DALMI GAMA DOS SANTOS

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES VIA TEORIA DE LUSTERNIK - SCHNIRELMANN

BELÉM

2009

DALMI GAMA DOS SANTOS

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES VIA TEORIA DE LUSTERNIK - SCHNIRELMANN

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO

BELÉM

2009

DALMI GAMA DOS SANTOS

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES VIA TEORIA DE LUSTERNIK - SCHNIRELMANN

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau ou título de **Mestre**, na área de concentração **Matemática**, à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Aprovada em 06/03/2009

BANCA EXAMINADORA

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo (Orientador)
Universidade Federal do Pará

Rúbia Gonçalves Nascimento.
Universidade Federal do Pará

Ducival Carvalho Pereira.
Universidade Federal do Pará

Fábio Matheus Amorin Natali.
Universidade Estadual de Maringá

BELÉM

Dedicatória

Aos meus pais e meus avós ,

pela força e incentivo que me proporcionaram .

Agradecimentos

- Agradeço ao senhor Deus, por tudo que me proporciona.

- Ao meu pai João Francisco, por tudo que me ensina, a minha mãe Neude Alves, por tudo que me proporcionou, enfim todos meus familiares que de forma direta ou indireta me ajudaram.

- Aos meus irmãos Dauri e Batista pelo apoio que me deram.

- Ao Professor Giovany, pela orientação, incentivo, disponibilidade, compreensão, amizade e sobretudo pelo exemplo de profissional sério e competente.

- Ao Professor Paulo Marques, pelos ensinamentos e companheirismo.

- Aos Professores Ducival, Fábio e Rúbia por aceitarem compor a banca julgadora deste trabalho e pelas sugestões dadas.

- Ao Departamento de Matemática, especialmente ao Programa de pós - Graduação da UFPA, pela estrutura física que me foi disponibilizada, sem a qual este trabalho se tornaria mais árduo.

- Aos Professores do Departamento de Matemática da UFPa, pela formação dada, em especial ao Professor Rogélio, pelo incentivo e orientação na graduação, pela confiança e por sua amizade.

- Aos Professor Augusto C. Reis, pelos ensinamentos que me foi passado como professor e colega.

- Aos funcionários da secretaria do ICEN, Etiene, Janete, Edvaldo, Léo, seu Ulisses, Ana Calandrine pelo exemplo de competência.

- Ao grande amigo Geremias, que nunca mediu esforços para ajudar o próximo.

- Ao amigo Hamilton, pelos ensinamentos em LATEX.

- Aos meus amigos de Abaeté: Elizabeth Sabino, Elifaleth , Andrelino e Genivaldo, pela ajuda que me foi prestada.

- Ao meu grande amigo e parceiro desde a graduação Rômulo Luiz, pela amizade e companheirismo nos momentos positivos e negativos da vida acadêmica.

- Ao meu grande parceiro da graduação, Adam Oliveira, pela amizade e companheirismo.

- Aos meus irmãos acadêmicos da elíptica : Rafael Abreu, Claudia Aline, João Rodrigues, Denilson e Kelmem, pela força nos momentos mais difíceis que passei durante a elaboração do trabalho.

- Aos meus grandes amigos, o casal Adalberto Rodrigues Montemegro e Rita de Cássia, pelo apoio e incentivo nas madrugadas de estudos.

- A Kelly, minha namorada, pela cumplicidade , pelo carinho e por toda força e conselhos que me foram dados.

- Aos meus amigos do Mestrado : Laila Fontenele, Shirlene Abreu, Leandro Ribeiro e Raimundo Mangabeira, que sempre estavam prontos pra ajudar o próximo.

-Aos meus grandes amigos professores substitutos : Marcos Lima e Odilon, pela experiência e competência que nos é passada.

- Enfim, obrigado a todos meus companheiros que me ajudaram , desde a graduação ao mestrado.

Resumo

A proposta deste trabalho é estudar a existência e multiplicidade de soluções não-triviais relacionadas aos seguintes problemas :

$$(P_0) \quad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) - |v|^{q-2}v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta_q v = \delta|u|^{p-2}u - \gamma|v|^{q-2}v + g(x,v) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Δ_p é o operador p-Laplaceano e Ω é um dominío limitado e regular do $\mathbb{R}^N$ cujas hipóteses sobre as funções f, g e M serão introduzidas oportunamente .

Palavras - chaves: Equação elíptica não - linear . Operador p-Laplaceano. Teoria G-índice. Teoria de Krasnoselskii.

Abstract

The purpose of this paper is to investigate the existence and multiplicity of solutions related to following problems:

$$(P_0) \quad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) - |v|^{q-2}v & \text{in} \quad \Omega, \\ -\Delta_q v = \delta|u|^{p-2}u - \gamma|v|^{q-2}v + g(x,v) & \text{in} \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where Δ_p is the p-Laplacian operator and Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$ and whose hypotheses about the functions f, g e M the will be introduced opportunely.

Key words: Nonlinear elliptic equations. p-Laplacian operator. G-index theory. Krasnoselskii theory.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Resultados Básicos **4**

2 Um problema do tipo p-Kirchhoff **9**

2.1 Introdução 9

2.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos 11

2.3 Demonstração do Teorema 2.1 17

3 Um problema com o funcional associado não limitado inferiormente **18**

3.1 Introdução 18

3.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos 19

3.3 Demonstração do Teorema 2.1 22

4 Multiplicidade em um (p,q)-Sistema Elíptico **24**

4.1 Introdução 24

4.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos 26

4.3 Demonstração do Teorema 4.1 36

A Funcionais Diferenciáveis **39**

B Teoria de Lusternik - Schnirelmann **52**

Introdução

Nesta dissertação estudaremos a multiciplicidade de soluções não-triviais para os seguintes problemas:

$$(P_0) \quad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \quad em \quad \Omega, \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) - |v|^{q-2}v \quad em \quad \Omega \\ -\Delta_q v = \delta|u|^{p-2}u - \gamma|v|^{q-2}v + g(x,v) \quad em \quad \Omega \\ u = v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde nos problemas (P_0) e (P_2), Ω é um dominío limitado com fronteira suave do $\mathbb{R}^N$ e $||.||^p$ denota a norma do espaço $W_0^{1,p}$. No problema (P_1), Ω é um dominío limitado com fronteira suave do $\mathbb{R}^3$ e f,g e M são funções contínuas, cujas as hipóteses detalharemos nos capítulos subseqüentes.

O estudo dos problemas (P_0) e (P_2) foi baseado em dois artigos, cujos autores são Corrêa e Figueiredo [13], [14].O problema (P_1) foi estudado com base no livro de David Costa [8]. Em todos três casos foi usado um teorema devido a Clarke [Ver apêndice B], o qual utiliza a Teoria de Gênero devido a Krasnolselskii.

Para uma melhor compreensão, este texto será escrito com a seguinte estruturação. No Capítulo 1, enunciaremos os principais resultados da Análise Funcional e indicaremos a referência que contém sua demonstração que são cruciais para o entendimento do trabalho.

No Capítulo 2, estudaremos o problema

$$(P_0) \quad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \quad em \quad \Omega \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

O qual será denominado problema p-Kirchhoff e será mostrado um resultado de existência e multiplicidade de solução de Corrêa e Figueiredo [13].

No Capítulo 3, trataremos do problema não-local com simetria Z_2 do tipo Dirichlet:

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

O fato em que este problema possui infinitas soluções foi mostrado originalmente por Ambrosseti-Rabinowitz [2] o qual utiliza a versão "simétrica" do Teorema do Passo da Montanha. Vamos apresentar outra demonstração (cf. Castro [3]) que utiliza o Teorema devido a Clarke [ver Apêndice B] aplicado a um funcional associado, o qual é limitado inferiormente e cujo seu conjunto de pontos críticos estão associados ao conjunto de pontos críticos do funcional original.

Na teoria de Krasnoselskii, o Teorema abstrato que garante a existência de pontos críticos para um funcional associado à equação diferencial (devido a Krasnoselskii) deve possuir a hipótese de ser limitado inferiormente , o que não ocorre com o problena (P_1). Entretanto, definindo-se um problema auxiliar, esta dificuldade é então contornada. Esta é a finalidade do Capítulo 3, o qual é apresentar que esta teoria pode ser aplicada a problemas cujo o funcional associado não é limitado inferiormente.

No Capítulo 4 iremos mostrar a existência e multiplicidade de soluções, conforme feito nos capítulos anteriores, aplicado a um sistema envolvendo o operador (p,q)- Laplaceano que tem motivação nas equações de FitzHugh-Nagumo :

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) - |v|^{q-2}v \quad em \quad \Omega, \\ -\Delta_q v = \delta|u|^{p-2}u - \gamma|v|^{q-2}v + g(x,v) \quad em \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Para finalizar essa dissertação, mostraremos no Apêndice A que os funcionais usados no corpo do trabalho são de classe C^1. No Apêndice B enunciaremos os resultados gerais juntamente com a Teoria de Gênero usados neste trabalho.

No corpo da dissertação usaremos as seguintes notações:

$\rightarrow$: Convergência forte;

$\rightharpoonup$: Convergência fraca;

$\|u\|_{(X)'}$: Norma no dual de X, onde X é um espaço de Banach;

$|u|_q$: Norma em $L^q(\Omega), 0 < q \leq \infty$;

$\Delta_m w = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(|\nabla w|^{m-2} \ \frac{\partial w}{\partial_{x_i}} \right)$: Operador m-Laplaceano;

$\mathcal{A}$: Classe de todos subconjuntos fechados e simétricos com relação à origem.

Capítulo 1

Resultados Básicos

As definições e Teoremas básicos usados no trabalho estão aqui enunciados.

Teorema 1.1 *Seja* (x_n) *uma seqüência fracamente convergente no espaço normado* X*, isto é, existe* $x \in X$ *tal que* $x_n \rightharpoonup x$*. Então:*

a) O limite fraco x *de* (x_n) *é único;*

b) Qualquer subseqüência de (x_n) *converge fracamente para* x*;*

c) A seqüência (x_n) *é limitada em* X*.*

Demonstração: Ver [11].

Teorema 1.2 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo. Se* (x_n) *é uma seqüência limitada em* X*, então existem uma subseqüência* $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ *e* $x \in X$ *tais que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad em \quad X.$$

Demonstração: Ver [21].

Teorema 1.3 *(da Convergência Dominada de Lebesque): Seja* (f_n) *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$*. Suponhamos que:*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

Demonstração: Ver [30].

Lema 1.1 *Sejam* (f_n) *uma seqüência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tal que* $f_n \to f$ *em* $L^p(\Omega)$. *Então existe uma subseqüência* $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ *tal que*

a) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω.

b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ *tal que* $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [21].

Lema 1.2 *(Desigualdade de Young): Sejam* p *e* q *números reais satisfazendo* $1 < p < +\infty$ *e* $(\frac{1}{p}) + (\frac{1}{q}) = 1$. *Então, para todos* A *e* B *não-negativos e para todo* ϵ *positivo, vale a desigualdade*

$$AB \leq C(\epsilon)A^p + \epsilon B^q$$

Demonstração: Ver [10].

Lema 1.3 *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *e seja* $(. \, , \, .)$ *o produto interno usual no* $\mathbb{R}^N$. *Então,*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}, x - y) \geq C_p|x - y|^p \quad , \text{ se } p \geq \; 2,$$

ou,

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}, x - y) \geq \frac{C_p|x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} \quad , \text{se } 1 < p < 2$$

Demonstração: Por homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Além disso, escolhendo uma base conveniente no R^N podemos assumir

$$x = (1, 0, 0, ..., 0) \quad , y = (y_1, y_2, 0, ..., 0) \quad , \text{e } \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

(i) Caso $1 < p < 2$. Está claro que a desigualdade é equivalente a

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right\} \frac{(1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq (p - 1)(1 - y_1) \quad \text{se} \quad 0 \leq y_1 \leq 1,$$

e

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p - 1)(1 - y_1) \quad \text{se } y_1 \leq 0,$$

então,

$$(p-1)\left\{(1-y_1)^2+y_2^2\right\}\frac{(1+y_1+y_2)^{(2-p)/2}}{(1-y_1)^2+y_2}\geq p-1.$$

(ii) Caso $p\geq 2$. A desigualdade é equivalente a

$$\frac{[1-y_1(y_1^2+y_2^2)^{(p-2)/2}](1-y_1)+y_2^2(y_1^2+y_2^2)^{(p-2)/2}}{((1-y_1)^2+y_2^2)^{p/2}}\geq C.$$

Denotando $t=|y|\,/\,|x|$ e $s=\langle x,y\rangle/(|x|\,|y|)$ então, temos que mostrar que a função

$$f(t,s)=\frac{1-(t^{p-1}+t)s+t^p}{(1-2ts+t^2)^{p/2}}$$

é limitada inferiormente. Um cálculo direto mostra que fixando t, $\frac{\partial f}{\partial s}=0$ se

$$1-(t^{p-1}+t)s+t^p=\frac{t^{p-2}+1}{p}(1-2ts+t^2),$$

temos,

$$f(t,s)=\frac{t^{p-2}+1}{p(1-2ts+t^2)^{(p-2/2)}}\geq\frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}}\geq\frac{1}{2p},$$

o que conclui a prova do lema. ■

Teorema 1.4 *(Desigualdade de Hölder): Sejam $f\in L^p(\Omega)$ e $g\in L^q(\Omega)$ com $1<p<+\infty$ e $(\frac{1}{p})+(\frac{1}{q})=1$. Então $fq\in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega fg\,dx\leq\|f\|_p\|g\|_q$$

Demonstração: Ver [30].

Teorema 1.5 *(do Valor Intermediário): Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Se $f(a)<d<f(b)$, então existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=d$.*

Demonstração: Ver [12].

Teorema 1.6 *Se X é um espaço normado de dimensão finita, então todas as normas em X são equivalentes.*

Demonstração: Ver [11].

Teorema 1.7 *Seja X um espaço normado de dimensão finita. Então para todo $M\subset X$ temos que M é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Demonstração: Ver [11].

Teorema 1.8 *Sejam X e Y espaços métricos e $T : X \to Y$ uma aplicação contínua. Então a imagem $T(M)$ de um conjunto compacto $M \subset X$ é um subconjunto compacto de Y.*

Demonstração: Ver [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $C^k(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ que são k vezes diferenciáveis em Ω, tal que estas funções e todas as suas derivadas de orden k podem ser extendidas continuamente para $\overline{\Omega}$.

Seja $f \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$. Recorde que $f'(x) \in L(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ e logo, pode ser representado por uma matriz $n \times n$. Seja S o conjunto de todos os pontos críticos de f.

Definição 1.1 *[29] Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função em $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$. Então, definimos o grau topológico de Brower de f em relação a Ω no ponto b como*

$$d(f,\Omega,b) = \begin{cases} 0 & , se \;\; f^{-1}(b) = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(J_f(x)) & , se \;\; f^{-1}(b) \neq \emptyset \end{cases}. \tag{1.1}$$

A função sgn é a função sinal que é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

Teorema 1.9 ***(i) (Continuidade com relação a função)**: Seja $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ e seja $b \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de f em $C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ tal que para toda $g \in \mathcal{U}$,*

$$d(g,\Omega,b) = d(f,\Omega,b) \tag{1.2}$$

***(ii) (Invariância do grau por Homotopia)**: Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1];\mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então, $d(H(.,t),\Omega,b)$ é independente de t.*

***(iii)** O grau é constante, com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.*

***(iv)(Aditividade)**: Seja $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, onde $f \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então,*

$$d(f,\Omega,b) = d(f,\Omega_1,b) + d(f,\Omega_2,b). \tag{1.3}$$

Demonstração: Ver [29]

Proposição 1.1 *: Seja $f, g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tais que $f = g$ em $\partial\Omega$. Seja $b \notin f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, b) = d(g, \Omega, b)$$

Demonstração: Ver [29]

Teorema do Passo da Montanha

Lema 1.4 *(ver [29], pg 12) Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:*

(H_1) Existem $\alpha, r > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = r$

(H_2) Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > r$ e $J(e) < 0$.

Então existe uma sequência $(u_n) \subset X$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \longrightarrow 0 \quad em \quad X'$$

onde

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \; : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Teorema 1.10 *(Teorema de Borsuk) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e simétrico, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ com $0 \notin f(\partial\Omega)$, se*
i) $0 \in \Omega$, então $deg(f, \Omega, 0)$ é um número ímpar;
ii) $0 \notin \Omega$, então $deg(f, \Omega, 0)$ é um número par.

Demonstração: Ver [34]

Capítulo 2

Um problema do tipo p-Kirchhoff

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de questões de existência e multiplicidade de soluções da equação do tipo p-Kirchhoff.

$$(P_0) \quad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \quad em \quad \Omega, \quad 2 \leq p < N \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um dominio limitado e suave, $f : \overline{\Omega}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ são funções contínuas que satisfazem as seguintes condições:
Existem constantes positivas A, B e α tais que

$$At^\alpha \leq [M(t)]^{p-1} \leq Bt^\alpha \qquad (M)$$

e existem constantes positivas Q_1, Q_2 e q tais que

$$Q_1 t^{q-1} \leq f(x,t) \leq Q_2 t^{q-1} \qquad (f_1)$$

para todo $t \geq 0$, $x \in \overline{\Omega}$, onde $q \in \left(p, p^* = \frac{Np}{N-p}\right)$ e $\alpha > \dfrac{q}{p}$, tem-se

$$f(x,t) = -f(x,-t), \qquad (f_2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$. Além disso, $\Delta_p u$ é o operador p-Laplaceano, isto é,

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(|\nabla u|^{p-2} \ \frac{\partial u}{\partial_{x_i}} \right); \quad 2 \leq p \leq N$$

e $\|.\|$ é a norma usual em $W_0^{(1,p)}(\Omega)$ dada por

$$\|.\|_p^p = \int_\Omega |\nabla u|^p.$$

Observe que o problema (P_0) é uma generalização da clássica equação de Kirchhoff.

$$(K) \quad \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \ \ em \ \ \Omega \\ \\ u = 0 \ \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$, que é a equivalente a versão estacionária da bem conhecida equação hiperbólica de Kirchhoff.

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} = M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \ \ em \ \ \Omega.$$

Com relação aos problemas (P_0) e (K), estes têm sido abordados do ponto de vista variacional, isto é, sempre considerando a suposição

$$(2) \quad M(t) \geq m_0 > 0,$$

para todo $t \geq 0$, onde m_0 é uma constante; veja [5], [15] e [16] para exemplos.

No estudo da equação deste capítulo, a função M não satisfaz a suposição (2). Além disso, os autores obtiveram infinitas soluções. Foram essas as contribuições dos autores do artigo [13].

Em um trabalho recente de Nascimento [32], foi considerado M decrescente e $M(t)$

tendendo a zero quando $t \to +\infty$, ou seja, M não goza da hipótese (2).
A autora fez o uso do Teorema do Passo da Montanha, na ordem de se obter a existência de soluções. Feito essas considerações, o principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2.1 *Assuma as hipóteses* (M), (f_1) *e* (f_2). *Então* (P_0) *possui infinitas soluções.*

Para demonstrar este teorema vamos usar um resultado devido a Clarke [ver Lema B.4 no Apêndice B] o qual é uma conseqüência de um teorema básico de multiplicidade envolvendo um funcional invariante sob a ação de um grupo topológico.

2.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos

Considere o funcional

$$J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$J(u) := \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x,u);$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1}\, ds \quad e \quad F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds.$$

Note que o funcional $J \in C^1\ (W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ [Ver apêndice A] e

$$J'(u)\phi = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \nabla \phi - \int_\Omega f(x,u)\phi,$$

para todo $u, \phi \in W_0^{(1,p)}(\Omega)$.
Na prova do Teorema 1.1, precisaremos dos seguintes resultados técnicos:

Lema 2.1 *: O funcional J é limitado inferiormente.*

Demonstração: Pelas condições (f_1) temos que

$$\int_0^t f(x,m)dm \leq Q_2 \int_0^t m^{q-1}dm = Q_2 \frac{m^q}{q}\Big|_0^t = \frac{Q_2}{q}t^q,$$

que implica

$$F(x,t) \leq \frac{Q_2}{q}\ t^q,$$

ou

$$-\int_\Omega F(x,u) \geq -\frac{Q_2}{q}\int_\Omega |u|^q.$$

Usando a condição (M) temos que,

$$\widehat{M}(||u||_p^p) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)}||u||_p^{p(\alpha+1)}.$$

Assim

$$J(u) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)}||u||_p^{p(\alpha+1)} - \frac{Q_2}{q}\int_\Omega |u|^q.$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ obtemos

$$J(u) \geq \frac{A}{p(\alpha+1)}||u||^{p(\alpha+1)} - \frac{CQ_2}{q}||u||^q.$$

Agora, como $p\ (\alpha+1) > q$, segue-se que J é coercivo, donde limitado inferiormente. ■

Lema 2.2 *J é um funcional par.*

Demonstração:

De fato, note que

$$F(x,-t) = \int_0^{-t} f(x,s)ds.$$

Por outro lado, fazendo a seguinte mudança de variável $u = -s$ que implica $du = -ds$, temos para $s = 0$ que $u = 0$. Analogamente, para $s = -t$ temos $u = t$. Usando o fato de f ser uma função ímpar, temos:

$$\begin{aligned} F(x,-t) &= \int_0^{-t} f(x,s)ds \\ &= \int_0^t f(x,-u)(-du). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} F(x,-t) &= \int_0^t -f(x,-u)du \\ &= \int_0^t f(x,u)du \\ &= F(x,t), \end{aligned}$$

isto é, a integral de uma função ímpar é uma função par, logo

$$F(x, -u) = F(x, u).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\hat{M}(\|-u\|^p) &= \int_0^{(\|-u\|^p)} [M(s)]^{p-1} ds \\
&= \int_0^{(\|u\|^p)} [M(s)]^{p-1} ds \\
&= \hat{M}(\|u\|^p).
\end{aligned}$$

Concluimos assim que J é par. ■

Lema 2.3 *J satisfaz a condição $(PS)_c$, isto é, toda seqüência (u_n) tal que $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$, possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração: Seja (u_n) uma seqüência em $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$J(u_n) \to c \ \text{ e } \ J'(u_n) \to 0.$$

Sendo $J(u_n) \to c$ e J é coercivo, segue-se que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Desse modo, passando a uma subseqüência se necessário, temos que

$$\|u_n\|^p \to t_0 \geq 0.$$

Logo, se $t_0 = 0$, então

$$\|u_n - 0\| \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to 0 \quad em \ \ W_0^{1,p}(\Omega),$$

mostrando que u_n possui uma subseqüência convergente em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por outro lado, se $t_0 > 0$ desde que u_n é uma seqüência limitada, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que

$$u_n \rightharpoonup u \ em \ \ W_0^{1,p}(\Omega).$$

Usando as imersões de Sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, para $p < q < p^*$, temos a menos de subseqüência que,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^q(\Omega).$$

Logo, passando a uma subseqüêcia, temos

$$u_n(x) \to u(x) \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega \quad \text{e} \;\; |u_n(x)| \le h(x) \;\; \text{q.t.p em} \;\; \Omega, \;\text{com}\;\; h \in \; L^q(\Omega). \tag{2.1}$$

Pela continuidade de $f(x,.)$, segue que

$$f(x, u_n(x))u_n(x) \to f(x, u(x))u(x) \quad \text{qtp em } \Omega \qquad \text{e} \tag{2.2}$$

$$f(x, u_n(x))u(x) \to f(x, u(x))u(x) \quad \text{qtp em } \Omega. \tag{2.3}$$

Por outro lado,

$$Q_1 \; t^{q-1} \le f(x,t) \le Q_2 \; t^{q-1},$$

daí,

$$|f(x,t)| \le Q_3 |t|^{q-1}, \tag{2.4}$$

onde $\;\; Q_3 = máx \;\; \{Q_1, Q_2\}$.

Assim, de (2.2) e (2.4) temos que,

$$|f(x, u_n(x))u_n(x)| \;\le\; Q_3 \; |u_n(x)|^q.$$

Agora de (2.1), segue que

$$|f(x, u_n(x))u_n(x)| \;\le\; Q_3 \; [h(x)]^q, \;\text{com}\;\; Q_3 \; |h|^q \in \; L^1.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos a convergência

$$\int_\Omega f(x, u_n) \; u_n \;\to\; \int_\Omega f(x, u)u. \tag{2.5}$$

De modo análogo, de (2.3) e (2.4) , obtém-se

$$|f(x, u_n(x)u_n| \le\; Q_3|u(x)| \; |u_n(x)|^{q-1}$$

$$|f(x, u_n(x)u_n| \le\; Q_3|u(x)||h(x)|^{q-1}.$$

Note que $|u| \; |h|^{q-1} \; \in L^1$. De fato, temos que $h \in L^q$ implicando $|h|^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$.

Desde que $u \in L^q$, tem-se :

$$\frac{1}{q} \;+\; \frac{q-1}{q} \;=\; 1,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, chegamos à,

$$\int_\Omega f(x,u_n)u \ \rightarrow \int_\Omega f(x,u)u. \tag{2.6}$$

Considerando uma seqüência P_n da seguinte forma ,

$$P_n = J'(u_n)u_n + \int_\Omega f(x,u_n)u_n - J'(u_n)u - \int_\Omega f(x,u_n)u$$

Como $J'(u_n) \rightarrow 0$, u_n é limitada em $W_0^{1,p}$ e pelas convergências (2.5) e (2.6) temos que $P_n \rightarrow 0$. Além disso,

$$P_n = \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \|u_n\|^p - \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u.$$

De fato, recordemos que:

$$J'(u)\phi = \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u \nabla \phi - \int_\Omega f(x,u)\phi$$

assim como,

$$J'(u_n)u_n = \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n - \int_\Omega f(x,u_n)u_n$$

e

$$J'(u_n)u = \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u - \int_\Omega f(x,u_n)u.$$

Assim, pelas convergências (2.5) e (2.6) concluímos

$$\begin{aligned}
P_n &= J'(u_n)u_n + \int_\Omega f(x,u_n)u_n - J'(u_n)u - \int_\Omega f(x,u_n)u \\
&= \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u_n - \int_\Omega f(x,u_n)u_n + \int_\Omega f(x,u_n)u_n \\
&- \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega f(x,u_n)u - \int_\Omega f(x,u_n)u \\
&= \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} |\nabla u_n|^2 - \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u + o_n(1) \\
&= \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^p - \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u + o_n(1) \\
&= \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \|u_n\|^p - \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u + o_n(1)
\end{aligned}$$

Do fato de $\|u_n\| \rightarrow t_0$, da continuidade da função M e da convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, temos,

$$-\left[M\left(\|u_n\|\right)^p\right]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n + \left[M\left(\|u_n\|^p\right)\right]^{p-1} \|u\|^p = o_n(1).$$

Portanto,

$$o_n(1) + P_n = [M\left(\|u_n\|\right)^p]^{p-1}\ \|u_n\|^p - [M\left(\|u_n\|\right)^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u$$
$$- [M\left(\|u_n\|\right)^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u \nabla u_n\ + [M\left(\|u_n\|^p\right)]^{p-1}\ \|u\|^p$$

Conseqüentemente,

$$o_n(1) + P_n = [M\left(\|u_n\|^p\right)]^{p-1} \int_\Omega \Big\langle |\nabla u_n|^{p-2}\, \nabla u_n\ - |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\,,\, \nabla u_n - \nabla u \Big\rangle$$

Usando a desigualdade [Ver Lema C.3 no apêndice C]:

$$\Big\langle |x|^{p-2}\, x - |y|^{p-2}\, y\,,\, x - y \Big\rangle\ \geq\ C_p\, |x-y|^p,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $p \geq 2$, temos que

$$\int_\Omega \Big\langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\,,\, \nabla u_n - \nabla u \Big\rangle \geq C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p,$$

e portanto,

$$o_n(1) + P_n \geq \overline{C} C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p, \tag{2.7}$$

onde C_p é a constante que aparece na desigualdade padrão do $\mathbb{R}^N$.

Com isto, ao passarmos o limite quando $n \to +\infty$ na equação (2.7), obtemos

$$C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p\ \leq\ 0.$$

Portanto $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}$, oque mostra que J satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Mostraremos que existe um conjunto compacto $K \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup_{x \in K} J(x) < J(0)$.

De fato, seja $\{e_1, e_2, ..., ...e_i, ...\}$ uma base de Schauder de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, considere $X_k = \langle e_1, e_2, ..., e_k \rangle$ o subespaço de $W^{1,p}(\Omega)$ gerado por k vetores $e_1, e_2, ..., e_k$. Note que $X_k \subset W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq p^*$, com imersões contínuas.

Assim, as normas de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^q(\Omega)$ são equivalentes sobre X_k, logo existe uma constante C_k positiva tal que,

$$-C_k \|u\|^q \leq -\int_\Omega |u|^q, \quad para \;\; todo \quad u \in X_k.$$

Pelas condições (f_1) e (M) resulta que

$$J(u) \leq \frac{B}{p(\alpha+1)} \; \|u\|^{p(\alpha+1)} - C_k \; Q_1 \; \|u\|^q$$

isto é,

$$J(u) \leq \|u\|^q \left(\frac{B}{p(\alpha+1)} \; \|u\|^{p(\alpha+1)-q} - C_k \; Q_1 \right).$$

Seja R uma constante positiva tal que

$$\frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} < C_k \; Q_1.$$

Assim, para todo $0 < r < R$ e considerando

$$K = \{u \in X_k : \|u\| = r\}$$

obtemos, para todo $u \in K$,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq r^q \left(\frac{B}{p(\alpha+1)} r^{p(\alpha+1)-q} - C_k \; Q_1 \right) \\ &< R^q \left(\frac{B}{p(\alpha+1)} R^{p(\alpha+1)-q} - C_k \; Q_1 \right) < 0 = J(0) \end{aligned}$$

implicando que,

$$\sup_K J(u) < 0 = J(0).$$

Sendo X_k *e* $\mathbb{R}^k$ isomorfos (pois são de dimensão finita), com K *e* S^{k-1} homeomorfos, utilizando o Teorema de Borsuk, concluímos que $\gamma(K) = k$.

Além disso, de (f_2), temos que J é par. Pelo Teorema de Clarke [Ver apêndice B], J possui pelo menos k pares de pontos críticos.

Como consideramos K de maneira arbitrária, obtemos infinitos pontos críticos de J. ∎

Capítulo 3

Um problema com o funcional associado não limitado inferiormente

3.1 Introdução

Considere o seguinte problema de Dirichlet

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^3 \quad em \quad \Omega, \\ u = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado com fronteira suave. O funcional associado a este problema é dado por,

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega |u|^4.$$

Note que ϕ está bem definido e é de classe C^1 no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ [Ver apêndice A]. Seus pontos críticos são precisamente as soluções de (P_1).

Fazendo uso do Teorema do Passo da Montanha podemos mostrar que o problema (P_1) possui ao menos uma solução não-trivial. Todavia vamos utilizar o Teorema devido a Clarke ver [8] para mostrar que o problema (P_1) possui uma infinidade de soluções.

Note que para $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ com $\varphi > 0$ em Ω temos que $\phi(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, o que mostra que ϕ não é limitado inferiormente. Para isso vamos trabalhar com um problema auxiliar de tal forma que soluções do problema auxiliar são soluções do problema original.

Ao fazermos a mudança para o problema auxiliar, teremos que o funcional associado, agora, é limitado inferiormente.

Posteriormente, seguindo os passos do que fora feito no Capítulo 1, demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *O Problema* (P_1) *possui uma infinidade de soluções.*

3.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos

Considere o problema auxiliar :

$$(Pa) \quad \begin{cases} -6\|u\|^4 \triangle u = 4u^3 \quad em \quad \Omega, \\ u = 0 \qquad sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ também é um domínio suave limitado.
O problema (Pa) tem como funcional associado

$$\psi(u) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^3 - \int_\Omega u^4 dx = \|u\|^6 - |u|_4^4,$$

onde $\|.\|$ é a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $|.|_4$ é a norma em $L^4(\Omega)$. Temos que ψ está bem definido e também é de classe C^1 no espaço $H_0^1(\Omega)$ [Ver apêndice A], com derivada

$$\psi'(u)v = 6\|u\|^4 \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx - 4\int_\Omega u^3\ v\ dx,\ \text{para todo } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 3.1 *ψ é um funcional limitado inferiormente.*

Demonstração: Com efeito, pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, temos que existe $C > 0$ tal que

$$|u|_4 \le C\|u\|,$$

implicando,

$$|u|_4^4 \le C\|u\|^4.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \|u\|^6 - |u|_4^4 \\ &\ge \|u\|^6 - C\|u\|^4\ ,\ \text{para todo}\ \ u \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

ou seja, ψ é coercivo e portanto , ψ é limitado inferiormente. ■

Lema 3.2 *ψ é um funcional par.*

Demonstração: De fato,

$$\psi(-u) = \| - u\|^6 - | - u|_4^4 = \|u\|^6 - |u|_4^4 = \psi(u).$$

■

Lema 3.3 *O funcional ψ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma seqüência tal que,

$$\psi(u_n) \to c \ \ e \ \ \psi'(u_n) \to 0.$$

Sendo ψ coercivo, segue-se que (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo, temos que a menos de subseqüência $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Por outro lado $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e então

$$u_n \to u \ \text{ em } \ \ L^4(\Omega).$$

Assim, a menos de subseqüência,

$$\|u_n\| \to a.$$

Dois casos à considerar;

(i) Se $a = 0$, o resultado está mostrado, já temos a subseqüência convergente;

(ii) Se $a > 0$, então

$$\psi'(u_n)(u_n - u) = 6\|u_n\|^6 - 6\|u_n\|^4 \int_\Omega \nabla u_n \nabla u - 4|u_n|_4^4 + 4\int u_n^3 u.$$

Passando ao limite quando $n \to +\infty$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= 6a^6 - 6a^4\|u\|^2 - 4|u|_4^4 + 4|u|_4^4 \\ 0 &= 6a^4(a^2 - \|u\|^2) \end{aligned}$$

logo,

$$a^2 - \|u\|^2 = 0$$

implicando

$$a = \|u\|.$$

Portanto,

$$\|u_n\| \to \|u\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^2 &= < u_n - u, \quad u_n - u >_{H_0^1(\Omega)} \\
&= \|u_n\|^2 - 2 < u_n, u >_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|^2 \\
&= \|u\|^2 - 2 < u, u >_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|^2 + o_n(1) \\
&= 2\|u\|^2 - 2\|u\|^2 + o_n(1) \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|u_n - u\| \to 0,$$

mostrando que ψ satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

Lema 3.4 *O problema auxiliar possui infinitas soluções.*

De fato, seja $X_k =< \phi_1, \ \phi_2, \ ..., \ \phi_k >$ o subespaço gerado pelas k-primeiras auto-funções do problema.

$$(P\lambda) \quad \begin{cases} -\triangle u = \lambda u \quad , \quad \Omega \\ u = 0 \quad , \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como X_k é de dimensão finita e da inclusão $X_k \subset L^4$, existe $b > 0$ tal que as normas de $H_0^1(\Omega)$ e $L^4(\Omega)$ são equivalentes em X_k, ou seja,

$$b|u|_4 \leq \|u\| \leq \frac{1}{b}|u|_4 \ \text{ para todo } \ u \in X_k.$$

Desde que $\|u\|^6 \leq A|u|_4^6$, onde $A = \frac{1}{b} > 0$, temos

$$\psi(u) = \|u\|^6 - |u|_4^4 \leq A|u|_4^6 - |u|_4^4 = |u|_4^4(A|u|_4^2 - 1).$$

Desta forma, se

$$0 < |u|_4^2 \leq \frac{1}{2A} = \delta^2,$$

resulta que

$$\psi(u) \leq \frac{-1}{2}|u|_4^4 < 0,$$

isto é,

$$\psi(u) < 0.$$

Definamos o seguinte conjunto:

$$K := \{u \in X_k : \frac{a\delta}{2} \leq \|u\| \leq a\delta\}.$$

Temos que K é fechado e simétrico e $\sup_k \psi < 0$. Além disso, como X_k é isomorfo ao $\mathbb{R}^k$, segue-se que $\gamma(K) = k$ (pois K *e* S^{k-1} são homeomorfos).
Assim, do Teorema de Clarke, existe pelo menos k pares distintos de pontos críticos para ψ.

Pela arbitrariedade de K, obtemos uma infinidade de pontos críticos para ψ os quais resolvem o problema auxiliar.
Vamos utilizar um Lema que irá relacionar o conjunto dos pontos críticos de ψ com o conjunto dos pontos críticos do funcional ϕ e concluir que o problema (P_1) possui uma infinidade de soluções.

3.3 Demonstração do Teorema 2.1

Lema 3.5 *Se $0 \neq u \in H_0^1(\Omega)$ é ponto crítico de ψ, então $v = \frac{2u}{\sqrt{6}\|u\|^2}$ é ponto crítico de ϕ.*

Demonstração: Sendo u um ponto critico de ψ, então para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\psi'(u)\omega = 6||u||^4 \int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx - 4 \int_\Omega u^3 \omega dx = 0.$$

Com isto

$$6||u||^4 \int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx = 4 \int_\Omega u^3 \omega dx.$$

Por outro lado,

$$\phi'(v)\omega = \int_\Omega \nabla v \nabla \omega dx - \int_\Omega v^3 \omega dx.$$

Queremos mostrar que $\phi'\left(\frac{2u}{\sqrt{6}||u||^2}\right)\omega = 0$ para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$.
De fato, notemos que

$$\begin{aligned} \phi'(v)\omega &= \phi'\left(\frac{2u}{\sqrt{6}||u||^2}\right)\omega \\ &= \int_\Omega \nabla\left(\frac{2u}{\sqrt{6}||u||^2}\right)\nabla\omega dx - \int_\Omega \left(\frac{2u}{\sqrt{6}||u||^2}\right)^3 \omega dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{||u||^2\sqrt{6}}\int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx - \frac{8}{6\sqrt{6}||u||^6}\int_\Omega u^3 \omega dx \\
&= \frac{2}{6\sqrt{6}||u||^6}\left(6||u||^4\int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx - 4\int_\Omega u^3\omega dx\right) \\
&= 0, \text{ para todo } \omega \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Finalmente, deste lema e do fato que ψ possui infinitos pontos críticos, concluimos que o funcional ϕ possui também uma infinidade de pontos críticos, e daí o problema (P_1) tem uma infinidade de soluções. ∎

Capítulo 4

Multiplicidade em um (p,q)-Sistema Elíptico

4.1 Introdução

Neste Capítulo, trataremos de questões de multiplicidade de soluções para o seguinte sistema

$$(P_2) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) - |v|^{q-2}v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta_q v = \delta|u|^{p-2}u - \gamma|v|^{q-2}v + g(x,v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas que satisfazem as condições que serão afirmadas posteriormente, $\Delta_m w$ é o operador m-Laplaceano, isto é,

$$\Delta_m w = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla w|^{m-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)$$

e $1 < q \leq p < N$.

O problema (P_2) é uma generalização de uma classe de sistemas surgida das equações de FitzHugh-Nagumo. Mais precisamente, diversos autores tem estudado questões de existência, multiplicidade, positividade, simetria e etc, da equivalente estacionária de

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) - v, \\ v_t = \Delta v + \delta u - \gamma v, \end{cases} \tag{4.1}$$

sobretudo quando

$$f(t) = t(1-t)(t-a), 0 < \mathrm{a} < \frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

Equações do tipo (4.1) são uma extensão das simples equações de FitzHugh-Nagumo, a saber

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) - v, \\ v_t = \delta u - \gamma v. \end{cases} \tag{4.3}$$

que servem como um modelo para os problemas de condução nervosa e outros sistemas químicos e biológicos. Ao leitor interessado recomendamos: [31], [33], [18], [23] e [24], para a revisão de algumas motivações físicas.

Em particular, muitos pesquisadores focaram suas atenções na versão estacionária do problema (4.1), a saber,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - v \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

considerando não somente a não-linearidade de FitzHugh-Nagumo dada acima (4.2) como também para outros tipos mais gerais de função f (por exemplo, [9], [17], [4], [22] e [19]). Nestes trabalhos os autores usaram uma técnica desacoplante de uma tal maneira que o problema (4.1) é transformado em uma equação íntegro-diferencial. Em outras palavras, para cada u podemos resolver a equação linear

$$\begin{cases} -\Delta v + \gamma v = \delta u \ \text{ em } \ \Omega, \\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

e fazer $v = Bu$, ou seja, $B = \delta(-\Delta + \gamma)^{-1}$ sob a condição de fronteira de Dirichlet. Então, (3.1) é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta u + Bu = f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $-\Delta + B$ é um operador linear íntegro-diferencial.

Mancini-Mitidieri [19] também usam um método desacoplante para estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - v + f(u) \ \text{ em } \ \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v + g(v) \ \text{ em } \ \Omega, \\ u = v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.7}$$

utilizando métodos variacionais, onde a presença de uma função $g(v)$ conduz a uma desacoplante não-linear. Além disso, os autores consideram a não-linearidade crítica de f e obtém resultados como em Brezis-Nirenberg [20].

No problema (P_2), a desacoplação não é apropriada porque a presença do (p,q)-Laplaceano leva a questões técnicas delicadas, por isso os autores optaram por trabalhar diretamente com o sistema sem desacoplar.

Segundo Corrêa e Figueiredo em [14], este trabalho apresenta resultado totalmente novos do tipo (p,q) - Laplaceano e se obtém infinitas soluções do mesmo.
Assumimos as seguintes hipóteses sobre f e g:
Existem constantes positivas Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, α e σ tais que

$$Q_1 t^{\alpha-1} \leq f(x,t) \leq Q_2 t^{\alpha-1}, \qquad (f_1)$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, onde $\alpha \in [1,q)$,

$$Q_3 t^{\sigma-1} \leq g(x,t) \leq Q_4 t^{\sigma-1}, \qquad (g_1)$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$, onde $\sigma \in [1,p)$,

$$f(x,t) = -f(x,-t) \qquad (f_2)$$

e

$$g(x,t) = -g(x,-t) \qquad (g_2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \overline{\Omega}$.
Usamos a teoria de Gênero, introduzida por Krasnoselskii [28], para provar o nosso principal resultado, como segue:

Teorema 4.1 *Suponhamos $(f_1)-(f_2)$ e $(g_1)-(g_2)$. Então (P_2) tem infinitas soluções.*

4.2 Estrutura variacional e alguns lemas técnicos

Sendo Ω é um domínio limitado e $q \leq p$, temos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega)$. Assim, consideramos o espaço de Banach $W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ munido da norma dada por

$$||(u,v)||^p = ||u||_p^p + ||v||_p^p$$

onde $||w||_p$ é a norma usual em $W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é,

$$||w||_p = \left(\int_\Omega |\nabla w|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideramos também o funcional $J : W \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u,v) = \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \int_\Omega F(x,u) + \frac{1+\gamma}{q}\int_\Omega |v|^q - \frac{\delta}{p}\int_\Omega |u|^p - \int_\Omega G(x,v)$$

onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,m)dm$ e $G(x,t) = \int_0^t g(x,m)dm$. Claramente, $J \in C^1(W,\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} J'(u,v)(\phi,\psi) = &\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\psi - \int_\Omega f(x,u)\phi \\ &+(1+\gamma)\int_\Omega |v|^{q-2}v\psi - \delta\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi - \int_\Omega g(x,v)\psi \end{aligned}$$

Uma solução de (P_2) é um par $(u,v) \in W$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi = \int_\Omega f(x,u)\phi - \int_\Omega |v|^{q-2}v\phi$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v\nabla\psi = \delta\int_\Omega |u|^{p-2}u\psi - \gamma\int_\Omega |v|^{q-2}v\psi + \int_\Omega g(x,v)\psi$$

para todo $(\phi,\psi) \in W$.

Observação 4.1 *Figueiredo-Mitidieri em [9], consideram o sistema elíptico não-cooperativo*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) - v \quad em \quad \Omega, \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v \quad em \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.8}$$

Os autores provam que se δ e γ são números positivos, com $\gamma + \lambda_1 > \sqrt{\delta}$ e $-\gamma + 2\sqrt{\delta} \leq \lambda < \hat{\lambda}_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, W_0^{1,2}(\Omega))$ e $\hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + \frac{\delta}{\lambda_1+\gamma}$, então $f \geq 0$ implica que $u, v \geq 0$ em Ω. Este é um princípio de máximo para o sistema elíptico cooperativo (3.7).

Por outro lado, Mancini-Mitidieri [19] consideram o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - \delta v + f(x) \quad em \quad \Omega, \\ -\Delta v = \delta u + \gamma v + h(x) \quad em \quad \Omega, \\ u = v = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

com $0 < \delta < \lambda_1 - \gamma$, $\lambda < \lambda_1 \frac{\delta^2}{\lambda_1 - \gamma}$ *e* $\gamma + 2\delta \leq \lambda$. *Além disso, se* $h(x) \leq 0 \leq f(x)$, $f, h \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *e* $(u,v) \in W$ *é solução de (3.8), então u é não-negativa em* Ω.

Estes princípios de máximo nos permite obter resultados de positividade para a equivalente semilinear de (3.7) e (3.8).

Observamos que não temos a nossa disposição um princípio de máximo para o nosso (p,q)-sistema, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + f(x) - |v|^{q-2}v \quad em \;\; \Omega, \\ -\Delta_q v = \delta |u|^{p-2}u - \gamma |v|^{q-2}v + g(x) \quad em \;\; \Omega, \\ u = v = 0 \quad sobre \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

e então não podemos obter resultados de positividade.

Lema 4.1 *J é um funcional limitado inferiormente.*

Demonstração: Notemos que

$$J(u,v) \geq \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \int_\Omega F(x,u) - \frac{\delta}{p}\int_\Omega |u|^p - \int_\Omega G(x,v).$$

Da condição (f_1), temos:

$$\int_0^t f(x,m)dm \leq Q_2 \int_0^t m^{\alpha-1}dm = Q_2 \frac{m^\alpha}{\alpha}\Big|_0^t = \frac{Q_2}{\alpha}t^\alpha$$

que implica,

$$F(x,t) \leq \frac{Q_2}{\alpha}t^\alpha$$

e

$$-F(x,t) \geq -\frac{Q_2}{\alpha}t^2,$$

ou ainda

$$-\int_\Omega F(x,u) \geq -\frac{Q_2}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha.$$

Usando a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, temos que existe uma constante C positiva tal que,

$$-\int_\Omega F(x,u) \geq -\frac{Q_2}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha \geq -C\frac{Q_2}{\alpha}\|u\|_p^\alpha.$$

Observe que $1 \leq \alpha < q \leq p$ e $1 \leq \sigma < p$.

Do mesmo modo pela condição (g_1), temos:

$$\int_0^t g(x,m)\; dm \leq Q_4 \int_0^t m^{\sigma-1}$$

oque implica

$$G(x,t) \leq \frac{Q_4}{\sigma}\ t^\sigma$$

e

$$-G(x,t) \geq -\frac{Q_4}{\sigma}\ t^\sigma,$$

ou ainda

$$-\int_\Omega G(x,t) \geq -\frac{Q_4}{\sigma}\int_\Omega |v|^\sigma.$$

Usando a imersão $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, temos que existe uma constante positiva C tal que,

$$-\int_\Omega G(x,t) \geq -\frac{Q_4}{\sigma}\int_\Omega |v|^\sigma \geq -C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_p^\sigma.$$

Portanto concluímos que,

$$\begin{aligned} J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|(u,v)\|^p - C\frac{Q_2}{\alpha}\|u\|_p^\alpha - C\frac{\delta}{p}\|u\|_p^p - C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_q^\sigma, \\ J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_p^p + \frac{1}{p}\|v\|_p^p - C\frac{Q_2}{\alpha}\|u\|_p^\alpha - C\frac{\delta}{p}\|u\|_p^p - C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_q^\sigma, \\ J(u,v) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_p^p(1-C\delta) - C\frac{Q_2}{\alpha}\|u\|_p^\alpha - C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_q^\sigma, \end{aligned}$$

isto é

$$J(u,v) \geq \frac{C1}{p}\|(u,v)\|_p^p - CQ_2\|u\|_p^\alpha - C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_q^\sigma, \quad \text{onde} \quad C_1 = (1-C)\delta$$

ou ainda

$$C\frac{Q_4}{\sigma}\|v\|_q^\sigma + CQ_2\|u\|_p^\alpha + J(u,v) \geq \frac{C_1}{p}\|(u,v)\|_p^p. \tag{4.11}$$

Por (4.11) conclui-se,

$$\frac{CQ_4}{\sigma(\|(u,v)\|_p^p)}\|v\|_q^\sigma + \frac{CQ_2}{\|(u,v)\|_p^p}\|u\|_p^\alpha + \frac{J(u,v)}{\|(u,v)\|_p^p} \geq \frac{C_1}{p}.$$

Afirmamos que J é um funcional coercivo e portanto limitado inferiormente.

De fato, consideremos os seguintes casos:

Caso 1: Se $||u||_p \to \infty$ e $||v||_p \to \infty$, então desde que $\alpha - p < 0$ e $\sigma - p < 0$, temos

$$\frac{CQ_4}{\sigma}||v||_p^{(\sigma-p)} + \frac{CQ_2}{\alpha}||u||_p^{(\alpha-p)} + \frac{J(u,v)}{||u||_p^p + ||v||_p^p} \geq \frac{C_1}{p}$$

Passando ao limite, obtemos que $0 \geq \dfrac{C_1}{p}$, o que é um absurdo, pois $C_1 > O$.
Caso 2: Se $||u||_p \to \infty$ e $||v||_p \leq K$, para algum $K > 0$, então

$$\frac{CQ_4||v||_p^\sigma}{\sigma||u||_p^p} + \frac{CQ_2}{\alpha}||u||_p^{(\alpha-p)} + \frac{J(u,v)}{||u||_p^p} \geq \frac{C_1}{p}$$

Passando ao limite e desde que $\alpha - p < 0$, obtemos $0 \geq \dfrac{C_1}{p}$, o que é um absurdo, pois $C_1 > 0$.
Caso 3: Se $||u||_p \leq K$ e $||v||_p \to \infty$, para algum $K > 0$, então:

$$\frac{CQ_4}{\sigma}||v||_p^{(\sigma-p)} + \frac{CQ_2}{\alpha||v||_p^p}||u||_p^\alpha + \frac{J(u,v)}{||v||_p^p} \geq \frac{C_1}{p}$$

Análogamente, obtemos $0 \geq \dfrac{C_1}{p}$ que contradiz o fato de $C_1 > 0$.
Portanto, J é coercivo e conseqüentemente limitado inferiormente. ∎

Lema 4.2 *J é um funcional par.*

Demonstração: Note que,

$$\begin{aligned} J(-u,-v) &= \frac{1}{p}||(-u,-v)||_p^p - \int_\Omega F(x,-u) + \left(\frac{1+\gamma}{q}\right)\int_\Omega |-v|^q \\ &- \frac{\delta}{p}\int_\Omega |-u|^p - \int_\Omega G(x,-v). \end{aligned}$$

Por outro lado ,

i) $||(u,v)||_p^p = ||u||_p^p + ||v||_p^p = ||-u||_p^p + ||-v||_p^p = ||(-u,-v)||_p^p$.

ii) $|-v|^q = |v|^q, \ |-u|^p = |u|^p$

Desde que $f(x,-u) = -f(x,u)$ e $g(x,-v) = -g(x,v)$, obtemos que

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,m)dm$$

$$G(x,u) = \int_0^u g(x,m)dm$$

são funções pares. Logo J é um funcional par. ∎

Lema 4.3 *O funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração: seja (u_n, v_n) uma seqüência (PS) em W,
isto é,

$$J(v_n,u_n) \to c \ \text{ e } \ J'(u_n,v_n) \to 0.$$

Como J é coercivo, então (u_n, v_n) é limitada em W que é um espaço de Banach reflexivo. Assim, a menos de subseqüência,

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ em } W.$$

Como a imersão $W \hookrightarrow L^m(\Omega) \times L^m(\Omega)$, para $1 \leq m < p^* = \frac{NP}{N-P}$ é compacta tem - se que,

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ em } L^m(\Omega) \times L^m(\Omega). \tag{4.12}$$

Toda via para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ vale a desigualdade padrão,

$$\langle |x|^{m-2}x - |y|^{m-2}y, x - y\rangle \geq C_m|x - y|^m \text{ , se } m \geq 2 \tag{4.13}$$

e

$$\langle |x|^{m-2}x - |y|^{m-2}y, x - y\rangle \geq C_m\frac{|x - y|^{2-m}}{(|x| + |y|)^2} \text{ , se } 2 > m > 1 \text{ [Ver apêndice C].} \tag{4.14}$$

Assim, por (4.13) e (4.14)

$$\begin{aligned} C_p||u_n - u||_p^p + C_p||v_n - v||_p^p \leq & \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \\ & + \int_\Omega \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla v_n - \nabla v\rangle \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \\ = & \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n,\ \nabla u_n - \nabla u\rangle - \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \\ = & \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n, \nabla u_n\rangle - \int_\Omega \langle \nabla |u_n|^{p-2}\nabla u_n, \nabla u\rangle \\ - & \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n\rangle + \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u\rangle. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Daí

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \\ = & \ \|u_n\|_p^p - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\ - & \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_n + \|u\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla v_n - \nabla v\rangle \\ = & \ \|v_n\|_p^p - \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla v_n + \|v_n\|_p^p. \end{aligned} \tag{4.17}$$

De (4.16) e (4.17), resulta que ,

$$C_p\|u_n-u\|_p^p \le \|u_n\|_p^p - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n + \|u\|_p^p$$

e

$$C_p\|v_n-v\|_p^p \le \|v_n\|_p^p - \int |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_n + \|v\|_p^p,$$

que implica

$$\begin{aligned} C_p||u_n-u||_p^p + C_p||v_n-v||_p^p &\le ||u_n||_p^p - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n + ||u||_p^p \\ &+ ||v_n||_p^p - \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_n + ||v||_p^p, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} C_p||u_n-u||_p^p + C_p||v_n-v||_p^p &\le ||u_n||_p^p - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n + ||u||_p^p \\ &+ ||v_n||_p^p - \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_n \\ &+ ||v||_p^p - \int_\Omega f(x,u_n)u_n + \int_\Omega f(x,u_n)u_n \\ &+ (1+\gamma)\int_\Omega |v_n|^p - (1+\gamma)\int_\Omega |v_n|^p - \delta\int_\Omega |u_n|^p + \delta\int_\Omega |u_n|^p \\ &- \int_\Omega g(x,v_n)v_n + \int_\Omega g(x,v_n)v_n. \end{aligned}$$

Recordemos que,

$$\begin{aligned} J'(u,v)(\phi,\psi) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi + \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\psi - \int_\Omega f(x,u)\phi \\ &+ (1+\gamma)\int_\Omega |v|^{p-2}v\psi - \delta\int_\Omega |u|^{p-2}u\phi - \int_\Omega g(x,v)\psi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla u_n + \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v_n \\ &- \int_\Omega f(x,u_n)u_n + (1+\gamma)\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_nv_n \\ &- \delta\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_nu_n - \int_\Omega g(x,v_n)u_n - \int_\Omega g(x,v_n)v_n \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} C_p||u_n-u||_p^p + C_p||v_n-v||_p^p &\le J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_n \\ &- \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\nabla v - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_n \\ &+ ||v||^p + \int_\Omega f(x,u_n)u_n - (1+\gamma)\int_\Omega |v_n|^p \\ &+ \delta\int_\Omega |u_n|^p + \int_\Omega g(x,v_n)v_n. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Desta forma por (4.12) e doTeorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos:

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n - \int_\Omega f(x,u_n)u = o_n(1), \tag{4.19}$$

$$\int_\Omega g(x,v_n)v_n - \int_\Omega g(x,v_n)v = o_n(1), \tag{4.20}$$

$$\int_\Omega |u_n|^p - \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n u = o_n(1), \tag{4.21}$$

e

$$\int_\Omega |v_n|^p - \int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n v = o_n(1) \tag{4.22}$$

De fato, de (4.14) temos, a menos de subseqüência que,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ qtp em } \Omega$$

e

$$v_n(x) \to v(x) \ \text{ qtp em } \Omega$$

e existe $h \in L^m(\Omega)$tal que:

$$|u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ qtp em } \Omega$$

$$|v_n(x)| \leq h(x) \ \text{ qtp em } \Omega$$

Pela continuidade de f, segue-se que:

$$f(x,u_n(x))u_n(x) - f(x,u_n(x))u(x) \to f(x,u(x))u(x) - f(x,u(x))u(x)$$

isto é,

$$f(x,u_n(x))u_n(x) - f(x,u_n(x)u(x) \to 0$$

Usando a hipótese $(f1)$ temos que

$$Q_1 t^{\alpha-1} \leq f(x,t) \leq Q_2 t^{\alpha-1}.$$

Escolhendo uma constante positiva $Q_3 = \text{máx}\{Q_1, Q_2\}$, temos

$$|f(x,t)| \leq Q_3 |t|^{\alpha-1}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}|f(x,u_n(x))-f(x,u_n(x))u(x)| &\leq |f(x,u_n(x)u_n(x))|+|f(x,u_n(x))u(x)|\\ &\leq Q_3|u_n(x)^{\alpha-1}||u_n(x)|+Q_3|u_n(x)|^{\alpha-1}|u(x)|\\ &= Q_3|u_n(x)|^{\alpha}+Q_3|u_n(x)|^{\alpha-1}|u(x)|.\end{aligned}$$

Por Outro lado, notemos que

$$|u_n(x)|\leq h(x),$$

logo

$$|f(x,u_n(x))-f(x,u_n(x))u(x)|\leq Q_3[h(x)]^{\alpha}+[h(x)]^{\alpha-1}|u(x)$$

Sendo que $|h|^{\alpha-1}\in L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\Omega)$, então $[h]^{\alpha-1}|u|\in L^1(\Omega)$ e como
$L^1(\Omega)$ é um espaço vetorial, temos $Q_3[h]^{\alpha-1}|u|\in L^1(\Omega)$ e $|h|^{\alpha}\in L^1$, o que implica $Q_3[h]^{\alpha}\in L^1(\Omega)$. Portanto,

$$Q_3[h(x)]^{\alpha}+Q_3[h(x)]^{\alpha-1}|u(x)|\in L^1(\Omega)$$

então podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue de modo à obter

$$\int_\Omega(f(x,u_n(x))-f(x,u_n(x)u(x))\rightarrow\int_\Omega(f(x,u(x)u(x)-f(x,u(x))u(x))=0,$$

isto é,

$$\int_\Omega(f(x,u_n(x)u_n(x))-f(x,u_n(x)u(x))\rightarrow 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n-\int_\Omega f(x,u_n)u=o_n(1)\quad\text{verificando assim a convergência}\quad(4.19)$$

Da mesma forma chegamos que;

$$\int_\Omega(g(x,v_n)v_n-g(x,v_n)v)\rightarrow 0,$$

e portanto,

$$\int_\Omega(g(x,v_n)v_n-\int_\Omega g(x,v_n)v)=o_n(1)\quad\text{verificando a convergência}\ (4.20)$$

Seguindo este raciocínio, temos que

$$\int_\Omega \Big(|u_n(x)|^p - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)u(x)\Big) \to 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega |u_n|^p - \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n u = o_n(1).$$

Das convergências (4.19) – (4.20) – (4.21) – (4.22), obtemos

$$\begin{aligned} C_p||u_n-u||^p + C_p||v_n-v||^p &\leq J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) - \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u \\ &+ \int_\Omega |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla v - f(x,u_n)u \\ &- (1+\gamma)\int_\Omega |v_n|^{p-2}v_n v + \delta\int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n u \\ &+ \int_\Omega g(x,u_n)v + o_n(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$C_p||u_n-u||^p + C_p||v_n-v||^p \leq J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) - J'(u_n,v_n)(u,v) = o_n(1).$$

Assim, passando ao limite de $n \to \infty$ temos,

$$u_n \to u \quad \text{e} \quad v_n \to v \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Logo,

$$||u_n - u|| \to 0 \ \text{ e } \ ||v_n - v|| \to 0$$

e portanto,

$$||(u_n,v_n) - (u,v)|| \to 0 \quad em \quad W,$$

onde $W = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$, mostrando que J satisfaz a condição $(PS)_c$ para o caso $p \geq 2$.

Para o caso $1 < p < 2$, usando o lema 3 do apêndice C tem - se

$$\begin{aligned} \frac{C_p||u_n-u||^2}{(||u_n||+||u||)^{2-p}} + \frac{C_p||v_n-v||^2}{(||v_n||+||v||)^{2-p}} &\leq \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u_n - \nabla u\rangle \\ &+ \int_\Omega \langle |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p-2}, \nabla v_n - \nabla v\rangle \\ &\leq J'(u_n,v_n)(u_n,v_n) - J'(u_n,v_n)(u,v) = o_n(1) \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{C_p||u_n-u||^2 \ (||u_n||+||u||)^{p-2}}{(||u_n||+||u||)^{2-p} \ (||u_n||+||u||)^{p-2}} + \frac{C_p||v_n-v||^2 \ (||v_n||+||v||)^{p-2}}{(||v_n||+||v||)^{2-p} \ (||v_n||+||v||)^{p-2}} \leq o_n(1)$$

que implica,

$$c_p||u_n - u||^2(||u_n|| + ||u||)^{p-2} + C_p||v_n - v||^2(||v_n|| + ||v||)^{p-2} \leq o_n(1)$$

e

$$\begin{aligned} C_p||u_n - u||^p + ||v_n - v||^p &\leq C_p||u_n - u||^2(||u_n|| + ||u||)^{p-2} \\ &+ C_p||v_n - v||^2(||v_n|| + ||v||)^{p-2} \\ &\leq o_n(1). \end{aligned}$$

mostrando por fim o resultado. ■

4.3 Demonstração do Teorema 4.1

Consideremos $\{(e_1, f_1), (e_2, f_2), \ldots\}$ uma base de Schauder de W e para cada $k \in \mathbb{N}$ considere $X_k = \langle (e_1, f_1), ..., (e_k, f_k) \rangle$, o subespaço de W gerado por k vetores (e_1, f_1),..., (e_k, f_k). Desde que $X_k \subset W(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega) \times L^m(\Omega)$ continuamente para $1 \leq m \leq p^*$, as normas de W e $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ e W e $L^\alpha(\Omega) \times L^p(\Omega)$ são equivalentes em X_k, portanto existe $C_k > 0$, tal que para cada $(u, v) \in X_k$, tem-se:

$$\begin{aligned} J(u,v) &= \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \int_\Omega F(x,u) + \frac{1+\gamma}{q}\int_\Omega |v|^q - \frac{\delta}{p}\int_\Omega |u|^p - \int G(x,v) \\ \text{ou} \quad &\text{ainda} \\ J(u,v) &\leq \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \int_\Omega F(x,u) + \frac{1+\gamma}{q}\int_\Omega |v|^q \end{aligned}$$

Pela hipótese (f_1) temos,

$$Q_1 \int_0^t m^{\alpha-1} dm \geq \int_0^t f(x,m) dm$$

isto é,

$$\frac{Q_1}{\alpha} t^\alpha \leq F(x,t)$$

ou ainda,

$$\frac{Q_1}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha \leq \int_\Omega F(x,u)$$

Pela imersão de Sobolev, existe $C_k > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{\alpha} C_k ||u||^\alpha &\leq \frac{Q_1}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha \\ -\int_\Omega F(x,u) - \frac{Q_1}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha &\leq -\frac{Q_1}{\alpha}||u||_p^\alpha. \end{aligned}$$

Análogamente concluímos que $C\frac{1+\gamma}{q}||v||_q^q \leq \frac{1+\gamma}{q}\int_\Omega |v|^q$.
Daí,

$$J(u,v) \;\; \leq \;\; \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \frac{Q_1}{\alpha}C_k||u||_p^\alpha + C\frac{1+\gamma}{q}||v||_q^q.$$

Usando a imersão contínua do espaço $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com Ω limitado, temos que existe uma constante $\overline{C} > 0$ tal que:

$$||v||_q^q \leq \overline{C}||v||_p^q$$

Daí,

$$J(u,v) \leq \frac{1}{p}||(u,v)||^p - \frac{Q_1}{\alpha}C_k||u||_p^\alpha + \overline{C}C\frac{1+\gamma}{q}||v||_q^q.$$

Definamos o seguinte conjunto:

$$K = \{(u,v) \in X_k : ||u||_p, ||v||_p = R\}$$

Então,

$$J(u,v) \leq \frac{1}{p}2R^p + \overline{C}C\frac{(1+\gamma)}{q}R^q - \frac{Q_1}{\alpha}C_kR^\alpha$$

Como $1 \leq \alpha < q$, para R suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{2R^p}{p} + \frac{\overline{C}C(1+\gamma)R^q}{q} - \frac{Q_1}{\alpha}C_kR^\alpha < 0$$

e

$$R^{p-\alpha} < R^{q-\alpha}.$$

Daí,

$$\frac{2R^{p-\alpha}}{2} + \frac{\overline{C}C}{q}(1+\gamma)R^{q-\alpha} < \frac{Q_1}{\alpha}C_k$$

ou seja,

$$\frac{2R^{p-\alpha}}{p} + \frac{\overline{C}}{q}(1+\gamma)R^{p-\alpha} < \frac{Q_1}{\alpha}C_k$$

que implica,

$$R < \frac{Q_1}{\alpha}C_k\left(\frac{2}{p} + \frac{\overline{C}}{q}(1+\gamma)^{-}1\right)^{\frac{1}{p-\alpha}}$$

Considere

$$R = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{p} + \frac{\overline{C}}{q}(1+\gamma)^{-1}\right\} \quad \text{e teremos}$$

$$J(u,v) = -C < 0 = J(0,0)$$

Portanto,

$$\sup_K J(u,v) \leq -C < J(0,0).$$

■

Agora, desde que $J \in C^1(W, \mathbb{R})$ e X_k e $\mathbb{R}^k$ são isomorfos e considerando que podemos identificar K com S^{k-1}, concluimos que $\gamma(K) = k$. Pelo Teorema de Clarke, J tem pelo menos k pares de pontos críticos diferentes. Desde que K é arbitrário, obtemos infinitos pontos críticos de J. ■

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice mostraremos a diferenciabilidade dos funcionais energia defenidos ao longo deste trabalho.

Definição A.1 *Seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ onde U é um aberto de um espaço de Banach X. O fucional φ é Gatéaux-diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - \langle f, th\rangle] = 0.$$

Se o limite acima existir, ele é único e a derivada de Gatéaux em u será denotada por $\varphi'(u)$, e dada por

$$\langle \varphi'(u), h\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u)].$$

O funcional φ tem derivada a Fréchet $f \in X'$ em u se

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle f, h\rangle] = 0.$$

O funcional φ é de classe $C^1(U, \mathbb{R})$ se φ possui derivada a Fréchet e esta é contínua em U.

Proposição A.1 *Se φ tem derivada Gatéaux contínua em U, então $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Dados $u_0 \in U$, $h \in X$ e φ' a derivada de Gatéaux. Defina $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$F(u) = \varphi(u) - \langle \varphi'(u_0), u - u_0\rangle.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} |F(u) - F(u_0)| &= |\varphi(u) - \langle \varphi'(u_0), u - u_0\rangle - \varphi(u_0)| \\ &\leq \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|\varphi'(u_0 + \theta(u - u_0)) - \varphi'(u_0)\| \, \|u - u_0\| \end{aligned}$$

Como φ tem derivada Gatéaux contínua em U, então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$ temos

$$\|\varphi'(u_0 + h) - \varphi'(u_0)\| \leq \epsilon.$$

pela definição(A.1),

$$\begin{aligned}\|\varphi(u_0 + h) - \varphi(u_0) - \langle \varphi'(u_0), h\rangle\| &\leq \sup_{0\leq\theta\leq 1} \|\varphi'(u_0 + \theta(h)) - \varphi'(u_0)\| \, \|h\| \\ &\leq \epsilon \, \|h\| \,,\end{aligned}$$

donde segue que φ é diferenciável a Fréchet e esta é contínua. ∎

Proposição A.2 *O funcional* $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$J(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(||u||^p) - \int_\Omega F(x, u)$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds$ *e* $F(x, t) = \int_0^t f(x, s)ds$ *é de classe* $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: Primeiro mostraremos que o funcional J está bem definido. De fato, notemos que, sendo $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds < +\infty, \quad \forall \ \ t \in \ \mathbb{R}$$

Logo,

$$\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) < +\infty, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(x, u)dx\right| &= \left|\int_\Omega \left[\int_0^u f(x, s)ds\right] dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\int_0^u f(x, s)ds\right| dx.\end{aligned}$$

Usando (f_1): $|f(x, t)| \leq \theta_3 |t|^{\alpha-1}$.

Vejamos dois casos:

1^ocaso: $u \geq 0$. Por (f_1), temos

$$\begin{aligned}F(x, u) \leq |F(x, u)| = \left|\int_0^u f(x, s)ds\right| &\leq \int_0^u |f(x, s)| \, ds \\ &\leq Q_3 \int_0^u |s|^{\alpha-1} ds \\ &= Q_3 \int_0^u s^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{Q_3}{\alpha} s^\alpha|_0^u.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq \frac{Q_3}{\alpha}|u|^\alpha,$$

com $1 \leq \alpha < q$ e $Q_3 > 0$.

2^ocaso: $u < 0$. Por (f_1), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| &= \left|-\int_u^0 f(x,s)ds\right|\\ &\leq \int_u^0 |f(x,s)|\,ds\\ &\leq Q_3\int_u^0 |s|^{\alpha-1}ds,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| &\leq Q_3\int_u^0 (-s)^{\alpha-1}ds\\ &= \frac{Q_3}{\alpha}(-s)^\alpha|_u^0\\ &= \frac{Q_3}{\alpha}u^\alpha\\ &= \frac{Q_3}{\alpha}|u|^\alpha,\end{aligned}$$

com $1 \leq \alpha < q$ e $Q_3 > 0$.

Portanto, em ambos os casos, resulta

$$\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq \frac{\theta_3}{\alpha}|u|^\alpha,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, com $1 < \alpha < q$ e $Q_3 > 0$.

Usando a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $p \leq r \leq p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, segue que para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| \leq \frac{Q_3}{\alpha}\int_\Omega |u|^\alpha dx < +\infty.$$

Mostrando que J está bem definido. ■

Definindo os funcionais $J_1 : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $L_1 : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$J_1(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) \;\; e \;\; L_1(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

Vamos mostrar que

Afirmação A.1 *O funcional J_1 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: J_1 é Gatéaux-diferenciável. De fato, considere o funcional $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definido por $G(s) = |s|^p$. Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} = p|\nabla u + \lambda t \nabla v|^{p-2} (\nabla u + \lambda t \nabla v) \nabla v,$$

Assim,

$$\lim_{t \to 0} \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} \;=\; p|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

Note que

$$\begin{aligned} \left|\frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\right| &\leq \left|p|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p-2}\right| \\ &\leq p|\nabla u + \nabla v|^{p-1}|\nabla v|, \end{aligned}$$

com $|\lambda t| < 1$. Desde que,

$$(\nabla u + \nabla v)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \nabla v \in L^p(\Omega),$$

temos, pela desigualdade de Hölder para os expoentes p e $\dfrac{p}{p-1}$ que

$$p\,(\nabla u + \nabla v)^{p-1}\,\nabla v \;\in\; L^1(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u + t\nabla v|^p - \int_\Omega |\nabla u|^p}{t} \;=\; p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v,$$

ou seja,

$$\lim_{t \to 0} \frac{G(u + tv) - G(u)}{t} \;=\; p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

Mostrando que G é Gatéaux-diferenciável e

$$G'(u)v \;=\; p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v.$$

Usando a Regra da Cadeia deduzimos,

$$\begin{aligned} J_1'(u)v &= \left[\frac{1}{p}(\widehat{M}(G(u)))'G'(u)\right] v \\ &= [M(||u||^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

Mostrando que J_1 é Gatéaux-diferenciável.

Note que a aplicação $u \longmapsto J_1'u$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato consideremos uma seqüência $\{u_n\}$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \phi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

com $||\phi|| \leq 1$. Segue que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{em} \quad (L^p(\Omega))^N.$$

Logo, a menos de subseqüência,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq s(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

onde $s \in L^p(\Omega)$.
Com isto,

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi(x) \to |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla\phi(x) \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega$$

e

$$\begin{aligned} \Big||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla\phi(x)\Big| &= |\nabla u_n(x)|^{p-1}|\nabla\phi(x)| \\ &\leq [s(x)]^{p-1}|\nabla\phi(x)| \text{ q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$s^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \quad \text{e} \quad \nabla\phi \in L^p(\Omega),$$

temos pela desigualdade de Hölder para os expoentes p e $\dfrac{p}{p-1}$, obtemos

$$[s]^{p-1}\nabla\phi \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\phi \quad \to \quad \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\phi - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\phi\right| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$ que implica

$$\sup_{||\phi|| \leq 1} \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \phi - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi \right| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0, \text{ ou seja,}$$

$$||G'(u_n) - G'(u)||_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \;<\; \varepsilon.$$

Mostrando que a aplicação $u \longmapsto G'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional G é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. Conseqüentemente,

$$G(u_n) \;\longrightarrow\; G(u),$$

isto é,

$$||u_n||^p \;\longrightarrow\; ||u||^p.$$

Usando a continuidade de M, segue que

$$[M||u_n||^p]^{p-1} \;\longrightarrow\; [M||u||^p]^{p-1}.$$

Assim, resulta que

$$[M||u_n||^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v \;\rightarrow\; [M||u||^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| [M||u_n||^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v - [M||u||^p]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, e por conseguinte,

$$||J_1'(u_n) - J_1'(u)||_{(W_0^{1,p})'} \;<\; \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, mostrando que a aplicação $u \longmapsto J_1'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional J_1 é de classe $C^1(W_0^{1,p}, \mathbb{R})$.

Afirmação A.2 *O funcional L_1 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: Sejam $u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(x,u+th)-F(x,u)}{t} \quad = \quad f(x,u+\lambda th)h$$

pela condição (f_1), resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x,u+th)-F(x,u)}{t}\right| &\leq |u+\lambda th|^{\alpha-1}|h|^{\alpha-1}|h|, \\
&\leq c\ Q_3 \text{máx}\{|u|^{\alpha-1}, |\lambda th|^{\alpha-1}\}|h|, \\
&= c\ Q_3 \text{máx}\{|u|^{\alpha-1}, |\lambda t||h|^{\alpha-1}\}|h|, \ \text{para todo } |\lambda t| < 1, \\
&\leq c\ Q_3\ |u|^{\alpha-1}|h| + Q_3 c|h|^{\alpha-1}|h|, \\
&= c\ Q_3\ |h|(|u|^{\alpha-1} + |h|^{\alpha}).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder para os expoentes α e $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, resulta que

$$|u|^{\alpha-1}|h|^{\alpha} \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \quad Q_3\ c|h|(|u|^{\alpha-1}+|h|^{\alpha}) \in L^1(\Omega).$$

Observe que,

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+th)-F(x,u)}{t} = f(x,u)h.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{[F(x,u+th)-F(x,u)]}{t} = \int_\Omega f(x,u)h,$$

mostrando que o funcional L_1 é Gatéaux-diferenciável e,

$$L_1'(u).h = \int_\Omega f(x,u)h, \quad \forall\ h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Afirmamos que $u \to L_1'(u)$ é contínua.

De fato, consideremos uma seqüência (u_n) tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $h \in H_0^1(\Omega)$ com $\|h\| \leq 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
|(L_1'(u_n) - L_1'(u))h| &= |L_1'(u_n)h - L_1(u)h| \\
&= \left|\int_\Omega f(x,(u_n))h - \int_\Omega f(x,u)h\right|.
\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$, obtemos

$$u_n \to u \text{ em } L^m(\Omega),$$

logo, existe uma função $v \in L^m(\Omega)$, tal que, a menos de subseqüência,

$$|u_n(x)| \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Da continuidade de $f(x,.)$, temos que

$$f(x, u_n(x))h(x) \to f(x, u(x))h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Por (f.1), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x))h(x)| &\leq Q_3(|u_n(x)|^{\alpha-1})\,|h(x)| \\ &\leq Q_3([v(x)]^{\alpha-1})\,|h(x)|\,, \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ onde } 1 < \text{m} < p^*. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder para os expoentes $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ e α, resulta

$$Q_3[v]h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f(x, u_n)h \to \int_\Omega f(x, u)h.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_\Omega f(x, u_n)h - \int_\Omega f(x, u)h \right| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Conseqüentemente,

$$\|L_1'(u_n) - L_1'(u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Mostrando que a aplicação $u \to L_1'(u)$ é contínua e o funcional L_1 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$. ■

Proposição A.3 *O funcional* $\phi(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Omega u^4 dx$ *é de classe* $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração: De fato, temos que ϕ está bem definido, pois

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \;=\; \frac{1}{2}||u||^2 < +\infty.$$

Por outro lado a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$ para $1 \leq m \leq 2^* = 6$ e para $u \in H_0^1(\Omega)$, nos garante

$$\frac{1}{4}\int_\Omega u^4 dx \quad < \quad +\infty.$$

Definindo $\phi(u) = J_1(u) - J_2(u)$ temos que

$$J_1(u) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2}||u||^2.$$

Provando que, J_1 está bem definido.

Vamos provar que J_1 é Gatéaux-diferenciável. De fato usando o Teorema do Valor Médio, e como a norma é oriunda de um produto interno no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} &= \frac{||u+tv||^2 - ||u||^2}{t} \\
&= \frac{< u+tv, u+tv > - ||u||^2}{t} \\
&= \frac{< u, u > + 2 < u, tv > + t^2 < v, v > - ||u||^2}{t} \\
&= \frac{||u||^2 + 2t < u, v > + t^2 ||v||^2 - ||u||^2}{t} \\
&= 2 < u, v > + t||v||^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} \quad = \quad 2 < u, v >= 2\int_\Omega \nabla u \nabla v$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
J_1'(u)v &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J_1(u+tv) - J_1(u)}{t} = \frac{1}{2}\ 2\int_\Omega \nabla u \nabla v \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v,
\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Afirmamos que $u \longmapsto J_1'(u)v$ é contínua no dual de $H_0^1(\Omega)$.

De fato, como no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ o produto interno é sempre contínuo, temos que $J_1'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ é contínua mostrando que J_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. ∎

Afirmação A.3 *O funcional J_2 é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, note que J_2 está bem definido, pois vimos que pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^m(\Omega)$ para $1 \leq m \leq 6$, temos $\int_\Omega u^4 dx < +\infty$. Considere a função auxiliar $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = (u + stv)^4$, $s, t \in \mathbb{R}$, de modo que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

a) $f'(s) = 4(u + stv)^3 tu$

b) $f(0) = u^4$

c) $f(1) = (u + tv)^4$

Sendo f diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) \;=\; f'(\lambda)(1-0),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (u+tv)^4 - u^4 &= 4(u+\lambda tv)^3 tv \\ \frac{(u+tv)^4 - u^4}{t} &= 4(u+\lambda tv)^3 v. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\{(u+tv)^4 - u^4\} \;=\; 4u^3 v$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{(u+tv)^4 - u^4}{t} \right| &= |4(u+\lambda tv)^3 v| \\ &\leq 4|v|(|u| + |v|)^3. \end{aligned}$$

Desde que $(|u| + |v|)^3 \in L^{\frac{4}{3}}$ e $|v| \in L^4$, pela desigualdade de Hölder para os expoentes 4 e $\frac{4}{3}$, resulta que

$$4|v|(|u| + |v|)^3 \in L^1(\Omega).$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta que

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\{(u+tv)^4 - u^4\} &= 4u^3 v \;\Leftrightarrow \\ \frac{1}{4} \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\{(u+tv)^4 - u^4\} &= u^3 v \;\Leftrightarrow \\ \frac{1}{4} \int_\Omega \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t}\{(u+tv)^4 - u^4\} &= \int_\Omega u^3 v. \end{aligned}$$

Recorde que $J_2(u) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_\Omega u^4 dx$, logo

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J_2(u+tv) - J_2(u)}{t} \;=\; \int_\Omega u^3 v,$$

que implica,

$$J_2'(u)v \;=\; \int_\Omega u^3 v,$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$ mostrando a existência da Derivada de Gatéaux.

Afirmamos que $u \longmapsto J_2'(u)v$ é contínua no dual de $H_0^1(\Omega)$.

De fato, seja a seqüência $(u_n) \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$.

Por imersão, temos que $u_n \longrightarrow u$ em $L^4(\Omega)$, ou seja,

$$||u_n|_{L^4} - |u|_{L^4}| \;\leq\; |u_n - u|_{L^4} \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$|u_n|_{L^4} \;\longrightarrow\; |u|_{L^4}$$

e portanto

$$J_2'(u_n) \;\longrightarrow\; J_2'(u).$$

Portanto, J_2 é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$, mostrando a proposição acima. ■

Proposição A.4 *O funcional $\phi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\phi(u) = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^3 - \int_\Omega u^4 dx = ||u||^6 - |u|^4$ onde $||.||$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ e $|.|$ é a norma em $L^4(\Omega)$ é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Considerando $\phi(u) = L_1(u) - L_2(u) = ||u||^6 - |u|^4$.

i) $L_1(u) = ||u||^6$ está bem definido, pois da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$, com $1 \leq m \leq 6$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \;<\; +\infty$$

isto é,

$$||u||^6 \;<\; +\infty.$$

ii) L_1 é Gatéaux-diferenciável.

Portanto, considere a função auxiliar $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$f(s) \quad = \quad |\nabla u + st\nabla v|^6$$

para $t, s \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então temos,

a) $f'(s) = 6|\nabla u + st\nabla v|^4(\nabla u + st\nabla v)t\nabla v = 6t|\nabla u + st\nabla v|^4(\nabla u + st\nabla v)\nabla v$

b) $f(1) = |\nabla u + t\nabla v|^6$

c) $f(0) = |\nabla u|$

Desde que f é diferenciável em $(0,1)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) \quad = \quad f'(\lambda)(1-0).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\nabla u + t\nabla v|^6 - |\nabla u|^6 &= 6|\nabla u + \lambda t\nabla v|^4(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v \\ \frac{|\nabla u + t\nabla v|^6 - |\nabla u|^6}{t} &= 6|\nabla u + \lambda t\nabla v|^4(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v. \end{aligned}$$

Note que,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{|\nabla u + t\nabla v|^6 - |\nabla u|^6}{t} \quad = \quad 6|\nabla u|^4 \nabla u \nabla v. \tag{A.1}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{|\nabla u + t\nabla v|^6 - |\nabla u|^6}{t} \right| &= \Big| 6|\nabla u + \lambda t\nabla v|^4(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v \Big| \\ &\leq 6|\nabla u + \lambda t\nabla v|^5|\nabla v| \\ &\leq 6c\max\{|\nabla u|^5, |\lambda t\nabla v|^5\}|\nabla v| \\ &= 6c\{|\nabla v||\nabla u|^5 + |\lambda t|^5 + |\nabla v|^6\} \\ &\leq 6c|\nabla v||\nabla u|^5 + 6c|\nabla v|^6 \\ &= 6c|\nabla v|(|\nabla u|^5 + |\nabla v|^5) \end{aligned}$$

Desde que $|\nabla v|^5 \in L^{\frac{6}{5}}$ e $|\nabla u| \in L^6$, pela desigualdade de Hölder para os expoentes $\dfrac{6}{5}$ e 6, segue que $|\nabla v|(|\nabla u|^5 + |\nabla v|^5) \in L^1(\Omega)$.

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resulta

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u+t\nabla v|^6-|\nabla u|^6}{t}\right) \;=\; 6||\nabla u||^4\int_\Omega \nabla u\nabla v. \tag{A.2}$$

Recorde que

$$L_1(u)=\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^3 \;=\; \left(||u||^2\right)^3=||u||^6.$$

Daí,

$$L_1(u+tv)=\left(\int_\Omega |\nabla u+t\nabla v|^2\right)^3 \;=\; \left(||u+tv||^2\right)^3=||u+tv||^6.$$

Por A.2, segue que

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\{L_1(u+tv)-L_1(u)\} \;=\; 6||u||^4\int_\Omega \nabla u\nabla v, \text{ para todo } u\ ,v \ \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, L_1 é Gatéaux-diferenciável e $L_1'(u)v=6||u||^4\int_\Omega \nabla u\nabla v$.

Desde que $\nabla u\nabla v$ é contínua em $(H_0^1(\Omega))'$ e a norma sempre é uma função contínua, e portanto, $6||u||^4\int_\Omega \nabla u\nabla v$ é contínua no dual de $H_0^1(\Omega)$ mostrando que $L_1\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Dos cálculos anteriores, feitos na proposição A.3, verificamos que $L_2(\Omega)=\int u^4dx$ é um funcional de classe C^1 em H_0^1. Daí, podemos concluir que $\psi: H_0^1\longrightarrow\mathbb{R}$ associado ao problema auxiliar no capítulo 2;

$$P(a)=\begin{cases} -6||u||^4\triangle u=4u^3, & \Omega\\ u=0, & \partial\Omega.\end{cases}$$

é de classe C^1 em $H_0^1(\Omega)$.

Segue do raciocínio usado anteriormente que o funcional $J: w_0^{1,P}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por,

$$J(u,v):=\frac{1}{p}\|u,v\|^p-\int_\Omega F(x,u)+\frac{1+\gamma}{q}\int_\Omega |v|^q-\frac{\delta}{p}\int_\Omega |u|^p-\int_\Omega G(x,u)$$

é de classe $C^1(W,\mathbb{R})$.

Apêndice B

Teoria de Lusternik - Schnirelmann

Neste apêndice enunciaremos alguns resultados impotantes utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Pontos Criticos na Presença de Simetrias

Introdução

Baseado na chamada Teoria de Lusternik-Schnirelman, temos que obter valores críticos de um dado funcional $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ com valores de minimax de ϕ sobre as classes adequadas $\mathcal{A}_k$ de subconjuntos de X,

$$C_K = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sup_{x \in A} \phi(x), \quad onde \quad k = 1, 2, ...$$

e originalmente as classes $\mathcal{A}_k$ estavam baseadas na noção topológica de Categoria de *Lusternik-Schnirelmann*.

Quando o problema apresenta simetrias, isto é, quando existe um determinado grupo G "agindo" de forma contínua no espaço X e o funcional ϕ é "invariante" sob esta ação, então é comum ocorrer que o funcional ϕ possua vários pontos críticos.

O exemplo típico dessa situação de multiplicidade é o Teorema clássico de Lusternik, o qual garante a existência de pelo menos $(n+1)$ pares distintos de pontos críticos para um funcional $\phi \in C^1(S^n, \mathbb{R})$ que é par [26]

Definição B.1 *Dizemos que* $c \in \mathbb{R}$ *é um valor crítico de um funcional* $\phi : X \to \mathbb{R}$ *se* $\phi(u) = c$ *para algum ponto crítico* $u \in X$. *O conjunto de todo os pontos críticos no "nível"* c *será denotado por* K_c , *i.é,*

$$K_c = \{u \in X : \phi'(u) = 0, \phi(u) = c\}.$$

Também denotaremos por ϕ^c *o conjunto de todos os pontos em níveis* $\leq c$, *i. é,*

$$\phi^c = \{u \in X : \phi(u) \leq c\}.$$

Definição B.2 *Um Campo pseudo - gradiente para* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é uma aplicação localmente Lipschitziana* $v : Y \to X$, *onde* $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$, *satisfazendo as condições*

$(a) ||v(u)|| \leq 2||\phi'(u)||$

$(b) \phi'(u)v(u) \geq ||\phi'(u)||^2$, *para todo* $u \in Y$.

Teorema B.1 *Todo funcional* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *possui um campo pseudo - gradiente.*

Demonstração: ver [29]

A Teoria De Lusternik - Schnirelman

Definição B.3 *Seja* X *um espaço de Banach e seja* G *um grupo topológico compacto. Suponha ainda que* $\{T(g) : g \in G\}$ *é uma dada* representação isométrica *de* G *em* X*, isto é, para cada* $g \in G$*, temos*

$T(g) : X \to X$ *é uma isometria e valem as propriedades:*

(i) $T(g_1 + g_2) = T(g_1)T(g_2)$, *para todo* $g_1, g_2 \in G$;

(ii) $T(0) =$ *identidade;*

(iii) $(g, u) \to T(g)u$ *é contínua.*

Vamos denotar por $\mathcal{A}$ *a classe de todos os* subconjuntos fechados e invariantes *de* X*, isto é*

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \ : \ A \text{ é fechado}, T(g)A = A, \ \forall g \in G\}.$$

Onde X *representa um Espaço de Banach .*

Definição B.4 *Uma Teoria de G-índice é uma aplicação* $ind : \mathcal{A} \to \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ *satisfazendo as seguinte propiedades:*

(a) $ind\ A = 0$ *se e somente se* $A = \emptyset$;

(b) Se $R : A_1 \to A_2$ *contínua e equivariante , então ind* $A_1 \leq$ *ind* A_2*;*

(c) ind $(A_1 \bigcup A_2) \leq$ *ind* $A_1 +$ *ind* A_2*;*

(d) Se $K \in \mathcal{A}$ *é compacto então existe uma vizinhança* N *tal que ind* $K =$ *ind* N

Proposição B.1 *Sejam* X *um espaço de Banach,* $G = Z_2 = \{0,1\}$ *e defina* $T(0) = Id$ *e* $T(1) = -Id$*.*

Dado um subconjunto fechado, simétrico (em relação à origem)$A \in \mathcal{A}$*, definamos:*

i) $\gamma(A) = k$*, se* k *é o menor inteiro positivo tal que existe uma aplicação* ímpar $\phi \in C(A, \mathbb{R}^k - \{0\})$*;*

ii) $\gamma(A) = \infty$ *se tal aplicação não existe;*

iii) $\gamma(\emptyset) = 0$.

Então, a aplicação $\gamma : \mathcal{A} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *é um* Z_2 *- índice em X.*

Observação B.1

O Z_2 - índice $\gamma(A)$ é o chamado gênero do *conjunto simétrico* A e foi introduzido originalmente por Krasnoselskii. [28].

A definição dada acima é devida à Coffman.[6].

Demonstração da Proposição (B.1)

Inicialmente, note que $A \subset X$ é Z_2 - invariante se e somente se $u \in A$ implica $-u \in A$, isto é, A é simétrico em relação à origem. Logo,

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \;\; : \;\; \text{A é fechado e } -A = A\}.$$

Por outro lado, uma aplicação equivariante

$$R : A_1 \to A_2, \;\; com \;\; A_1 \subset A_2,$$

significa que R é *ímpar e contínua*, basta considerarmos a aplicação

$$Id : A_1 \to A_2.$$

Mostraremos que a aplicação $\gamma : \mathcal{A} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ satisfaz as condições de ser um G - índice . De fato,

(a) Esta propriedade é imediata por definição.

(b) Basta mostrar que $\gamma(A_1) \leq \gamma(A_2)$, desde que exista a aplicação contínua e ímpar (equivariante).

Se $\gamma(A_2) = \infty$, segue o resultado, caso contrário suponhamos que

$$\gamma(A_2) = k < \infty$$

então, existe uma apliacação ímpar, contínua:

$$\phi : A_2 \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\},$$

como R é contínua segue-se:

$$\phi \;\; o \;\; R : A_1 \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$$

é contínua e como as duas são ímpares, segue-se:

$$\begin{aligned} \phi \;\; o \;\; R(-x) &= \phi[R(-x)] \\ &= \phi[-R(x)] \\ &= -\phi[R(x)] \\ &= -\phi \;\; o \;\; R(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$\phi \;\; o \; R$ é uma aplicação *ímpar* e portanto

$$\gamma(A_1) \leq k = \gamma(A_2)$$

$$\gamma(A_1) \leq \gamma(A_2).$$

(c) (Sub-aditividade). Basta mostrar que

$$\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2).$$

Novamente, se $\gamma(A_1)$ e /ou $\gamma(A_2)$ for infinito, segue o resultado:

$$\gamma(A_1 \cup A_2) \leq \infty,$$

caso contrário, suponhamos que

$$\gamma(A_1) = k_1 < \infty \;\; e \;\; \gamma(A_2) = k_2 < \infty,$$

e conseqüentemente existem as *aplicações ímpares e contínuas*:

$$\phi : A_1 \to \mathbb{R}^{k_1} \backslash \{0\} \quad \text{e} \quad \psi : A_2 \to \mathbb{R}^{k_2} \backslash \{0\}.$$

Pelo Teorema de extensão de Tietze, podemos extender ϕ *e* ψ, respectivamente para $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ continuamente a todo o espaço X, isto é,

$$\tilde{\phi} \in C^0(X, \mathbb{R}^{k_1}) \ \text{ e } \ \tilde{\psi} \in C^0(X, \mathbb{R}^{k_2}),$$

com $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ ainda *funções ímpares.* Basta considerarmos $\psi(x) = \frac{1}{2}[\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(-x)]$.
Definamos,

$$h(x) = \left(\tilde{\phi}\Big|_{A_1 \cup A_2}(x) \ \ , \ \ \tilde{\psi}\Big|_{A_1 \cup A_2}(x)\right) \in \mathbb{R}^{k_1+k_2}$$

com

$$h : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}^{k_1+k_2} \backslash \{0\}$$

contínua e ímpar.
Portanto,

$$\gamma(A_1 \cup A_2) \leq k_1 + k_2$$
$$\leq \gamma(A_1) + \gamma(A_2)$$

(d) Por fim, mostraremos a existência de uma vizinhança K_δ de A $\in \mathcal{A}$ de modo que,

$$\gamma(k_\delta) = \gamma(A),$$

onde

$$K_\delta = V(A) = \{x \in X \ ; \ \rho(x, A) \leq \delta\}.$$

Seja $\gamma(A) = k < \infty$ e seja $\phi : A \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$, a *aplicação ímpar contínua* correspondente, pelo Teorema de Tietze, podemos extender ϕ a todo espaço X continuamente com $\tilde{\phi}$, sua extensão ainda sendo *ímpar e contínua.*
Como A é um conjunto compacto, por hipótese, ϕ assume um mínimo, isto é

$$|\phi(x)| \geq \alpha > 0, \quad \text{para} \quad \text{todo} \ \ x \in A,$$

assim, como $\tilde{\phi}$ é contínua em X para δ suficientemente pequeno, temos

$$|\tilde{\phi}(x)| > 0, \quad \text{para} \quad \text{todo} \ \ x \in K_\delta(A).$$

Note que $A \subset K_\delta(A)$, onde $K_\delta(A)$ é uma vizinhança fechada de A, a qual é invariante, pois cada $T(g)$ é uma isometria e $\gamma(K_\delta(A)) \leq k$ por construção.
Daí,

$$\tilde{\phi} : K_\delta(A) \to \mathbb{R}^k \backslash \{0\},$$

com $\tilde{\phi}$ contínua e ímpar.

Portanto,

$$\gamma(K_\delta(A)) \leq k = \gamma(A),$$

por outro lado, como $A \subset K_\delta(A)$, considere a inclusão

$$i : A \to K_\delta(A)$$

uma aplicação ímpar e contínua. Logo,

$$\gamma(A) \leq \gamma(K_\delta(A)).$$

■

Lema B.1 *Se* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é um* funcional invariante *então tem -se (quais que sejam* $g \in G$ *e* $u, h \in X$*):*
(i) $\phi'(T(g)u)h = \phi'(u)T(-g)h$;
(ii) $||\phi'(T(g)u)|| = ||\phi'(u)||$.

Demonstração: ver [25].

Lema B.2 *Seja* $R : Y \to X$ *uma aplicação localmente Lipschitziana, onde* X *e* Y *são espaços métricos. Dado um conjunto compacto* $A \subset Y$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* R *é Lipschitziana em* $A_\delta = \{u \in Y : |u - A| \leq \delta\}$.

Demonstração: ver [25].

Proposição B.2 *Um funcional* $\phi' \in C^1(X, \mathbb{R})$ *que é invariante possui um campo* pseudo - gradiente equivariante*, isto é, uma aplicação localmente Lipschitziana* $v : Y \to X$ *, onde* $Y = \{u \in X : \phi'(u) \neq 0\}$*, tal que*
(i) $||v(u)|| \leq 2||\phi'(u)||$,;
(ii) $\phi'(u)v(u) \geq ||\phi'(u)||^2$;
(iii) v *é equivariante.*

Demonstração:ver [29].

Teorema B.2 *Suponha que* $\phi' \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é um funcional invariante satisfazendo a condição Palais - Smale (PS). Se* U *é uma vizinhança aberta invariante de* K_c*, onde* $c \in \mathbb{R}$*, então para todo* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existe* $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *tal que para qualquer* $u \in X$ *e* $t \in [0,1]$:

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} - U) \subset \phi^{c-\epsilon}$;

(iv) $\eta(t, .) : X \to X$ *é um homeomorfismo equivariante.*

Demonstração: ver [8]

Teorema B.3 *Suponha que* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é invariante e satisfaz a condição de Palais - Smale* $(PS)_c$ *. Se* $c_j > -\infty$ *para algum* $j \geq 1$*, então* c_j *é um valor crítico de* ϕ *. Mais geralmente, se* $c_k = c_j = c > -\infty$ *para algum* $k \geq j$*, então* $ind\ K_c \geq k - j + 1$.

Demonstração: Note que K_c é invariante, além disso K_c é compacto pela condição $(PS)_c$.
Se $c_j = c_k = c > -\infty$ para algum $k \geq j$, temos que $ind\ K_c \geq k - j + 1$.
De fato, seja $N \supset K_c$ uma vizinhança fechada , invariante tal que $ind\ K_c = ind\ N$.
Então, o interior de N é uma vizinhança aberta, invariante de K_c que denotaremos por U.
Pelo Lema (1), concluimos a existência de um $\epsilon > 0$ e uma aplicação $\eta \in C([0,1] \times X; X)$ satisfazendo $(i) - (iv)$.
Definindo

$$c_k = \inf_{A \in \mathcal{A}_k} \sup_{x \in A} \phi(x).$$

Tome $A \in \mathcal{A}_k$ tal que $\sup\limits_{x \in A} \phi \leq c + \epsilon$.
Defina $B = A - U$, temos que B é um conjunto fechado. Assim, das propriedades (b)-(c) na definição de G - indíce implicam que,

$$k \leq ind\ A = ind\ (B \cup N) \leq ind\ B + ind\ N = ind\ B + ind\ K_c,$$

como $B \subset \phi^{c+\epsilon} - U$, pelo Lema (1) item (iii) , obtemos que:

$C = \eta(1, B) \subset \eta(1, \phi^{c+\epsilon} - U) \subset \phi^{c-\epsilon}$. Note que C é compacto, além disso C é invariante. Como vimos acima $\sup\limits_{C} \phi \leq c - \epsilon$. Portanto pela definição de $c = c_j$ temos que,

$$\sup_{C} \phi \leq c - \epsilon < c_j = \inf_{A \in \mathcal{A}_j} \sup_{x \in A} \phi.$$

que implica

$$C \not\subset \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_j - 1,$$

logo,

$$ind\ C < j - 1.$$

Pela propriedade (b) de G-índice, obtemos

$$ind\ B \leq ind\ C < j - 1$$

daí,

$$-ind\ B \geq -j + 1,$$

resultando

$$ind\ K_c \geq k - j + 1.$$

$\blacksquare$

Teorema B.4 *(Teorema de Clarke) Seja $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par satisfazendo a condição de Palais - Smale (PS). Suponha que*
(i) ϕ é limitado inferiormente;
(ii) Existe um conjunto compacto, simétrico $K \in \mathcal{A}$ tal que $\gamma(K) = k$ e $\sup\limits_K \phi < \phi(0)$.
Então, ϕ possui pelo menos k pares distintos de pontos críticos com correspondentes valores críticos menores que $\phi(0)$

Demonstração: ver [7]

Proposição B.3 *i) Se $F \subset X$ é um conjunto fechado e $F \cap (-F) = \phi$, então $\gamma(F \cup (-F)) = 1$;*
ii) Se $A \in \mathcal{A}$ e existe um homeomorfismo ímpar $h \in C(A, S^{k-1})$. *Então,*

$$\gamma(A) = k \quad [em \ \ particular \ \ \gamma(S^{k-1}) = k];$$

iii) Se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $\gamma(A) \geq 2$. Então, A possui uma infinidade de pontos.

Demonstração:
i)Considere a aplicação

$$\varphi : F \cup (-F) \rightarrow \ \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

definida por:

$$\begin{cases} \varphi(u) = 1, se \quad u \in F \\ \varphi(u) = -1, se \quad u \in -F \end{cases}$$

Note que φ é contínua, por definição.

Observe que φ é ímpar, pois para $u \in F$ tem-se que existe $-u \in F$

e

$$\varphi(-u) = -1 = -\varphi(u).$$

Do mesmo modo, para $u \in (-F)$ tem-se que $-u \in (-F)$

e

$$\varphi(-u) = 1 = -(-1) = -\varphi(u).$$

Desse modo,

$$\gamma(F \cap (-F)) \leq k = 1,$$

logo

$$\gamma(F \cap (-F)) = 1.$$

$\blacksquare$

ii) Como $h : A \to S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ é uma aplicação *contínua e ímpar*, temos que

$$\gamma(A) \leq k$$

Por outro lado, suponhamos que

$$\gamma(A) = j < k,$$

então existe uma aplicação $\phi \in \subset (A, \mathbb{R}^j \backslash \{0\})$ e portanto uma aplicação *ímpar*

$$\psi = \phi \;\; o \;\; h^{-1} \;\; \in \;\; \subset (S^{k-1} \;\; , \;\; \mathbb{R}^j \backslash \{0\})$$

Como $j < k$, a aplicação ψ com valores em $\mathbb{R}^k$ é *homotópica* a uma aplicação constante,

$$\psi \equiv u_0$$

onde,

$$u_0 \in \mathbb{R}^k \backslash \mathbb{R}^j$$

e portanto,

$$d(\psi \ \ , \ \ \mathrm{B}_k \ \ , \ 0) = 0$$

Contradizendo o Teorema de Borsuk (Ver [34])

Portanto,

$$\gamma(A) = j \geq k$$

logo,

$$k \leq \gamma(A) \leq k$$

que implica,

$$\gamma(A) = k$$

e em particular,

$$\gamma(S^{k-1}) = k.$$

■

(iii) Basta notar que se $A \in \mathcal{A}$ é um conjunto com um número finito de pontos e $0 \in A$, então podemos escrever

$$A = F \cup (-F)$$

com

$$F \cap (-F) = \phi$$

de modo que

$$\gamma(A) = 1, \text{que decorre de (i)},$$

pois A é um conjunto fechado e

$$\gamma(A) = \gamma(F \cup (-F)) = 1 < 2$$

que contradiz o fato $\gamma(A) \geq 2$. Portanto, A possui infintitos pontos. ■

No que segue, estabeleceremos somente as propriedades de gênero que serão usadas neste trabalho. Mais informações sobre este assunto podem ser encontradas nas referências [1], [3], [8] e [28].

Teorema B.5 *Seja $E = \mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ a fronteira de um subconjunto aberto, simétrico e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $0 \in \Omega$. Então $\gamma(\partial\Omega) = N$.*

Demonstração:[8]

Bibliografia

[1] A. AMBROSETTI; A. MALCHIODI. Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 14(2007).

[2] A. AMBROSETTI; P. M. RABINOWITZ. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. anal. 14 (1973). 349 - 38.

[3] A. CASTRO. Metodos variacionales y analisis functional no linear. X Colóquio Colombiano de Matemática. 1980.

[4] A. LAZER; P.J. MCKENNA. On steady-state solutions of a system of reaction-diffusion equations from biology. Nonlinear Anal. 6 (1982)523-530.

[5] C. O. ALVES; F. J. S. A. CORREA;T. F. MA. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type. Comput. Math. Appl. 49 (2005)85 - 93.

[6] C. V. COFFMAN. A minimum-maximum principle for a class of nonlinear integral equation. J. Analyse Math. 22 (1969), 391-419.

[7] D.C. CLARKE. A variant of the Lusternik-Schinirelman theory. Indiana Univ. Math. J. 22(1972)65-74.

[8] D.G. COSTA. Tópicos em análise não-linear e aplicações às equações diferenciais. Escola Latino-Americana de Matemática. 1986.

[9] D.G. DE FIGUEIREDO; E. MITIDIERI. A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems. SIAM J. Math. Anal. 17(1986)836-849.

[10] D. GILBARD , N. S. TRUNDINGER. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer - Verlag Berlin. (1977).

[11] E. KREYSZIG. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley ,1989. Mech. Anal. 46,82-95(1981).

[12] E. L. LIMA. Curso de Análise,vol. 1. Rio de Janeiro , Instituto de Matemática Pura e Aplicada , CNPq. 1976-vol. ilust. (Projeto Euclides).

[13] F.J.S.A. CORREA; G. M. FIGUEIREDO. On a p-Kirchhoff equation via krasnoselskii's Genus, in Applied Mathematics Letters, 2008.

[14] F.J.S.A. CORREA; G. M. FIGUEIREDO. On Multiple Solutions of a (p,q)-Elliptic System Arised from the FitzHugh-Nagumo Equations, preprint.

[15] F.J.S.A. CORREA; G. M. FIGUEIREDO. On an elliptic equation of p-kirchhoff-type via variational methods. Bull. Australian Math. Soc., v. 74, p. 263 - 277 , 2006.

[16] F.J.S.A. CORREA; G. M. FIGUEIREDO. On the Existence of Positive Solution for an Elliptic Equation of Kirchhoff type via Moser Iteration Method, Boundary Value Problems. v ID 796, p. 1-10, 2006.

[17] G. KLASSEN; E. MITIDIERI. Standing wave solutions for a system derived from the FitzHugh-Nagumo equations. SIAM J. Math. Anal. 17(1986)74-83.

[18] G. KLAASEN; W. TROY. Standing wave solutions of a system of reaction-diffusion equations derived from the FitzHugh-Nagumo equations. SIAM J. Appl. Math. 44 (1984)96-110.

[19] G. MANCINI; E. MITIDIERI. Positive solutions of some coercive-anticoercive elliptic systems. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 5^e Série. tome 8, N. 3 (1986-1987) 257-292.

[20] H. BREZIS; L. NIRENBERG. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure Appl. Math. 36(1983)437-477.

[21] H. BREZIS. Analisis Funcional, Teoria y aplicaciones. Version espanola de Juan Ramon Esteban. Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[22] J. HERNÁNDEZ. Maximum principles and decoupling for positive solutions of reaction-diffusion systems, Reaction-Diffusion Equations. K. J. Brown and A. A. Lacey (eds). Oxford University Press.(1990) 199-224.

[23] J. NAGUMO; S. YOSHIZAWA;S. ARIMOTO. Bistable transmission lines. IEEE Trans. Circuit Theory. CT-12 (1965)400-412.

[24] J. RINZEL. Impulse propagation in excitable systems, Dynamics and Modelling of Reactive-Systems, W. E. Stewart, W.H. Ray and C.C Conley, eds. Academic Press, New York. (1988) 259-291.

[25] L. LUSTERNIK; L. SCHNIRELMANN. Topological Methods in the Calculus of Variations. Hermann. Paris, 1934.

[26] L. LUSTERNIK. Topologische Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttherie. Monatsch. Math. Phys. 37 (1930), 125-130.

[27] L. NIRENBERG. Topics in Nonlinear Functional Analysis. Courant Institute of Mathematical Sciences. 1974.

[28] M.A. KRASNOLSELSKII. Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. Mac Millan. New York. 1964.

[29] M. WILLEM. Lectures on Critical Point Theory. Trabalho de Matematica 199. UnB, Brasilia. 1983.

[30] R. BARTLE. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley and Sons. New York , 1995.

[31] R. FITZHUGH. Impulses and physiological states in theoretical models for nerve membrane. Biophys. J. 1(1961),445-466.

[32] R. G. NASCIMENTO. Problemas elipticos não-locais do tipo p-Kirchhoff. Doct. dissertation. Unicamp. 2008

[33] S.P. HASTINGS. Some mathematical problems from neurobiology. Amer. Math. Monthly. 82(1975)881-895.

[34] KAVIAN O. Introduction à la théorie des points critiques et applicatons aux problemes elliptiques. Springer, Heidelberg (1983).