

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
MARISSOL TONINI SPEROTTO

OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DA ANTENA YAGI-UDA UTILIZANDO O  
MÉTODO DE GAUSS-NEWTON

BELÉM  
2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS**  
**MARISSOL TONINI SPEROTTO**

**OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DA ANTENA YAGI-UDA UTILIZANDO O**  
**MÉTODO DE GAUSS-NEWTON**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**ORIENTADOR: Prof. Dr. VALCIR JOÃO DA CUNHA FARIAS**

**BELÉM**  
**2009**

MARISSOL TONINI SPEROTTO  
OTIMIZAÇÃO DO PROJETO DA ANTENA YAGI-UDA UTILIZANDO O  
MÉTODO DE GAUSS-NEWTON

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau ou título de **Mestre**, na área de concentração **Matemática**, à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Aprovada em 17/04/2009.

BANCA EXAMINADORA

---

Valcir João da Cunha Farias (Orientador)  
Universidade Federal do Pará

---

Mauro de Lima Santos (Coordenador do PPGME)  
Universidade Federal do Pará

---

Marcelo Brazão dos Santos Protázio.  
Universidade Federal do Pará

---

Arthur da Costa Almeida  
Universidade Federal do Pará - campus de Castanhal

**BELÉM**

**2009**

# Dedicatória

*“Se conheceres a ti mesmo  
e os teus inimigos, não  
temerás o resultado de cem  
batalhas.”*

*Sun Tzu*

## Agradecimentos

*Agradeço a Deus, Àquele que está acima de tudo e de todos,*

*... o qual nunca me abandonou;*

*... ao meu filho Thiago, por acreditar que seria possível;*

*... aos meus pais pela formação do meu caráter;*

*... ao meu orientador professor Valcir, pelo conhecimento transmitido,*

*... pelo carinho, amizade ...*

*e, principalmente, pela paciência nos momentos críticos.*

*Aos amigos que encontrei no decorrer do curso, principalmente ao querido colega*

*Manoel Jeremias.*

*Agradeço a UFPa pela acolhida e a CNPq pelo apoio financeiro.*

## Resumo

O projeto da antena Yagi-Uda foi otimizado aplicando o método de Gauss-Newton. A otimização consistiu em especificar intervalos de valores para a diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência e, partindo de um modelo inicial pré-definido, foram determinados os melhores valores para o comprimento e espaçamento dos elementos. Para a modelagem direta, foi utilizado o Método dos Momentos sobre a equação integral de Pocklington's, a qual consistiu em obter os valores de diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência a partir do comprimento e do espaçamento entre elementos conhecidos. O procedimento foi aplicado na síntese de antenas Yagi-Uda com cinco e seis elementos e os resultados encontrados foram tão bons quanto os encontrados na literatura realizados pelo método do algoritmo genético.

**Palavras - chaves:** Otimização. Antena Yagi-Uda. Método de Gauss-Newton. Elementos.

## Abstract

The project of the antenna Yagi-Uda it was optimization applying Gauss-Newton's method. The optimization consisted of specifying intervals of values for the directivity, main lobe and angle of half power and, leaving of a pre-defined initial model, were certain the best values for the length and spacing among elements. For the modelling direct, it was used the Method of Moments about the integral equation of Pocklington's, the one which consisted of obtaining values them of directivity, main lobe and angle of half power starting from the length and of the spacing among known elements. The procedure was applied in the synthesis of antennas Yagi-Uda with five and six elements and the found results were as good as found them in the literature accomplished by the method of the genetic algorithm.

**Key words:** Optimization. Antenna Yagi-Uda. Gauss-Newton's method. Elements.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Parâmetros de desempenho de uma antena</b>	<b>5</b>
1.1 Introdução . . . . .	5
1.2 Diagrama de radiação . . . . .	5
1.3 Impedância de entrada . . . . .	7
1.4 Largura de banda . . . . .	9
1.5 Diretividade e Ganho . . . . .	9
1.6 Razão frente-costas . . . . .	10
1.7 Feixe ou ângulo de meia potência . . . . .	11
1.8 Antena Yagi-Uda . . . . .	11
1.8.1 Elementos da antena Yagi-Uda . . . . .	13
1.8.2 Funcionamento dos elementos na Antena Yagi-Uda . . . . .	14
1.8.3 Influência dos elementos da antena Yagi-Uda nos parâmetros otimizados . . . . .	15
1.9 Procedimento do projeto da antena Yagi-Uda usando diagramas . . . . .	17
<b>2 Equação Integral de Pocklington's</b>	<b>20</b>
2.1 Introdução . . . . .	20
2.2 Elementos de Diâmetros Finitos . . . . .	20
2.3 Vetor Potencial de uma Fonte Elétrica . . . . .	21
2.4 Método dos Momentos . . . . .	29
2.4.1 Funções Base . . . . .	31
2.4.2 Funções Definidas em cada Subdomínio . . . . .	31
2.4.3 Funções Definidas em todo o Domínio . . . . .	34

2.4.4	Função Peso (ou Função Teste) . . . . .	36
2.5	Solução da Equação Integral de Pocklington's pelo Método dos Momentos .	37
<b>3</b>	<b>Método de Gauss-Newton</b>	<b>44</b>
3.1	Introdução . . . . .	44
3.2	Procedimento . . . . .	44
3.3	Resultados . . . . .	48
3.4	Antena Yagi-Uda com cinco elementos . . . . .	51
3.5	Antena Yagi-Uda com quinze elementos . . . . .	54
3.6	Conclusão . . . . .	55

# Lista de Figuras

1.1	Diagrama de radiação típico. . . . .	7
1.2	Antena Yagi-Uda com seis elementos. . . . .	12
1.3	Variação típica da diretividade da antena Yagi ao longo da faixa de operação. . . . .	16
1.4	Comprimento dos seis elementos parasitários da antena Yagi otimizada. . . . .	18
1.5	Curvas para determinar os comprimentos dos elementos da antena Yagi-Uda. . . . .	18
1.6	Correção no aumento do comprimento de todos os elementos parasitários como uma função da razão entre o diâmetro do boom e o comprimento de onda. . . . .	19
2.1	Onda uniforme do plano obliquamente incidente em um condutor administrando. . . . .	24
2.2	Dipolo cilíndrico, sua segmentação e modelagem da abertura. . . . .	24
2.3	Segmentação de dipolo e sua corrente equivalente. . . . .	26
2.4	Funções constantes definidas em cada subdomínio. . . . .	32
2.5	Funções lineares definidas em cada subdomínio. . . . .	33
2.6	Funções senoidais definidas em cada subdomínio. . . . .	34
2.7	Funções cossenoidais truncadas definidas em cada subdomínio. . . . .	35
2.8	Geometria da ordem da Yagi-Uda para a formulação do Método dos Momentos. . . . .	42
3.1	Diagrama de radiação (plano H) para os dados iniciais. . . . .	49
3.2	Diagrama de radiação (plano E) para os dados iniciais. . . . .	49
3.3	Diagrama de radiação (plano H) para os dados otimizados. . . . .	51
3.4	Diagrama de radiação (plano E) para os dados otimizados. . . . .	51
3.5	Diagrama de radiação (plano H) para os dados otimizados. . . . .	53
3.6	Diagrama de radiação (plano E) para os dados otimizados. . . . .	54

## Lista de Símbolos

$\vec{E}$	–	Campo elétrico radiado.
$E_\theta$	–	Componente do campo elétrico na direção $\theta$ .
$E_\theta(\text{máx})$	–	Valor máximo do campo elétrico, no espaço considerado.
$\theta$	–	Ângulo de elevação.
$\phi$	–	Ângulo de azimute.
$F(\theta, \phi)$	–	Diagrama de radiação normalizado, na direção $(\theta, \phi)$ .
$P(\theta, \phi)$	–	Diagrama de potência, na direção $(\theta, \phi)$ .
$FB_{dB}$	–	Relação frente-costas, em decibéis.
$F(\text{máx})$	–	Nível do lóbulo principal.
$F(\text{costa})$	–	Nível do lóbulo traseiro.
$U(\theta, \phi)$	–	Intensidade de radiação, na direção $(\theta, \phi)$ .
$U_m$	–	Intensidade de radiação máxima.
$U_{\text{méd}}$	–	Intensidade de radiação média.
$D(\theta, \phi)$	–	Diretividade da antena, na direção $(\theta, \phi)$ .
$G(\theta, \phi)$	–	Ganho da antena, na direção $(\theta, \phi)$ .
$P_{in}$	–	Potência na entrada da antena.
$Z_{in}$	–	Impedância de entrada da antena.
$R_{in}$	–	Resistência de entrada da antena.
$X_{in}$	–	Reatância de entrada da antena.
$\Gamma$	–	Coefficiente de reflexão.
$VSWR$	–	Razão de onda estacionária.
$Z_0$	–	Impedância característica da linha de transmissão.
$RL$	–	Perda de retorno.
$f$	–	Frequência.
$\lambda$	–	Comprimento de onda.
$d$	–	Diâmetro do elemento.
$D$	–	Razão entre o diâmetro corrigido do suporte central e o comprimento de onda.
$A$	–	Vetor potencial magnético.
$EM$	–	Campo eletromagnético.

$E_A$	–	Campo elétrico devido ao potencial $A$ .
$J$	–	Densidade superficial de corrente elétrica.
$B_A$	–	Fluxo de campo magnético devido ao potencial $A$ .
$H$	–	Intensidade de campo magnético.
$H_A$	–	Campo magnético devido ao potencial $A$ .
$\mu H_A$	–	Intensidade superficial de fluxo magnético ou indução magnética.
$j$	–	Número complexo ( $i$ ).
$k$	–	Número de ondas.
$\omega$	–	Frequência angular.
$\mu$	–	Permeabilidade magnética.
$\varepsilon$	–	Constante dielétrica.
$\phi$	–	Potencial escalar elétrico.
$\phi_e$	–	Função da posição.
$\nabla$	–	Operador gradiente.
$\nabla \cdot$	–	Divergente do campo vetorial.
$\nabla \times$	–	Rotacional do campo vetorial.
$\nabla x$	–	Rotacional do campo vetorial.
$I_z(z')$	–	Linha de corrente ou corrente equivalente da fonte filamentar.
$F$	–	Operador linear.
$h$	–	Função de excitação.
$g$	–	Função de resposta.
$a_n$	–	Constantes desconhecidas.
$g_n(z')$	–	Funções base ou de expansão.
$\langle w, g \rangle$	–	Produto interno.
$w's$	–	Funções peso.
$S$	–	Superfície da estrutura analisada.
$I_{nm}$	–	Coefficiente de corrente complexa.
$l_n$	–	Comprimento correspondente do elemento $n$ .
$x'$	–	Variável de integração.
$\nabla x$	–	Rotacional do campo vetorial.

# Introdução

Presume-se que as primeiras antenas foram criadas por Heinrich Hertz, em 1886, com a finalidade de auxiliar no estudo e desenvolvimento das teorias eletromagnéticas. Hertz pesquisou diversos dispositivos durante a realização de seus experimentos para testar e provar a teoria eletromagnética desenvolvida pelo matemático e físico James Clerk Maxwell [2].

Este dispositivo (antena) ocupa sempre o último lugar na cadeia de transmissão e o primeiro lugar na cadeia de recepção, daí a importância de seu estudo e entendimento para as telecomunicações. A antena transforma energia eletromagnética guiada pela linha de transmissão em energia eletromagnética irradiada, indistintivamente. Suas dimensões físicas são, normalmente, da ordem de grandeza do comprimento de onda ( $\lambda$ ), o qual é associado à frequência do sinal a ser transmitido ou captado. Os tipos de antenas variam conforme sua utilização e são projetadas para operar em determinada frequência e só se comunicarão com outra semelhante.

Uma antena, também, pode atuar como uma interface entre um meio guiado e o espaço livre para a transmissão ou recepção de energia eletromagnética, sendo responsável pela introdução da onda eletromagnética na atmosfera (no caso da transmissão) e também pela sua captação (no caso da recepção). Sua função é primordial em qualquer comunicação onde exista radiofrequência.

Um dos aspectos de relevância nas antenas é a distribuição espacial da densidade de potência radiada, o qual varia conforme o ângulo ao seu redor. Uma antena receptora coleta energia do espaço e a concentra em um ponto de alimentação.

A eficiência de um sistema de telecomunicações depende do desempenho dos sistemas irradiantes ou de recepção conectados a ele, por isso se desenvolveram diversos modelos de antenas, dentre estas, podem ser citadas as mais comuns [5]: as direcionais e as multifrequenciais.

As antenas multifrequências mais conhecidas são: antena longa (Long-wire) e a log-periódica. E as antenas direcionais: Yagi-Uda e a parabólica. Nas antenas direcionais o sinal se dá praticamente por via terrestre totalmente direcionado, acompanhando a curvatura da terra e ficando na maioria das vezes sujeito aos obstáculos naturais da região. Estes dispositivos possuem características de radiação que concentram potência radiada numa determinada direção do espaço, cobrindo uma área bastante restrita, estas características são: alta diretividade ou ganho, feixe ou ângulo de meia potência estreito e alta relação frente-costas.

O dispositivo Yagi-Uda foi desenvolvido pelo, Dr. Hidetsugo Yagi, professor da Universidade de Vohoku, Japão, e por seu colega e assistente Dr. Shintaru Uda. Este tipo de antena foi descrito, em 1926, no artigo intitulado: "Procedimentos do ERE (Engineering Radio Experience)". Porém, essas antenas só se tornaram mundialmente conhecidas, em 1928, depois da publicação de um artigo, em inglês, do professor H. Yagi. Apesar, da antena ter ostentado o nome YAGI, o próprio Dr. Yagi a chamou de antena Yagi-Uda em reconhecimento ao seu colega e assistente S. Uda [2].

A antena Yagi-Uda recebeu investigações analíticas e experimentais exaustivas ao ar livre e, também, na literatura. Não seria prático listar todos os contribuintes, pois poderemos não estar atentos a todos. Porém, tentaremos resumir o ponto saliente da análise, descrevendo a operação geral do radiador, e apresentando alguns dados de desígnio da antena.

Apesar da aparência simples da antena Yagi-Uda, o projeto desse dispositivo não é uma tarefa fácil, principalmente por existirem muitas inter-relações entre as variáveis envolvidas no projeto, como exemplo, os elementos são eletromagneticamente acoplados e uma pequena variação no comprimento e/ou no espaçamento entre os elementos da antena podem alterar a distribuição de corrente sobre todos os componentes.

Uma antena Yagi-Uda convencional consiste em dipolos lineares paralelos dos quais somente um, normalmente, o segundo elemento, é energizado por uma fonte, os demais são elementos parasitas. O primeiro elemento funciona como refletor, o qual possui tamanho maior que o elemento energizado. Do terceiro até o n-ésimo são elementos diretores e são menores que o elemento fonte.

No estudo e projeto de antenas, não importa em que frequência do espectro eletromagnético seja aplicada, sempre serão usados os mesmos princípios matemáticos,

físicos e práticos da teoria eletromagnética, ela é constante, imutável e invariável. Quanto maior a frequência utilizada nas antenas, maior deve ser a precisão dos dispositivos, equipamentos e medições [2].

O projeto e a otimização de antenas constituem desafios para os engenheiros da área, uma vez que requerem não apenas conhecimento, mas experiência, por se tratar de processos indutivos. As dificuldades do projeto fizeram com que a atenção de alguns pesquisadores se voltasse para a otimização da antena Yagi-Uda [27-29].

Cheng [27] usou o método do gradiente para otimizar o ganho e a impedância de entrada da antena Yagi-Uda, seus resultados aumentaram em 80% o ganho de um projeto inicial desse dispositivo.

Jones & Joines [28] e Ramos et al. [29] usaram algoritmo genético para o projeto da antena Yagi-Uda, seus resultados foram tão bons quanto os apresentados por [27].

Para problemas de otimização com poucos parâmetros os métodos de busca local, como Newton, Quase-Newton e Gauss-Newton possuem um bom desempenho. Além disso, essas técnicas, nesses casos, são computacionalmente tão rápidas quanto os métodos de busca global, como o algoritmo genético. Dessa forma, se torna atrativo desenvolver a otimização da antena Yagi-Uda aplicando uma técnica de busca local.

Durante muito tempo, foram obtidas experimentalmente geometrias otimizadas para determinadas condições de operação. O desenvolvimento tecnológico permitiu a utilização de diversas técnicas computacionais de otimização, baseadas em formulações analíticas, que se encontram extensivamente documentadas e norteiam a metodologia atual do projeto [2].

O objetivo da dissertação é desenvolver uma técnica para o projeto de uma antena Yagi-Uda que reúna algumas características requeridas para um bom desempenho desse dispositivo. As características que serão especificadas neste trabalho são: número de elementos, sendo um refletor e um elemento energizado; diretividade; razão frente-costas; e ângulo de meia potência. Os valores dos tamanhos e dos espaçamentos entre os elementos serão ajustados pelo processo de otimização de Gauss-Newton.

Um projeto inicial da antena será estabelecido e, a partir desses dados, aplica-se o método de Gauss-Newton até que as faixas de valores das características pré-estabelecidas sejam atingidas.

O conceito de otimização está bem identificado como um mecanismo de análise

de decisões complexas, envolvendo seleção de valores para variáveis, a fim de medir desempenho e qualificar a qualidade das soluções. A intenção é encontrar a melhor solução, respeitando as restrições de viabilidade impostas aos parâmetros do problema [12].

**No primeiro capítulo** será apresentado os parâmetros de desempenho otimizados na antena, a própria antena Yagi-Uda e seus componentes e a complexidade do projeto deste dispositivo Yagi.

**No segundo capítulo** apresenta-se a Equação Integral de Pocklington's, o Método dos Momentos e a solução da Equação Integral de Pocklington's pelo Método dos Momentos.

**No terceiro capítulo** é apresentado o Método de Gauss-Newton, o procedimento realizado pelo método e os resultados.

# Capítulo 1

## Parâmetros de desempenho de uma antena

### 1.1 Introdução

Os parâmetros fundamentais utilizados para quantificar e avaliar o desempenho de uma antena são: diagrama de radiação, impedância de entrada, largura de banda, diretividade e ganho, razão frente-costas e ângulo de meia potência.

Inicialmente, são descritos, de maneira sucinta e qualitativa, os principais parâmetros de avaliação de desempenho de uma antena, observando que a diretividade, a razão frente-costas e o feixe ou ângulo de meia potência, foram usados, no presente trabalho, para a otimização da antena Yagi-Uda. A seguir será apresentada a antena, suas características e a importância de cada uma no bom funcionamento da antena que se deseja otimizar. Por último, será apresentado um projeto, para expor a complexidade ao se otimizar uma antena Yagi-uDA.

### 1.2 Diagrama de radiação

O diagrama de radiação é uma das características mais importantes de uma antena. Ele expressa graficamente as propriedades radiantes da antena, ou seja, como a energia radiada se distribui pelo espaço ao redor da estrutura, na condição de campo distante.

Através de um gráfico pode-se representar a magnitude do campo elétrico  $\vec{E}$

transmitido pela antena, em função do ângulo  $(\theta, \phi)$  do sistema de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , em um ponto de observação na região de campo distante. Assim, o diagrama de radiação é avaliado ao longo de uma esfera de raio  $r$ , centrada na antena. Para uma fonte de corrente distribuída ao longo do eixo  $z$ , que só possui a componente em  $\theta$  do campo  $\vec{E}$ , o diagrama é determinado por:

$$F(\theta, \phi) = \frac{E_\theta}{E_\theta(\text{máx})} \quad (1.1)$$

em que  $F(\theta, \phi)$  é denominado diagrama do campo normalizado e  $E_\theta(\text{máx})$  é o valor máximo do campo elétrico, em todo o espaço considerado.

Freqüentemente, as características direcionais de radiação de uma antena são descritas por meio do diagrama de potência, que mostra a variação da densidade de potência com o ângulo ao redor da antena. Para uma fonte de corrente distribuída ao longo de  $z$ , é possível mostrar que o diagrama de potência é dado pela expressão:

$$P(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2 \quad (1.2)$$

Também, é usual representar os diagramas com valores em decibéis. Os diagramas de campo (magnitude) e de potência são iguais, quando calculados em decibéis, conforme a expressão:

$$P(\theta, \phi)_{dB} = |F(\theta, \phi)|_{dB} \quad (1.3)$$

Um diagrama de radiação típico é ilustrado na Figura 1.1. Os campos provenientes das diversas regiões da antena chegam ao espaço distante com diferentes valores de magnitude e fase. Isto é o efeito da distribuição da corrente ao longo da estrutura, que resulta em uma série de interferências mútuas que se manifestam na forma dos lóbulos observados.

O lóbulo contendo a direção de radiação máxima é denominado lóbulo principal. Nessa região a concentração de energia é mais intensa pelo fato de os campos radiados por cada elemento infinitesimal da antena chegar ao espaço em fase, mais do que nas outras direções.

Uma grandeza importante associada ao diagrama de radiação, que expressa o quão concentrada está a energia no lóbulo principal, é a razão frente-costas, definida como a diferença entre o nível do lóbulo principal e o nível do lóbulo traseiro, em decibéis, dada por:

$$FB_{dB} = 20 \log \left| \frac{F(\text{máx})}{F(\text{costas})} \right| \quad (1.4)$$

em que  $F(\text{costas})$  é o nível do lóbulo traseiro e  $F(\text{máx})$  é o nível do lóbulo principal, em valores lineares [1].

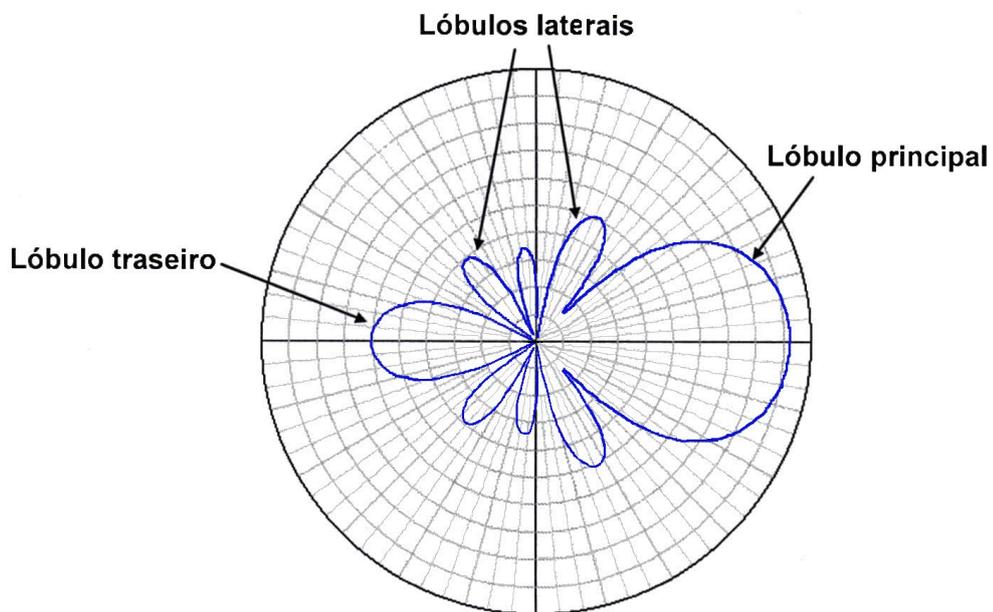


Figura 1.1: Diagrama de radiação típico.

### 1.3 Impedância de entrada

A impedância de entrada de uma antena é definida como a impedância apresentada pelos terminais de uma antena ou a razão entre tensão e corrente nos terminais da antena ou a razão entre os componentes apropriados do campo elétrico e do campo magnético em determinado ponto [2].

Este parâmetro é composto por uma parte real e uma parte imaginária:

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} \quad (1.5)$$

A parte resistiva  $R_{in}$  está associada à dissipação de energia, que ocorre através de radiação e de perdas ôhmicas na estrutura. A parte reativa  $X_{in}$  representa a potência armazenada nos campos próximos à antena.

Uma série de fatores influenciam na impedância de entrada de uma antena, dentre eles destacam-se: a geometria da antena, tipo de alimentação e presença de outros objetos nas proximidades.

Impedância relaciona-se com o conceito de eficiência de radiação por meio do coeficiente de reflexão  $\Gamma$  e do coeficiente de onda estacionária (VSWR), definidos por:

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \quad (1.6)$$

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (1.7)$$

onde  $Z_0$  é a impedância característica da linha de alimentação conectada aos terminais de entrada da antena.

O VSWR quantifica o descasamento entre as impedâncias da linha de alimentação e a entrada da antena, que acarreta a perda de potência transmitida por meio de reflexões da onda na linha de transmissão. Esta potência refletida é denominada perda de retorno. O VSWR é dado em função da perda de retorno por meio de

$$VSWR = \frac{10^{\frac{RL}{20}} + 1}{10^{\frac{RL}{20}} - 1} \quad (1.8)$$

onde  $RL$  é a perda de retorno, em decibéis.

É desejável obter uma impedância de entrada essencialmente resistiva e casamento perfeito com a linha de alimentação, de forma que o VSWR seja unitário e toda a energia fornecida à antena seja de fato radiada [1].

## 1.4 Largura de banda

A largura de banda de uma antena é definida como o espectro de frequências dentro do qual seu desempenho, em relação a algumas características, concorda com um conjunto de especificações. Ela pode ser considerada como a faixa de frequências em que as características da antena, tais como ganho, VSWR e diagrama de radiação, permanecem dentro de valores aceitáveis em relação aos da frequência central.

Como as características de interesse de uma antena não variam necessariamente da mesma maneira, ou mesmo são criticamente afetadas pela frequência, não há uma caracterização única da largura de banda. As especificações são definidas de acordo com as necessidades de cada aplicação. Usualmente a largura de banda é determinada em função das variações da impedância, de forma a corresponder ao espectro dentro do qual o VSWR permanece inferior a 2. Desta maneira, assegura-se que a antena apresente razoável eficiência de radiação em toda a faixa de frequências [1].

## 1.5 Diretividade e Ganho

Diretividade é uma grandeza que quantifica o quanto uma antena concentra a energia eletromagnética na direção do lóbulo principal, em relação às outras direções. A diretividade de uma antena é calculada em termos da intensidade de radiação  $U(\theta, \phi)$ , que pode ser expressa por:

$$U(\theta, \phi) = U_m |F(\theta, \phi)|^2 \quad (1.9)$$

onde  $U_m$  é a máxima intensidade de radiação e  $|F(\theta, \phi)|^2$  é o diagrama de potência normalizado com o valor na direção de radiação máxima.

Assim, define-se a diretividade  $D(\theta, \phi)$  como a razão entre a intensidade de radiação em determinada direção e a intensidade de radiação média, como

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{U_{\text{méd}}}. \quad (1.10)$$

Das equações (1.9) e (1.10) pode-se perceber que a diretividade de uma antena é exclusivamente determinada pelo seu diagrama de radiação. Nas aplicações práticas, entretanto, é mais interessante observar como uma antena radia a potência disponível nos seus terminais de entrada, levando em consideração as perdas.

O ganho de potência, ou simplesmente ganho, reflete esse comportamento, e é definido como  $4\pi$  vezes a razão entre a intensidade de radiação em determinada direção e a potência fornecida aos terminais de entrada, ou:

$$G(\theta, \phi) = \frac{4\pi U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (1.11)$$

sendo  $G(\theta, \phi)$  o ganho,  $U(\theta, \phi)$  a intensidade de radiação na direção  $(\theta, \phi)$  considerando as perdas na estrutura, e  $P_{in}$  a potência fornecida aos terminais de entrada da antena.

Para uma situação ideal, em que não há perdas na estrutura e toda a potência fornecida é radiada, é possível mostrar que  $D(\theta, \phi) = G(\theta, \phi)$ , isto é, a diretividade e o ganho são iguais [1].

## 1.6 Razão frente-costas

Este parâmetro é imediatamente percebido, pois à medida que esta relação aumenta, conseqüentemente, aumenta a diretividade da antena e, também, seu ganho.

O diagrama de radiação de uma antena é uma forma de se visualizar a distribuição da intensidade de potência em diferentes direções em volta da antena. No diagrama da Figura 1.1, pode-se visualizar a intensidade de radiação na frente (lóbulo maior) e atrás da antena (lóbulo menor), em relação ao plano que contém o campo elétrico. Sendo assim, a relação frente-costas pode ser definida como uma medida usada para avaliar o quanto de potência é perdida na direção oposta à direção de máxima radiação (como se pode visualizar na Figura 1.1, existe ganho na frente da antena, mas também há certo ganho nas suas costas) [3].

## 1.7 Feixe ou ângulo de meia potência

Os ângulos de meia potência são definidos pelos pontos no diagrama onde a potência irradiada equivale à metade da irradiada na direção principal. Estes ângulos definem a abertura da antena no plano horizontal e no plano vertical [4].

## 1.8 Antena Yagi-Uda

As antenas Yagi-Uda são muito utilizadas em aplicações HF (3-30 MHz), VHF (30-300 MHz) e UHF (300-3000 MHz). São comuns por serem leves, fáceis de construir, de baixo custo, e provem de características moderadamente desejáveis para muitas aplicações [2].

A construção da estrutura de um dispositivo Yagi, para um número pequeno de elementos (tipicamente cinco ou seis), é simples, porém fica bastante crítico se um número grande de elementos é usado para alcançar uma alta diretividade. Para aumentar a diretividade de uma Yagi-Uda ou reduzir o ângulo de meia potência, podem ser usadas várias filas Yagi-Udas [5], formando uma antena de cortina.

As características desejadas no projeto de uma antena Yagi-Uda são: elevada diretividade (podendo chegar a 20 dB) ou ganho, baixa impedância de entrada, ângulo de meia potência estreito e alta relação frente-costas, propriedades intrinsecamente relacionadas à disposição e dimensões dos elementos. Normalmente, este tipo de antena é usada na área de telecomunicações que só possui uma direção na emissão de informação e quando o tráfego na linha não é muito grande. Também, é um equipamento opcional para redes sem fio, pois proporciona mais qualidade e intensidade do sinal, isto é, maior potência e alcance. Utilizada pelo sistema Internet (Wireless) torna possível a comunicação sem fio em longas distâncias. Tem inúmeras aplicações na faixa de frequência de 2.4 GHz.

A antena Yagi-Uda recebeu investigações analíticas e experimentais exaustivas na literatura, em laboratórios e computacionalmente. Na sua configuração mais simples, a antena Yagi possui o elemento fonte ou energizado, o elemento refletor, além de um número de diretores (os quais são definidos em quantidade, conforme o objetivo do projetista da antena) dispostos sobre um mesmo eixo. A antena otimizada neste trabalho é composta por seis elementos, esta fila de diretores é designada como um “canal de onda”, como mostra a Figura 1.2.

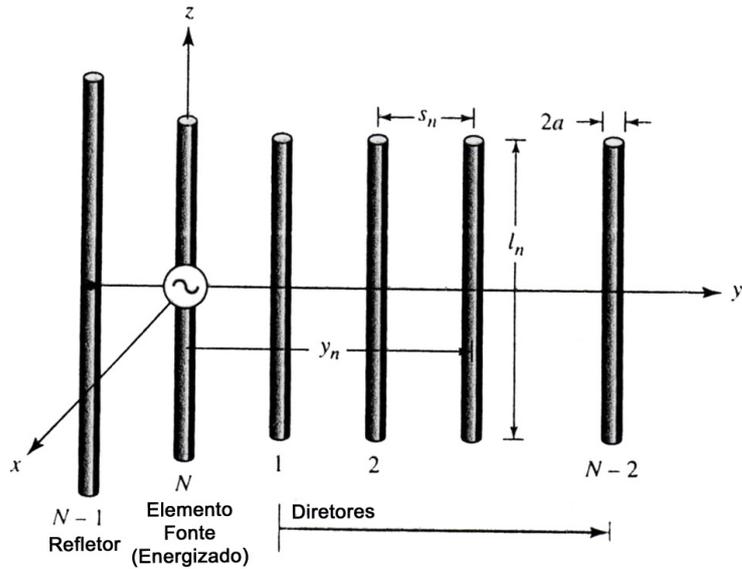


Figura 1.2: Antena Yagi-Uda com seis elementos.

Os elementos da antena Yagi-Uda são lineares paralelos dos quais somente um, normalmente, o segundo elemento, é energizado, o qual está posto na direção contrária à propagação das ondas eletromagnéticas; os demais são elementos parasitários. Um número grande de elementos refletor e diretores ajuda a aumentar a diretividade e a relação frente-costas, diminuindo a largura de feixe da antena projetada, em relação à outra que contém menos elementos.

A fase total das correntes nos diretores e no refletor não é, somente, determinada pelos seus comprimentos, mas, também, pelo espaçamento entre os elementos adjacentes [2]. Assim, elementos corretamente espaçados com comprimentos ligeiramente menores que os comprimentos dos ressonantes correspondentes a eles (menor que  $\lambda/2$ ), tidos como diretores, porque eles formam uma ordem com correntes aproximadamente iguais em magnitude e com fase progressiva de igual troca que reforçará o campo do elemento fonte para os diretores. Semelhante, um elemento corretamente espaçado com um comprimento de  $\lambda/2$  ou ligeiramente maior agirá como um refletor. Assim uma ordem de Yagi-Uda pode ser considerada como uma estrutura que apóia uma onda ambulante cujo desempenho é determinado pela distribuição atual em cada elemento e a velocidade de fase da onda ambulante. O comprimento dos diretores, refletor e fonte está baseado na primeira ressonância.

Em prática, o papel principal do elemento refletor é feito pelo primeiro elemento

próximo ao elemento fonte, e muito pequeno no desempenho de uma antena Yagi-Uda é a diretividade se mais que um (no máximo dois) elementos são usados como refletores. Pode-se dizer que o uso de mais de um refletor é desprezível. Porém, podem ser alcançadas melhorias consideráveis (maior grau de focalização (diretividade) do padrão resultante) se mais diretores são acrescentados à ordem. Normalmente, na maioria das antenas têm de 06 a 12 diretores.

Os comprimentos e diâmetros dos elementos da antena, como também seus espaçamentos, respectivos, é que determina as características ótimas.

### 1.8.1 Elementos da antena Yagi-Uda

A disposição dos elementos da Yagi-Uda pode ser resumida dizendo que seu desempenho pode ser considerado em três partes:

- 1 - o arranjo de refletor-fonte;
- 2 - a fonte;
- 3 - os diretores.

A antena Yagi-Uda é a aplicação prática mais importante da utilização de um arranjo de um elemento fonte com elementos parasitas, atuando como refletor e diretores numa mesma antena.

- *Elemento refletor:*

É o maior elemento parasitário, normalmente 5% maior que o elemento fonte, além disso, a separação entre o elemento fonte e o refletor é um pouco menor que o espaçamento entre o elemento fonte e o mais próximo diretor, e está próximo a  $0,25\lambda$  para se achar ótimo.

Situa-se “atrás” do elemento fonte e distancia-se deste de  $0,1\lambda$  a  $0,25\lambda$  comprimento de onda. Funciona como atenuador das ondas incidentes pelas costas.

O comprimento do refletor influi consideravelmente na razão frente-costas. Porém, sua influência na diretividade não é significativa (em antenas Yagis com diversos diretores, a influência do refletor na diretividade é ainda menor).

- *Elemento fonte:*

É o elemento irradiante, energizado, excitado, também conhecido como dipolo ou elemento alimentado ou ressonante. Um elemento fonte será ressonante quando seu comprimento for menor que meio comprimento de onda ( $\lambda/2$ ) (normalmente  $(0,45 - 0,49\lambda)$ ) da frequência pretendida aplicada no ponto de alimentação. Ele é alimentado por um cabo coaxial, os demais agem como uma corrente e são induzidos através de junção mútua.

O comprimento do elemento fonte influi em todas as características da antena.

- *Elemento diretor:*

É o menor elemento parasitário, chamado diretor. Seu comprimento é, aproximadamente, de  $0,4$  a  $0,45\lambda$ , o qual varia em função do número de diretores, do espaçamento, largura de banda e diâmetro dos elementos. Eles são distanciados de forma a somar as fases dos campos, aumentando a diretividade da antena. O número de diretores é limitado pelo espaço disponível e/ou desejado.

Os elementos na direção do lóbulo principal, ou diretores, tendem a ser menores em comprimento que o elemento fonte, que é da ordem de  $\lambda/2$ . A separação entre os diretores é tipicamente  $0,3$  a  $0,4\lambda$ , e não são uniformes para desígnios ótimos.

Naturalmente, existe um limite físico a partir do qual a inclusão de novos diretores passa a produzir muito pouco, em termos de desempenho.

## 1.8.2 Funcionamento dos elementos na Antena Yagi-Uda

O elemento fonte, ao ser excitado por uma tensão qualquer, gera uma distribuição de corrente que produz campos eletromagnéticos radiados em forma de onda. Apesar de não haver excitação direta nos elementos diretores e no elemento refletor, há uma distribuição de corrente induzida pelo campo do elemento fonte. Há criação de campos eletromagnéticos também nos elementos diretores e refletor, formando, assim, um campo total radiado pela antena.

A reflexão consiste no retorno da energia incidente em direção à região de onde ela é oriunda, após entrar em contacto com uma superfície refletora. Sempre poderemos controlar a forma e a distância do refletor à antena forçando desta maneira seu comportamento, isto é, se arbitrarmos um determinado diagrama, poderemos fazer nossa antena trabalhar dentro dos limites impostos pelo projeto.

Do terceiro até o  $n$ -ésimo são elementos diretores e são menores que o elemento fonte, porém, os diretores não são, necessariamente, do mesmo diâmetro e/ou comprimento.

Em geral, os diretores, também, pode ser confeccionados em torno de 5% menor (ou menos) que o elemento fonte, isto para antena Yagi de três elementos. Nas antenas de mais elementos, a montagem se torna mais complexa, pois os parasitas são “enxergados” pelo elemento fonte como uma “rede” de antenas, assim, o método prático de configuração 5% menos não é válido.

Quando são inseridos outros elementos à uma antena, o sinal emitido é direcionado no sentido dos elementos menores e reduzido na direção em que está o elemento maior (refletor), reciprocamente, na recepção ocorre o mesmo, isto é, o sinal provindo da frente (diretores) é melhor recebido que o que provém de trás (refletor) da antena, a esse efeito é dada uma relação chamada “relação frente-costas”, que se aplica às antenas direcionais de qualquer tipo, sejam Yagis, parabólicas, helicoidais, etc.

### **1.8.3 Influência dos elementos da antena Yagi-Uda nos parâmetros otimizados**

Após o projeto inicial (por exemplo, com o auxílio de um ábaco apropriado), analisa-se a diretividade obtida ao longo da faixa de operação. Geralmente, observa-se o comportamento exemplificado pela Figura 1.3.

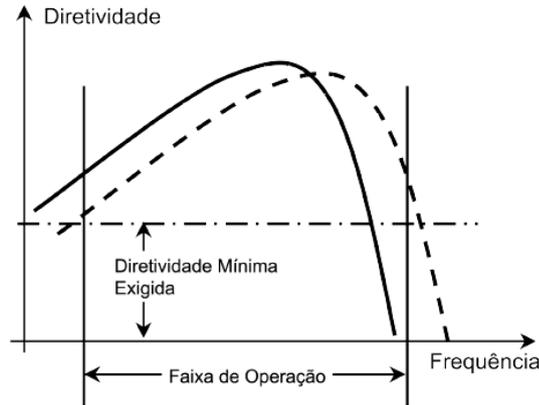


Figura 1.3: Variação típica da diretividade da antena Yagi ao longo da faixa de operação.

Caso a diretividade mínima exigida para a faixa tenha sido violada, se diminui lentamente os comprimentos dos diretores na tentativa de deslocar o máximo de diretividade para uma frequência maior (linha tracejada) e com isso satisfazer a diretividade exigida. As distâncias entre diretores e entre o primeiro diretor e a fonte, também, afetam as características elétricas da antena Yagi.

A frequência correspondente ao máximo de diretividade aumenta na medida em que o elemento diretor diminui (desde que as variações do diretor não sejam exageradas).

Uma vez especificadas as dimensões relacionadas aos diretores de forma a obter a diretividade exigida, varia-se o refletor (tanto o comprimento quanto a distância até a fonte) na tentativa de melhorar a razão frente-costas ao longo da faixa de operação [6].

A variação não exagerada do comprimento do elemento fonte pouco altera a diretividade e a razão frente-costas da antena Yagi [6], pois seus tamanhos estão associadas ao ganho no lóbulo traseiro, e produzem efeitos desprezíveis sobre o ganho frontal. Seu tamanho é, em geral, escolhido de forma a fazê-lo ressonante.

O tamanho e separação do elemento refletor possuem pouca influência sobre o ganho frontal, mas afetam o ganho no lóbulo traseiro e a impedância de entrada, porém as dimensões e separação entre os elementos diretores são os fatores mais cruciais para projetar uma antena Yagi-Uda, pois afetam sobremaneira o ganho frontal e o ganho no lóbulo traseiro.

As distâncias entre os elementos não são necessariamente uniformes, mas a separação entre o refletor e o elemento fonte costuma ser menor do que entre o elemento fonte e o primeiro elemento diretor.

## 1.9 Procedimento do projeto da antena Yagi-Uda usando diagramas

Com o advento de computadores de alta velocidade muitas técnicas numéricas diferentes, baseadas em formulações analíticas, foram utilizadas para derivar as dimensões geométricas dos parâmetros da antena Yagi-Uda para desempenho ótimo.

Para o desenvolvimento desta dissertação buscou-se base em um procedimento de um projeto já desenvolvido [2] passo-a-passo para determinar os parâmetros da Yagi para a diretividade desejada. Os gráficos incluídos só podem ser usados para projetar antenas com comprimentos totais (do elemento refletor até o último diretor) de  $0.4, 0.8, 1.2, 2.2, 3.2$  e  $4.2\lambda$  com diretividade correspondente de  $7.1, 9.2, 10.2, 12.25, 13.4$  e  $14.2$  dB, respectivamente, e com uma razão diâmetro/comprimento de onda de  $0.001 \leq d/\lambda \leq 0.04$ .

Embora os gráficos não satisfaçam todos os projetos possíveis, eles são úteis para a maioria das situações práticas. O elemento fonte usado é o dipolo de  $\lambda/2$ , e as medidas realizadas na frequência de  $f = 400MHz$ . Será apresentado um exemplo do procedimento.

O centro do projeto são os seguintes dados:

1. Figura 1.4 representa os parâmetros otimizados da antena para seis comprimentos diferentes e para  $d/\lambda = 0.0085$ .
2. Figura 1.5 representa o comprimento dos diretores e do refletor para  $0.001 \leq d/\lambda \leq 0.04$ .
3. Figura 1.6 fornece o aumento do comprimento de correção para todos os elementos parasitas (diretores e refletor) como uma função da razão entre o diâmetro do suporte central e o comprimento de onda  $0.001 \leq D/\lambda \leq 0.04$ .

$d/\lambda = 0.0085$ $s_{12} = 0.2\lambda$		COMPRIMENTO DA YAGI-UDA (EM COMPRIMENTOS DE ONDA)						
		0.4	0.8	1.20	2.2	3.2	4.2	
COMPRIMENTO DO REFLETOR ( $l_1/\lambda$ )		0.482	0.482	0.482	0.482	0.482	0.475	
COMPRIMENTO DOS DIRETORES,	$l_3$	0.442	0.428	0.428	0.432	0.428	0.424	
	$l_4$		0.424	0.420	0.415	0.420	0.424	
	$l_5$		0.428	0.420	0.407	0.407	0.420	
	$l_6$			0.428	0.398	0.398	0.407	
	$l_7$				0.390	0.394	0.403	
	$l_8$				0.390	0.390	0.398	
	$l_9$				0.390	0.386	0.394	
	$l_{10}$				0.390	0.386	0.390	
	$l_{11}$				0.398	0.386	0.390	
	$l_{12}$				0.407	0.386	0.390	
	$l_{13}$					0.386	0.390	
	$l_{14}$					0.386	0.390	
	$l_{15}$					0.386	0.390	
	$l_{16}$					0.386		
	$l_{17}$					0.386		
	ESPAÇAMENTO ENTRE DIRETORES ( $s_{ik}/\lambda$ )		0.20	0.20	0.25	0.20	0.20	0.308
	DIRETIVIDADE RELATIVA AOS DIPOLOS DE MEIA-ONDA (dB)		7.1	9.2	10.2	12.25	13.4	14.2
DESIGNE DA CURVA (VEJA FIGURA SEGUINTE)		(A)	(B)	(B)	(C)	(B)	(D)	

Figura 1.4: Comprimento dos seis elementos parasitários da antena Yagi otimizada.

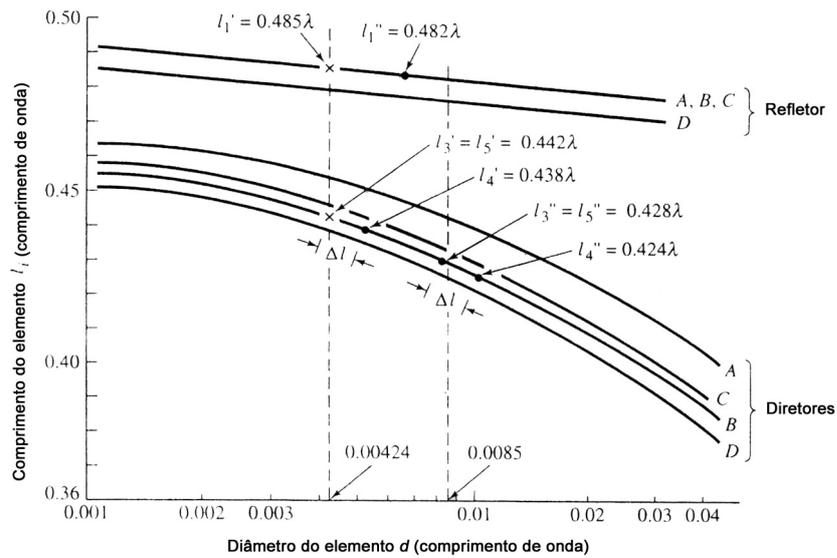


Figura 1.5: Curvas para determinar os comprimentos dos elementos da antena Yagi-Uda.

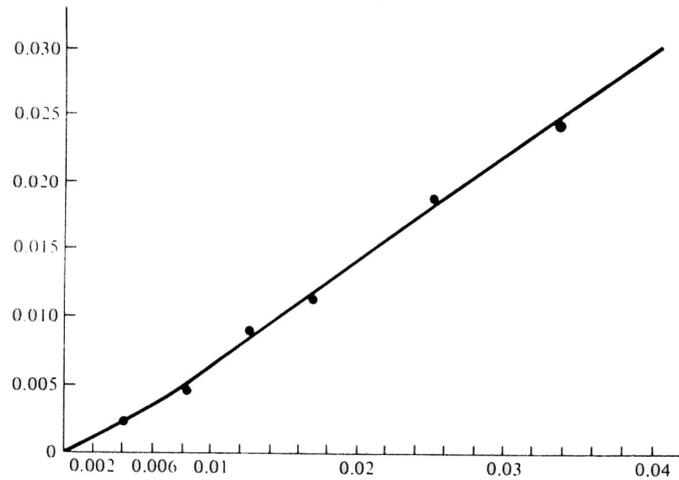


Figura 1.6: Correção no aumento do comprimento de todos os elementos parasitários como uma função da razão entre o diâmetro do boom e o comprimento de onda.

As informações iniciais necessárias para o projeto são, normalmente, a frequência central, diretividade da antena e as razões  $d/\lambda$  e  $D/\lambda$ , e é necessário, também, achar os comprimentos ótimos dos elementos parasitários (diretores e refletor). O espaçamento entre os diretores é uniforme mas não sendo o mesmo para todos os projetos. Porém, existe somente um refletor e seu espaçamento é  $s = 0.2\lambda$  para todos os projetos. ■

# Capítulo 2

## Equação Integral de Pocklington's

### 2.1 Introdução

Em geral, há muitas formas de equações integrais para o eletromagnetismo no domínio do tempo. As equações integrais mais usuais são: a “equação integral de campo elétrico”(EFIE) e a “equação integral de campo magnético”(MFIE) [14]. O EFIE impõe condições de contorno sobre o campo elétrico tangencial, enquanto o MFIE impõe a condição de contorno nas componentes do campo magnético tangencial. O EFIE é válido para ambas as superfícies fechadas ou abertas, enquanto o MFIE é válido para superfícies fechadas. Estas equações integrais podem ser usadas para problemas de radiação e de espalhamento.

Para problemas de radiação, especialmente de antenas. As EFIEs mais usuais são: a Equação Integral de Pocklington's e a Equação Integral de Hallén, a primeira será demonstrada e aplicada neste trabalho.

### 2.2 Elementos de Diâmetros Finitos

A “equação integrodiferencial de Pocklington's e a “equação integral de Hallén”[2] são equações de integração tridimensionais clássicas [8]-[16], elas podem ser usadas para determinar a distribuição de corrente em um condutor. A equação de Hallén normalmente é restringida ao uso de uma fonte de voltagem como elemento fonte de uma antena filamentar. Entretanto, a equação de Pocklington's é mais geral e é adaptável a muitos

tipos de fontes de alimentação (através de alteração de sua função de excitação ou matriz de excitação), inclusive a um pulso magnético muito fino [17]. Além disso, a equação de Hallén requer a inversão de uma matriz de ordem  $N + 1$  ( $N$  é o número de divisões dos filamentos) enquanto a equação de Pocklington's requer a inversão de uma matriz de ordem  $N$ .

Normalmente, assume-se que a distribuição de corrente é da forma senoidal. Para elementos de diâmetros (normalmente  $d > 0.05\lambda$ ) a distribuição de corrente senoidal é representativa mas não precisa. Para achar uma distribuição de corrente mais precisa em um elemento cilíndrico, uma equação integral é derivada, normalmente, e resolvida. No início, foram obtidas soluções para a equação integral usando-se métodos iterativos [10]; atualmente, é muito mais conveniente usar o Método dos Momentos [18]-[20].

Se soubermos a voltagem nos terminais de alimentação de uma antena filamentar e acharmos a impedância de entrada e o padrão de radiação, então poderemos obter a distribuição de corrente. Similarmente, se uma onda atinge a superfície de um elemento condutor, ela induz uma densidade de corrente a qual determina o campo espalhado. O elemento linear é simples, porém a maioria das informações apresentadas aqui podem ser estendidas a estruturas mais complicadas.

Embora, a derivação da equação integral de Pocklington's seja geral, pode-se usar qualquer uma, quando o elemento for um espalhador ou uma antena. Para tanto é necessário estudar o Vetor Potencial Elétrico de uma fonte elétrica.

## 2.3 Vetor Potencial de uma Fonte Elétrica

A antena Yagi-Uda foi otimizada usando-se o método de Gauss-Newton, no qual foi trabalhado a Equação Integral de Pocklington's. Para tanto o estudo do Vetor Potencial Elétrico foi essencial e a equação de Maxwell foi fundamental para compreendê-lo.

O vetor potencial magnético  $A$  é útil para resolver o campo eletromagnético  $EM$  gerado por uma determinada corrente elétrica  $J$ .

O fluxo magnético  $B$  sempre é solenoidal, ou seja,  $\nabla \cdot B = 0$ . Então, pode ser representado como o rotacional de outro vetor, isto é, faz-se uso da identidade vetorial

$$\nabla \cdot \nabla \times A = 0 \tag{2.1}$$

onde  $A$  é um vetor arbitrário. Assim, podemos definir

$$B_A = \mu H_A = \nabla \times A \quad (2.2)$$

$$H_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times A \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) na equação de Maxwell

$$\nabla \times E_A = -j\omega\mu H_A \quad (2.4)$$

reduz-se a

$$\nabla \times E_A = -j\omega\mu H_A = -j\omega \nabla \times A \quad (2.5)$$

que, também, pode ser escrito como

$$\nabla \times [E_A + j\omega A] = 0. \quad (2.6)$$

Da identidade vetorial

$$\nabla \times (-\nabla\phi_e) = 0 \quad (2.7)$$

e (2.6), segue que

$$E_A + j\omega A = -\nabla\phi_e \quad (2.8)$$

ou

$$E_A = -\nabla\phi_e - j\omega A. \quad (2.9)$$

A função  $\phi_e$ , representa um potencial escalar elétrico arbitrário que é uma função da posição. Aplicando o rotacional em ambos os lados de (2.2) e usando a identidade vetorial, teremos

$$\nabla \times (\mu H_A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (2.10)$$

Para o meio homogêneo, (2.10) reduz-se a

$$\mu \nabla \times H_A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A. \quad (2.11)$$

Comparando a equação de Maxwell

$$\nabla \times H_A = J + j\omega\epsilon E_A \quad (2.12)$$

com (2.11) teremos

$$\mu J + j\omega\mu\varepsilon E_A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.9) em (2.13), teremos

$$\begin{aligned} \nabla^2 A + k^2 A &= -\mu J + \nabla(\nabla \cdot A) + \nabla(j\omega\mu\varepsilon\phi_e) \\ &= -\mu J + \nabla(\nabla \cdot A + j\omega\mu\varepsilon\phi_e) \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ .

Em (2.2), o rotacional de  $A$  estava definido. Agora, temos a liberdade de definir a divergência de  $A$  que é independente de seu rotacional.

Para simplificar (2.14), faremos

$$\nabla \cdot A = -j\omega\mu\varepsilon\phi_e \Rightarrow \phi_e = -\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\nabla \cdot A \quad (2.15)$$

que é conhecida como a *condição de Lorentz*. Substituindo (2.15) em (2.14) conduz a

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu J \quad (2.16)$$

definida como a equação de Helmholtz.

Além disso, (2.9) reduz-se a

$$E_A = -\nabla\phi_e - j\omega A = -j\omega A - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot A). \quad (2.17)$$

Uma vez o vetor potencial magnético  $A$  conhecido, o campo magnético  $H_A$  pode ser obtido de (2.3) e o campo elétrico  $E_A$  de (2.17).  $E_A$  pode da mesma maneira ser encontrado da equação de Maxwell (2.12) com  $J = 0$ . Mostraremos como achar  $A$  em termos da densidade de corrente  $J$ , solução da equação não-homogênea de Helmholtz de (2.16).

Então, suponhamos que uma onda incidente atinja a superfície de um condutor, a qual é determinada *Campo Elétrico Incidente* ( $E^i(r)$ ) (Figura 2.1(a)).

No caso de uma antena, o  $E^i(r)$  produzido por ela é alimentado através de uma fenda (Figura 2.2). Parte do  $E^i(r)$  encontrado no condutor induz em sua superfície uma *densidade de corrente linear* ( $J_s$  (âmperes/ metro)).

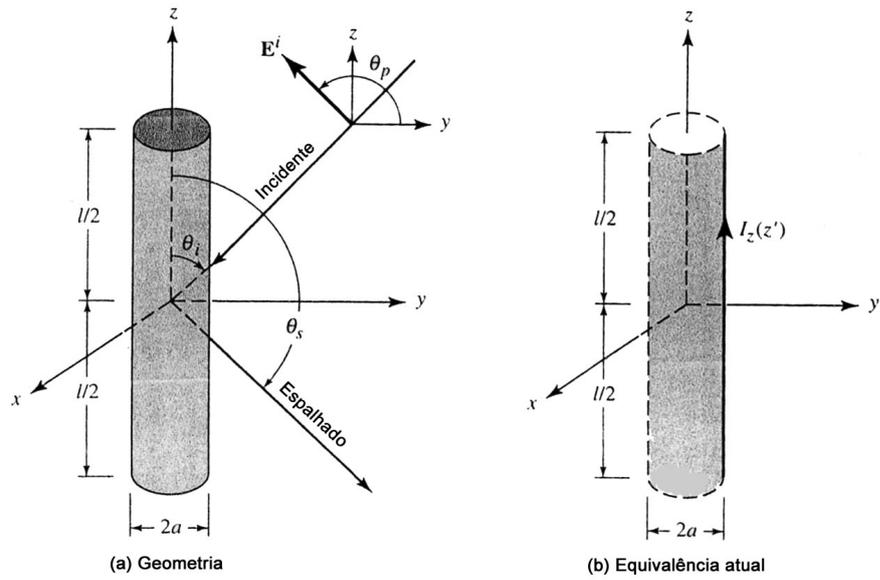


Figura 2.1: Onda uniforme do plano obliquamente incidente em um condutor administrando.

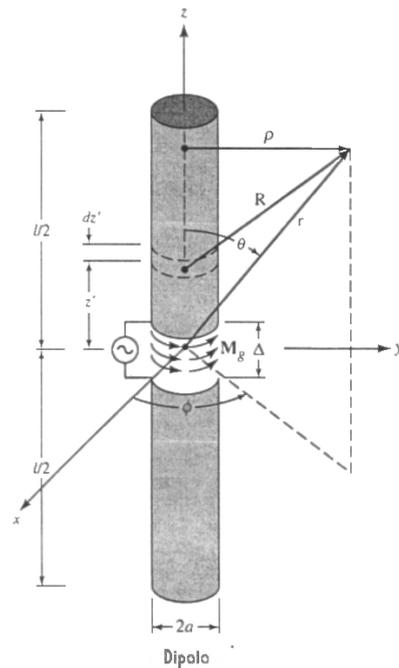


Figura 2.2: Dipolo cilíndrico, sua segmentação e modelagem da abertura.

A densidade de corrente induzida  $J_s$  irradia e produz um campo elétrico chamado *Campo Elétrico Espalhado* ( $E^s(r)$ ). O *Campo Elétrico Total* ( $E^t(r)$ ) é a soma do  $E^i(r)$  e

do  $E^s(r)$ , em qualquer ponto do espaço.

$$E^t(r) = E^i(r) + E^s(r) \quad (2.18)$$

onde

$E^t(r)$  = campo elétrico total.

$E^i(r)$  = campo elétrico incidente.

$E^s(r)$  = campo elétrico espalhado.

Quando o ponto de observação é deslocado para a superfície do condutor ( $r = r_s$ ) e este, condutor, é perfeito, a componente tangencial do  $E^t(r)$  desaparece.

Em coordenadas cilíndricas, o campo elétrico radiado pelo dipolo tem uma componente radial  $E_\rho$  e uma componente tangencial  $E_z$ . Então, na superfície do condutor a componente tangencial de (2.18) reduz-se a

$$E_z^t(r = r_s) = E_z^i(r = r_s) + E_z^s(r = r_s) = 0 \quad (2.19)$$

ou

$$E_z^s(r = r_s) = -E_z^i(r = r_s) \quad (2.20)$$

Em geral,  $E^s(r)$  gerado pela densidade de corrente induzida  $J_s$  é determinado por (2.17), ou

$$\begin{aligned} E^s(r) &= -j\omega A - j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot A) \\ &= -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\cdot[k^2 A + \nabla(\nabla\cdot A)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Porém, para observações na superfície do condutor somente a componente  $z$  de (2.21) é necessária, e podemos escrevê-la

$$E_z^s(r) = -j\frac{1}{\omega\mu\varepsilon}\left(k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) \quad (2.22)$$

De acordo com [2] e desprezando os efeitos das extremidades

$$\begin{aligned}
A_z &= \frac{\mu}{4\pi} \int \int_s J_z \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \\
&= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \int_0^{2\pi} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} a \cdot d\phi' dz'
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Se o condutor é muito fino, a densidade de corrente  $J_z$  não é uma função do ângulo azimutal  $\phi$ , e podemos escrevê-la como

$$2\pi a J_z = I_z(z') \Rightarrow J_z = \frac{1}{2\pi a} I_z(z') \tag{2.24}$$

onde  $I_z(z')$  é uma linha de corrente localizada na distância radial  $\rho = a$  do eixo de  $z$ , Figura 2.3(a).

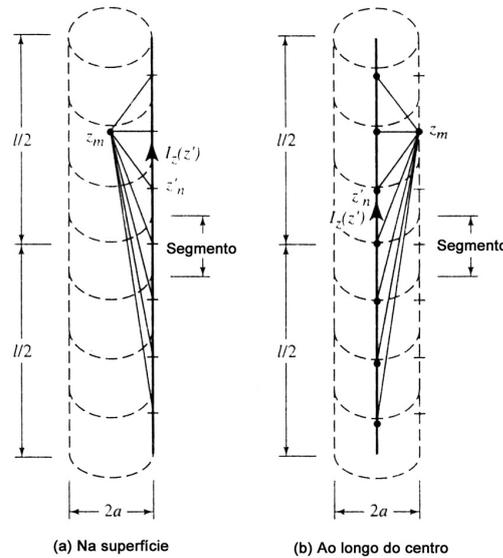


Figura 2.3: Segmentação de dipolo e sua corrente equivalente.

Assim, (2.23) reduz-se a

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \left[ \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' \right] dz' \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ &= \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + (z-z')^2} \end{aligned}$$

onde  $\rho$  é a distância radial ao ponto observado e  $a$  é o raio.

Por causa da simetria do espalhador as observações não são função de  $\phi$ , por simplicidade, vamos escolher  $\phi = 0$ . Para observações na superfície do espalhador  $\rho = a$  (2.25) e  $R$  se reduz a

$$\begin{aligned} A_z(\rho = a) &= \mu \int_{-l/2}^{+l/2} I_z(z') \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) dz' \\ &= \mu \int_{-l/2}^{+l/2} I_z(z') G(z, z') dz' \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} G(z, z') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \\ R(\rho = a) &= \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z-z')^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, para observações na superfície do espalhador  $\rho = a$ , a componente  $z$  do  $E^s(r)$  pode ser expressada como

$$E_z^s(\rho = a) = -j \frac{1}{\omega \varepsilon} \left( k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-l/2}^{+l/2} I_z(z') G(z, z') dz' \quad (2.28)$$

a qual usando (2.20) reduz-se a

$$-j\frac{1}{\omega\varepsilon}\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{-l/2}^{+l/2}I_z(z')G(z,z')dz'=-E_z^i(\rho=a) \quad (2.29)$$

ou

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)\int_{-l/2}^{+l/2}I_z(z')G(z,z')dz'=-j\omega\varepsilon E_z^i(\rho=a) \quad (2.30)$$

Trocando integração por diferenciação, podemos escrever (2.30) como

$$\int_{-l/2}^{+l/2}I_z(z')\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)G(z,z')\right]dz'=-j\omega\varepsilon E_z^i(\rho=a) \quad (2.31)$$

onde  $G(z, z')$  é dado por (2.27).

A equação (2.31) é chamada Equação Integral Pocklington's [21], e pode ser usada para determinar a corrente equivalente da fonte filamentar do condutor e a  $J_z$  do condutor, sabendo o  $E_z^i$  na superfície do condutor. Se assumirmos que o condutor é muito fino ( $a \ll \lambda$ ) tal que (2.27) reduz-se a

$$G(z, z') = G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (2.32)$$

A equação de (2.31), também, pode ser expressada em uma forma mais conveniente [12], como

$$\int_{-l/2}^{+l/2}I_z(z')\frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5}\left[(1+jkR)(2R^2-3a^2)+(kaR)^2\right]dz'=-j\omega\varepsilon E_z^i(\rho=a) \quad (2.33)$$

onde para observações ao longo do centro do condutor ( $\rho = 0$ )

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}. \quad (2.34)$$

Em (2.31) ou (2.33),  $I_z(z')$  representa a corrente equivalente da fonte filamentar ou linha de corrente localizada na superfície do condutor, Figura 2.1(b), e é obtida conhecendo o  $E_z^i$  na superfície do condutor. Para técnicas de casamento resolve-se casando as condições de fronteiras em pontos discretos na superfície do condutor.

Geralmente, é mais fácil escolher os pontos casados no interior do condutor, especialmente ao longo do eixo, Figura 2.3(a), onde  $I_z(z')$  é localizado na superfície do condutor. Por reciprocidade, a configuração da figura 2.3(a) é análoga a figura 2.3(b) onde é assumido que a corrente equivalente da fonte filamentar está localizada ao longo do eixo central do condutor e os pontos casados são selecionados na superfície do condutor. Qualquer uma das duas configurações pode ser usada para determinar a corrente equivalente da fonte filamentar  $I_z(z')$ .

O Método dos Momentos será aplicado na Equação Integral de Pocklington's . Para que este método seja compreendido apresenta-se a seguir a solução do Método dos Momentos e logo após a sua aplicação pela Equação Integral de Pocklington's.

## 2.4 Método dos Momentos

Na modelagem de antenas filamentosas, é comum assumir a distribuição de corrente como uniforme ou senoidal. Esta abordagem, no entanto, é imprecisa na maioria das aplicações práticas, uma vez que não se leva em consideração os efeitos das múltiplas interferências entre os elementos, restringindo os tipos de estruturas passíveis de investigações. Para se trabalhar corretamente com configurações arbitrárias, é necessário lançar mão de técnicas numéricas.

O Método dos Momentos se baseia na solução numérica de equações integrais. Assim, cada elemento da antena é dividido em  $N$  segmentos muito pequenos com relação ao comprimento de onda. A corrente é calculada para cada segmento e os campos parciais são sobrepostos na condição de campos distantes.

As equações (2.31) e (2.33) cada uma tem a forma de

$$F(g) = h \tag{2.35}$$

onde  $F$  é um operador linear conhecido,  $h$  é uma função de excitação conhecida, e  $g$  é a função de resposta. Para (2.31)  $F$  é um operador de integrodiferencial, enquanto

para (2.33) é um operador integrante. O problema consiste em determinar  $g$  uma vez especificados  $F$  e  $h$ , isso é denominado de inversão ou problema inverso.

O Método dos Momento [18], [22] é uma técnica numérica aplicável nesta situação, e consiste em expandir a função resposta  $g$  como uma combinação linear de  $N$  termos, isto é

$$g(z') \simeq a_1 g_1(z') + a_2 g_2(z') + \dots + a_N g_N(z') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(z') \quad (2.36)$$

onde  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) são constantes desconhecidas e  $g_n(z')$  são funções conhecidas denominadas de função base ou de expansão. O domínio das funções  $g_n(z')$  é o mesmo de  $g(z')$ . Substituindo (2.36) em (2.35) e usando a linearidade do operador  $F$  de (2.35), obtemos

$$\sum_{n=1}^N a_n F(g_n) = h \quad (2.37)$$

As funções base  $g_n$  são escolhidas de forma que cada  $F(g_n)$  em (2.37) possa ser obtida, convenientemente, de forma fechada ou numericamente, restando apenas determinar as constantes  $a_n$  desconhecidas.

A expansão de (2.37) conduz a uma equação com  $N$  termos desconhecidos. Para obter essas  $N$  constantes calcula-se (2.37) em  $N$  pontos distintos, formando, desta forma, um sistema de equações lineares. Fazendo isto, obtemos

$$\sum_{n=1}^N I_n F(g_n) = h_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.38)$$

Em forma de matriz, (2.38) é dada por

$$[Z_{mn}][I_n] = [V_m] \quad (2.39)$$

onde

$$Z_{mn} = F(g_n)$$

$$I_n = a_n$$

$$V_m = h_m$$

Os coeficientes desconhecidos de  $a_n$  podem ser encontrados resolvendo (2.39) através de técnicas numéricas para resolver um sistema de equações lineares. Neste trabalho, utilizou-se o método da eliminação de Gauss.

### 2.4.1 Funções Base

Um passo muito importante em qualquer solução numérica é a escolha das funções base. Em geral, escolhe-se como funções base o conjunto de funções que conseguem representar com precisão a função desconhecida (solução do problema), levando em consideração um esforço computacional mínimo [23]-[25].

Teoricamente, há muitos conjuntos de funções base possíveis. Porém, em prática, é usado somente um número limitado. Estes conjuntos podem ser divididos em duas classes. A primeira classe consiste em funções definidas em subdomínios, sendo diferentes de zero em uma parte do domínio da  $g(x')$ ; seu domínio é a superfície da estrutura em estudo. A segunda classe contém funções definidas em todo o domínio da função desconhecida. A expansão de funções base em todo o domínio da função é análoga ao desenvolvimento da série de Fourier.

### 2.4.2 Funções Definidas em cada Subdomínio

Dos dois tipos de funções base, funções definidas em cada subdomínio são as mais comuns. Podem ser usadas sem conhecimento prévio da natureza da função a ser aproximada.

A aproximação em subdomínios envolve subdivisão da estrutura em estudo em  $N$  segmentos, como ilustrado na Figura 2.4(a). Estes segmentos são colineares e de comprimentos iguais, embora esta condição não seja necessária.

A mais comum destas funções base é a função constante ou “pulso”, mostrada na Figura 2.4(a), definida por

$$g_n(x') = \begin{cases} 1 & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.40)$$

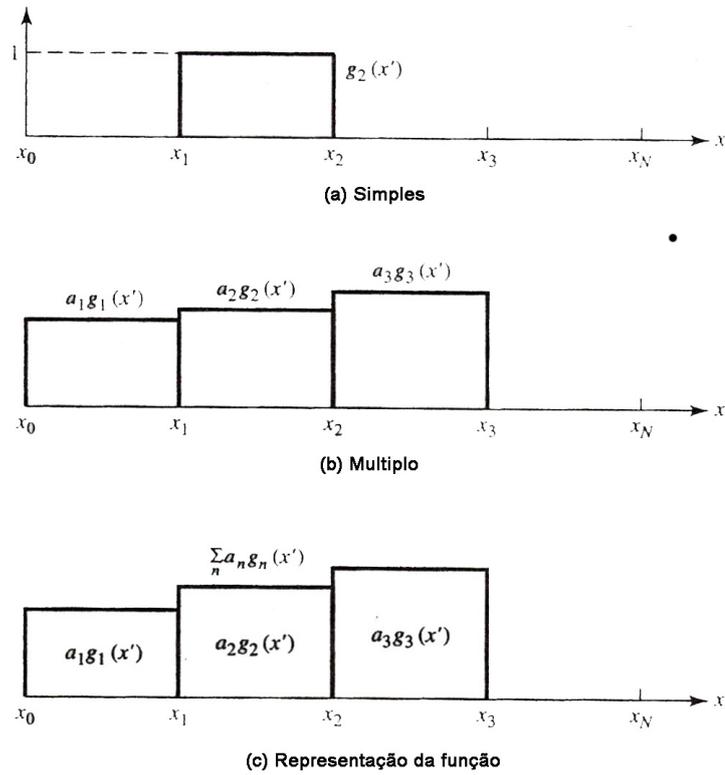


Figura 2.4: Funções constantes definidas em cada subdomínio.

Uma vez determinados os coeficientes associados a cada função em cada subdomínio obtêm-se uma representação "staircase" da função desconhecida, como mostrado na Figura 2.4(b) e (c).

Outro conjunto de funções base usuais é a linear definida em cada subdomínio (*hat functions*), como mostra a Figura 2.5(a), definidas por

$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{x' - x'_{n-1}}{x'_n - x'_{n-1}} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{x'_{n+1} - x'}{x'_{n+1} - x'_n} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.41)$$

Este tipo de função envolve dois segmentos, e sobrepõe funções adjacentes [Figura 2.5(b)]. A representação resultante [Figura 2.5(c)] é mais suave em relação aos "pulsos", em compensação a complexidade computacional aumenta.

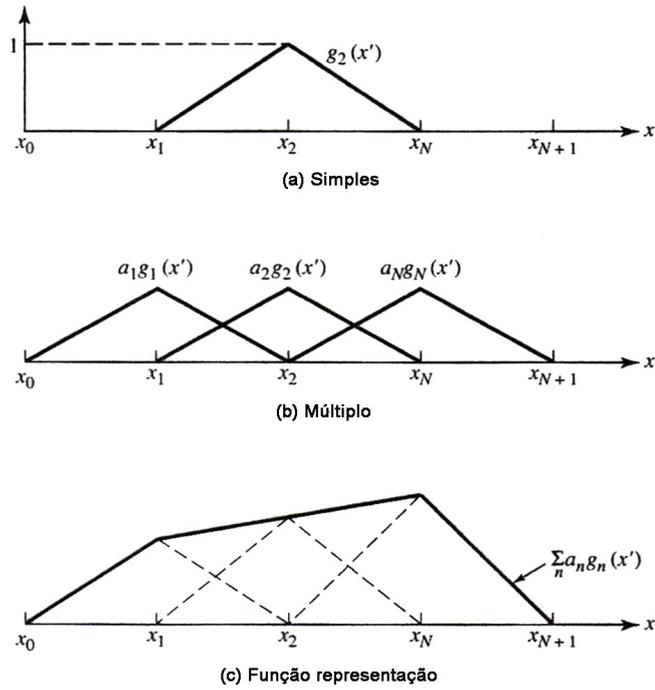


Figura 2.5: Funções lineares definidas em cada subdomínio.

Aumentando a sofisticação da função base em cada subdomínio acima do nível das “*hat functions*”, dependendo da situação, o aumento da precisão não é garantido. Porém, há casos onde as funções mais específicas são úteis por outras razões. Por exemplo, alguns operadores podem ser obtidos sem integração numérica quando os seus integrandos são multiplicados por funções  $\sin(kx')$  ou  $\cos(kx')$ , onde  $x'$  é a variável de integração. Em tais exemplos, vantagens consideráveis em tempo computacional e diminuição nos erros podem ser ganhas usando funções base senoidais definidas em subdomínios, como mostrado na Figura 2.6 ou cosseno truncado, como apresentado na Figura 2.7. Estas funções são definidas das seguintes formas

$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{\sin [k(x' - x'_{n-1})]}{\sin [k(x'_n - x'_{n-1})]} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{\sin [k(x'_{n+1} - x')]}{\sin [k(x'_{n+1} - x'_n)]} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.42)$$

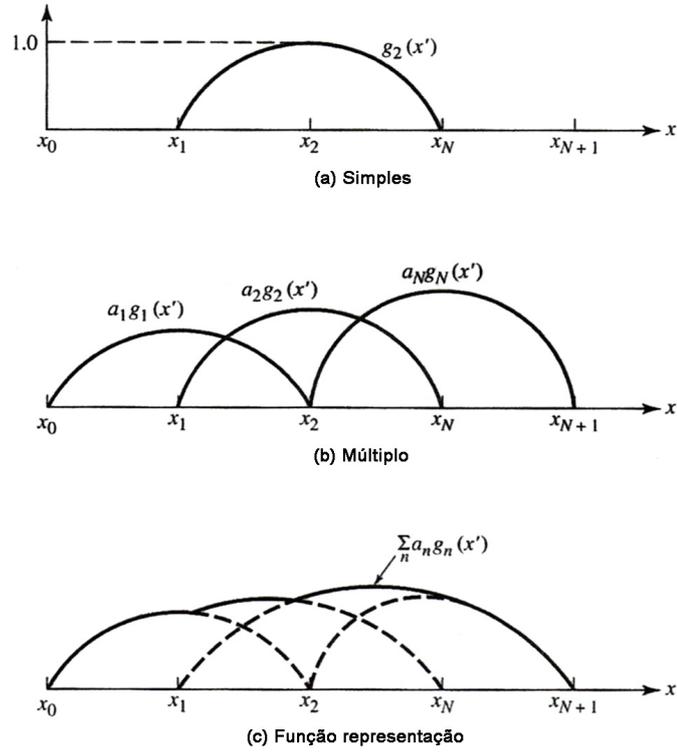


Figura 2.6: Funções senoidais definidas em cada subdomínio.

$$g_n(x') = \begin{cases} \cos \left[ k \left( x' - \frac{x'_n - x'_{n-1}}{2} \right) \right] & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.43)$$

### 2.4.3 Funções Definidas em todo o Domínio

Estes tipos de funções base são definidas e são diferentes de zero sobre todo o comprimento da estrutura a ser considerada. Assim, nenhuma segmentação é realizada em sua aplicação.

Um conjunto de funções base usuais são funções senoidais, ou seja

$$g_n(x') = \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi x'}{l} \right] \quad -\frac{l}{2} \leq x' \leq \frac{l}{2} \quad (2.44)$$

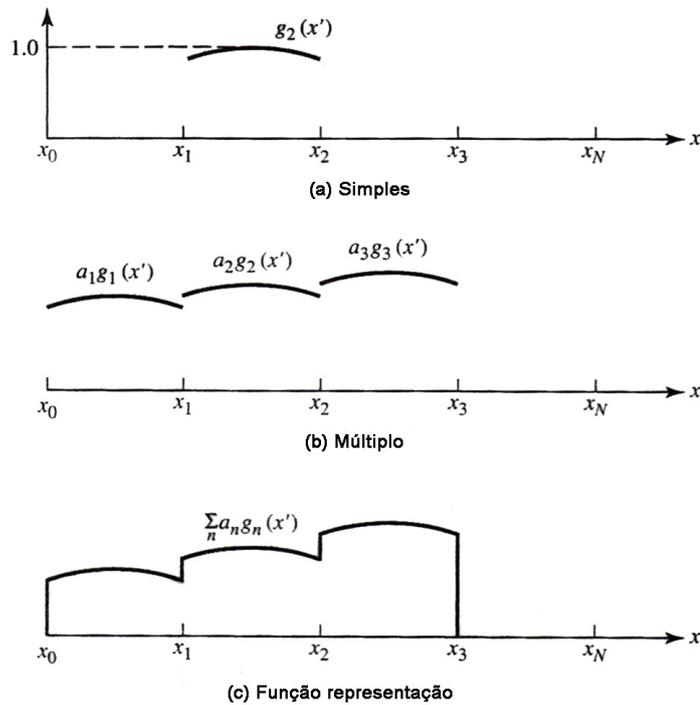


Figura 2.7: Funções cossenoidais truncadas definidas em cada subdomínio.

Este conjunto de funções base são particularmente úteis para modelar a distribuição de corrente em um dipolo condutor, o qual é conhecido para ter distribuição, principalmente, senoidal. A vantagem principal do uso de funções definidas em todo o domínio é quando se conhece um padrão de resposta. Tais funções podem representar, de forma aceitável, a função desconhecida usando poucos termos, em comparação as funções definidas em cada subdomínio, em sua expansão. Representação por cossenos e/ou senos é semelhante à expansão em séries de Fourier de funções arbitrárias.

Em virtude de se usar um número finito de funções (ou modos, como são chamados), funções de base definidas em todo o domínio normalmente tem dificuldade em modelar funções desconhecidas arbitrárias ou complicadas.

Este conjunto de funções base em (2.48) pode ser obtido, também, por Tschebyscheff, Maclaurin, Legendre e polinômios de Hermite, ou outras funções convenientes.

### 2.4.4 Função Peso (ou Função Teste)

Para melhorar a solução de (2.38) e (2.39) um produto interno  $\langle w, g \rangle$  pode ser definido, o qual é uma operação escalar satisfazendo as propriedades:

$$\left. \begin{aligned} \langle w, g \rangle &= \langle g, w \rangle \\ \langle \alpha f + \beta g, w \rangle &= \alpha \langle f, w \rangle + \beta \langle g, w \rangle \\ \langle g^*, g \rangle &> 0 \quad \text{inf } g \neq 0 \\ \langle g^*, g \rangle &= 0 \quad \text{inf } g = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares e o asterisco (\*) indica complexo conjugado. Um produto interno típico é:

$$\langle w, g \rangle = \int \int_S w^* \cdot g \, ds \quad (2.46)$$

onde os  $w$ 's são as funções peso e  $S$  é a superfície da estrutura analisada. Note que as funções  $w$  e  $g$  podem ser vetores. Esta técnica é melhor conhecida como Método dos Momentos (MM) [18], [19].

No Método dos Momentos é definido um conjunto de  $N$  funções peso  $\{w_m\} = w_1, w_2, \dots, w_N$  no domínio do operador  $F$ . Formando o produto interno entre cada uma destas funções, (2.37) resulta em

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle w_m, F(g_n) \rangle = \langle w_m, h \rangle \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.47)$$

Este conjunto de  $N$  equações pode ser escrito na forma matricial como

$$[F_{mn}][a_n] = [h_m] \quad (2.48)$$

onde

$$[F_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, F(g_1) \rangle & \langle w_1, F(g_2) \rangle & \dots \\ \langle w_2, F(g_1) \rangle & \langle w_2, F(g_2) \rangle & \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$[a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad [h_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, h \rangle \\ \langle w_2, h \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, h \rangle \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

O sistema (2.47) pode ser resolvido por uma técnica numérica, como o método da eliminação de Gauss.

A escolha de funções peso é importante, visto que os elementos de  $\{w_n\}$  devem ser linearmente independentes, de forma que as  $N$  equações (2.46) serão linearmente independentes [18]-[20], [24], [25]. Além disso, geralmente, é mais adequado escolher funções peso que minimizam o tempo computacional exigido para calcular o produto interno.

A condição de independência linear entre elementos e a vantagem de simplicidade computacional, também, são características importantes das funções base. Devido a isto, tipos similares de funções são usadas para peso e expansão. Uma escolha particular de funções pode ser, deixar as funções peso e base serem as mesmas, isto é,  $w_n = g_n$ .

## 2.5 Solução da Equação Integral de Pocklington's pelo Método dos Momentos

Para usar este método na determinação da impedância de um dipolo, a primeira coisa a ser feita é resolver a equação integral para a distribuição de corrente. Isto é realizado usando equação Integral de Pocklington's (8-22) ou (8-24) ou equação integral de Hallén (8-27). Para a equação integral de Pocklington's usa-se uma fonte de voltagem (8-28) ou o modelo de pulso magnético de (8-31) ou (8-32).

Uma vez achada a distribuição de corrente, usando qualquer uma ou ambas as equações integrais, então a auto-impedância é determinada usando a razão da voltagem-corrente,

ou seja

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}}$$

Aqui, o Método de Momento é aplicado na equação integral de Pocklington's. É aplicado funções definidas em todo o domínio, como descrita na seção 2.4.3. Posteriormente, foi desenvolvido um programa na linguagem FORTRAN para obter a distribuição de corrente.

Houve muitas investigações experimentais [8], [9] e formulações analíticas [10]-[24] da antena Yagi-Uda. Um método [14] baseado em rigorosas equações integrais para o campo elétrico radiado pelos elementos da antena será apresentado e será usado para descrever as distribuições complexas de corrente, a velocidade de fase, e os padrões de radiação correspondentes em todos os elementos.

O método é semelhante a [14] o qual está baseado na equação integral ampliada de Pocklington's (2.33) enquanto que o apresentado aqui segue a formulação de [14], porém foi desenvolvida a partir da equação integral resumida de Pocklington's (2.31), a qual foi formulada por Tirkas [15] onde foram incluídas interações mútuas e, em princípio, não há nenhuma restrição ao número de elementos.

Porém, para propósitos computacionais, métodos numéricos de pontos-casados, baseado nas técnicas da Seção 2.4, são usados para avaliar e satisfazer a equação integral para pontos discretos sobre o eixo de cada elemento ao invés de todos os pontos na superfície do mesmo.

O número de pontos discretos onde são casadas condições de fronteira deve ser suficiente em número para permitir que os dados computados possam ser bem comparados com resultados experimentais.

A teoria está baseada na equação integral de Pocklington's (2.31) para o campo elétrico total gerado por uma fonte de corrente elétrica radiante em um espaço livre ilimitado, ou

$$\int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = j4\pi\omega\epsilon_0 E_z^t \quad (2.51)$$

onde

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Sendo

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \quad (2.52)$$

(2.51) reduz-se a

$$\int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' + k^2 \int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = j4\pi\omega\varepsilon_0 E_z^t. \quad (2.53)$$

Concentramo-nos agora na integração do primeiro termo de (2.53). Integrando o primeiro termo de (2.53) por partes onde

$$u = I(z') \quad (2.54)$$

$$du = \frac{dI(z')}{dz'} dz'$$

$$dv = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' = \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \right] dz' \quad (2.55)$$

$$v = \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right)$$

reduz-se a

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' &= I(z') \left[ \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \right] \Big|_{-l/2}^{+l/2} - \\ &\quad - \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) \frac{dI(z')}{dz'} dz' \end{aligned} \quad (2.56)$$

Já que necessitamos que a corrente no fim de cada condutor se anule [*i.e.*,  $I_z(z' = +l/2) = I_z(z' = -l/2) = 0$ ] (2.55) reduz a

$$\int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' = - \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' \frac{dI(z')}{dz'}. \quad (2.57)$$

Integrando (2.56) por partes

$$u = \frac{dI(z')}{dz'} \quad (2.58)$$

$$du = \frac{d^2 I(z')}{dz'^2} dz'$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' \quad (2.59)$$

$$v = \frac{e^{-jkR}}{R}$$

reduz (2.56) a

$$\begin{aligned} \int_{-l/2}^{+l/2} I(z') \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz' &= - \frac{dI(z')}{dz'} \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{-l/2}^{+l/2} + \\ &+ \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{d^2 I(z')}{dz'^2} \frac{e^{-jkR}}{R} dz'. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Quando (2.59) é substituída pelo primeiro termo de (2.52), reduz (2.52) a

$$- \frac{dI(z')}{dz'} \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{-l/2}^{+l/2} + \int_{-l/2}^{+l/2} \left[ k^2 I(z') + \frac{d^2 I(z')}{dz'^2} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz' = 4j\pi\omega\varepsilon_0 E_z^t. \quad (2.61)$$

Para condutores com diâmetros pequenos a corrente em cada elemento pode ser aproximada por uma série finita em cada modo. Assim, a corrente no  $n$ -ésimo elemento pode ser escrita como uma expansão em série de Fourier da forma [16]

$$I_n(z') = \sum_{m=1}^M I_{nm} \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi z'}{l_n} \right] \quad (2.62)$$

onde  $I_{nm}$  representa o coeficiente de corrente complexa de modo  $m$  sobre o elemento  $n$  e  $l_n$  representa o comprimento correspondente do elemento  $n$ . Tomando a primeira e a segunda derivada de (2.61) e substituindo junto com (2.61) em (2.60) reduz a

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M I_{nm} \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{l_n} \sin \left[ (2m-1) \frac{\pi z'_n}{l_n} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{-l_n/2}^{+l_n/2} + \left[ k^2 - \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{l_n^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_{-l_n/2}^{+l_n/2} \cos \left[ (2m-1) \frac{\pi z'_n}{l_n} \right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz'_n \right\} = 4j\pi\omega\varepsilon_0 E_z^t. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Já que o cosseno é uma função par, (2.62) pode ser reduzida por integração somente sobre  $0 \leq z' \leq l/2$  para

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M I_{nm} \left\{ (-1)^{m+1} \frac{(2m-1)\pi}{l_n} G_2 \left( x, x', y, y'/z, \frac{l_n}{2} \right) + \left[ k^2 - \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{l_n^2} \right] \right. \\ \left. \times \int_0^{l_n/2} G_2(x, x', y, y'/z, z'_n) \cos \left[ \frac{(2m-1)\pi z'_n}{l_n} \right] dz'_n \right\} = 4j\pi\omega\varepsilon_0 E_z^t \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde

$$G_2(x, x', y, y'/z, z'_n) = \frac{e^{-jkR_-}}{R_-} + \frac{e^{-jkR_+}}{R_+}$$

$$R_{\pm} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + a^2 + (z \pm z')^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

$N$  = número total de elementos.

onde

$R_{\pm}$  = é a distância do raio do centro de cada condutor ao centro de qualquer outro condutor como mostrado na fig 2.8(a).

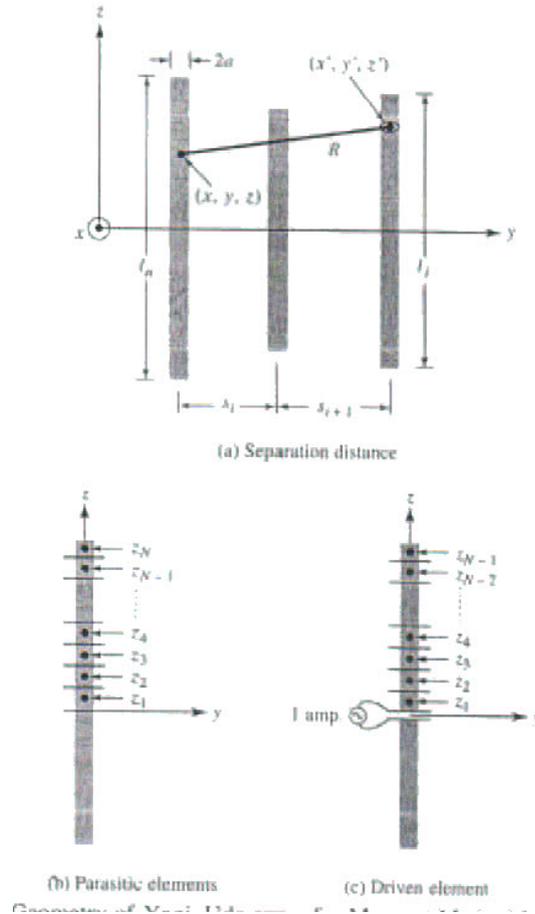


Figura 2.8: Geometria da ordem da Yagi-Uda para a formulação do Método dos Momentos.

A equação integral de (2.63) é válida para cada elemento e ela assume que o número  $M$  de modos de corrente é o mesmo para cada elemento. Para aplicar, a solução do Método dos Momentos à equação integral de (2.63), cada elemento do condutor é subdividido em  $M$  segmentos. Em cada elemento, para cada outro elemento energizado, a correspondência é feita para o centro do condutor e é necessário que  $E_z^t$  de (2.63) se anule para cada ponto correspondente de cada segmento [i.e.,  $E_z^t(z = z_i) = 0$ ], como mostrado na Figura 2.8(b).

No elemento dirigido a correspondência é feita na superfície do condutor e é necessário que  $E_z^t$  de (2.63) se anule para  $M - 1$  pontos, embora exista  $m$  modos, e eles excluem o segmento alimentador como mostrado na Figura 2.8(c). Isto gera  $M - 1$  equações. A  $M$ -ésima equação do elemento fonte é gerada pela restrição que a corrente normalizada para todos os  $M$  modos do ponto na fonte ( $z' = 0$ ) é igual a unidade [14], [16], ou

$$\sum_{m=1}^M I_{nm} (z' = 0) \Big|_{n=N} = 1. \quad (2.65)$$

Baseado no procedimento acima, um sistema de equações lineares é gerado levando em conta as interações de

- **cada modo** em cada segmento condutor com cada segmento do mesmo condutor
- **cada modo** em cada segmento condutor com cada segmento no outro condutor.

Este sistema de equações lineares é então resolvido para encontrar os coeficientes de amplitudes complexas da distribuição de corrente em cada condutor como representado por (2.61). Isto é demonstrado em [14] para um condutor de 3 elementos (um diretor, um refletor e o elemento fonte) com dois modos em cada condutor. ■

# Capítulo 3

## Método de Gauss-Newton

### 3.1 Introdução

Este trabalho aplica o método de Gauss-Newton para otimizar diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costas da antena Yagi-Uda a partir do ajuste dos valores dos comprimentos e espaçamentos entre elementos desse dispositivo de radiação.

Para desenvolver uma antena Yagi-Uda que reúna algumas características requeridas para um bom desempenho desse dispositivo foram especificadas as seguintes características: número de elementos, sendo um refletor e um elemento energizado; diretividade; razão frente-costas; e ângulo de meia. Os valores dos tamanhos e dos espaçamentos entre os elementos serão ajustados pelo processo de otimização de Gauss-Newton.

### 3.2 Procedimento

Um projeto inicial da antena será estabelecido e, a partir desses dados, aplica-se o método de Gauss-Newton até que as faixas de valores das características pre-estabelecidas sejam atingidas. Para esses parâmetros permanecerem dentro de uma faixa de valores pré-estabelecidos será aplicada uma técnica de transformação.

A qualidade do processo de otimização está relacionada, matematicamente, a uma função Custo.

A função Custo utilizada no processo de otimização de Gauss-Newton foi a mesma

desenvolvida por [26], [27], e é dada pela expressão (3.1).

$$C(m) = \frac{1}{2} \mu \left[ \|W_d(f(m) - d^{obs})\|^2 - x^2 \right] + \|W_m(m - m_r)\|^2 \quad (3.1)$$

onde

- $\mu$  ( $0 < \mu < \infty$ ) é o parâmetro de regularização (multiplicador de Lagrange);
- $x^2$  é um valor pré-estabelecido de ajuste dos dados;
- $m$  é o vetor contendo os valores que serão ajustados (parâmetros do modelo) tamanho e os espaçamentos entre os elementos;
- $f(m)$  é o operador modelagem direta;
- $d^{obs}$  é o vetor contendo os valores requeridos para o projeto da antena (diretividade, razão frente-costa e ângulo de meia potência);
- $W_m$  é a inversa da matriz covariância dos dados que serão ajustados;
- $W_d$  é a inversa da matriz covariância dos dados pré-estabelecidos para o projeto.

Esta técnica é baseada em uma representação quadrática da função Custo. O modelo quadrático é obtido tomando-se os três primeiros termos da expansão por série de Taylor da função Custo (3.1) em torno da  $k$ -ésima iteração ( $m_k$ ), assim:

$$C(m_k + \Delta m_k) = C(m_k) + g^T(m_k) \cdot \Delta m_k + \frac{1}{2} \Delta m_k^T \cdot G(m_k) \cdot \Delta m_k \quad (3.2)$$

onde  $T$  denota matriz transposta e  $\Delta m_k = m_{k+1} - m_k$  é o incremento do vetor dos parâmetros em direção ao ponto estacionário da função Custo  $C(m_k)$ ;  $\bar{g}(m) = \nabla C(m)$  é o vetor gradiente da função Custo, ou seja:

$$\begin{aligned} g(m) = \nabla C(m) &= \left[ g_n \equiv \frac{\partial C}{\partial m_n}, n = 1, 2, 3, \dots, N \right] \\ &= \mu J^T(m) \cdot W_d^T \cdot W_d \cdot e(m) + W_m^T \cdot W_m \cdot (m - m_r) \end{aligned}$$

$m_n$  é a  $n$ -ésima componente do vetor dos parâmetros do modelo  $m$ ;  $e(m) = f(m) - d^{obs}$

é o vetor erro residual; e  $J(m)$  é uma matriz cuja dimensão é  $M \times N$  denominada de Jacobiano (ou sensibilidade) e é dada por:

$$J(m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_l(m)}{\partial m_n}, l = 1, 2, 3, \dots, M; n = 1, 2, 3, \dots, N \\ \frac{\partial f_1}{\partial m_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial m_j} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial m_N} \\ \vdots \ddots \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial m_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial m_j} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial m_N} \\ \vdots \ddots \vdots \ddots \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial m_1} \cdots \frac{\partial f_M}{\partial m_j} \cdots \frac{\partial f_M}{\partial m_N} \end{bmatrix}$$

$G(m) = \nabla \nabla C(m)$  é o Hessiano da função Custo o qual é uma matriz simétrica de ordem  $N \times N$  dada por:

$$\begin{aligned} G(m) = \nabla \nabla C(m) &= \left[ G_{nl} = \frac{\partial^2 C}{\partial m_n \partial m_l}, n, l = 1, 2, 3, \dots, N \right] \\ &= W_m \cdot W_m^T + \mu [J^T(m) \cdot W_d^T \cdot W_d \cdot J(m) + Q(m)] \end{aligned}$$

com  $Q(m) = \sum_{i=1}^M f_i(m) F_i^T(m)$  sendo  $F_i(m)$  o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $f(m) = W_d \cdot e(m)$ , e

$$F_i(m) = \nabla \nabla f_i(m) = \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial m_i \partial m_j}, i, j = 1, 2, 3, \dots, N \right]$$

O mínimo de (2) é obtido quando  $\Delta m_k$  for um mínimo da função quadrática

$$\phi(\Delta m) = g^T(m_k) \cdot \Delta m + \frac{1}{2} \Delta m^T \cdot G(m_k) \cdot \Delta m \quad (3.3)$$

A função  $\phi(\Delta m)$  tem um ponto estacionário (ponto crítico) em  $\Delta m_k$  somente se o gradiente de  $\phi(\Delta m)$  for para zero em  $\Delta m_k$ , isto é:

$$\nabla \phi(\Delta m_k) = g^T(m_k) + G(m_k) \cdot \Delta m_k = 0 \quad (3.4)$$

Assim, o ponto estacionário  $\Delta m_k$  da função  $\phi(\Delta m)$  será a solução do sistema de equações lineares:

$$G(m_k).\Delta m_k = -g(m_k) \quad (3.5)$$

Dependendo da definição da matriz Hessiano, o ponto estacionário dado por (3.5) pode ser um ponto de mínimo, máximo ou de sela.

De acordo com [25], a condição sobre a matriz Hessiano  $G(m)$  em ser singular ou não singular e sua definição (positiva, negativa definida ou indefinida) podem ser ajustada por uma escolha apropriada do parâmetro de regularização  $\mu$ .

No método de Gauss-Newton despreza-se as derivadas de segunda ordem da função Custo com relação as componentes do vetor dos parâmetros do modelo ( $m$ ), ou seja, não considera-se o termo  $Q$ . Assim, o Hessiano, no método de Gauss-Newton, sera dado por:

$$G(m) = W_m.W_m^T + \mu J^T(m).W_d^T.W_d.J(m). \quad (3.6)$$

O método reduz-se em resolver um sistema de equações lineares apresentado em (3.7).

$$[J^H.W_d^T.W_d.J^H + W_m^T.W_m]\Delta m_j = J^H.W_d^T.W_d.[d^{obs} - f(m_j)] - W_m^T.W_m.m_j \quad (3.7)$$

O sistema de equações lineares (3.7) foi resolvido aplicando o método da eliminação de Gauss.

A modelagem direta, ou seja, o projeto da antena Yagi-Uda a partir das entradas de comprimento e espaçamento entre os elementos da antena e como saída a diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costas, e baseado no Método dos Momentos apresentado em [2].

Para que os parâmetros otimizados estejam sempre dentro de uma faixa de valores pre-estabelecidos foi aplicado a seguinte técnica de transformação [25]:

$$m_{k+1} = m_{min} + \frac{m_{max} - m_{min}}{\alpha_k^2 + (m_k - m_{min})(m_{max} - m_k)^3} \alpha_k^2$$

com

$$\alpha_k = (m_k - m_{min})(m_{max} - m_k) + \frac{1}{2}(m_{max} - m_{min})\nu_k \Delta m_k$$

onde  $\nu_k$  é a direção de busca (ver [25]).

### 3.3 Resultados

Para aplicar o procedimento descrito neste trabalho na otimização da diretividade, do ângulo de meia potência e da razão frente-costas da antena Yagi-Uda, utilizamos o exemplo de uma antena com seis elementos também utilizada nos estudos de [27] e [28].

A antena otimizada por [28] serviu de projeto inicial neste trabalho. Os dados iniciais foram, em comprimento de onda ( $\lambda$ ):

comprimento do 1º diretor=0.448 $\lambda$

comprimento do 2º diretor=0.434 $\lambda$

comprimento do 3º diretor=0.422 $\lambda$

comprimento do 4º diretor=0.440 $\lambda$

comprimento do refletor=0.478 $\lambda$

comprimento da fonte=0.450 $\lambda$

espaçamento entre fonte e 1º diretor=0.152 $\lambda$

espaçamento entre 1º e 2º diretor=0.229 $\lambda$

espaçamento entre 2º e 3º diretor=0.435 $\lambda$

espaçamento entre 3º e 4º diretor=0.272 $\lambda$

espaçamento entre fonte e refletor= $0.182\lambda$

Esses dados do projeto inicial fornecem os seguintes valores como dados de saída:

ângulo de meia potência (plano E)=40,06 graus

ângulo de meia potência (plano H)=43,76 graus

razão frente-costas (plano E)=16,0552 dB

razão frente-costas (plano H)=16,0457 dB

diretividade = 11,758 dB

O diagrama de radiação dessa antena para o plano H e para o plano E é mostrado nas Figuras 3.1 e 3.2, respectivamente.

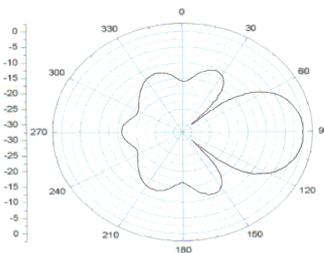


Figura 3.1: Diagrama de radiação (plano H) para os dados iniciais.

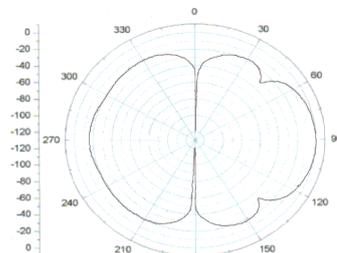


Figura 3.2: Diagrama de radiação (plano E) para os dados iniciais.

Aplicando o processo de otimização de Gauss-Newton descrito acima obteve-se, para comprimento e espaçamento entre os elementos da antena, os valores abaixo:

comprimento do 1º diretor= $0.44900\lambda$

comprimento do 2º diretor= $0.42301\lambda$

comprimento do 3º diretor= $0.42028\lambda$

comprimento do 4º diretor= $0.41125\lambda$

comprimento do refletor= $0.50197\lambda$

comprimento da fonte= $0.44900\lambda$

espaçamento entre fonte e 1º diretor= $0.15292\lambda$

espaçamento entre 1º e 2º diretor= $0.25761\lambda$

espaçamento entre 2º e 3º diretor= $0.42740\lambda$

espaçamento entre 3º e 4º diretor =  $0.24082\lambda$

espaçamento entre fonte e refletor =  $0.14675\lambda$

Esses dados otimizados fornecem como dados de saída os valores abaixo:

ângulo de meia potência (plano E)= $42,44$  graus

ângulo de meia potência (plano H)= $46,95$  graus

razão frente-costas (plano E)= $19,119$  dB

razão frente-costas (plano H) =  $19,099$  dB

diretividade =  $12,859$  dB

O diagrama de radiação da antena otimizada pelo método de Gauss-Newton para o plano H e para o plano E é mostrado nas Figuras 3.3 e 3.4, respectivamente

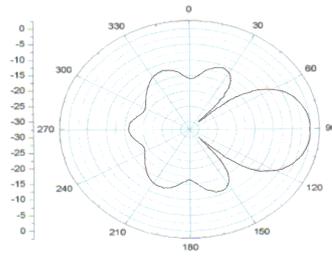


Figura 3.3: Diagrama de radiação (plano H) para os dados otimizados.

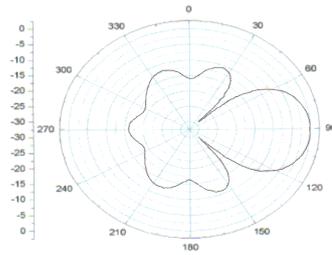


Figura 3.4: Diagrama de radiação (plano E) para os dados otimizados.

Pode-se observar que o processo de Gauss-Newton, aplicado na otimização do projeto da antena Yagi-Uda de seis elementos, obteve resultados bastante significativos para a diretividade, aumentando de 11,758 para 12,859 dB e para a razão frente-costas, tanto no plano E quanto no plano H. Porém, houve uma pequena perda no parâmetro de ângulo de meia potência. As Figuras 3.3 e 3.4 mostram o diagrama de radiação para o plano H e E, respectivamente, da antena otimizada neste trabalho.

### 3.4 Antena Yagi-Uda com cinco elementos

Aplicou-se o método de Gauss-Newton em uma antena com cinco elementos na otimização da diretividade, do ângulo de meia potência e da razão frente-costas desta antena, para comprovar a eficiência do método. Utilizamos o exemplo de uma antena com cinco elementos descrita nos estudos de [1].

Os dados iniciais foram, em comprimento de onda ( $\lambda$ ), sendo  $a = 0,003mm$ :

comprimento do 1º diretor= $0.419\lambda$

comprimento do 2º diretor= $0.427\lambda$

comprimento do 3º diretor= $0.407\lambda$

comprimento do refletor= $0.483\lambda$

comprimento da fonte= $0.434\lambda$

espaçamento entre fonte e 1º diretor= $0.271\lambda$

espaçamento entre 1º e 2º diretor= $0.362\lambda$

espaçamento entre 2º e 3º diretor= $0.390\lambda$

espaçamento entre fonte e refletor= $0.224\lambda$

Esses dados do projeto [1] forneceram os seguintes valores como dados de saída:

ângulo de meia potência (plano E)= $43,08$  graus

ângulo de meia potência (plano H)= $47,81$  graus

razão frente-costas (plano E)= $6,6602$  dB

razão frente-costas (plano H)= $6,6516$  dB

diretividade =  $11,444$  dB

Aplicando o processo de otimização de Gauss-Newton nestes dados obteve-se, para comprimento e espaçamento entre os elementos da antena, os valores abaixo: abaixo:

comprimento do 1º diretor= $0.4308273\lambda$

comprimento do 2º diretor= $0.4308273\lambda$

comprimento do 3º diretor= $0.4308273\lambda$

comprimento do refletor= $0.4884964\lambda$

comprimento da fonte= $0.4746618\lambda$

espaçamento entre fonte e 1º diretor= $0.2308273\lambda$

espaçamento entre 1º e 2º diretor= $0.323309\lambda$

espaçamento entre 2º e 3º diretor= $0.323309\lambda$

espaçamento entre fonte e refletor =  $0.1924818\lambda$

Esses dados otimizados fornecem como dados de saída os valores abaixo:

ângulo de meia potência (plano E)=40,86 graus

ângulo de meia potência (plano H)=44,89 graus

razão frente-costas (plano E)=10,2482 dB

razão frente-costas (plano H)=10,2372 dB

diretividade=12,170 dB

O diagrama de radiação da antena otimizada pelo método de Gauss-Newton para o plano H e para o plano E é mostrado nas Figuras 3.5 e 3.6, respectivamente

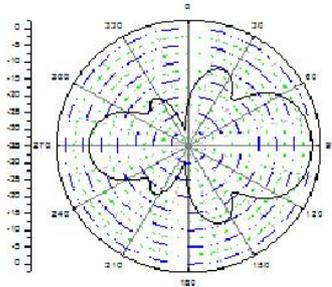


Figura 3.5: Diagrama de radiação (plano H) para os dados otimizados.

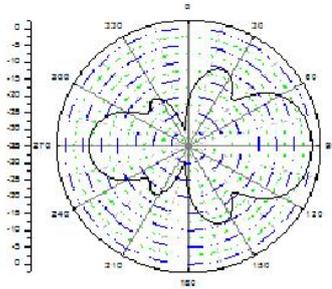


Figura 3.6: Diagrama de radiação (plano E) para os dados otimizados.

Observa-se que o processo de Gauss-Newton, aplicado na otimização do projeto da antena Yagi-Uda de cinco elemento, também, obteve resultados bastante significativos para a diretividade, aumentando de 11,444 para 12,170 dB, assim como para o ângulo de meia potência e a razão frente-costas, tanto no plano E quanto no plano H. As Figuras 3.5 e 3.6 mostram o diagrama de radiação para o plano H e E, respectivamente, da antena otimizada.

### 3.5 Antena Yagi-Uda com quinze elementos

Aplicou-se o método de Gauss-Newton em uma antena com quinze elementos na otimização da diretividade, do ângulo de meia potência e da razão frente-costas desta antena, para comprovar a eficiência do método. Utilizamos o exemplo de uma antena com quinze elementos descrita nos estudos de [2].

Os dados iniciais foram, em comprimento de onda ( $\lambda$ ), sendo  $a = 0,003mm$ :

comprimento do 1° ao 13° diretor= $0.406\lambda$

comprimento do refletor= $0.5\lambda$

comprimento da fonte= $0.47\lambda$

espaçamento entre fonte e 1° diretor= $0.3\lambda$

espaçamento entre os diretores= $0.34\lambda$

espaçamento entre fonte e refletor= $0.25\lambda$

Esses dados do projeto [2] forneceram os seguintes valores como dados de saída:

ângulo de meia potência (plano E)=26,09 graus

ângulo de meia potência (plano H)=26,92 graus

razão frente-costas (plano E)=22,3967 dB

razão frente-costas (plano H)=22,3480 dB

diretividade = 15,175 dB

### 3.6 Conclusão

Foi empregado um método analítico que na maioria dos casos, os problemas envolvendo estruturas com geometria simples, nas quais é possível se obter soluções analíticas fechadas. O método numérico, como o método dos momentos (Method of Moments - MoM), apesar de apresentar uma solução aproximada, foi suficiente para analisar os parâmetros para a antena filamentar Yagi-Uda com seis elementos que teve como objetivo a redução de suas dimensões. Na análise, foi usado o MoM aplicado em uma equação integral de Pocklington's para a resolução das equações de potenciais integrais usado-se a plataforma Matlab ou Fortran.

O método de Gauss-Newton foi aplicado na função custo para otimizar diretividade, ângulo de meia potência e razão frente-costa da antena a partir do ajuste dos valores dos comprimentos e espaçamento entre os elementos desse dispositivo.

O método de Gauss-Newton demonstrou um bom desempenho na otimização da antena Yagi-Uda com seis elementos, obtendo resultados bastante significativos para a diretividade, aumentando de 11,758dB para 12,859 dB e para a razão frente-costas, tanto

no plano E quanto no plano H. Porém, houve uma pequena perda no parâmetro de ângulo de meia potência. Assim como para o projeto de uma antena Yagi-Uda com cinco elementos, também, obtive resultados bastante significativos para a diretividade, aumentando de 11,444dB para 12,170 dB, assim como para o ângulo de meia potência e a razão frente-costas, tanto no plano E quanto no plano H, conforme mostram as figuras da antena otimizada.

Observa-se que o processo de otimização de Gauss-Newton mostrou ser uma eficiente ferramenta para síntese de antenas Yagi-Uda.

# Bibliografia

- [1] A. G. MARTINS JR.. Algoritmos Genéticos Aplicados à Síntese de Antenas. Monografia de Projeto Final. Departamento de Engenharia Elétrica. Universidade de Brasília. Brasília. DF. p 140. (2005).
- [2] C. A. BALANIS. Antenna Theory and Design. Jhon Wiley & Sons. 1997. ISBN 0-471-59268-4.
- [3] UFBA. Departamento de Engenharia Elétrica. Construção de antena Yagi-Uda.
- [4] UNISANTA. Departamento de Engenharia Elétrica. Curso de antenas.
- [5] WIKIPÉDIA. Diretividade da antena Yagi-Uda.
- [6] F. J. S. MOREIRA. Professor da UFMG. DELT/UFMG. 2005.
- [7] C. A. BALANIS. Advanced Engineering Electromagnetics. Jhon Wiley & Sons. New York. 1989.
- [8] H. C. POCKLINGTON. Electrical Oscillations in Wire. Cambridge Philos. Soc. Proc. v 9. p 324-332. 1897.
- [9] E. HALLÉN. Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae. Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis. Ser iv. v 4. p 1-44. 1938.
- [10] R. KING; C. W. HARRISON JR.. The distribution of current along a symmetric center-driven antenna. Proc. IRE. v 31. p 548-567. 1943.
- [11] 11 J. H. RICHMOND. A Wire-Grid Model for Scattering by Conducting Bodies. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-14. No 6. p 782-786. 1966.

- [12] G. A. THIELE. Wire Antennas, no Computer Techniques for Electromagnetics. R. Mittra (Ed.). Pergamon. New York. Chapter 2. p 7-70. 1973.
- [13] C. M. BUTLER; D. R. WILTON. Evaluation of Potential Integral at Singularity of Exact Kernel in Thin-Wire Calculations. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-23. No 2. p 293-295. 1975.
- [14] L. W. PEARSON; C. M. BUTLER. Inadequacies of Collocation Solutions to Pocklington-Type Models of Thin-Wire Structures. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-23. No 2. p 293-298. 1975.
- [15] 15 C. M. BUTLER; D. R. WILTON. Analysis of Various Numerical Techniques Applied to Thin-Wire Scatterers. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-23. No 4. p 534-540. 1975.
- [16] D. R. WILTON; C. M. BUTLER. Efficient Numerical Techniques for Solving Pocklington's Equation and their Relationships to Other Methods. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-24. No 1. p 83-86. 1976.
- [17] L. L. TSAI. A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-20. No 5. p 569-576. 1972.
- [18] R. F. HARRINGTON. Matrix Methods for Field Problems. Proc. IEEE. v 55. No 2. p 136-149. 1967.
- [19] R. F. HARRINGTON. Field Computation by Moment Methods. Macmillan. New York. 1968.
- [20] 20 J. H. RICHMOND. Digital Computer solutions of the Rigorous Equations for Scattering Problems. Proc. IEEE. v 53. p 796-804. 1965.
- [21] R. E. BURGESS. Aerial Characteristics. Wireless Engr. v 21. p 154-160. 1944.
- [22] R. MITTRA; C. A. KLEIN. Stability and Convergence of Moment Method Solutions. in Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics. R. Mittra (Ed.), Springer-Verlag. c 5. p 129-163. New York. 1975.
- [23] T. K. SARKAR. A Note on the Choice Weighting Functions in the Method of Moments. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-33. No 4. p 436-441. 1985.

- [24] T. K. SARKAR; A. R. DJORDJEVIĆ; E. ARVAS. On the Choice of Expansion and Weighting Functions in the Numerical Solution of Operator Equations. IEEE Trans. Antennas Propagat. v AP-33. No 9. p 988-996. 1985.
- [25] 25 V. J. DA C. FARIAS. Interpretação de dados de polarização induzida usando o modelo fractal para resistividades complexas e imagens tomográficas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Centro Tecnológico. Universidade Federal do Pará. Tese de Doutorado. 151 p.
- [26] J. J. XIA; T. M. HABASHY; J. A. KONG. Profile inversion in a cylindrically stratified lossy medium. Radio Science. v 29. p 1131-1141. 1994. [1] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. 49. 1943. 1-23.
- [27] 27 D. K. CHENG. Gain optimization for Yagi-Uda array. IEEE Antennas and Propagation Magazine. v 33. p 42-45. 1991.
- [28] 27 R. M. RAMOS; R. R. SALDANHA; R. H. C. TAKAHASHI; F. J. S. MOREIRA. Otimização multiobjeto aplicada ao projeto de antenas filamentosas. Ciência e Engenharia. SBMag/CBMag 2002. Edição Especial. p 67-70. 2003.
- D. K. Cheng, "Gain optimization for Yagi-Uda array", IEEE Antennas [3] E. A Jones and W. T. Joines, "Design of Yagi-Uda antennas using genetic algorithms", IEEE Transactions and Propagation, vol. 45, pp. 1386 - 1392, setembro 1997.