A^{(+)}$, além disso todo idempotente $e \in A$ também é um idempotente da álgebra $A^{(+)}$, pois $e \cdot e = \frac{1}{2}(e^2 + e^2) = e^2 = e$. Então tudo o que foi visto na seção anterior é válido para a álgebra $A^{(+)}$. Assim, temos a seguinte decomposição

$$A = A_e^{(+)}(0) \oplus A_e^{(+)}(1) \oplus A_e^{(+)}(1/2),$$

onde

$$\begin{aligned} A_e^{(+)}(0) &= \{a \in A; e \cdot a = 0\} = \{a \in A; ea + ae = 0\}, \\ A_e^{(+)}(1) &= \{a \in A; e \cdot a = a\} = \{a \in A; ea + ae = 2a\}, \\ A_e^{(+)}(1/2) &= \{a \in A; 2e \cdot a = a\} = \{a \in A; ea + ae = a\}. \end{aligned}$$

Esses conjuntos podem ser escritos como

$$A_e^{(+)}(\lambda) = \{a \in A; e \cdot a = \lambda a\} = \{a \in A; ea + ae = 2\lambda a\}.$$

Quando A é uma álgebra comutativa, vimos na seção anterior que dois dos somandos de A são ortogonais. No próximo teorema vamos provar um resultado análogo.

Teorema 1.5. *Os subespaços $A_e(1)$ e $A_e(0)$ da álgebra A de potências associativas não necessariamente comutativa são ortogonais tais que*

$$ea_e(1) = a_e(1)e = a_e(1), \quad ea_e(0) = a_e(0)e = 0, \quad (1.33)$$

para todos os elementos $a_e(1) \in A_e(1)$ e $a_e(0) \in A_e(0)$.

Demonstração. Dados $x \in A_e(1)$, então $ex = x$. Com relação ao produto em $A_e^{(+)}(1)$, sabemos que $ex + ex = 2x$. Logo, $xe = 2x - ex = 2x - x = x$. Analogamente, se $y \in A_e(0)$, então $ey = 0$. Pelo produto em $A_e^{(+)}(0)$, vem $ey + ey = 0$, isto é, $ye = 0$. Assim as relações em (1.33) ficam provadas.

Como $ex + xe = 2x$ em $A_e^{(+)}(1)$, $ey + ye = 0$ em $A_e^{(+)}(0)$ e, pela ortogonalidade de $A_e(1)$ e $A_e(0)$, temos que $xy + yx = 0$. Então substituindo esses dados e z por e na igualdade (1.1), segue que $[xy + yx, e] + [xe + ex, y] + [ye + ey, x] = 0$, o que implica $[x, y] = 0$. Logo $xy - yx = 0$. Portanto, $xy = 0$. ■

Exemplo 1.7. Quando a álgebra A não é comutativa, os autovalores de R_e não necessariamente são 0, 1 e $\frac{1}{2}$ vistos no caso comutativo.

De fato, consideremos a álgebra A com base $\{e, e_1, \dots, e_t\}$, onde e é um idempotente e tal que $ee_i = \alpha_i e_i$, $e_i e = (1 - \alpha_i)e_i$ e $e_i e_j = 0$ para $i, j = 1, \dots, t$. Então os autovalores são arbitrários e A é de potências associativas, pois dado $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_t e_t$ então $y^2 = yy = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_t e_t = 0$. Logo $yy^2 = y^2 y$ e $y^2 y^2 = (y^2 y)y$. Para os demais elementos $x \in A$, temos que $x = \alpha e + y$. Assim,

$$\begin{aligned} ey + ye &= e \sum_{i=1}^t \beta_i e_i + \left(\sum_{i=1}^t \beta_i e_i \right) e = \sum_{i=1}^t \beta_i ee_i + \sum_{i=1}^t \beta_i e_i e = \\ &= \sum_{i=1}^t \alpha_i \beta_i e_i + \sum_{i=1}^t \beta_i (1 - \alpha_i) e_i = \sum_{i=1}^t \alpha_i \beta_i e_i + \sum_{i=1}^t (\beta_i - \alpha_i \beta_i) e_i = y. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
 x^2 &= (\alpha e + y)^2 = \alpha^2 e^2 + \alpha e y + \alpha y e + y^2 = \alpha^2 e + \alpha y = \alpha x, \\
 x x^2 &= x(\alpha x) = \alpha x^2 = \alpha^2 x, \\
 x^2 x &= (\alpha x)x = \alpha x^2 = \alpha^2 x, \\
 x^2 x^2 &= (\alpha x)(\alpha x) = \alpha^2 x^2 = \alpha^3 x, \\
 (x^2 x)x &= ((\alpha x)x)x = \alpha x^2 x = \alpha^2 x^2 = \alpha^3 x.
 \end{aligned}$$

e concluímos que $xx^2 = x^2x$ e $x^2x^2 = x^2 = (x^2x)x$.

Exemplo 1.8. Consideremos uma álgebra com base $\{e, u, v\}$ sobre um corpo F de característica diferente de 2, 3 e 5, de tal maneira que $e^2 = e$, $eu = ue = \frac{1}{2}u$, $ev = ve = \frac{1}{2}v$, $uv = v$, $vu = -u$, $u^2 = v^2 = 0$.

Nesta álgebra não comutativa, $x, y \in A_e(1/2)$, pois dados $x = \alpha e + \beta u + \gamma v$ e $y = \lambda e + \varphi u + \psi v$ em $A_e(1/2)$, com $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \varphi, \psi \in F$, temos

$$\begin{aligned}
 xy &= \alpha\lambda e + \frac{1}{2}\alpha\varphi u + \frac{1}{2}\alpha\psi v + \frac{1}{2}\beta\lambda u + \beta\psi v + \frac{1}{2}\gamma\lambda v - \gamma\varphi u, \\
 e(xy) &= \alpha\lambda e + \frac{1}{4}\alpha\varphi u + \frac{1}{4}\alpha\psi v + \frac{1}{4}\beta\lambda u + \frac{1}{2}\beta\psi v + \frac{1}{4}\gamma\lambda v - \frac{1}{2}\gamma\varphi u = \frac{1}{2}xy.
 \end{aligned}$$

Então $xy \in A_e(1/2)$ e assim $A_e(1/2)$ é uma subálgebra de A e por isso não vale a inclusão $A_e(1/2)A_e(1/2) \subseteq A_e(1)A_e(0)$. Entretanto

$$x^2 = \alpha^2 e + \frac{1}{2}\alpha\beta u + \frac{1}{2}\alpha\gamma v + \frac{1}{2}\alpha\beta u + \beta\gamma u + \frac{1}{2}\alpha\gamma v - \beta\gamma u = \alpha^2 e + \alpha(\beta u + \gamma v) = \alpha x.$$

E, como vimos no exemplo anterior, isso acarreta no fato de que A é uma álgebra de potências associativas. Vejamos um exemplo em que os subconjuntos $A_e(1)$ e $A_e(0)$ não precisam ser subálgebras de A para que esta seja uma álgebra de potências associativas.

Exemplo 1.9. Seja A uma álgebra com base $\{e, u, v, w\}$ tal que $eu = ue = u$, $e^2 = e$, $ev = ve = ew = we = u^2 = v^2 = w^2 = uv = vu = uw = wu = 0$, $vw = u$, $wv = -u$.

Dados $x, y \in A_e(0)$, então estes elementos são da forma $x = \alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h$ e $y = \mu e + \varphi u + \psi v + \sigma w$, com $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \varphi, \psi, \sigma \in F$, temos

$$xy = (\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)(\mu e + \varphi u + \psi v + \sigma w) = \alpha\mu e + (\alpha\mu + \beta\mu + \gamma\sigma - \delta\psi)u.$$

Mas como $xy \in A_e(0)$, então $e(xy) = 0$ e $\alpha\mu e + (\alpha\mu + \beta\mu + \gamma\sigma - \delta\psi)u = 0$. Sendo os elementos da base não nulos, concluímos que $\alpha\mu = 0$ e que $xy \in uF$. Logo, $A_e(0)A_e(0) \subseteq uF$. Além disso, $e(xy) = xy$ e $xy \in A_e(1)$. Agora calculemos

$$\begin{aligned}
 x^2 &= (\alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w)^2 = \alpha^2 e + 2\alpha\beta u, \\
 x^2 x &= (\alpha^2 e + 2\alpha\beta u)(\alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w) = \alpha^3 e + 3\alpha^2\beta u = xx^2, \\
 (x^2 x)x &= (\alpha^3 e + 3\alpha^2\beta u)(\alpha e + \beta u + \gamma v + \delta w) = \alpha^4 e + 4\alpha^3\beta u = x^2 x^2.
 \end{aligned}$$

Então A é de potências associativas, porém $A_e(0)$ não é uma subálgebra de A .

1.8 Álgebras flexíveis

Nesta seção, vamos considerar álgebras de potências associativas com uma condição adicional, o que nos permitirá melhores resultados sobre a sua estrutura.

Definição 1.12. Dizemos que a álgebra A é **flexível** se $(xy)x = x(yx)$, quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Observemos que, substituindo x por $x+z$, onde $z \in A$, ficamos com $((x+z)y)(x+z) = (x+z)(y(x+z))$ e isso, usando a definição acima, gera a identidade $(xy+zy)(x+z) = (x+z)(yx+yz)$, ou seja,

$$(xy)z + (zy)x = x(yz) + z(yx). \quad (1.34)$$

Reciprocamente, se uma álgebra A cumpre a condição (1.34), então A é flexível. Em particular a igualdade $x^2x = xx^2$ é válida para todo x numa álgebra flexível.

Teorema 1.6. *Seja A uma álgebra flexível sobre um corpo F com característica diferente de 2, 3 e 5. Então A é de potências associativas se, e somente se, $x^2x^2 = (x^2x)x$.*

Demonstração. É claro que se A é de potências associativas, tem-se que $x^2x^2 = (x^2x)x$. Reciprocamente, pela flexibilidade, temos que $xx^2 = x(xx) = (xx)x = x^2x$. Notemos também, que esse fato e a flexibilidade de A nos dão $xx^3 = x(x^2x) = (xx^2)x = x^3x = x^4$. Além disso, por hipótese, temos que $x^2x^2 = x^4$. Segue que $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, para inteiros positivos α e β tais que $\alpha + \beta \leq 4$. Agora suponhamos, por indução, que isso também seja verdade $\alpha + \beta \leq n$, onde $n \geq 4$. Substituindo y por $x^{\lambda-1}$ e z por $x^{n-\lambda}$, onde $\lambda \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ em (1.34), teremos $(xx^{\lambda-1})x^{n-\lambda} + (x^{n-\lambda}x^{\lambda-1})x = x(x^{\lambda-1}x^{n-\lambda}) + x^{n-\lambda}(x^{\lambda-1}x)$, ou seja,

$$x^\lambda x^{n-\lambda} + x^{n-1}x = xx^{n-1} + x^{n-\lambda}x^\lambda.$$

Fazendo $\lambda = n-1$ na identidade acima, obtemos $x^{n-1}x = xx^{n-1}$ e que pode ser reescrita como $[x^{n-1}, x] = 0$. Pelo Lema 1.4, $x^{n-\lambda}x^\lambda = x^{n-1}x = x^n$ e assim, concluímos que $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ também para $\alpha + \beta = n$. Portanto, A é uma álgebra de potências associativas. ■

Teorema 1.7. *Seja e um idempotente de uma álgebra flexível de potências associativas A . Então $A_e(1)$ e $A_e(0)$ são nulos ou são subálgebras de A ; $ex, xe \in A_e(1/2)$, para todo $x \in A_e(1/2)$ e valem as inclusões*

$$\begin{aligned} A_e(1)A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(0), & A_e(1/2)A_e(1) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(0), \\ A_e(0)A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(1), & A_e(1/2)A_e(0) &\subseteq A_e(1/2) + A_e(1). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Demonstração. Inicialmente, substituímos ey e ye por αy e z por e em (1.34), então

$$\begin{aligned} (xy)e + \alpha(yx) &= \alpha(xy) + e(yx), \\ (xy)e + \alpha(yx) &= 2\alpha(xy) - \alpha(xy) + e(yx) + e(xy) - e(xy), \\ \alpha(xy + yx) - e(xy + yx) &= 2\alpha(xy) - [(xy)e + e(yx)], \\ (xy + yx)(\alpha I - L_e) &= 2xy(\alpha I - T_e). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dados $x, y \in A_e(1)$, então $xy + yx \in A_e(1)$, pois $A_e(1)$ é um subálgebra de $A^{(+)}$. Aplicando $\alpha = 1$ na igualdade (1.36), obtemos,

$$\begin{aligned} (xy + yx)(I - L_e) &= xy + yx - e(xy + yx) = xy + yx - (xy + yx) = 0, \\ 0 &= 2xy(I - T_e), \\ 0 &= xy(I - T_e), \\ (xy)T_e &= xy. \end{aligned}$$

Segue que $xy \in A_e(1)$. Analogamente, dados $x, y \in A_e(0)$, então $xy + yx \in A_e(0)$ e aplicando $\alpha = 0$ temos $(xy + yx)L_e = e(xy + yx) = e(xy) + e(yx) = 0$, ou ainda, $2(xy)T_e = 0$ e $0 = (xy)T_e$. Logo, $xy \in A_e(0)$ e então $A_e(0)$ e $A_e(1)$ são subálgebras. Também já foi provado anteriormente que estas subálgebras são ortogonais. Agora vamos substituir y por e em (1.34) e obtemos $(xe)z + (ze)x = x(ez) + z(ex)$. Se $x \in A_e(1/2)$, então $xe + ex = x$ e daí $(xe)e + (ex)e = xe$ e para $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} x(I - L_e) &= x - ex = xe, \\ 2xe(I - T_e) &= 2xe - 2 \cdot \frac{1}{2}((xe)e + (ex)e) = xe, \\ xe &= 2xe - 2(xe)T_e, \\ (xe)T_e &= xe/2, \\ xe &\in A_e(1/2). \end{aligned}$$

E como $x \in A_e(1/2)$ e $A_e(1/2)$ é uma subálgebra, temos que $ex = x - xe \in A_e(1/2)$. Resta provar as inclusões (1.35). Começamos por substituir y por e em (1.34) e consideremos ainda $x \in A_e(1/2)$ e $z \in A_e(1)$. Então $(xe)z + (ze)x = x(ez) + z(ex)$, ou ainda, $xz = xz + zx - z(ex) - (ex)z$ e segue de (1.30) que $xz + zx \subseteq A_e(1) + A_e(0)$ e $z(ex) + (ex)z \subseteq A_e(1) + A_e(0)$. Logo, $xz \in A_e(1) + A_e(1/2)$. Finalmente, escolhemos $ez = ze = 0$, isto é, $z \in A_e(0)$. Então $xz + (ze)x = x(ez) + z(ex) + (ex)z$, isto é, $xz = z(ex) + (ex)z \in A_e(0)A_e(1/2) \subseteq A_e(1/2) + A_e(1)$. Assim, zx também está nessa subálgebra, pois $xz = xz + zx - z(ex) - (ex)z$. Logo, $zx = z(ex) + (ex)z \in A_e(1/2) + A_e(1)$ e o teorema está demonstrado. ■

O teorema acima é um resultado análogo ao Teorema 1.4 para álgebras flexíveis. Lembremos que para álgebras não comutativas,

$$A = A_e^{(+)}(0) \oplus A_e^{(+)}(1) \oplus A_e^{(+)}(1/2),$$

onde, pelo Teorema 1.5,

$$\begin{aligned} A_e^{(+)}(0) &= \{a \in A; aT_e = 0\} = \{a \in A; ea = ae = 0\}, \\ A_e^{(+)}(1) &= \{a \in A; aT_e = a\} = \{a \in A; ea = ae = a\}, \\ A_e^{(+)}(1/2) &= \{a \in A; 2aT_e = a\}. \end{aligned}$$

Além disso, $A_e^{(+)}(0)$ e $A_e^{(+)}(1)$ são ortogonais e para todo $a \in A$, se $a = x + y + z$, então

$$\begin{aligned} x &= a(I - 3T_e + 2T_e^2) \in A_e^{(+)}(0), \\ y &= 4a(T_e - T_e^2) \in A_e^{(+)}(1/2), \\ z &= a(2T_e^2 - T_e) \in A_e^{(+)}(1). \end{aligned}$$

Definição 1.13. Diz-se que um álgebra A é **estável**, se A for um álgebra de potências associativas flexível e, para todo idempotente $e \in A$, valer as seguintes inclusões.

$$\begin{aligned} A_e(0)A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2), & A_e(1/2)A_e(0) &\subseteq A_e(1/2), \\ A_e(1)A_e(1/2) &\subseteq A_e(1/2), & A_e(1/2)A_e(1) &\subseteq A_e(1/2). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Teorema 1.8. Um álgebra de potências associativas flexível A é um álgebra estável se, e somente se, $A^{(+)}$ é estável.

Demonstração. Suponhamos que A seja estável. Dados $x \in A_e(1) \subseteq A_e(1) + A_e(0)$ e $y \in A_e(1/2)$. Por hipótese, temos que $xy + yx \in A_e(1/2)$, $\frac{1}{2}(xy + yx) \in A_e(1/2)$ e $x \cdot y \in A_e(1/2)$. De modo análogo se prova que dados $x \in A_e(0) \subseteq A_e(1) + A_e(0)$ e $y \in A_e(1/2)$, então $x \cdot y \in A_e(1/2)$. Reciprocamente, suponhamos que $A^{(+)}$ seja estável. Substituímos y por e em (1.36) e obtemos $(xe)z + (ze)x = x(ez) + z(ex)$. Dados $x \in A_e(1)$ e $z \in A_e(1/2)$ então $xe = ex = x$ e $ze + ex = z$. Somando $(ez)x$, teremos

$$\begin{aligned} xz + (ze + ez)x &= x(ez) + z(ex) + zx, \\ xz + zx &= x(ez) + z(ex) + zx, \\ xz &= x(ez) + z(ex). \end{aligned}$$

Isso implica $xz \in A_e(1/2)$, pois $A^{(+)}$ é estável e $ez \in A_e(1/2)$, pelo Teorema 1.7. Se somássemos $x(ze)$ e repetíssemos o argumento acima, poderemos concluir que $zx \in A_e(1/2)$. Se $x \in A_e(0)$, então $ex = xe = 0$ e consequentemente

$$\begin{aligned} (xe)z + (ze)x &= x(ez) + z(ex), \\ (ze)x &= x(ez), \\ (ze)x + (ez)x &= x(ez) + (ez)x, \\ (ze + ez)x &= x(ez) + (ez)x, \\ zx &= x(ez) + (ez)x \in A_e(1/2). \end{aligned}$$

Segue do Teorema 1.7, $A^{(+)}$ é uma álgebra estável. Analogamente $xz \in A_e(1/2)$. Portanto, A é estável. ■

1.9 Idempotentes principais de uma álgebra

Definição 1.14. Um idempotente e de um álgebra A é denominado **idempotente principal** de A se não existir outro idempotente $u \in A$ que seja ortogonal a e .

Quando A é de potências associativas, isto significa que $A_e(0)$ não tem idempotentes e quando A é uma álgebra flexível, tem-se que $A_e(0)$ é uma subálgebra e e é principal se, e só se, $A_e(0)$ é uma nilálgebra.

Teorema 1.9. Seja e um idempotente principal de uma álgebra estável A . Então os elementos de $A_e(1/2)$ são todos nilpotentes.

Demonstração. Como as potências de $A^{(+)}$ coincidem com as potências de A , é necessário apenas provar o teorema para $A^{(+)}$. Então é possível tomar apenas o caso em que A é comutativo. Começamos com a igualdade (1.20), considerando nela $x \in A_e(1/2)$ (lembremos que isso implica $2ex = x$) e e como sendo um idempotente. Segue disso que

$$\begin{aligned} eR_{(xx)x} &= e(4R_x R_{xx} - R_{xx} R_x - 2R_x^3), \\ e[(xx)x] &= e[4x(xx) - (xx)x - 2(xx)x], \\ ex^3 &= x^3 - (ex^2)x. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.4, podemos escrever

$$w = x^2 = w_1 + w_0, \quad w_1 \in A_e(1/2), \quad w_0 \in A_e(0).$$

Usando as relações (1.37), temos que $x^3 = x^2x = (w_1 + w_0)x \in A_e(1/2)$ e daí segue que

$$\begin{aligned} x^3/2 &= x^3 - [e(w_1 + w_0)]x, \\ x^3 - x^3/2 &= (ew_1)x + (ew_0)x, \\ x^3/2 &= w_1x, \\ x^2x &= 2w_1x, \\ (w_1 + w_0)x &= 2w_1x, \\ w_1x + w_0x &= 2w_1x, \\ w_1x &= w_0x. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Seja e um idempotente principal tal que $A_e(0)$ seja uma nilálgebra, logo existe um inteiro positivo k para o qual $w_0^k = 0$. Ponhamos $z = x^{2k+1}$ e teremos

$$z^2 = zz = x^{2k+1}x^{2k+1} = (x^2)^{2k+1} = w^{2k+1} = w_1^{2k+1} + w_0^{2k+1},$$

pois w_1 e w_0 são ortogonais. Por outro lado, observemos que $x^{2k} = (x^2)^k = w^k = w_1^k + w_0^k \in A_e(1) + A_e(0)$ e assim

$$\begin{aligned} z &= x^{2k+1} = x^{2k}x = (w_1^k + w_0^k)x = w_1^kx + w_0^kx = w_1^kx \in A_e(1/2), \\ z^2 &= (x^2)^{2k+1} = (w_1 + w_0)^{2k+1} = w_1^{2k+1} + w_0^{2k+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $v_1 = w_1^{2k+1}$ e $v_0 = w_0^{2k+1} = 0$, decorre de (1.38) que $v_1z = v_0z = 0$ e $z^3 = z^2z = (v_1^k + v_0^k)z = v_1^kz + v_0^kz = 0$. Portanto, $(x^{2k+1})^5 = z^3 = 0$ e assim x é nilpotente. ■

Capítulo 2

Train álgebras de posto 3

2.1 Álgebras báricas

Definição 2.1. Uma **álgebra bárica** é um par ordenado $(A; \omega)$, onde A é uma álgebra sobre o corpo F e ω é um homomorfismo não nulo de A em F .

Vejamos, agora, que toda álgebra bárica $(A; \omega)$ sempre admite uma decomposição em somas diretas de dois subespaços.

Lema 2.1. Toda álgebra bárica $(A; \omega)$ pode ser decomposta em $A = Fx \oplus N$, onde Fx é o subespaço gerado pelo elemento $x \notin N$, o kernel de ω .

Demonstração. Obviamente, $Fx + N \subseteq A$. Dado $y \in A$, então podemos escrever

$$y = \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x + \left(y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right) \in Fx + N,$$

pois

$$\omega\left(y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right) = \omega(y) - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}\omega(x) = 0.$$

Para ver que a soma é direta, tomemos $z \in Fx \cap N$. Logo, $z \in Fx$ e, assim, existe $\alpha \in F$ de modo que $z = \alpha x$. Daí $\omega(z) = \omega(\alpha x) = \alpha\omega(x) = 0$. Mas como $x \notin N$, então $\omega(x) \neq 0$. Segue que $\alpha = 0$ e, portanto, $Fx \cap N = \{0\}$. ■

2.2 Train álgebras

Definição 2.2. Sejam (A, ω) uma álgebra bárica de dimensão finita sobre o corpo F , com característica diferente de 2 e n um inteiro positivo fixo. Dizemos que A é uma **train álgebra de posto n** , se a igualdade

$$x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0$$

é válida para qualquer $x \in A$.

Notemos que os escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F$ cumprem a condição $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$, pois dado $x \in A$ tal que $\omega(x) \neq 0$, temos

$$0 = \omega(x^n + \gamma_1 \omega(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(x)x^{n-1}) = \omega(x)^n (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1})$$

e, como $\omega(x)^n \neq 0$, chegamos à $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$.

Definição 2.3. Um polinômio da forma $p(a) = a^n + \gamma_1 \omega(a)a^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega(a)a^{n-1}$ cujos coeficientes satisfazem $1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1} = 0$ é chamado de **train polinômio de grau n** .

Em uma train álgebra existe um único train polinômio $p(a)$ de menor grau que satisfaz $p(x) = 0$ para todo $x \in A$. O grau deste polinômio é chamado de **posto** de A . Uma train álgebra de posto n satisfaz $x^n = 0$ para todo $x \in N$, o kernel de ω .

Lema 2.2. Toda train álgebra de posto n possui um único caracter.

Demonstração. Seja $(A; \omega)$ e suponhamos que ω' seja outro caracter de A . Desse modo, qualquer que seja $x \in N$, teremos

$$x^n + \gamma_1 \omega'(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega'(x)x^{n-1} = 0.$$

Entretanto, como $x^n = 0$ e aplicando ω' , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \omega'(x^n + \gamma_1 \omega'(x)x^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega'(x)x^{n-1}), \\ &= \gamma_1 \omega'(x)\omega'(x)^{n-1} + \dots + \gamma_{n-1} \omega'(x)^{n-1} \omega'(x), \\ &= +\gamma_1 \omega'(x)^n + \dots + \gamma_{n-1} \omega'(x)^n = \omega'(x)^n (\gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}) = -\omega'(x)^n. \end{aligned}$$

Isto nos diz que $\omega'(x) = 0$, ou ainda, que $x \in \ker(\omega')$, resultando em $N \subseteq \ker(\omega')$. Como ω também é um caracter de A , por hipótese, existe $x_0 \in N$ tal que $x = \alpha x_0 + n$, onde $\alpha \in F$ e $n \in N$. Temos, agora $\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha \omega'(x_0) + \omega'(n) = \alpha \omega'(x_0)$. Mas

$$\omega'(x_0) = \omega'(x_0) \frac{\omega(x_0)}{\omega(x_0)} = \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)} \omega(x_0).$$

Ponhamos $\beta = \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$. Então

$$\omega'(x) = \alpha \omega'(x_0) = \alpha \beta \omega(x_0) = \alpha \beta \omega(x_0) + 0 = \alpha \beta \omega(x_0) + \omega(n) = \beta \omega(\alpha x_0 + n) = \beta \omega(x)$$

e note-se ainda que

$$\begin{aligned} \beta \omega(x_0)^2 &= \beta \omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = (\beta \omega(x_0))^2 = \beta^2 \omega(x_0)^2, \\ (\beta^2 - \beta) \omega(x_0)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Lembrando que $x_0 \notin N$, obtemos $\omega(x_0)^2 \neq 0$. Segue que $\beta^2 - \beta = 0$, logo $\beta = 0$ ou $\beta = 1$. Lembremos, também, que ω' é um caracter de A , por isso β não pode ser zero. Portanto, $\beta = 1$ e $\omega = \omega'$. ■

Em decorrência deste lema, denotaremos uma train álgebra simplesmente por A . No caso particular em que $n = 3$, isto é, em uma train álgebra A de posto 3, vale a seguinte igualdade, para todo $x \in A$ e para todo $\gamma \in F$

$$x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0. \quad (2.1)$$

Seja A uma train álgebra de posto 3, linearizando a igualdade $x^3 = 0$, onde $x \in N$, temos

$$x^3 = 0, \quad (2.2)$$

$$x_1^2x_2 + 2x_1(x_1x_2) = 0, \quad (2.3)$$

$$x_1(x_2x_3) + x_2(x_1x_3) + x_3(x_1x_2) = 0, \quad (2.4)$$

onde $x_1, x_2, x_3 \in N$. Agora, vamos linearizar (2.1)

$$x^2y + 2x(xy) - (1 + \gamma)[\omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy] + \gamma[2\omega(x)\omega(y)x + \omega(x)^2y] = 0 \quad (2.5)$$

e linearizando esta última igualdade, obtemos, para $x, y, z \in A$

$$\begin{aligned} (xy)z + (xz)y + (yz)x - (1 + \gamma)[\omega(x)yz + \omega(y)xz + \omega(z)xy] + \\ \gamma[\omega(x)\omega(y)z + \omega(y)\omega(z)x + \omega(x)\omega(z)y] = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Substituindo y por x e z e x^2 na expressão acima, onde $x \in A$ é tal que $\omega(x) = 1$, teremos

$$\begin{aligned} (xx)x^2 + (xx^2)x + (xx^2)x &= (1 + \gamma)(xx^2 + xx^2 + xx) - \gamma(x^2 + x + x), \\ (x^2)^2 + 2x^4 &= (1 + \gamma)(2x^3 + x^2) - \gamma(x^2 + 2x), \end{aligned}$$

mas de (2.1), temos $x^3 - (1 + \gamma)x^2 + \gamma x = 0$, ou seja,

$$x^3 = (1 + \gamma)x^2 - \gamma x. \quad (2.7)$$

Esta igualdade, quando multiplicada por x , resulta em $x^4 = (1 + \gamma)x^3 - \gamma x^2$. Logo

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= (1 + \gamma)(2x^3 + x^2) - \gamma(x^2 + 2x) - 2x^4, \\ (x^2)^2 &= (1 + \gamma)(2x^3 + x^2) - \gamma(x^2 + 2x) - 2(1 + \gamma)x^3 + 2\gamma x^2, \\ (x^2)^2 &= (1 + 2\gamma)x^2 - 2\gamma x. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Definição 2.4. Define-se as **potências plenas** de x por $x^{[1]} = e$ e $x^{[k]} = x^{[k-1]}x^{[k-1]}$, para o inteiro $k \geq 2$.

Lema 2.3. Sejam A uma álgebra e $x \in A$. As potências plenas de x pertencem ao subespaço W , gerado por x e x^2 .

Demonstração. Suponhamos que $x \in A$. Inicialmente, observemos que para $k = 2$, temos $x^{[2]} = x^{[1]}x^{[1]} = xx = x^2 \in W$. Suponhamos, agora, que o lema seja válido, para todas as potências com expoentes menores do que ou iguais ao inteiro positivo k . Então $x^{[k+1]} = x^{[k]}x^{[k]} = \left(x^{[k]}\right)^2 \in W$, por hipótese de indução e concluimos o resultado. ■

O próximo lema descreve o conjunto dos idempotentes de uma train álgebra de posto 3.

Lema 2.4. *Seja A uma train álgebra de posto 3 e $\gamma \neq \frac{1}{2}$. O conjunto dos idempotentes não nulos nessa álgebra é dado por*

$$\text{Id}_1(A) = \left\{ \frac{1}{1-2\gamma}(x^2 - 2\gamma x); x \in A \text{ e } \omega(x) = 1 \right\}.$$

Demonstração. Tomemos um elemento da forma $\alpha x^2 + \beta x$, onde $x \in A$, $\omega(x) = 1$ e $\alpha, \beta \in F$. Por definição de idempotente, temos $(\alpha x^2 + \beta x)^2 = \alpha x^2 + \beta x$, isto é, $\alpha^2(x^2)^2 + 2\alpha\beta x^3 + \beta^2 x^2 = \alpha x^2 + \beta x$. De (2.7) e (2.8), temos que

$$\begin{aligned} \alpha^2(1+2\gamma)x^2 - 2\alpha^2\gamma x + 2\alpha\beta(1+\gamma)x^2 - 2\alpha\beta\gamma x + \beta^2 x^2 &= \alpha x^2 + \beta x, \\ [\alpha^2(1+2\gamma) + 2\alpha\beta(1+\gamma) + \beta^2]x^2 + (-2\alpha^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma)x &= \alpha x^2 + \beta x. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \alpha^2(1+2\gamma) + 2\alpha\beta(1+\gamma) + \beta^2 &= \alpha \\ -2\alpha^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma &= \beta \end{cases},$$

obtemos a solução

$$a = \frac{1}{1-2\gamma}, \quad b = \frac{-2\gamma}{1-2\gamma}$$

e, portanto, o idempotente é

$$\alpha x^2 + \beta x = \frac{1}{1-2\gamma}(x^2 - 2\gamma x).$$

■

Por simplicidade, faremos $\theta = \frac{1}{1-2\gamma}$ e devemos ter em mente que $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Fazendo $x = e \in \text{Id}_1(A)$ e $y \in N$ em (2.5), vem

$$ey + 2e(ey) + 2ey(1+\gamma) + \gamma y = 0 \quad (2.9)$$

e fazendo $x = y \in N$ e $y \in \text{Id}_1(A)$ em (2.5), temos que

$$ey^2 + 2y(ey) = (1+\gamma)y^2. \quad (2.10)$$

Consideremos um idempotente $e \in A$, com $\omega(e) = 1$, e $y \in N$. Definimos o operador $L_e : N \rightarrow N$ pela lei $L_e(y) = ey$ e com isto podemos reescrever (2.9) como

$$\begin{aligned} L_e(y) + 2eL_e(y) - 2(1+\gamma)L_e(y) + \gamma y &= 0, \\ 2L_e^2(y) - (1+2\gamma)L_e(y) + \gamma y &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, o polinômio $p(x) = 2x^2 - (1+2\gamma)x - \gamma = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - \gamma) \in F[X]$ é um anulador de L_e , já que $p(L_e) = 2L_e^2(y) - (1+2\gamma)L_e(y) + \gamma I_N$, sendo I_N o operador identidade

em N , calculado em y é zero, para todo $y \in N$. Notemos que $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$ não anula L_e . Caso contrário, teríamos $L_e(y) - \frac{1}{2}y = 0$, ou seja, $ey = \frac{1}{2}y$. Aplicando esta última relação em (2.10), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2 + y^2 &= (1 + \gamma)y^2, \\ \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)y^2 &= 0, \end{aligned}$$

logo, $\gamma = \frac{1}{2}$, o que não pode ocorrer. Similarmente, o polinômio $p_2(x) = x - \frac{1}{2}$ não é um anulador de L_e , pois resultaria em $L_e(y) - \gamma y = 0$, o que dá $ey = \gamma y$. Levando isto em (2.9), teremos

$$\begin{aligned} \gamma y^2 + 2\gamma y^2 &= (1 + \gamma)y^2, \\ (2\gamma - 1)y^2 &= 0, \end{aligned}$$

ou seja $\gamma = \frac{1}{2}$. Segue que $m(x) = (x - \frac{1}{2})(x - \gamma)$ é o polinômio minimal de L_e . Pelo Teorema da Decomposição Primária, obtemos a soma direta

$$N = \ker\left(L_e - \frac{1}{2}I_N\right) \oplus \ker(L_e - \gamma I_N).$$

Vamos definir os conjuntos U_e e V_e , da seguinte maneira

$$U_e := \ker\left(L_e - \frac{1}{2}I_N\right) = \left\{u \in N; eu = \frac{1}{2}u\right\}, \quad (2.12)$$

$$V_e := \ker(L_e - \gamma I_N) = \{v \in N; ev = \gamma v\}. \quad (2.13)$$

Logo, $N = U_e \oplus V_e$ e como $A = F_e \oplus N$, então $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$.

Definição 2.5. A soma direta $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$, onde U_e é definido em (2.12) e V_e é definido em (2.13), é denominada **decomposição de Peirce relativa ao idempotente e** .

No lema a seguir, veremos como os conjuntos U_e e V_e estão relacionados.

Lema 2.5. Seja A uma train álgebras de posto 3, com a decomposição $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$. Então

$$U_e V_e \subseteq U_e, \quad U_e^2 \subseteq V_e, \quad V_e^2 = 0. \quad (2.14)$$

Demonstração. De fato, linerizando a identidade (2.10), obtemos

$$e(y_1 y_2) + y_1(e y_2) + y_2(e y_1) = (1 + \gamma)y_1 y_2. \quad (2.15)$$

Dados $u_1, u_2 \in N$, segue de (2.12) e (2.15) que

$$\begin{aligned} e(u_1 u_2) + \frac{1}{2} u_1 u_2 + \frac{1}{2} u_1 u_2 &= (1 + \gamma) u_1 u_2, \\ e(u_1 u_2) &= \gamma u_1 u_2. \end{aligned}$$

E assim, concluímos que $U_e^2 \subseteq V_e$. Tomemos $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Usando (2.10), (2.12) e (2.13) obtemos

$$\begin{aligned} e(uv) + u(ev) + v(eu) &= (1 + \gamma) uv, \\ e(uv) &= \frac{1}{2} uv, \end{aligned}$$

e isso implica $uv \in U_e$. Finalmente, dados $v_1, v_2 \in V_e$, segue

$$\begin{aligned} e(v_1 v_2) + \gamma v_1 v_2 + \gamma v_1 v_2 &= (1 + \gamma) v_1 v_2, \\ e(v_1 v_2) &= (1 - \gamma) v_1 v_2, \end{aligned}$$

escrevendo $v_1 v_2 = u + v$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, temos

$$\begin{aligned} e(u + v) &= (1 - \gamma)(u + v), \\ \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) u + (2\gamma - 1)v &= 0. \end{aligned}$$

Decorre de $N = U_e \oplus V_e$ e de $\gamma \neq \frac{1}{2}$, que $u = v = 0$ e, portanto, $v_1 v_2 = u + v = 0$ e $V_e^2 = 0$. ■

No próximo lema temos algumas identidades que os elementos de U_e e V_e satisfazem.

Lema 2.6. *Sejam $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$ uma train álgebra de posto 3, $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $v \in V_e$. Então são válidas as seguintes identidades.*

$$u^3 = 0, \tag{2.16}$$

$$v^3 = 0, \tag{2.17}$$

$$v^2 = 0, \tag{2.18}$$

$$u^2 v = 0, \tag{2.19}$$

$$u(uv) = 0, \tag{2.20}$$

$$v(vu) = 0, \tag{2.21}$$

$$u_1^2 u_2 + 2u_1(u_1 u_2) = 0, \tag{2.22}$$

$$u_1^2(u_1 u_2) = 0, \tag{2.23}$$

$$u_1^2(u_1 v) = 0, \tag{2.24}$$

$$(uv)^2 = 0. \tag{2.25}$$

Demonstração. Como em A temos $x^3 = 0$, em particular vale $u^3 = v^3 = 0$. A identidade (2.18) segue imediatamente do fato de que $V_e^2 = 0$. Substituindo x_1 por u e x_2 por v em (2.3), obtemos $u^2v + 2u(uv) = 0$. Mas, por (2.19), $u^2v = 0$. Logo, $u(uv) = 0$. Agora, vamos substituir x_1 por v e x_2 por u em (2.3), obtemos $v^2u + 2v(vu) = 0$ e segue de (2.18) que $v(vu) = 0$. A igualdade (2.20) é um caso particular de (2.3), onde $x_1 = u_1$ e $x_2 = u_2$. Para concluir, usamos o lema anterior da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_1^2(u_1u_2) &\in U_e^2(U_eU_e) \subseteq V_eV_e = V_e^2 = 0, \\ u_1^2(u_1v) &\in U_e^2(U_eV_e) \subseteq V_eV_e = V_e^2 = 0, \\ (uv)^2 &\in (U_eV_e)^2 \subseteq V_e^2 = 0. \end{aligned}$$

■

Lema 2.7. *Em uma train álgebra A de posto 3, com a decomposição de Peirce $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$, são válidas as identidades abaixo, quaisquer que sejam os elementos $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v, v_1, v_2, v_3 \in V_e$.*

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0, \quad (2.26)$$

$$v_1(v_2v_3) + v_2(v_1v_3) + v_3(v_1v_2) = 0, \quad (2.27)$$

$$v_1v_2 = 0, \quad (2.28)$$

$$(u_1u_2)v = 0, \quad (2.29)$$

$$u_1(u_2v) = 0, \quad (2.30)$$

$$u_2(u_1v) = 0, \quad (2.31)$$

$$v_1(uv_2) + v_2(uv_1) = 0, \quad (2.32)$$

$$(u_1v)(u_2v) = 0, \quad (2.33)$$

$$(uv_1)(uv_2) = 0. \quad (2.34)$$

Demonstração. De fato, linearizando a igualdade (2.16), obtemos a igualdade (2.26). Analogamente, linearizando a igualdade (2.17), obtemos a igualdade (2.27). As demais identidades são obtidas a partir do Lema 2.5. ■

Agora vamos caracterizar os idempotentes de peso 1 de uma train álgebra de posto 3.

Teorema 2.1. *Seja $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$ é uma train álgebra de posto 3. Então o conjunto dos idempotentes de peso 1 de A é*

$$\text{Id}_1(A) = \left\{ e + u + \theta u^2; u \in U_e, \theta = \frac{1}{1-2\gamma}, \gamma \neq \frac{1}{2} \right\}.$$

Demonstração. Com base no Lema 2.5, temos

$$\begin{aligned} (e + u + \theta u^2)^2 &= e^2 + u^2 + \theta^2(u^2)^2 + 2eu + 2\theta eu^2 + 2\theta u^3 = e + u + u^2 + 2\theta\gamma u^2, \\ &= e + u + (1 + 2\theta\gamma)u^2 = e + u + \left(1 + \frac{2\gamma}{1-2\gamma}\right)u^2, \\ &= e + u + \frac{1}{1-2\gamma}u^2 = e + u + \theta u^2. \end{aligned}$$

e assim $e + u + \theta u^2 \subseteq \text{Id}_1(A)$. Por outro lado, seja $x \in \text{Id}_1(A)$, então $x = e + u + v$, onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Como $x^2 = x$, segue que

$$\begin{aligned} e + u + v &= (e + u + v)^2 = e + u^2 + 2eu + 2ev + 2uv = e + u^2 + 2eu + 2\gamma v + 2uv, \\ &= e + (u + 2uv) + (u^2 + 2\gamma v), \end{aligned}$$

pela decomposição $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$, temos que $u = u + 2uv$, isto é $uv = 0$ e ainda $v = u^2 + 2\gamma v$, o que fornece $v = \theta u^2$. Portanto, $x = e + u + v$. ■

Pelo que acabamos de ver, fixando um idempotente $e \in \text{Id}_1(A)$, qualquer outro idempotente não nulo pode ser escrito como $f = e + u_0 + u_0^2$, onde $u_0 \in U_e$.

Corolário 2.1. *Sejam $e, f \in \text{Id}_1(A)$, tais que $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$. Então as funções abaixo são isomorfismos.*

$$\begin{aligned} \sigma_{e,u_0} : U_e &\longrightarrow U_f \\ u &\longmapsto u + 2\theta u_0 u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{e,u_0} : V_e &\longrightarrow V_f \\ v &\longmapsto v - 2\theta u_0 v \end{aligned}$$

Demonstração. Pelos lemas anteriores, temos que as aplicações σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} estão bem definidas, pois

$$\begin{aligned} 2f(u + 2\theta u_0 u) &= 2(e + u_0 + \theta u_0^2)(u + 2\theta u_0 u) \\ &= 2eu + 4\theta e(u_0 u) + 2u_0 u + (4\theta u_0(u_0 u) + 2\theta u_0^2 u) + 4\theta^2 u_0^2(u_0 u) \\ &= u + 4\theta\gamma(u_0 u) + 2(u_0 u) + 2\theta(u_0^2 + u_0^2(u_0 u)) \\ &= u + 2(2\theta\gamma + 1)u_0 u = u + 2\left(\frac{2\gamma}{1-2\gamma} + 1\right)(u_0 u) \\ &= u + \frac{2}{1-2\gamma}(u_0 u) = u + 2\gamma u_0 u \in U_f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v - 2\theta u_0 v) &= 2(e + u_0 + \theta u_0^2)(v - 2\theta u_0 v) \\ &= ev - 2\theta e(u_0 v) + u_0 v - 2\theta u_0(u_0 v) + u_0^2 v - 2\theta u_0^2(u_0 v) \\ &= \gamma v - \theta u_0 v + u_0 v = \gamma v + \left(1 - \frac{1}{1-2\gamma}\right)u_0 v \\ &= \gamma\left(v - \frac{2}{1-2\gamma}u_0 v\right) = \gamma(v - 2\theta u_0 v). \end{aligned}$$

Dados $u_1, u_2 \in U_e$, com $\sigma_{e,u_0}(u_1) = \sigma_{e,u_0}(u_2)$, temos que $u_1 + 2\theta u_0 u_1 = u_2 + 2\theta u_0 u_2$, mas pela soma direta $N = U_e \oplus V_e$, concluímos que $u_1 = u_2$. Analogamente, Dados $v_1, v_2 \in V_e$, com $\tau_{e,u_0}(v_1) = \tau_{e,u_0}(v_2)$, temos que $v_1 - 2\theta u_0 v_1 = v_2 - 2\theta u_0 v_2$, daí $v_1 = v_2$. Logo, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} são injetivas.

Seja $\varphi_{e,u_0} : A \longrightarrow A$, definida pela lei $\varphi_{e,u_0}(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma_{e,u_0}(u) + \tau_{e,u_0}(v)$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, vemos que φ_{e,u_0} é injetiva, portanto sobrejetiva. Logo, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} também são sobrejetivas. Portanto, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} são isomorfismos. ■

Notemos que não há problema em escrever simplesmente σ, τ e φ ao invés de $\sigma_{e,u_0}, \tau_{e,u_0}$ e φ_{e,u_0} , já que estas aplicações não dependem dos idempotentes $e, f \in \text{Id}_1(A)$. Além disso, o corolário acima nos diz para $e, f \in \text{Id}_1(A)$, onde $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$, tem-se que

$$\begin{aligned} U_f &= \{u + 2\theta u_0 u; u \in U_e\}, \\ V_f &= \{v - 2\theta u_0 v; v \in V_e\}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Álgebras de Bernstein e de Bernstein-Jordan

3.1 Álgebras de Bernstein

Definição 3.1. Diz-se que a álgebra bária (A, ω) sobre um corpo F é uma **álgebra de Bernstein**, se A for comutativa e

$$(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2, \quad (3.1)$$

para todo $x \in A$.

Como uma álgebra de Bernstein (A, ω) é uma álgebra bária, pelo Lema 2.1, podemos decompô-la na soma direta $A = Fx \oplus N$, onde N é o kernel de ω . Além disso, dado $n \in N$, tem-se que

$$(n^2)^2 = 0 \quad (3.2)$$

e por linearização, temos que

$$n_1^2(n_1n_2) = 0, \quad (3.3)$$

$$n_1^2(n_2n_3) + 2(n_1n_2)(n_1n_3) = 0, \quad (3.4)$$

$$(n_1n_2)(n_3n_4) + (n_1n_3)(n_2n_4) + (n_1n_4)(n_2n_3) = 0, \quad (3.5)$$

para quaisquer $n_1, n_2, n_3, n_4 \in N$.

O lema a seguir nos mostra um resultado análogo ao que já foi provado para train álgebras de posto 3.

Lema 3.1. *Toda álgebra de Bernstein possui um único caracter.*

Demonstração. Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein e suponhamos que ω' seja outro caracter de A . Dado $n \in N$, temos que $(n^2)^2 = \omega(n)^2n^2 = 0n^2 = 0$ e notemos que

$\omega'(n)^4 = (\omega'(n)^2)^2 = \omega'((n^2)^2) = \omega'(0) = 0$ e com isso podemos dizer que $n \in \ker(\omega')$. Como ω é caracter de A então, pelo Lema 2.1 existe um $x_0 \in A$ tal que $\omega(x_0) \neq 0$ e $A = Fx_0 \oplus N$. Daí, para qualquer x em A existem e são únicos $\alpha \in F$ e $n \in N$ tais que $x = \alpha x_0 + n$. Com isso,

$$\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha \omega'(x_0) = \alpha \omega'(x_0) \frac{\omega(x_0)}{\omega(x_0)} = \alpha \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)} \omega(x_0).$$

Fazendo $\lambda = \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$, tem-se

$$\omega'(x) = \alpha \lambda \omega(x_0) = \alpha \lambda \omega(x_0) + 0 = \alpha \lambda \omega(x_0) + \omega(n) = \lambda \omega(\alpha x_0 + n) = \lambda \omega(x).$$

Portanto, $\omega' = \lambda \omega$ com $\lambda \neq 0$ pois ω' é caracter de A . Mas,

$$\lambda \omega(x_0)^2 = \lambda \omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = [\lambda \omega(x_0)]^2 = \lambda^2 \omega(x_0)^2.$$

Logo, $(\lambda^2 - \lambda)\omega(x_0)^2 = 0$ e como $\omega(x_0)^2 \neq 0$ tem-se $\lambda^2 - \lambda = 0$, o que implica que $\lambda = 1$ e, portanto, $\omega' = \omega$. ■

O lema anterior nos permite denotar uma álgebra de Bernstein (A, ω) simplesmente por A . No que segue, suporemos sempre que F é um corpo de característica diferente de 2.

Lema 3.2. *Seja A um álgebra de Bernstein sobre um corpo F com mais de três elementos. Nessas condições, a seguinte identidade é válida para quaisquer $x, y \in A$.*

$$2x^2(xy) = \omega(x)^2xy + \omega(x)\omega(y)x^2. \quad (3.6)$$

Demonstração. Dados $x, y \in A$, trocamos x por $\alpha x + y$, com $\alpha \in F$ em (3.1), temos

$$((\alpha x + y)^2)^2 = \omega(\alpha x + y)^2(\alpha x + y)^2.$$

Desenvolvendo esta igualdade, aplicando, em seguida, (3.1) novamente e reordenando os termos, temos

$$\alpha^3(4x^2(xy) - 2\omega(x)^2xy - 2\omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha^2(4(xy)^2 + 2x^2y^2 - \omega(x)^2y^2 - 4\omega(x)\omega(y)xy - \omega(y)^2x^2) + \alpha(4(xy)y^2 - 2\omega(x)\omega(y)y^2 - 2\omega(y)^2xy) = 0.$$

Substituindo α por $-\alpha$ nesta equação resulta

$$\alpha^3(-4x^2(xy) + 2\omega(x)^2xy + 2\omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha^2(4(yx)^2 + 2x^2y^2 - \omega(x)^2y^2 - 4\omega(x)\omega(y)xy - \omega(y)^2x^2) + \alpha(-4(xy)y^2 + 2\omega(x)\omega(y)y^2 + 2\omega(y)^2xy) = 0.$$

Agora, subtraindo estas duas equações e depois multiplicando por $\frac{1}{4}$ temos

$$\alpha^3(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha(2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2(xy)) = 0.$$

Como F tem característica diferente de 2 e mais de 3 elementos então $1 \neq -1$. Assim existe $\beta \in F$ com $\beta \notin \{0, 1, -1\}$ de tal modo que substituindo α por β e multiplicando por $\frac{1}{\beta}$ na última equação verificamos que

$$\beta^2(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2(xy)y^2 - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2xy) = 0.$$

Fazendo $\alpha = 1$ obtemos

$$(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2xy) = 0.$$

Finalmente, subtraindo as duas últimas equações resulta

$$(\beta^2 - 1)(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) = 0$$

e como $\beta^2 \neq 1$ concluímos o resultado. ■

O próximo passo é descrever o conjunto dos idempotentes de uma álgebra de Bernstein.

Lema 3.3. *Seja A uma álgebra de Bernstein. Todo idempotente não nulo pertence ao conjunto $\text{Id}_1(A) = \{x^2; x \in A \text{ e } \omega(x) = 1\}$.*

Demonstração. Seja $x \in A$ um idempotente não nulo. Temos que $x = x^2 = (x^2)^2 = \omega(x^2)x^2 = \omega(x)x$, ou seja, $\omega(x) = 1$ e $\text{Id}_1(A) \subseteq X$. Por outro lado, se $y \in \text{Id}_1(A)$, então existe $x \in A$, de modo que $y = x^2$ e $\omega(x) = 1$. Segue de (3.1) que $y^2 = (x^2)^2 = \omega(x^2)x^2 = \omega(x)\omega(x)x^2 = x^2 = y$, assim y é um idempotente de A . ■

Lema 3.4. *Sejam (A, ω) uma álgebra bária sobre um corpo F e e um idempotente não-nulo de peso 1. Se F tem pelo menos quatro elementos, então (A, ω) é de Bernstein se, e somente se, todo $y \in N$ verifica as identidades abaixo.*

$$2e(2ey) = 2ey, \tag{3.7}$$

$$(2ey)y^2 = 0, \tag{3.8}$$

$$2ey^2 + (2ey)^2 = y^2, \tag{3.9}$$

$$(y^2)^2 = 0. \tag{3.10}$$

Demonstração. Como $\omega(e) = 1$ e $\omega(y) = 0$ para qualquer $y \in N$, substituímos x por e em (3.1) e multiplicando ambos os membros por 2 obtemos (3.7). Substituindo em x por y e y por e em (3.6), teremos

$$0 = \omega(y)^2ye + \omega(y)\omega(e)y^2 = 2y^2(ye) = (2ey)y^2.$$

Substituindo x por $e + y$ e y por e em (3.6) temos

$$2e(ey) + 2e(2ey) + (2ey)^2 + (2ey)y^2 = ey + 2ey + y^2.$$

e usando (3.7) e (3.8) chegamos à equação (3.9). E para obter a identidade (3.10), basta substituir x por y em (3.1). Reciprocamente, se (A, ω) for uma álgebra bária, e um idempotente não nulo de peso e todo $y \in N$ cumprir as igualdades (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10), então para um dado $x = \omega(x)e + y \in A$, com $y \in N$ e $\omega(x) \in F$, temos

$$\begin{aligned}
 (x^2)^2 &= ((\omega(x)e + y)^2)^2 \\
 &= (\omega(x)^2 e + 2\omega(x)ey + y^2)^2 \\
 &= \omega(x)^4 e + 4\omega(x)^2(ey)^2 + (y^2)^2 + 4\omega(x)^3 e(ey) + 4\omega(x)(ey)y^2 + 2\omega(x)^2 ey^2 \\
 &= \omega(x)^4 e + \omega(x)^2 (2ey^2 + (2ey)^2) + \omega(x)^3 2e(2ey) \\
 &= \omega(x)^2 (\omega(x)^2 e + \omega(x)2e(2ey) + y^2) = \omega(x)^2 (\omega(x)^2 e + \omega(x)2ey + y^2) \\
 &= \omega(x)^2 (\omega(x)e + y)^2 = \omega(x)^2 x^2 = \omega(x^2)x^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, (A, ω) é álgebra de Bernstein. ■

Considerando o ideal N , podemos definir um operador $M_e : N \rightarrow N$ dado por $M_e(y) = 2ey$, para cada $y \in N$. Note-se que M_e é uma projeção, pois $M_e^2(y) = M_e(M_e(y)) = 2e(2ey) = 2ey = M_e(y)$. Então se U_e e V_e são a imagem e o kernel, respectivamente, de M_e , temos a seguinte decomposição

$$N = U_e \oplus V_e,$$

onde

$$U_e = \left\{ u \in N; eu = \frac{1}{2}u \right\}, \quad (3.11)$$

$$V_e = \{v \in N; ev = 0\}. \quad (3.12)$$

A seguir, mostramos mais um resultado análogo ao que foi visto para as train álgebras de posto 3 em relação aos conjuntos U_e e V_e .

Lema 3.5. *Seja A uma álgebra de Bernstein. Tem-se as seguintes inclusões:*

$$U_e V_e \subseteq U_e, \quad U_e^2 \subseteq V_e, \quad V_e^2 \subseteq U_e.$$

Demonstração. Inicialmente reescrevemos (3.9) em função do operador M_e para obter $M_e(y)^2 + M_e(y)^2 = y^2$ e, por linearização, $M_e(y_1 y_2) + M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1 y_2$, onde $y_1, y_2 \in N$.

Tomemos $y_1, y_2 \in U_e$, então $M_e(y_1 y_2) + (2ey_1)(2ey_2) = y_1 y_2$, ou seja $M_e(y_1 y_2) = 0$. Isso fornece $y_1, y_2 \in V_e$ e $U_e^2 \subseteq V_e$.

Quando $y_1 \in V_e$ ou $y_2 \in V_e$, temos $M_e(y_1 y_2) = y_1 y_2$, daí $y_1 y_2 \in U_e$ e portanto $NV_e \subseteq U_e$. Assim, em particular, temos as desigualdades $U_e V_e \subseteq U_e$ e $V_e^2 \subseteq U_e$. ■

Definição 3.2. *A soma direta $A = F_e \oplus U_e \oplus V_e$, onde U_e é definido em (3.11) e V_e é definido em (3.12), é denominada **decomposição de Peirce relativa ao idempotente e** .*

Agora, vamos ver como reescrever um elemento x da álgebra de Bernstein A usando a sua decomposição de Peirce e algumas identidades que os elementos de U_e e V_e de uma álgebra de Bernstein satisfazem.

Teorema 3.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bária com idempotente não-nulo e .*

(a) *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, decompondo cada $x \in A$ da forma $x = \omega(x)e + u + v$ com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, tem-se:*

$$x^2 = \omega(x)^2 e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2, \quad (3.13)$$

onde $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$. Além disso, valem as seguintes identidades, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$:

$$u^3 = 0, \quad (3.14)$$

$$u(uv) = 0, \quad (3.15)$$

$$uv^2 = 0, \quad (3.16)$$

$$(u^2)^2 = 0, \quad (3.17)$$

$$(uv)^2 = 0. \quad (3.18)$$

(b) *Reciprocamente, se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é soma direta de subespaços com a multiplicação satisfazendo (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18), então (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com $U = U_e$ e $V = V_e$.*

Demonstração. (a) Seja (A, ω) álgebra de Bernstein. Como A admite a decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, podemos escrever para todo $x \in A$, $x = \omega(x)e + u + v$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Lembrando que $2eu = M_e(u) = u$ e $2ev = M_e(v) = 0$, para $u \in U_e$ e $v \in V_e$, temos $x^2 = (\omega(x)e + u + v)^2 = \omega(x)^2 e^2 + u^2 + v^2 + 2\omega(x)eu + 2\omega(x)ev + 2uv = \omega(x)^2 e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$. Pelo lema anterior, segue que $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$. Prova-se assim, (3.13).

Cada $y \in N$ se decompõe da forma $y = \alpha u + \beta v$, onde $\alpha, \beta \in F$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Desse modo, $2ey = M_e(y) = \alpha M_e(u) + \beta M_e(v) = \alpha u$. Substituindo $y = \alpha u + \beta v$ na identidade (3.8), obtemos:

$$0 = (2ey)y^2 = \alpha u(\alpha u + \beta v)^2 = \alpha^3 u^3 + 2\alpha^2 \beta u(uv) + \alpha \beta^2 uv^2,$$

para todo $\alpha, \beta \in F$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Fazendo $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, temos $u^3 = 0$. Para $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, resulta em

$$-u^3 + 2u(uv) - uv^2 = 0. \quad (3.19)$$

Para $\alpha = \beta = 1$,

$$u^3 + 2u(uv) + uv^2 = 0. \quad (3.20)$$

Finalmente, para $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, temos

$$u^3 - 2u(uv) + uv^2 = 0. \quad (3.21)$$

Da soma de (3.16) e (3.17), resulta $u(uv) = 0$. Somando (3.17) e (3.18), obtemos $uv^2 = 0$. Substituindo y , desta vez, em (3.10), resulta que $(y^2)^2 = 0$ se, e somente se, $(u^2)^2 = (uv)^2 = u^2v^2 = (v^2)^2 = u^2(uv) = (uv)v^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= (y^2)^2 = ((\alpha u + \beta v)^2)^2 \\ &= (\alpha^2 u^2 + 2\alpha\beta(uv) + \beta^2 v^2)^2 \\ &= \alpha^4(u^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2(uv)^2 + 2\alpha^2\beta^2 u^2 v^2 + \beta^4(v^2)^2 + 4\alpha^3\beta u^2(uv) + 4\alpha\beta^3(uv)v^2, \end{aligned}$$

para todo $u \in U_e$ e $v \in v_e$. Por hipótese, a identidade $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$ é satisfeita para todo $x \in A$; em particular, $(u^2)^2 = (v^2)^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Fazendo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, resulta

$$4(uv)^2 + 2u^2v^2 - 4u^2(uv) - 4(uv)v^2 = 0. \quad (3.22)$$

Para $\alpha = \beta = 1$, temos

$$4(uv)^2 + 2u^2v^2 + 4u^2(uv) + 4(uv)v^2 = 0. \quad (3.23)$$

Somando (3.22) e (3.23), obtemos $2(uv)^2 + u^2v^2 = 0$. Do lema anterior, temos que $(uv)^2 \in V_e$ e $u^2v^2 \in U_e$. Como $U_e \cap V_e = \{0\}$, pois $N = U_e \oplus V_e$, concluímos que $(uv)^2 = u^2v^2 = 0$. Subtraindo (3.22) e (3.23), resulta $u^2(uv) + (uv)v^2 = 0$. Pelo lema anterior e pelo fato de $U_e \cap V_e = \{0\}$, concluímos que $u^2(uv) = (uv)v^2 = 0$. Em particular, valem as identidades em (3.17) e (3.18).

(b) Como $A = Fe \oplus N = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ por hipótese, podemos decompor cada $y \in N$ na forma $y = u + v$, onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Usando (3.13) para $x = e + u + v$, temos $x^2 = e^2 + u^2 + v^2 + 2eu + 2ev + 2uv = e + u + 2uv + v^2 + u^2$. Assim, $2e(u + v) = u$. Lembremos que o operador $M_e : N \rightarrow N$, definido por $L_{2e}(y) = 2ey$ é uma projeção com $\text{Im}(L_{2e}) = U_e$ e $\ker(L_{2e}) = V_e$ e é de fácil verificação que $\text{Im}(L_{2e}) = U_e$ e $\ker(L_{2e}) = V_e$. Temos, assim, a identidade (3.7) verificada. Novamente, por (3.13) temos $y^2 = (u + v)^2 = 2uv + v^2 + u^2$, com $2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$, o que implica $U_e V_e + V_e^2 \subseteq U_e$ e $U_e^2 \subseteq V_e$. Desse modo,

$$\begin{aligned} 2ey^2 + (2ey)^2 &= M_e(y^2) + (M_e(y))^2 \\ &= M_e(u^2 + 2uv + v^2) + u^2 \\ &= M_e(u^2) + M_e(2uv + v^2) + u^2 \\ &= 2uv + v^2 + u^2 \\ &= y^2. \end{aligned}$$

Portanto, vale (3.9). Resta então, provar que para todo $y = u + v \in N$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, vale $(y^2)^2 = (u^2 + 2uv + v^2)^2 = (u^2)^2 + 4(uv)^2 + (v^2)^2 + 4u^2(uv) + 2u^2v^2 + 4(uv)v^2 = 0$. Por hipótese, temos $(uv)^2 = (u^2)^2 = 0$. Logo, é suficiente mostrar que:

$$(v^2)^2 = u^2(uv) = u^2v^2 = (uv)v^2 = 0, \quad (3.24)$$

para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$.

Façamos uma linearização da identidade $u^3 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 = u(uu) \\ &= u_1(uu) + u(u_1u) + u(uu_1) \\ &= u_1u^2 + 2u(u_1u). \end{aligned}$$

Fazendo $u = u_2$ e linearizando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= u^3 \\
&= u_1(u_2u_3 + u_3u_2) + 2(u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2)) \\
&= 2u_1(u_2u_3) + 2u_2(u_1u_3) + 2u_3(u_1u_2) \\
&= u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

para todo $u_1, u_2, u_3 \in U$. Tomando $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = uv$, obtemos $2u(u(uv)) + (uv)u^2 = 0$, o que implica $(uv)u^2 = 0$, pois, por hipótese, $u(uv) = 0$. Da mesma forma, tomando $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = v^2$, resulta $2u(uv^2) + u^2v^2 = 0$, o que implica $u^2v^2 = 0$, pois, desta vez, $uv^2 = 0$. Finalmente, da identidade $uv^2 = 0$ e observando que U_eV_e e V_e^2 estão contidos em U_e , concluímos que $(uv)v^2 = (v^2)^2 = 0$.

Provamos assim que as identidades do Lema 3.4 são satisfeitas para todo $y \in N$. Portanto (A, ω) é uma álgebra de Bernstein. ■

Temos, ainda, outras identidades obtidas através da linearização das identidades (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18).

Corolário 3.1. *Em uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ valem as seguintes identidades:*

$$u(v_1v_2) = 0, \tag{3.26}$$

$$u(u^2v) = 0, \tag{3.27}$$

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0, \tag{3.28}$$

$$u^2(u^2v) = 0, \tag{3.29}$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0, \tag{3.30}$$

$$u_1^2(u_1u_2) = 0, \tag{3.31}$$

$$u_1^2(u_2v) + 2(u_1u_2)(u_1v) = 0, \tag{3.32}$$

$$(u_1v)(u_2v) = 0, \tag{3.33}$$

$$(uv_1)(uv_2) = 0, \tag{3.34}$$

$$(u_1u_2)v^2 = 0, \tag{3.35}$$

$$u^2(v_1v_2) = 0, \tag{3.36}$$

para todos $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $v, v_1, v_2 \in V_e$.

Demonstração. Linearizando $uv^2 = 0$, resulta $u(v_1v) = 0$. Fazendo $v = v_2$ e $v_1 = u^2$ obtém-se (3.27), observando que $u^2 \in V_e$, para todo $u \in U_e$. A identidade (3.28) vem de (3.25), fazendo $u_1 = u_3$. Assim, lembrando que $u(u^2v) = 0$, obtemos $u^2(u^2v) = -2u(u(u^2v)) = 0$, o que verifica a segunda identidade de (3.27). Linearizando $u(uv) = 0$, obtemos $u_1(uv) + u(u_1v) = 0$. Fazendo $u = u_2$, obtemos a identidade (3.30). Ao linearizarmos $(u^2)^2 = 0$, resulta $u_1^2(u_1u) = 0$, que nos (3.31) tomando-se $u = u_2$. A identidade (3.32) pode ser obtida através da linearização de $u^2(uv) = 0$, conforme segue: $u^2(uv) = 0$ isto implica que $(uu)(uv) = 0$, daí segue que $(u_1u)(uv) + (uu_1)(uv) + u^2(u_1v) = u^2(u_1v) + 2(uu_1)(uv) = 0$.

Agora, basta tomar $u = u_1$ e $u_1 = u_2$. Linearizando $(uv)^2 = 0$, temos: $(uv)(uv) = 0$ então $(u_1v)(uv) + (uv)(u_1v) = 0 = (u_1v)(uv)$. Fazendo $u = u_2$, obtemos $(u_1v)(u_2v) = 0$. Da mesma forma, podemos escrever $(uv)(uv) = 0$ segue que $(uv_1)(uv) + (uv)(uv_1) = 0 = (uv_1)(uv)$. Fazendo $v = v_2$, obtemos $(uv_1)(uv_2) = (u_1v)(u_2v) = 0$. Finalmente, uma linearização de $u^2v^2 = 0$ é dada por $(uu)(vv) = (uu)v^2 = 0$, então $(u_1u)v^2 = 0$. Fazendo $u = u_2$, obtemos $(u_1u_2)v^2 = 0$. De forma análoga, podemos obter $u^2(v_1v_2) = (u_1u_2)v^2 = 0$. ■

Corolário 3.2. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein e $e \in \text{Id}_1(A)$. Então todo idempotente de peso 1 pertence ao conjunto $\text{Id}_1(A) = \{e + u + u^2; u \in U_e\}$.*

Demonstração. Começamos provando que para todo $u \in U_e$, $e + u + u^2 \in \text{Id}_1(A)$. Mas para todo $u \in U_e$, tem-se $2eu = M_e(u) = u$, $2eu^2 = M_e(u^2) = 0$, $u^3 = 0$ e $(u^2)^2 = 0$. Logo

$$(e + u + u^2)^2 = e^2 + u^2 + (u^2)^2 + 2eu + 2eu^2 + 2uu^2 = e + u + u^2$$

e $e + u + u^2$ é idempotente de peso 1. Fica, então, provado que $\{e + u + u^2; u \in U_e\} \subseteq \text{Id}_1(A)$. Por outro lado, se x é um idempotente de peso 1, temos $x = e + u + v$ e $x^2 = x$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Da equação (3.13), temos $x^2 = x = e + u + v = e + (u + 2uv + v^2) + u^2$, com $u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$, de onde resulta $v = u^2$. Logo, para todo $x \in \text{Id}_1(A)$, temos $x = e + u + u^2$, para um certo $u \in U_e$. Portanto, $\text{Id}_1(A) \subseteq \{e + u + u^2; u \in U_e\}$. ■

Corolário 3.3. *Sejam $e, f = e + u_0 + u_0^2$ idempotentes não nulos de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, com $u_0 \in U_e$. Então as aplicações abaixo são isomorfismos de espaços vetoriais.*

$$\begin{aligned} \sigma : U_e &\longrightarrow U_f \\ u &\longmapsto u + 2uu_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau : V_e &\longrightarrow V_f \\ u &\longmapsto v - 2u_0v - 2u_0^2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : U_e &\longrightarrow U_f \\ u &\longmapsto u - 2uu_0^2 \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos começar provando que as aplicações estão bem definidas. De fato, σ está bem definida, pois usando (3.3), (3.11), (3.12), o Lema 3.5, (3.17) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} 2(e + u_0 + u_0^2)(u + 2uu_0) &= 2eu + 4e(uu_0) + 2uu_0 + 4u_0(uu_0) + 2uu_0^2 + 4u_0^2(uu_0) \\ &= u + 2uu_0. \end{aligned}$$

Para ver que τ está bem definida, observemos que $x \in V_f$ equivale à $M_f(x) = 2fx = 0$, ou seja, $fx = 0$. Então segue de (3.6), (3.12), do Lema 3.5 e do corolário anterior que

$$\begin{aligned} f(v - 2u_0v - 2u_0^2v) &= ev - 2e(u_0v) - 2e(u_0^2v) + u_0v - 2u_0(u_0v) - 2u_0(u_0^2v) \\ &\quad + u_0^2v - 2u_0^2(u_0v) - 2u_0^2(u_0^2v) = -2u_0^2(u_0^2v) \\ &= -2(-2u_0(u_0(u_0^2v))) = 4u_0(u_0(u_0^2v)) = 0. \end{aligned}$$

É fácil ver que as três aplicações são lineares. Dados $u_1, u_2 \in U_e$ e $v_1, v_2 \in V_e$ e $\alpha \in F$, temos

$$\begin{aligned}
 \sigma(\alpha u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + u_2 + 2u_0(\alpha u_1 + u_2) = \alpha u_1 + 2\alpha u_0 u_1 + u_2 + 2u_0 u_2 \\
 &= \alpha(u_1 + 2u_0 u_1) + u_2 + 2u_0 u_2 = \alpha\sigma(u_1) + \sigma(u_2), \\
 \tau(\alpha v_1 + v_2) &= \alpha v_1 + v_2 - 2u_0(\alpha v_1 + v_2) - 2u_0^2(\alpha v_1 + v_2) \\
 &= \alpha v_1 - 2\alpha u_0 v_1 - 2\alpha u_0^2 v_1 + v_2 - 2u_0 v_2 - 2u_0^2 v_2 \\
 &= \alpha(v_1 - 2u_0 v_1 - 2u_0^2 v_1) + v_2 - 2u_0 v_2 - 2u_0^2 v_2 \\
 &= \alpha\tau(v_1) + \tau(v_2), \\
 \psi(\alpha u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + u_2 - 2(\alpha u_1 + u_2)u_0^2 = \alpha u_1 - 2\alpha u_1 u_0^2 + u_2 - 2u_2 u_0^2 \\
 &= \alpha(u_1 - 2u_1 u_0^2) + u_2 - 2u_2 u_0^2 = \alpha\psi(u_1) + \psi(u_2).
 \end{aligned}$$

As aplicações são injetoras. Seja $u \in U_e$ tal que $\sigma(u) = 0$, então $u + 2u_0 u = 0$, ou ainda, $u = -2u_0 u \in V_e$. Logo, $u \in U_e \cap V_e$. Porém $U_e \cap V_e = 0$, sendo assim só pode ser $u = 0$. Seja $v \in V_e$ tal que $\tau(v) = 0$. Agora temos que $v - 2u_0 v_1 - 2u_0^2 v = 0$ e, pela Decomposição de Peirce, decorre que $v = 0$. Seja $u \in U_e$ para o qual $\psi(u) = 0$, isto é, $u = 2uu_0^2$. Multiplicando por u_0^2 ambos os membros dessa equação e utilizando o Lema 3.5 e as identidades (3.14), (3.28) e (3.30) obtemos $uu_0^2 = 2u_0^2(uu_0^2) = -4u_0(u_0(uu_0^2)) = 4u_0(uu_0^3) = 0$ e, portanto, $u = 0$.

Finalmente, provemos que as aplicações são sobrejetoras. Dado $y \in U_f \subset N$ podemos obter $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $y = u + v$. Assim

$$\begin{aligned}
 (u + v) &= 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) = 2eu + 2ev + 2u_0 u + 2u_0 v + 2u_0^2 u + 2u_0^2 v \\
 &= u + 2u_0 u + 2u_0 v + 2u_0^2 u + 2u_0^2 v.
 \end{aligned}$$

Segue da decomposição de Peirce que $2u_0 v + 2uu_0^2 + 2u_0^2 v = 0$ e $v = 2uu_0$, resultando em $\sigma(u) = y$. Fica, assim, provado que σ é sobrejetora e de modo análogo se prova que o mesmo para ψ . Dados $u \in U_e$ e $v \in V_e$, seja $y = u + v \in V_f$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 0 &= 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) = 2eu + 2ev + 2u_0 u + 2u_0 v + 2u_0^2 u + 2u_0^2 v \\
 &= (u + 2u_0 v + 2u_0^2 v + 2u_0^2 u) + 2u_0 u.
 \end{aligned}$$

Notemos que $u + 2u_0 v + 2u_0^2 v + 2u_0^2 u \in U_e$ e $u_0 u \in V_e$, como $N = U_e \oplus V_e$ então $u + 2u_0 v + 2u_0^2 v + 2u_0^2 u = 0$ e $2u_0 u = 0$ por (3.28) segue que $u_0^2 u = -2u_0(u_0 u) = 0$, assim $u = -2u_0 v - 2u_0^2 v$, logo $\tau(v) = v - 2u_0 v - 2u_0^2 v = v + u = y$. ■

Decorre do que acabamos de ver que as dimensões de U_e e V_e não dependem da escolha do idempotente não nulo e ; assim, o par $(1 + \dim U_e; \dim V_e)$ é um invariante para álgebras de Bernstein com dimensão finita e é denominado o **tipo** da álgebra $(A; \omega)$.

3.2 Álgebras de Bernstein-Jordan

Definição 3.3. Uma álgebra comutativa A é uma **álgebra de Jordan** quando quaisquer elementos $x, y \in A$ cumprem com seguinte condição

$$x^2(yx) = (x^2y)x. \quad (3.37)$$

Definição 3.4. Diz-se que a álgebra de Bernstein A é uma **álgebra de Bernstein-Jordan** quando A também for uma álgebra de Jordan.

O seguinte teorema caracteriza as álgebras de Bernstein-Jordan.

Teorema 3.2. Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

- (a) A é uma álgebra de Jordan;
- (b) $V_e^2 = 0$ para todo $e \in \text{Id}_1(A)$;
- (c) $V_e^2 = 0$, para algum $e \in \text{Id}_1(A)$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$;
- (d) Todo elemento $x \in A$ satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b). Como A é uma álgebra de Jordan, vamos substituir x por $e + v$ e y por e em (3.37), onde $e \in \text{Id}_1(A)$ e $v \in V_e$. Recordando que $e^2 = e$, $ev = 0$, $eu = \frac{1}{2}u$, $U_e^2 \subseteq V_e$, $V_e^2 \subseteq U_e$ e $U_e V_e \subseteq U_e$, temos que

$$\begin{aligned} (e + v)^2(e(e + v)) &= ((e + v)^2e)(e + v), \\ (e^2 + 2ev + v^2)(e^2 + ev) &= ((e^2 + 2ev + v^2)e)(e + v), \\ (e + v^2)e &= ((e + v^2)e)(e + v), \\ e^2 + ev^2 &= (e^2 + ev^2)(e + v), \\ e + ev^2 &= (e + ev^2)(e + v), \\ e + ev^2 &= e^2 + ev + e(ev^2) + v(ev^2), \\ ev^2 &= e(ev^2) + v(ev^2). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $v^2 \in U_e$ a última equação se reduz à $\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{2}v^3$ e, como $v^3 = 0$, segue que $v^2 = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma decomposição de Peirce de A relativa a um idempotente e . Para cada $u \in U_e$, consideremos o idempotente $f = e + u + u^2$. Troquemos e por f na hipótese, assim $V_f^2 = 0$. Vamos usar a aplicação τ do corolário anterior.

Como $\tau(V_e) = V_f$ então $\tau^2(V_e) = V_f^2 = 0$. Logo, lembrando que $(uv)^2 = 0$ e que $u^2v \in V_e^2 = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \tau^2(v) = (v - 2uv - 2u^2v)^2 = (v - 2uv)^2 - 2(v - 2uv)2u^2v + (2u^2v)^2 \\ &= v^2 - 4v(uv) + 4(uv)^2 - 4v(u^2v) + 8(uv)(u^2v) + 4(u^2v)(u^2v) = -4v(uv) = (uv)v \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (d). Dado $x \in A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, temos que existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $x = \omega(x)e + u + v$. Tendo em vista as hipóteses, efetuamos cálculos de modo que tenhamos

$$\begin{aligned}
 x^3 &= (\omega(x)e + u + v)^3 = (\omega(x)e + u + v)^2(\omega(x)e + u + v) \\
 &= \left(\omega(x)^2 e^2 + 2\omega(x)e(u + v) + (u + v)^2 \right) (\omega(x)e + u + v) \\
 &= \left(\omega(x)^2 e + \omega(x)u + u^2 + 2uv \right) (\omega(x)e + u + v) \\
 &= \omega(x)^3 e + \omega(x)^2 eu + \omega(x)^2 eu + \omega(x)u^2 + \omega(x)uv + \omega(x)uv + 2(uv)u + 2(uv)v \\
 &= \omega(x) \left(\omega(x)^2 e + 2\omega(x)eu + u^2 + 2uv \right) = \omega(x)x^2.
 \end{aligned}$$

(d) $\Rightarrow$ (a). Linearizando $x^3 = \omega(x)x^2$ temos

$$2(yx)x + x^2y = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)(yx).$$

Substituindo y por xy na equação anterior obtemos

$$2x(x(xy)) + x^2(xy) = \omega(x)\omega(y)x^2 + 2\omega(x)x(xy).$$

Multiplicando a penúltima equação por x obtemos

$$2x(yx)x + x(x^2y) = \omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(yx).$$

Subtraindo esta última equação da anterior temos

$$x(x^2y) - x^2(xy) = \omega(y)x^3 - \omega(x)\omega(y)x^2.$$

Como $x^3 = \omega(x)x^2$

$$\begin{aligned}
 x(x^2y) - x^2(xy) &= \omega(y)\omega(x)x^2 - \omega(x)\omega(y)x^2, \\
 x(x^2y) - x^2(xy) &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto $x(x^2y) = x^2(xy)$ ou $x^2(yx) = (x^2y)x$, o que faz com que A seja uma álgebra de Jordan. $\blacksquare$

Corolário 3.4. *Seja A uma álgebra de Bernstein-Jordan. Então vale as seguintes identidades*

$$\begin{aligned}
 v_1v_2 &= 0, \\
 (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 &= 0,
 \end{aligned}$$

para $e \in \text{Id}_1(A)$, $u \in U_e$, $v_1, v_2 \in V_e$.

Demonstração. Basta linearizar $v^2 = 0$ e $(uv)v = 0$ que obtemos o resultado. $\blacksquare$

Fechamos essa seção, apresentando um ideal que será útil no capítulo seguinte.

Lema 3.6. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein.*

a) O conjunto $L = \{u \in U_e; uU_e = 0\}$ é um ideal de A .

b) $V_e^2 \subseteq L$.

Demonstração. a) Notemos que $L \neq \emptyset$, pois $0 \in L$. Agora, sejam $\alpha \in F$, $u_1, u_2 \in L$ e $u \in U_e$ temos que

$$(\alpha u_1 + u_2)u = \alpha u_1 u + u_2 u = \alpha 0 + 0 = 0.$$

Suponha agora $x \in A$ tal que $x = \omega(x)e + u' + v$, onde $u' \in U_e$, $v \in V_e$ e $u_1 \in L$, então

$$xu_1 = w(x)eu_1 + vu_1 = \frac{1}{2}w(x)u_1 + vu_1 \in U_e.$$

Assim, usando (3.30) obtemos

$$(xu_1)u = \frac{1}{2}w(x)u_1 u + (u_1 v)u = -(uv)u_1 = 0.$$

Logo, $xu_1 \in L$.

b) Por (3.16), $V^2 U_e = 0$. ■

Lema 3.7. *Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $I \subseteq N$ um ideal de A . A álgebra quociente $(A/I, \bar{\omega})$, onde $\bar{\omega}(\bar{x}) = \omega(x)$, para todo $x \in A$, é Bernstein-Jordan se, e somente se, $V_e^2 \subseteq I$ para todo idempotente $e \in A$.*

Demonstração. De fato, mostraremos inicialmente que $(A/I, \bar{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein com as operações usualmente definidas para quocientes e sendo $\bar{\omega} : A/I \rightarrow K$ dada por $\bar{\omega}(\bar{x}) = \omega(x)$. Com efeito, como $I \subseteq N$ então para cada $\bar{x} = \bar{y}$ temos que $x - y \in N$. Logo, $\omega(x) = \omega(y)$ e assim $\bar{\omega}(\bar{x}) = \bar{\omega}(\bar{y})$. Deste modo, $\bar{\omega}$ está bem definida. É fácil observar que $\bar{\omega}$ é um caracter sobre A , pois ω o é. Além disso, para qualquer $\bar{x} \in A/I$ segue que $(\bar{x}^2)^2 = (\bar{x}^2)^2 = \overline{\omega(x^2)^2 x^2} = \bar{\omega}(\bar{x})^2 \bar{x}^2$ e portanto A/I é uma álgebra de Bernstein. Agora, se A/I é Bernstein-Jordan então $\bar{v}^2 = \bar{v}^2 = \bar{0}$, o que implica em $v^2 \in I$ para todo $v \in V_e$, ou seja, $V_e^2 \subseteq I$. Reciprocamente, se $V_e^2 \subseteq I$ então $\bar{v}^2 = \bar{0}$, pelo Teorema 3.2, temos que A/I é Bernstein-Jordan. ■

Do Lemas 3.6(b) e 3.7, concluímos que A/L é uma álgebra de Bernstein-Jordan.

Capítulo 4

Nilpotência das álgebras de Bernstein

4.1 Barideal

Nesta seção deduziremos uma série de identidades que nos levaram a um índice de nilpotência para N^2 , isto é, o quadrado do **barideal** N . Entretanto, ainda não se sabe se tal índice é o melhor possível.

Seja $x \in N$ numa álgebra Bernstein-Jordan, então $x^3 = 0$, ou ainda,

$$(xy)z + (yz)x + (xz)y = 0 \quad (4.1)$$

Lema 4.1. *Sejam A uma álgebra de Bernstein-Jordan e os elementos $u_1, u_2 \in U_e$ e $v_1, \dots, v_t \in V_e$. Então*

(i) *Se $t \equiv 1, 2 \pmod{4}$, então $((((u_1v_1)v_2) \cdots v_t)u_2) + (((u_2v_1)v_2) \cdots v_t)u_1 = 0$.*

(ii) *Se $t \equiv 0, 3 \pmod{4}$, então $((((u_1v_1)v_2) \cdots v_t)u_2) - (((u_2v_1)v_2) \cdots v_t)u_1 = 0$.*

Demonstração. De acordo com $t \equiv 1, 2 \pmod{4}$ e $t \equiv 0, 3 \pmod{4}$, basta provar que

$$(((u_1v_1)v_2) \cdots v_t)u_2 = (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} (((u_2v_1)v_2) \cdots v_t)u_1 = 0.$$

Temos de (3.30) e depois aplicando $t - 1$ vezes o Corolário 3.4, temos que

$$\begin{aligned} (((u_1v_1)v_2) \cdots v_t)u_2 &= -(u_2v_t)((\cdots((u_1v_1)v_2) \cdots)v_{t-2})v_{t-1} \\ &= ((u_2v_t)v_{t-1})(\cdots((u_1v_1)v_2) \cdots)v_{t-3})v_{t-2} = \cdots \\ &= (-1)^t (\cdots((u_2v_t)v_{t-1}) \cdots v_1)u_1. \end{aligned}$$

Usando o Corolário 3.4 temos

$$\begin{aligned} u_1v_1 \cdots v_t u_2 &= (-1)^{t+t-1} ((\cdots((u_2v_1)v_t) \cdots)v_2)u_1 = (-1)^{t+t-1+t-2} (\cdots((u_2v_1)v_2)v_t) \cdots v_3 u_1 \\ &= \cdots = (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} (\cdots((u_2v_1) \cdots)v_t)u_1. \end{aligned}$$

■

Lema 4.2. *Sejam A uma álgebra de Bernstein-Jordan e os elementos $u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v_1, \dots, v_t \in V_e$. Então*

(a) *Se $t \equiv 0, 3 \pmod{4}$, então $((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) u_2 u_3 = ((\dots(u_3 v_1) \dots) v_t) (u_1 u_2)$.*

(b) *$((u_1 u_2^2) v_1) v_2 u_1 = ((u_2 u_1^2) v_1) v_2 u_2$.*

Demonstração. Para a primeira parte, usaremos a igualdade (4.1) e o lema anterior da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) u_2) u_3 &= -(((\dots(u_3 v_1) \dots) v_t) u_2) u_1 + (((\dots(u_3 v_1) \dots) v_t) (u_2 u_1)) \\ &\quad - (((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) (u_2 u_3)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Calculando $((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) u_2 u_3$ de outra maneira com base na igualdade (7.1) e no lema anterior, temos

$$(((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) u_2) u_3 = -(((\dots(u_3 v_1) \dots) v_t) u_2) u_1 - (((\dots(u_2 v_1) \dots) v_t) (u_1 u_3)). \quad (4.3)$$

Somando membro a membro as identidades (4.2) e (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} 2(((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) u_2) u_3 &= (((\dots(u_3 v_1) \dots) v_t) (u_2 u_1)) - (((\dots(u_1 v_1) \dots) v_t) (u_2 u_3)) \\ &\quad - (((\dots(u_2 v_1) \dots) v_t) (u_1 u_3)) \\ &= (((\dots(2u_3 v_1) \dots) v_t) (u_1 u_2)). \end{aligned}$$

Dividindo por 2 temos o resultado. Para a outra parte, temos que

$$(((u_1 u_2^2) v_1) v_2) u_1 = -2((u_2 (u_1 u_2) v_1) v_2) u_1 = -2((u_1 (u_1 u_2) v_1) v_2) u_2 = -(((u_2 u_1^2) v_1) v_2) u_2.$$

■

Lema 4.3. *Se $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan, então é válida a seguinte identidade é satisfeita*

$$(((u_1 v) v_1) u_2) u_3 v_2 + (((u_1 v_2) u_2) u_3) v v_1 = 0.$$

para quaisquer $u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v, v_2, v_3 \in V_e$.

Demonstração. Fazendo $x = u_1 v_1$, $y = u_2 v_2$ e $z = u_3$ em (4.1), obtemos a identidade

$$((u_1 v_1) (u_2 v_2)) u_3 + ((u_1 v_1) u_3) (u_2 v_2) + ((u_2 v_2) u_3) (u_1 v_1) = 0. \quad (4.4)$$

Substituindo u_1 por $u_1 v$,

$$((u_1 v) v_1) (u_2 v_2) u_3 + (((u_1 v) v_1) u_3) (u_2 v_2) + ((u_2 v_2) u_3) ((u_1 v) v_1) = 0. \quad (4.5)$$

Por (3.30) e pelo Corolário 3.4, temos

$$(((u_1 v) v_1) u_2) v_2 u_3 + (((u_1 v) v_1) u_3) u_2 v_2 + ((u_2 v_2) u_3) ((u_1 v) v_1) = 0. \quad (4.6)$$

Permutando u_1 com u_3 e u_2 com u_3 em (4.6), obtemos identidades que somadas membro a membro com (4.6) nos dão

$$\begin{aligned} 0 = & (((u_1v)v_1)u_2)v_2)u_3 + (((u_1v)v_1)u_3)u_2)v_2 + ((u_2v_2)u_3)((u_1v)v_1) \\ & + (((u_3v)v_1)u_2)v_2)u_1 + (((u_3v)v_1)u_1)u_2)v_2 + ((u_2v_2)u_1)((u_3v)v_1) \\ & + (((u_1v)v_1)u_3)v_2)u_2 + (((u_1v)v_1)u_2)u_3)v_2 + ((u_3v_2)u_2)((u_1v)v_1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pelo Lema 4.1(a),

$$(((u_3v)v_1)u_2)v_2)u_1 + (((u_1v)v_1)u_2)u_3)v_2 = 0$$

Por (3.30), temos que

$$((u_3v_2)u_2)((u_1v)v_1) + ((u_2v_2)u_3)((u_1v)v_1) = 0$$

Agora, usando o lema anterior e três vezes a igualdade (3.30) em cada parcela abaixo, segue que

$$(((u_1v)v_1)u_2)v_2)u_3 + (((u_3v)v_1)u_2)v_2)u_1 + (((u_1v)v_1)u_3)v_2)u_2 = 0.$$

Logo a igualdade (4.7) se reduz à $(((u_1v)v_1)u_3)v_2)u_2 + ((u_2v_2)u_1)((u_3v)v_1) = 0$ e, portanto, do Corolário 3.4, temos a identidade desejada. ■

Os lemas acima nos ajudam a concluir que certos produtos de elementos de U_e e V_e se anulam.

Teorema 4.1. *Se $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan, então todos os produtos de três elementos de U_e e quatro elementos de V_e se anulam.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V_e$. Recordemos que o produto de cada dois elementos de V_e sempre se anula. Do mesmo modo, um produto do tipo $(u_1u_2)v_1 = 0$. Assim, após analisar todas as possibilidades de produto nas condições do teorema, observamos que basta considerar apenas os seguintes produtos:

(a) $((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4.$

(b) $((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4.$

(c) $((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4.$

(d) $((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4.$

(e) $((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4.$

Substituindo u_1 por u_1v em lema anterior, teremos

$$((((((u_1v)v_1)u_2)u_3)v_2)v_3)v_4 + ((((((u_1v)v_2)v_3)u_2)u_3)v)v_1)v_4 = 0. \quad (4.8)$$

Permutando u_1 e u_2 na identidade (4.8), obtemos uma nova identidade que ao ser somada membro a membro com a identidade (4.8) fornece

$$0 = ((((((u_1v)v_1)u_2)u_3)v_2)v_3)v_4 + ((((((u_1v)v_2)v_3)u_2)u_3)v)v_1)v_4 \\ + ((((((u_2v)v_1)u_1)u_3)v_2)v_3)v_4 + ((((((u_2v)v_2)v_3)u_1)u_3)v)v_1)v_4.$$

Mas, pelo Lema 4.1(a), a soma da primeira com a terceira parcelas acima se anula. Além disso, pelo Lema 4.1(b), a quarta parcela é igual a segunda. Logo $(((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)v_4 = 0$, ou seja, o produto do item (a) se anula. Segue de (4.8) que o produto do item (b) se anula. Para mostrar que o produto do item (c) se anula, usamos, sucessivamente, o Lema 4.2(a), o Corolário 3.4, a identidade (4.1) e o produto do item (a). Para o produto do item (d), usamos o lema anterior e recaímos no produto do item (b). Finalmente, o produto do item (e) pode ser decomposto em duas parcelas do produto do item (a), desde que usemos o Corolário 3.4 e a identidade (4.1) $\blacksquare$

Teorema 4.2. *Se $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan, então todos os produtos de quatro elementos de U_e e três elementos de V_e se anulam.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U_e$ e $v_1, v_2, v_3 \in V_e$. Assim como no teorema anterior, devemos determinar todos os casos possíveis, lembrando que $v_1v_2 = (u_1u_2)v_1 = 0$. Tais produtos são dos seguintes tipos

(a) $(((((u_1v_1)u_2)u_3)v_2)v_3)u_4.$

(b) $(((((u_1v_1)v_2)u_2)u_3)v_3)u_4.$

(c) $(((((u_1v_1)v_2)v_3)u_2)u_3)u_4.$

(d) $(((((u_1u_2)u_3)v_1)v_2)v_3)u_4.$

Multiplicando a igualdade do Lema 4.3 por u_4 , teremos

$$((((u_1v_1)u_2)u_3)v_2)v_3)u_4 + ((((((u_1v_1)v_2)u_2)u_3)v_3)u_4 = 0.$$

Usando os Lemas 4.1 e 4.2, podemos reescrever a igualdade acima como

$$(((u_3(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_4 + ((u_3(((u_1v_2)v_3)u_2))v_1)u_4 = 0. \quad (4.9)$$

Permutando u_3 e u_4 na igualdade (4.9) obtemos uma igualdade obtemos uma nova identidade que ao ser somada membro a membro com (4.9) resulta em

$$0 = (((u_3(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_4 + ((u_3(((u_1v_2)v_3)u_2))v_1)u_4 \\ + (((u_4(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_3 + ((u_4(((u_1v_2)v_3)u_2))v_1)u_3. \quad (4.10)$$

Pelo Lema 4.1(a) $((u_3(((u_1v_2)v_3)u_2))v_1)u_4 = -((u_4(((u_1v_2)v_3)u_2))v_1)u_3$ e pelo Lema 4.1(b) $(((((u_3(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_4 = (((u_4(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_3$. Logo, segue de (4.10) que

$$2(((u_3(u_1v_1)u_2))v_2)v_3)u_4 = 0$$

Aplicando esse resultado em (4.9), concluímos que o produto do item (b) se anula. Para mostrar que o produto do item (c) se anula, usamos o Lema 4.2(a), as identidades (3.30) e (4.1) e o produto do item (b). Finalmente, o produto do item (d) se anula quando aplicamos, sucessivamente, as identidades (3.30) e (4.1) e o produto do item (a). ■

Lema 4.4. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein-Jordan. Se $u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v_1 \in V_e$, então*

$$(((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)N = 0.$$

Demonstração. Seja $n \in N$, então existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$, tais que $n = u + v$. Assim, devemos apenas provar que $u_1v_1u_2^2u_3^2u + u_1v_1u_2^2u_3^2v = 0$. Vamos começar mostrando $(((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u_1 = 0$. Para isso, usamos várias vezes a identidade (3.30) e o Lema 4.2 para obter

$$(((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u_1 = (((u_1v_1)u_3^2)u_2^2)u_1.$$

Agora, usamos (3.30) apenas uma vez e obtemos

$$(((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u_1 = -(((u_1v_1)u_3^2)u_2^2)u_1.$$

Somando esta igualdade membro a membro com a anterior, concluímos que $2(((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u_1 = 0$. Então, em particular,

$$((((u + u_1)v_1)u_2^2)u_3^2)(u + u_1) = 0.$$

Tendo em vista o nosso resultado preliminar, desenvolvemos essa igualdade, obtendo

$$(((uv_1)u_2^2)u_3^2)u_1 + (((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u = 0.$$

Lembrando que, pelo Lema 4.1(a),

$$((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u - (((uv_1)u_2^2)u_3^2)u_1 = 0.$$

Dessas duas últimas igualdades, segue que $((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)u = 0$. Agora, usando várias vezes as afirmações do Lema 4.2 e (3.30),

$$((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)v = -(((u_1v)v_1)u_3^2)u_2^2$$

e usando apenas (3.30) várias vezes,

$$((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)v = (((u_1v)v_1)u_3^2)u_2^2.$$

Portanto, $((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)v = 0$. ■

Lema 4.5. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein-Jordan. Se $u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $v_1, v_2 \in V_e$, então*

$$(((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3N = 0.$$

Demonstração. Seja $n \in N$, então existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$, tais que $n = u + v$. Assim, devemos apenas provar que $((((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3)u + (((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3)v = 0$. Mas notemos que $((((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3) \in V_e$ e, como o produto de dois elementos de V_e é nulo, então resta provar que $((((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3)u = 0$. De acordo com o lema anterior, sabemos que $((((u_1v_1)u_2^2)u_3^2)v = 0$. Em particular, substituindo u_3 por $u_3 + u \in U$, temos

$$\begin{aligned} (((u_1v_1)u_2^2)(u_3 + u)^2)v &= 0, \\ (((u_1v_1)u_2^2)(u_3u))v &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Por outro lado, aplicamos sucessivamente (3.25), (3.30), (4.11), o Lema 4.1(b) e novamente (3.25), (3.30) e (4.11) chegamos à igualdade

$$(((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3u = (((uv_1)u_2^2)v_2)u_3u_1.$$

e, usando os mesmos argumentos, podemos afirmar que

$$(((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3u = -(((uv_1)u_2^2)v_2)u_3u_1.$$

Somando membro a membro, concluímos que $((((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3)u = 0$. ■

Definição 4.1. A **potência produto** de uma álgebra A é definida por

$$A^{(1)} = A, \quad A^{(k)} = \sum_{i+j=k} A^{(i)}A^{(j)}.$$

Lema 4.6. Em uma álgebra de Bernstein-Jordan, tem-se que $N^{(k)} \subseteq N^k$.

Demonstração. É evidente que o resultado é válido para $k = 1$. Suponhamos que isso também seja válido para inteiros menores do que ou iguais a k . Temos que

$$A^{(k+1)} = \sum_{i+j=k+1} A^{(i)}A^{(j)} = A^{(k)}A + A^{(k-1)}A^{(2)} + \dots \subseteq A^kA + A^{k-1}A^2 + \dots \subseteq A^kA = A^{k+1}.$$

Portanto, o resultado é válido para todo inteiro positivo k . ■

Agora que já possuímos os resultados necessários, vamos provar que o quadrado do barideal N é nilpotente.

Teorema 4.3. Seja N o barideal de uma álgebra de Bernstein-Jordan. Então

$$(N^{(2)})^{(3)}N = 0.$$

Demonstração. Observemos que, pelo lema anterior, $(N^{(2)})^{(3)} \subseteq (N^2)^3$. Assim, basta provar que $(N^2)^3N = 0$. Como $N = U_e \oplus V_e$ e $V_e^2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} (N^2)^3N &= [(U_e + V_e)^2]^3(U_e + V_e) = (U_e^2 + U_eV_e)^3(U_e + V_e) \\ &= [(U_e^2(U_eV_e))U_e^2 + (U_e^2(U_eV_e))(U_eV_e) + ((U_eV_e)(U_eV_e))(U_eV_e)](U_e + V_e). \end{aligned}$$

Analisemos cada parcela acima. Pelo Lema 4.4, temos que $((u_1v_1)u_2^2)u_3^2(u+v) = 0$. Em particular, substituindo u_2 por $u_2 + u_4 \in U_e$, já que $u_4 \in U_e$, temos que $((u_1v_1)(u_2 + u_4)^2)u_3^2(u+v) = 0$. Logo,

$$(((u_1v_1)(u_2u_4))u_3^2)(u+v) = 0.$$

Agora vamos substituir na identidade acima u_3 por $u_3 + u_5 \in U_e$, já que $u_5 \in U_e$. Obtemos, assim, $((u_1v_1)(u_2u_4))(u_3 + u_5)^2(u+v) = 0$, o que implica

$$(((u_1v_1)(u_2u_4))(u_3u_5))(u+v) = 0,$$

e, assim, $[(U_e^2(U_eV_e))U_e^2](U_e + V_e) = 0$.

Do Lema 4.5, temos que $((((u_1v_1)u_2^2)v_2)u_3)(u+v) = 0$. Substituindo nessa identidade u_2 por $u_2 + u_4 \in U_e$, temos que $((((u_1v_1)(u_2 + u_4)^2)v_2)u_3)(u+v) = 0$, ou ainda,

$$(((u_1v_1)(u_2u_4))v_2)u_3(u+v) = 0$$

Tomando $x = (u_1v_1)(u_2u_4)$, $y = v_2$ e $z = u_3$, segue de (4.1) que

$$\begin{aligned} (((u_1v_1)(u_2u_4))v_2)u_3 &= -(((u_1v_1)(u_2u_4))u_3)v_2 - (((u_1v_1)(u_2u_4))(u_3v_2)) \\ &= -(((u_1v_1)(u_2u_4))(u_3v_2)), \end{aligned}$$

pois $((u_1v_1)(u_2u_4))u_3v_2 \in V_e^2 = 0$. Logo, $((U_e^2(U_eV_e))(U_eV_e))(U_e + V_e) = 0$.

Além disso, como $[(U_eV_e)(U_eV_e)(U_eV_e)]U_e = 0$, pelo Teorema 4.2 e $[(U_eV_e)(U_eV_e)(U_eV_e)]V_e = 0$, pelo Teorema 4.1 então $[(U_eV_e)(U_eV_e)(U_eV_e)](U_e + V_e) = 0$. Portanto, $(N^2)^3N = 0$. ■

Corolário 4.1. *Seja N o barideal de uma álgebra de Bernstein-Jordan. Então*

$$(N^{(2)})^{(4)} = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.6 e pelo Teorema 4.3, temos $(N^{(2)})^{(4)} \subseteq (N^2)^4 = (N^2)^3N = 0$. ■

Teorema 4.4. *Seja N o barideal de uma álgebra de Bernstein. Então*

$$N^{[4]} = 0.$$

Demonstração. Pela definição de potência plena, $N^{[4]} = N^{[3]}N^{[3]} = (N^{[2]}N^{[2]})(N^{[2]}N^{[2]}) = (N^2N^2)(N^2N^2)$. Assim, temos provar que $(N^2N^2)(N^2N^2) = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} N^2N^2 &= (U_e + V_e)^2(U_e + V_e)^2 \\ &= U_e^2U_e^2 + U_e^2(U_eV_e) + U_e^2V_e^2 + (U_eV_e)(U_eV_e) + (U_eV_e)V_e^2 + V_e^2V_e^2. \end{aligned}$$

Mas por (3.26), temos que $U_eV_e^2 = 0$ e por (3.36), temos que $U_e^2V_e^2 = 0$. Desses dois fatos decorre que $(U_eV_e)V_e^2 \subseteq U_eV_e^2 = 0$ e que $V_e^2V_e^2 \subseteq U_e^2V_e^2 = 0$. Então

$$N^2N^2 = U_e^2U_e^2 + U_e^2(U_eV_e) + (U_eV_e)(U_eV_e).$$

Lembremos que por (3.26), temos

$$\begin{aligned} (U_e^2)^2(U_e^2)^2 &\subseteq V_e^2 V_e^2 \subseteq U_e V_e^2 = 0, \\ (U_e^2)^2(U_e^2(U_e V_e)) &\subseteq V_e^2(U_e^2 V_e) = 0. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que

$$N^{[4]} = (N^2 N^2)(N^2 N^2) = (U_e^2(U_e V_e))(U_e^2(U_e V_e)) + (U_e^2(U_e V_e))(U_e V_e)^2 + (U_e V_e)^2(U_e V_e)^2.$$

Agora, vamos mostrar que cada parcela acima se anula. Começamos mostrando que um produto do tipo $((u_1 v_1)(u_2 u_3))((u_4 v_2)(u_5 u_6))$ se anula. Notemos que $(u_1 v_1)(u_2 u_3) \in U_e$, $(u_4 v_2) \in U_e$, $(u_5 u_6) \in V_e$ e aplicando o Corolário 3.4 duas vezes

$$\begin{aligned} ((u_1 v_1)(u_2 u_3))((u_4 v_2)(u_5 u_6)) &= -(((u_1 v_1)(u_2 u_3))(u_5 u_6))(u_4 v_2) \\ &= (((u_1 v_1)(u_2 u_3))(u_5 u_6))v_2 u_4. \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando a classe lateral

$$((((u_1 + L)(v_1 + L))((u_2 + L)(u_3 + L)))(u_5 + L)(u_6 + L))(v_2 + L)(u_4 + L)$$

temos que $((((u_1 v_1)(u_2 u_3))(u_5 u_6))v_2)u_4 + L \in A/L$, que é uma álgebra de Bernstein-Jordan. Pelo Teorema 4.3,

$$((((u_1 v_1)(u_2 u_3))(u_5 u_6))v_2)u_4 + L \in A/L = 0 + L$$

e assim $((((u_1 v_1)(u_2 u_3))(u_5 u_6))v_2)u_4 = 0$.

Agora vamos provar que o produto do tipo $((u_1 v_1)(u_2 v_2))((u_3 v_3)(u_4 u_5))$ se anula. Tendo em vista a identidade (3.25), esse produto pode ser reescrito como

$$((u_1 v_1)(u_2 v_2))((u_3 v_3)(u_4 u_5)) = -(((u_3 v_3)(u_4 u_5))(u_1 v_1))(u_2 v_2) - (((u_3 v_3)(u_4 u_5))(u_2 v_2))(u_1 v_1).$$

Assim, basta mostrar que uma das parcelas do segundo membro da identidade acima se anula. De fato, usando (3.30), temos

$$(((u_3 v_3)(u_4 u_5))(u_1 v_1))(u_2 v_2) = -((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)u_1)(u_2 v_2) \quad (4.12)$$

e por (3.5),

$$\begin{aligned} -((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)u_1)(u_2 v_2) &= (((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)u_2)(u_1 v_2) \\ &\quad + (((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)v_2)(u_1 u_2)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando a identidade (3.25) na última parcela de (4.13), temos

$$\begin{aligned} (((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)v_2)(u_1 u_2) &= -((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)v_2)u_1 \\ &\quad - (((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)v_2)u_1)u_2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Usando classes laterais e aplicando o Corolário 3.4 e depois (3.25) no último produto da identidade (4.14), segue que

$$\begin{aligned} (((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_1)v_2)u_1 + L &= -((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_3)v_1)v_2)u_1 + L \\ &= ((((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_3)v_1)v_2)u_1 + ((((((u_3 v_3)(u_4 u_5))v_3)v_1)v_2)u_1) + L \\ &= 0 + L, \end{aligned}$$

pelo Teorema 4.2. Consequentemente, $((((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)v_2)u_1 = 0$. De modo análogo se prova que a primeira parcela de (4.14) se anula. Agora, a identidade (4.13) está reduzida à identidade

$$\begin{aligned} -(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_1(u_2v_2) &= (((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2(u_1v_2), \\ (((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_1(u_2v_2) &= -(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2(u_1v_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Trabalhando com classes laterais no segundo membro de (4.15) e usando o Lema 4.1(b), temos

$$(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2 + L = -(((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_3 + L,$$

o que implica $((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2 - ((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_3 \in L$ e como $u_1v_2 \in U_e$, segue que $((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2 - ((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_3(u_1v_2) = 0$, ou seja,

$$(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2 = (((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_3. \quad (4.16)$$

Decorre da identidade (4.16), da identidade (4.15) e do Lema 2.1(b) que

$$\begin{aligned} -(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_2(u_1v_2) &= -(((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_3(u_1v_2) \\ &= (((u_2v_3)(u_4u_5))v_1)u_1(u_3v_2) \\ &= (((u_1v_3)(u_4u_5))v_1)u_2(u_3v_2) \\ &= -(((u_1v_3)(u_4u_5))v_1)u_3(u_2v_2) \\ &= -(((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_1(u_2v_2). \end{aligned}$$

Levando este resultado em (4.15), obtemos $((u_3v_3)(u_4u_5))v_1)u_1(u_2v_2) = 0$ e com isto (4.12) fornece $((u_3v_3)(u_4u_5))(u_1v_1)(u_2v_2) = 0$. Portanto, $(U_eV_e)^2(U_eV_e)^2 = 0$.

Finalmente, vamos provar que um produto do tipo $((u_1v_1)(u_2v_2))((u_3v_3)(u_4v_4))$ se anula para concluir que $(U_eV_e)^2(U_eV_e)^2 = 0$. De fato, temos por (3.30) e (3.5), sucessivamente

$$\begin{aligned} ((u_1v_1)(u_2v_2))((u_3v_3)(u_4v_4)) &= -u_2((u_1v_1)v_2)((u_3v_3)(u_4v_4)) \\ &= (((u_1v_1)v_2)(u_3v_3))(u_2(u_4v_4)) + (((u_1v_1)v_2)(u_4v_4))(u_2(u_3v_3)). \end{aligned}$$

Como as parcelas da última igualdade acima são semelhantes, basta mostrar que uma delas se anula, digamos, a primeira. Provemos, então, que $((u_1v_1)v_2)(u_3v_3)(u_2(u_4v_4)) = 0$ ou, equivalentemente, pelo Corolário 3.4

$$(((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)) = 0.$$

Pelas identidades (3.5) e (3.30) e pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned} (((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)) &= -(((u_1v_1)v_2)v_3)u_2(u_3(u_4v_4)) - (((u_1v_1)v_2)v_3)(u_4v_4)(u_2u_3) \\ &= (((u_1v_1)v_2)v_3)u_2(u_4(u_3v_4)) + (((u_1v_1)v_2)v_3)(u_4v_4)(u_2u_3) \\ &= (((u_2v_1)v_2)v_3)u_1(u_4(u_3v_4)) + (((u_4v_1)v_2)v_3)(u_4v_4)(u_2u_3) \\ &= -(((u_2v_1)v_2)v_3)u_4(u_1(u_3v_4)) - (((u_2v_1)v_2)v_3)(u_3v_4)(u_1u_4) \\ &\quad + (((u_4v_1)v_2)v_3)u_1(u_2u_3). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Permutando u_1 e u_3 na identidade (4.17) e somando membro a membro com a mesma resulta em

$$\begin{aligned}
0 &= (((u_1v_1)v_2)v_3)u_3(u_2(u_4v_4)) + (((u_2v_1)v_2)v_3)u_4(u_1(u_3v_4)) \\
&\quad - (((u_2v_1)v_2)v_3)v_4u_3(u_1u_4) - (((u_1v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_2u_3) \\
&\quad + (((u_3v_1)v_2)v_3)u_1(u_2(u_4v_4)) + (((u_2v_1)v_2)v_3)v_4(u_3(u_1u_4)) \\
&\quad - (((u_2v_1)v_2)v_3)u_4u_1(u_3v_4) - (((u_3v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_2u_1). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Porém, lembremos que por (3.30) a soma da segunda com a sexta parcelas de (4.18) se anula. Além disso, decorre de (3.5) e do Lema 2.1(b) que

$$\begin{aligned}
&-((((u_1v_1)v_2)v_3)v_4)u_4(u_2u_3) - (((u_3v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_2u_1) \\
&\quad = -((((u_4v_1)v_2)v_3)v_4)u_1(u_2u_3) - (((u_4v_1)v_2)v_3)v_4u_3(u_2u_1) \\
&\quad = (((u_4v_1)v_2)v_3)v_4u_2(u_1u_3) = (((u_2v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_1u_3)
\end{aligned}$$

e, pela mesma razão, temos que

$$\begin{aligned}
&-((((u_2v_1)v_2)v_3)v_4)u_3(u_1u_4) - (((u_2v_1)v_2)v_3)u_4u_1(u_3v_4) = \\
&\quad = (((u_2v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_1u_3).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1(b),

$$((((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)) + (((u_3v_1)v_2)v_3)u_1(u_2(u_4v_4)) = 2((((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)).$$

Com estes resultados, a igualdade (4.18) se reduz à identidade

$$2((((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)) + 2((((u_2v_1)v_2)v_3)v_4)u_4(u_1u_3) = 0. \tag{4.19}$$

Permutando os elementos u_2 e u_4 na identidade (4.19) e somando membro a membro com a mesma, chegamos à identidade

$$\begin{aligned}
0 &= (((u_1v_1)v_2)v_3)u_3(u_4(u_2v_4)) + (((u_4v_1)v_2)v_3)v_4u_2(u_1u_3) \\
&\quad + (((u_1v_1)v_2)v_3)u_3(u_2(u_4v_4)) + (((u_2v_1)v_2)v_3)v_4u_4(u_1u_3). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Mas levando em consideração $u_4(u_2v_4) = -u_2(u_4v_4)$, o que anula a soma da primeira com a terceira parcelas de (4.20). De acordo com o Lema 2.1(b) temos $(((u_2v_1)v_2)v_3)v_4)u_4 = (((u_4v_1)v_2)v_3)v_4)u_2$. Logo, $(((u_4v_1)v_2)v_3)v_4)u_2(u_1u_3) = 0$. Portanto, segue de (4.19)

$$((((u_1v_1)v_2)v_3)u_3)(u_2(u_4v_4)) = 0.$$

■

Corolário 4.2. *O barideal N de uma álgebra de Bernstein cumpre com a condição*

$$(N^{(2)})^{(5)} = 0.$$

Demonstração. Usando os Teoremas 4.3 e 4.4, temos

$$\begin{aligned} (N^{(2)})^{(4)} &= (N^{(2)})^{(3)}N^2 + (N^{(2)})^{(2)}(N^{(2)})^{(2)} = (N^{(2)})^3N^2 + (N^{(2)}N^{(2)})(N^{(2)}N^{(2)}) \\ &= (N^{(2)})^3(N^{(2)})^{(2)} = (N^{(2)})^4. \end{aligned}$$

Logo, $0 = (N^{(2)})^{(4)} = (N^{(2)})^4 \subseteq L$. Além disso,

$$LN^{(2)} = LN^2 = L(U_e V_e + U_e^2) \subseteq LU_e + LU_e^2 = LU_e^2.$$

Mas notemos que dado $x \in LU_e^2$, existem $u_0 \in L$ e $u_1, u_2 \in U_e$, tais que $x = u_0(u_1 u_2) = -u_1(u_0 u_2) - u_2(u_0 u_1) = 0$. Então, $LU_e^2 = 0$ e segue que $LN^{(2)} = 0$. Portanto,

$$(N^{(2)})^{(5)} = (N^{(2)})^{(4)}N^{(2)} + (N^{(2)})^{(3)}(N^{(2)})^{(2)} \subseteq LN^{(2)} + (N^{(2)})^3N^{(2)} = (N^{(2)})^4 = 0.$$

■

No artigo Free Nuclear Algebras de C. Martinez (1995) é dado um exemplo de uma álgebra de Bernstein A que é nuclear ($A^2 = A$) mas que não é de Jordan, isto é, existe um idempotente e tal que $U_e^2 U_e^2 \neq 0$, logo $N^{[3]} \neq 0$. Por isso, o índice de solubilidade dado no Teorema 4.4 é o melhor possível. Não se sabe ainda se o índice de nilpotência de $N^{(2)}$ pode ser aprimorado.

4.2 Álgebras de Bernstein e de potências associativas

Agora veremos os teoremas que relacionam as álgebras de potências associativas, de Jordan, de Bernstein-Jordan e train de posto 3.

Teorema 4.5. *Seja (A, ω) uma train álgebra comutativa de posto 3. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) A é uma álgebra de Jordan.
- (ii) A é uma álgebra de potências associativas.
- (iii) $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que A seja uma álgebra de Jordan. Então $(xy)x^2 = x(yx^2)$, quaisquer que sejam $x, y \in A$. Lembremos que A_x é o conjunto de todas as somas finitas de produtos de um número finito de fatores iguais a R_x ou a R_{xx} . Além disso, pelo Lema 1.6, A_x contém todos R_w , onde $w = x^k$ e k é um inteiro positivo. Vejamos que R_x comuta com R_{xx} . Dado $y \in A$, tem-se que

$$yR_x R_{xx} = (yx)R_{xx} = (yx)x^2 = (xy)x^2 = x(yx^2) = (yx^2)x = (yx^2)R_x = yR_{xx}R_x.$$

Então, podemos afirmar que

$$R_{x^i} R_{x^j} = R_{x^j} R_{x^i} \tag{4.21}$$

é válido para todos os inteiros positivos i e j . Este fato será usado para concluir que A é de potências associativas. Raciocionando, novamente por indução sobre i , temos que o resultado é claro para $i = 1$. Suponhamos, então que seja válido para todo inteiro i , ou seja, $x^i x^j = x^{i+j}$. Então, aplicando (4.21) para $x \in A$, tem-se que

$$x^{i+1} x^j = (x x^i) x^j = (x) R_{x^i} R_{x^j} = (x) R_{x^j} R_{x^i} = (x x^j) x^i = x^{j+1} x^i = x^{i+j+1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Como A é uma train álgebra de posto 3, seja $x \in A$ de modo que $\omega(x) = 1$. Segue de (2.1) que $x^3 = (1 + \gamma)x^2 - \gamma x$. Multiplicando essa equação por x , temos

$$\begin{aligned} x^4 &= (1 + \gamma)x^3 - \gamma x^2 = (1 + \gamma)((1 + \gamma)x^3 - \gamma x^2) - \gamma x^2 \\ &= (1 + 2\gamma + \gamma^2)x^2 + (-\gamma - \gamma^2)x - \gamma x^2 \\ &= (1 + \gamma + \gamma^2)x^2 + (-\gamma - \gamma^2)x. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Mas, por hipótese, A é de potências associativas, então $(x^2)^2 = x^4 = x^3 x$. Logo,

$$(1 + 2\gamma)x^2 - 2\gamma x = (1 + \gamma + \gamma^2)x^2 + (-\gamma - \gamma^2)x$$

por igualdade de polinômios, segue que $1 + \gamma + \gamma^2 = 1 + 2\gamma$ e $-\gamma - \gamma^2 = -2\gamma$. Ambas as equações são equivalentes à equação $\gamma^2 - \gamma = 0$ e, portanto, $\gamma = 0$ ou $\gamma = 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Fazendo $y = x$ e $z = y$ em (2.6), obtemos

$$x^2 y + 2(xy)x - (1 + \gamma)[2\omega(x)xy + \omega(y)x^2] + \gamma[\omega(x)^2 y + 2\omega(x)\omega(y)x] = 0.$$

Multiplicando por x , temos

$$x(x^2 y) + 2x(x(xy)) - (1 + \gamma)[2\omega(x)x(xy) + \omega(y)x^3] + \gamma[\omega(x)^2 xy + 2\omega(x)\omega(y)x^2] = 0, \quad (4.23)$$

substituindo y por xy e lembrando que $\omega(x(xy)) = \omega(x)\omega(xy) = \omega(x)\omega(x)\omega(y) = \omega(x)^2\omega(y)$, temos

$$x^2(xy) + 2(x(xy))x - (1 + \gamma)[2\omega(x)x(xy) + \omega(xy)x^2] + \gamma[\omega(x)^2 xy + 2\omega(x)^2\omega(y)x] = 0 \quad (4.24)$$

e subtraindo membro a membro (4.23) e (4.24), obtemos

$$\begin{aligned} x(x^2 y) - x^2(xy) &= (1 + \gamma)\omega(y)x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)\omega(y)x^2 - 2\gamma\omega(x)\omega(y)x^2 + 2\omega(x)^2\omega(y)x \\ &= \omega(y)[(1 + \gamma)x^3 - (1 + \gamma)\omega(x)x^2 - 2\gamma\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x + \gamma\omega(x)^2 x]. \end{aligned}$$

Como $-x^3 = -(1 + \gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x$, por (2.1), então

$$\begin{aligned} x(x^2 y) - x^2(xy) &= \omega(y)[(1 + \gamma)x^3 - x^3 - 2\gamma\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x] \\ &= \omega(y)[\gamma x^3 - 2\gamma\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x]. \end{aligned}$$

Finalmente, para $\gamma = 0$ temos que $x(x^2y) - x^2(xy) = 0$. Logo A é uma álgebra de Jordan e para $\gamma = 1$, usamos (2.1) para concluir que

$$\begin{aligned} x(x^2y) - x^2(xy) &= \omega(y)[x^3 - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x] \\ &= \omega(y)[2\omega(x)x^2 - \omega(x)^2x - 2\omega(x)x^2 + \omega(x)^2x] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso A também é uma álgebra de Jordan. ■

Teorema 4.6. *Seja (A, ω) uma train álgebra comutativa de posto 3. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) A é uma álgebra de Bernstein-Jordan.
- (ii) A é uma álgebra de Bernstein e de potências associativas.
- (iii) A é uma álgebra de Bernstein.
- (iv) $\gamma = 0$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Foi feito no teorema anterior.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Óbvio.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Como A é uma train álgebra de posto 3, temos a decomposição $N = U_e \oplus V_e$, onde

$$\begin{aligned} U_e &= \left\{ u \in N; eu = \frac{1}{2}u \right\}, \\ V_e &= \{ v \in N; ev = \gamma v \}. \end{aligned}$$

Mas como A também é uma álgebra de Bernstein, temos a decomposição $N = U_e \oplus V'_e$, onde

$$V'_e = \{ v' \in N; ev' = 0 \}.$$

Pelo Teorema 3.2, existe $e \in \text{Id}(A)$, tal que $V_e \neq 0$. Dado $a \in V_e$, então $ea = \gamma v$. Mas $a \in V_e \subseteq N = U'_e \oplus V'_e$, logo existem $u' \in U'_e$ e $v' \in V'_e$ tais que $a = u' + v'$, $eu' = \frac{1}{2}u'$ e $ev' = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} ea &= eu' + ev', \\ \gamma a &= \frac{1}{2}u', \\ \gamma u' + \gamma v' &= \frac{1}{2}u'. \end{aligned}$$

Como a soma é direta, temos que $\gamma u' = \frac{1}{2}u'$, ou ainda $\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)u' = 0$ e, portanto, $u' = 0$. Além disso, de $\gamma v' = 0$, pode ser $\gamma = 0$ ou $v' = 0$. Mas notemos que se $\gamma \neq 0$, então teríamos $v' = 0$ e, como já vimos que $u' = 0$, resultaria em $a = 0$, o que não pode ocorrer. Portanto, $\gamma = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Aplicando a hipótese $\gamma = 0$ em (2.1), temos

$$x^3 - \omega(x)x^2 = 0. \quad (4.25)$$

Substituindo x por $x + \lambda y$, onde $y \in A$ e $\lambda \in F$, acima temos

$$\begin{aligned} 0 &= (x + \lambda y)^3 - \omega(x + \lambda y)(x + \lambda y)^2 \\ &= x^3 + \lambda x^2 y + 2\lambda(xy)x + 2\lambda^2(xy)y + \lambda^2 y^2 x + \lambda^3 y^3 - \omega(x)x^2 - 2\lambda xy\omega(x) - \\ &\quad \lambda^2 y^2 \omega(x) - \lambda x^2 \omega(y) - 2\lambda^2 xy\omega(y) - \lambda^3 y^2 \omega(y). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Fazendo $x = \lambda y$ em (4.25)

$$\begin{aligned} (\lambda y)^3 - \omega(\lambda y)(\lambda y)^2 &= 0, \\ \lambda^3 y^3 - \lambda^3 \omega(y)y^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Usando (4.25) e (4.27) em (4.26) temos

$$\lambda[x^2 y + 2(xy)x - 2xy\omega(x) - x^2 \omega(y)] + \lambda^2[2(xy)y + y^2 x - y^2 \omega(x) - 2xy\omega(y)] = 0.$$

Mas $\lambda \neq 0$, daí

$$x^2 y + 2(xy)x - 2xy\omega(x) - x^2 \omega(y) = 0, \quad (4.28)$$

$$2(xy)y + y^2 x - y^2 \omega(x) - 2xy\omega(y) = 0. \quad (4.29)$$

Convém notar que as identidades acima são equivalentes, bastando substituir x por y em uma que se obtém a outra. Multiplicando (4.28) por x , temos

$$x(x^2 y) + 2x(x(xy)) - 2x(xy)\omega(x) - x^3 \omega(y) = 0. \quad (4.30)$$

Substituindo y por xy em (4.28), temos

$$x^2(xy) + 2x(x(xy)) - 2x(xy)\omega(x) - x^2 \omega(xy) = 0. \quad (4.31)$$

Vamos subtrair membro a membro as identidades (4.30) e (4.31). O resultado é

$$\begin{aligned} x(x^2 y) - x^2(xy) + \omega(x)\omega(y)x^2 - x^3 \omega(y) &= 0, \\ x(x^2 y) - x^2(xy) - \omega(y)[x^3 - \omega(x)x^2] &= 0, \\ x(x^2 y) - x^2(xy) &= 0. \end{aligned}$$

Note-se que foi usada a relação (4.25). Assim A é uma álgebra de Jordan. Resta provar que A é uma álgebra de Bernstein. Para isso, multiplicamos (4.25) por x , então

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - \omega(x)x^3 = x^4 - \omega(x)\omega(x)x^2, \\ x^4 &= \omega(x)^2x^2. \end{aligned}$$

Pelo teorema anterior, A é de potências associativas, ou seja $(x^2)^2 = x^4$. Logo $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$. Portanto, A é uma álgebra de Bernstein-Jordan. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ALBERT, Abraham Adrian. On the Power-associativity of Rings. **Summa Brasilien-sis Mathematicæ**, v. 2(2), p. 21-33, 1948.
- [2] ALBERT, Abraham Adrian. Power-associative Rings. **American Mathematical So-ciety**, v. 64, p. 552-593, 1948.
- [3] ARRUDA, Suellen Cristina Arruda. **Variações no Polinômio V^2 em Álgebras de Bernstein**. 2008, 49 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém.
- [4] JACOBSON, Nathan. **Basic Algebra**. 2. ed. San Francisco: W H Freeman & Co. (Sd), 1985. 499 p.
- [5] MARTINEZ, C.; BERNARD, J.; GONZALEZ S.. On the Nilpotency of the Barideal of a Bernstein Algebra, **Communications In Algebra**, Oviedo v. 25, n. 9, p. 2967-2985, 1997.
- [6] MONTTOYA, Mary Luz Rondiño. **Nilálgebras Comutativas de Potências Associa-tivas**. 2005, 92 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [7] ROCHA, Adriano Aparecido Soares. **Subespaços Invariantes em Álgebras Satis-fazendo a Identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$** . 2008, 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém.
- [8] RODRIGUES, Rodrigo Lucas. **Álgebras Básicas e Aplicações**. 2008, 177 f. Dis-sertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universi-dade de São Paulo, São Paulo.
- [9] SCHAFER, Richard. **An Introduction to Nonassociative Algebras**. New York: Dover Publications, 1995. 173 p.