



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Rodrigo Medeiros dos Santos

Desvio Absoluto Mediano como Estimador
Robusto no Aprimoramento de Ferramentas no
Controle Estatístico da Qualidade

Orientador: Prof. Edson Marcos Leal Soares Ramos, *Dr.*

Belém
2008

Rodrigo Medeiros dos Santos

Desvio Absoluto Mediano como Estimador
Robusto no Aprimoramento de Ferramentas no
Controle Estatístico da Qualidade

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática e Esta-
tística da Universidade Federal do Pará
como requisito parcial para a obtenção
do grau de Mestre em Estatística.

Área de Concentração: Controle de Estatístico de Qualidade.

Orientador: Prof. Edson Marcos Leal Soares Ramos, *Dr.*

Belém
2008

Rodrigo Medeiros dos Santos

Desvio Absoluto Mediano como Estimador
Robusto no Aprimoramento de Ferramentas no
Controle Estatístico da Qualidade

Belém, 20 de novembro de 2008

Dissertação apresentada como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, da Universidade Federal do Pará.

Prof. Mauro de Lima Santos, *Dr.*
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística

Banca Examinadora

Prof. Edson Marcos Leal Soares Ramos, *Dr.*
Universidade Federal do Pará
Orientador

Profa. Marinalva Cardoso Maciel, *Dra.*
Universidade Federal do Pará
Examinadora

Profa. Silvia dos Santos de Almeida, *Dra.*
Universidade Federal do Pará
Examinadora

Profa. Lourdes Coral Contreras Montenegro, *Dra.*
Universidade Federal de Minas Gerais
Examinadora

À Anna Elizabeth.

Agradecimentos

- ★ A Deus, por ter me guiado e me iluminado na realização deste trabalho;
- ★ À Universidade Federal do Pará (UFPA), pela oportunidade de realização de um curso de pós-graduação;
- ★ Ao meu orientador, Professor Edson Marcos Leal Soares Ramos, pela orientação, pelos conselhos e pela revisão eficiente e criteriosa do trabalho;
- ★ Aos meus pais, Isan e Dulce, pelo cuidado de toda uma vida, por todos os conselhos, pelo apoio e pelo amor;
- ★ Aos meus irmãos, Isan Jr. e Viviane, pelo amor, pelo carinho, pelo companheirismo, pela torcida e pela amizade;
- ★ À Anna Elizabeth, pela amizade, por sempre me apoiar, me incentivar, me consolar e me dar forças;
- ★ Aos amigos do Curso de Mestrado, em especial aos amigos Fabio, Francisco e Jaciane, pelos momentos de estudo e diversão;
- ★ Ao grande amigo de infância, Brunno Aranha, pelos momentos de distração, apoio e amizade;
- ★ À Graça Medeiros, pelo incentivo, pelo amor e pelas orações;
- ★ Aos professores Frank Hampel, Elzevio Ronchetti, Peter Rousseeuw, Werner Stahel e Christophe Croux, pelos esclarecimentos e pelas maravilhosas publicações que inspiraram e influenciaram a realização deste trabalho;
- ★ Ao Programa de Pós Graduação em Matemática e Estatística da UFPA;
- ★ A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

*“Jamais chega o momento
em que se pode dizer:
Hoje fiz um bom trabalho
e amanhã será domingo
para mim.”*

(Pablo Picasso)

Resumo

SANTOS, Rodrigo Medeiros. Desvio Absoluto Mediano como Estimador Robusto no Aprimoramento de Ferramentas no Controle Estatístico da Qualidade. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática e Estatística) - PPGME, UFPA, Belém, Pará, Brasil.

O objetivo deste trabalho é aprimorar ferramentas do controle estatístico da qualidade a partir da utilização de um estimador robusto do desvio padrão σ baseado no desvio absoluto mediano (*DAM*). A teoria para estimar σ a partir do desvio absoluto mediano foi desenvolvida e o estimador foi apresentado. Os resultados das simulações mostraram que o estimador baseado no desvio absoluto mediano apresenta um desempenho satisfatório em comparação com os estimadores \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e $\bar{I}Q/\xi_n$, além de um desempenho mais robusto quando as amostras em questão estiverem contaminadas por observações discrepantes (*outliers*). Durante a aplicação, verificou-se que os gráficos de controle construídos com os limites obtidos a partir do estimador baseado no desvio absoluto mediano são mais robustos, detectando com maior eficácia a presença de observações discrepantes nas amostras. Verificou-se também que, na presença de *outliers*, os limites produzidos tendem a reduzir a probabilidade do erro tipo II. Por essa razão sua utilização se mostrará eficiente também em processos onde se deseja aplicar um maior rigor de controle, ou seja, menor tolerância a altos níveis de variabilidade. Em índices de capacidade, a aplicação do estimador baseado no desvio absoluto mediano possibilitou a obtenção de índices mais robustos, ou em outras palavras, menos afetados por observações discrepantes. Isso impede que uma única observação discrepante comprometa a análise da capacidade, induzindo a uma análise mais justa e mais próxima da real capacidade do processo. Quatro índices de capacidade e cinco gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo foram aprimorados.

Palavras-Chave: Gráficos de Controle, Índices de Capacidade, Desvio Absoluto Mediano.

Abstract

SANTOS, Rodrigo Medeiros. Median Absolute Deviation as a Robust estimator on the improvement of tolls in Statistical Quality Control. 2008. Dissertation (Mathematics and Statistics Master degree) - PPGME, UFPA, Belém, Pará, Brasil.

The objective of this work is to improve Statistical Quality Control tools by using a robust estimator of the standard deviation σ based on the Median Absolute Deviation (*MAD*). The theory of estimation of σ by the median absolute deviation was developed and the estimator was presented. The simulation results showed that the estimator based on the median absolute deviation has a satisfactory performance in comparison with the estimators \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 and $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$, and a more robust performance when the samples are contaminated by outliers. During the applying, it was verified that the control charts built with limits obtained by the estimator based on the median absolute deviation are more robust, detecting outliers with more efficacy on the samples. It was also verified that, in the presence of outliers, limits produced tend to reduce the probability of type II error. By this reason, its utilization will be also more efficient in more rigorous processes, witch means less tolerance to high levels of variability. In Capability Indices, the applying of the estimator based on the median absolute deviation was useful to obtain more robust capability indices, or, in other words, less affected by outliers. This impedes that a single outlier put in risk the whole capability analysis, inducing to a fairest and closer to real capability of the process analysis. Four Capability Indices and five control charts were improved.

Keywords: Control Charts, Capability Indices, Median Absolute Deviation.

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Tabelas	xii
Lista de Figuras	xiii
1 Introdução	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Justificativa e Importância do Trabalho	5
1.3 A Hipótese Básica do Trabalho	5
1.4 Objetivos	6
1.4.1 Objetivo Geral	6
1.4.2 Objetivos Específicos	6
1.5 As Limitações do Trabalho	7
1.6 Estrutura do Trabalho	7
2 Princípios de Estimação em <i>CEQ</i>	8
2.1 Aspectos Gerais	8
2.1.1 Erro Quadrático Médio	8
2.1.2 Eficiência	10
2.1.3 Consistência	11
2.2 Estimando a Dispersão em <i>CEQ</i>	12
2.2.1 Média dos Desvios Padrão Amostrais Corrigidos	12
2.2.2 Média das Amplitudes Amostrais Corrigidas	13
2.2.3 Mediana das Amplitudes Amostrais Corrigidas	13
2.2.4 Média dos Quartis Amostrais Corrigidos	14
2.3 Estimando o Nível em <i>CEQ</i>	14
2.3.1 Média das Médias Amostrais	15
2.3.2 Mediana das medianas amostrais	15
2.3.3 Média das Medianas Amostrais	16
2.3.4 Mediana das Médias Amostrais	16
3 Gráficos de Controle e Índices de Capacidade	18
3.1 Gráficos de Controle	18

3.1.1	Aspectos Gerais	18
3.1.2	Limites de Controle	20
3.1.3	Construção de um Gráfico de Controle	23
3.1.4	Análise de Padrões em Gráficos de Controle	27
3.2	Gráficos de Controle para Variáveis	29
3.3	Gráficos de Controle para Monitorar a Dispersão do Processo	30
3.3.1	Gráfico do Desvio Padrão (Gráfico S)	30
3.3.2	Gráfico da Variância (Gráfico S^2)	31
3.3.3	Gráfico da Amplitude (Gráfico R)	32
3.4	Gráficos de Controle para Monitorar o Nível do Processo	33
3.4.1	Gráfico da Média (Gráfico \bar{X})	33
3.4.2	Gráfico da Mediana (Gráfico \tilde{X})	35
3.5	Análise da Capacidade de Processos	37
3.5.1	Aspectos Gerais	37
3.5.2	Índice C_p	38
3.5.3	Índices C_{pu} , C_{pl} e C_{pk}	40
4	Estimando o Desvio Padrão a partir do Desvio Absoluto Mediano	42
4.1	Princípios de Estimação Robusta	42
4.1.1	Ponto de Ruptura	43
4.1.2	Consistência de Fisher	45
4.2	O Desvio Absoluto Mediano como Estimador Robusto para o Desvio Padrão σ	46
4.3	Simulações	50
5	Aprimoramento de Ferramentas em CEQ	55
5.1	Introdução	55
5.2	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar a Dispersão do Processo	56
5.2.1	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico do Desvio Padrão	56
5.2.2	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Amplitude	57
5.2.3	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Variância	59
5.3	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar o Nível do Processo	60
5.3.1	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Média	60
5.3.2	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Mediana	62
5.4	Avaliação do Desempenho dos Gráficos de Controle para Variáveis quando σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$	63
5.5	$\omega\overline{DAM}$ Aplicado aos Índices de Capacidade	72
5.6	Avaliação do Desempenho dos Índices de Capacidade quando σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$	73
6	Considerações Finais e Recomendações	76
6.1	Considerações Finais	76
6.2	Recomendações para Trabalhos Futuros	77

A	Tabelas dos Fatores para Construção dos Gráficos de Controle	79
B	Tabela com Exemplo para Aplicação	82
	Bibliografia	84

Lista de Tabelas

4.1	Fator de Correção b_n para o Desvio Absoluto Mediano.	49
4.2	Valor Médio das Estimativas de $\bar{R}/d_2, \bar{S}/c_n$ e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ	51
4.3	Valores dos Erros Quadráticos Médios dos Estimadores $\bar{R}/d_2, \bar{S}/c_n$ e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ	51
4.4	Valores da Estimativas Obtidas a partir de $\bar{R}/d_2, \bar{S}/c_n$ e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ Antes e Após a Introdução do <i>Outlier</i> na Amostra.	52
4.5	Valores da Estimativas Obtidas Através de $\bar{R}/d_2, \bar{S}/c_n, \overline{IQ}/\xi_n$ e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ Antes e Após a Introdução dos <i>Outliers</i> na Amostra.	53
5.1	Índices C_p, C_{pu}, C_{pl} e C_{pk} para σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ em dois momentos: antes e após a introdução do outlier em uma das amostras.	74
A.1	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis.	80
A.2	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - σ estimado por $\omega \overline{DAM}$	81
B.1	Medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistão.	83

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de Gráfico de Controle do Tipo Shewhart.	19
3.2	Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Oito Pontos Consecutivos Acima da Linha Central.	27
3.3	Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Seqüência Crescente.	28
3.4	Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Sazonalidade.	29
5.1	Gráfico \bar{S} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$	57
5.2	Gráfico \bar{R} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{R}/d_2 e $\omega\overline{DAM}$	58
5.3	Gráfico S^2 para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ^2 estimado por $\overline{S^2}$ e $(\omega\overline{DAM})^2$	60
5.4	Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$	61
5.5	Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$	63
5.6	Gráfico \bar{S} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com três amostras contaminadas; (d) Processo com dez amostras contaminadas.	65
5.7	Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com três amostras contaminadas; (d) Processo com dez amostras contaminadas.	67
5.8	Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \overline{IQ}/ξ_n e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com uma amostra contaminada; (d) Processo com três amostras contaminadas.	70

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos Gerais

O conceito de qualidade pode ser estabelecido de diversas formas. De uma maneira geral, a maioria das pessoas tem uma definição, mesmo que intuitiva, para descrever a qualidade. Geralmente, esta definição está relacionada a uma ou mais características desejáveis de um produto ou serviço usufruído. Assim, a qualidade estaria intimamente ligada ao grau de satisfação do interessado com relação às características do processo de seu interesse. Para Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), a qualidade pode ser definida como o valor do bem ou do serviço, que quantifica o grau de satisfação do consumidor com respeito a vários quesitos, tais como preço, durabilidade, confiabilidade, estética, pontualidade, sabor, conforto, etc.

Segundo Chaves (1980), para que um produto tenha qualidade é necessário um rígido trabalho de avaliação e controle em todas as fases do produto, envolvendo matéria prima, ingredientes, embalagem, equipamentos e operadores. Juran (1997) aponta para o fato de que a gerência para a qualidade é feita utilizando-se três processos gerenciais: planejamento, controle e melhoramento da qualidade. Planejamento da qualidade é a atividade de desenvolvimento dos produtos e processos exigidos para a satisfação das necessidades dos clientes. O controle de qualidade consiste em avaliar o desempenho real de qualidade, comparando-o com as metas de qualidade. De acordo com a *Western Electric* (1956), Controle Estatístico da Qualidade (*CEQ*) seria uma forma (ou talvez um procedimento) de estudo das características de um processo (Qualidade), com o auxílio de números - dados (Estatístico) de maneira a fazê-lo comportar-se da forma desejada (Controle). Já o melhoramento da qualidade é o meio de elevar o desempenho da qualidade a níveis sem precedentes.

Técnicas estatísticas vêm sendo cada vez mais utilizadas para a melhoria da qualidade nos mais diversos ramos da sociedade (indústria, educação, saúde, economia, etc.). Há mais de 70 anos, o controle estatístico da qualidade vem sendo usado em muitos países para a melhoria da qualidade de produtos e serviços (Reis, Paladini e Epprecht, 2000). Na área das indústrias, principalmente, se faz necessária a aplicação de diversas ferramentas de controle estatístico que possibilitem um monitoramento satisfatório do processo de produção. Assim, basta que seja verificada uma determinada quantidade representativa do total da produção (amostra) e, a partir desta quantidade, se extrair conclusões (inferências) para o todo. Estas conclusões são baseadas em métodos estatísticos específicos que permitem monitorar e avaliar o processo de produção, ajudando a controlar as características da qualidade.

Do ponto de vista da Estatística, a qualidade existe na razão inversa da variabilidade. Sabe-se que todo processo, por mais bem controlado e por mais bem projetado que seja, está sujeito a um determinado grau de variabilidade. Esta variabilidade é um componente muito difícil de ser eliminado e está presente em praticamente todos os processos de produção. Trata-se da variabilidade natural do processo. Ela provém de causas aleatórias ou pequenas perturbações do processo contra as quais nada se pode fazer. Alguns exemplos de possíveis causas da variabilidade natural num processo de produção industrial são: o desgaste natural de peças do maquinário utilizado na produção, ausência de precisão na dosagem dos ingredientes que compõe determinada fórmula, etc.

Fora a variabilidade natural do processo, existe também a variabilidade decorrente de causas especiais, chamadas também de causas atribuíveis. Essas causas geralmente ocasionam perturbações bem maiores, podendo comprometer o processo de produção, já que a variabilidade da característica em estudo vai muito além da observada nas causas naturais, podendo exigir medidas corretivas para sanar o problema. Uma peça com defeito ou uma falta de ajuste em uma máquina são exemplos de possíveis causas atribuíveis que alteram a variabilidade do processo.

Nota-se então que o monitoramento da variabilidade de um processo é essencial para manter este processo sob controle estatístico. Assim, quando o processo apresenta apenas a variabilidade natural, diz-se que ele está sob controle estatístico. Da mesma forma,

quando o processo apresenta, além das causas aleatórias de variabilidade, causas especiais (atribuíveis) que lhe alterem significativamente a variabilidade, diz-se que ele está fora de controle estatístico. Montgomery (2001) define qualidade como inversamente proporcional à variabilidade. Desta forma, uma melhoria na qualidade significaria uma redução na variabilidade nos processos e produtos. Assim, o estudo de ferramentas que possibilitem a avaliação da variabilidade de um processo permitirá a investigação, análise e solução de problemas neste processo. Duas dessas importantes ferramentas são os gráficos de controle de Shewhart e os índices de capacidade.

Em 1924, Walter Andrew Shewhart apresentou a partir de um memorando técnico o primeiro gráfico de controle nos laboratórios da *Bell Telephone*. Mais tarde, esse gráfico ficaria conhecido como gráfico de controle de Shewhart (Banks, 1989). Trata-se de uma das mais importantes ferramentas do Controle Estatístico da Qualidade. Basicamente, o procedimento de construção de gráficos de controle envolve tomar amostras de tamanhos fixos (subgrupos racionais) e, através destas, obter estimativas para o nível e para a dispersão do processo. Vale ressaltar que o nível e a dispersão são as características mais importantes de um processo produtivo e deve-se ficar atento a qualquer alteração significativa nos valores de ambos. A função do gráfico de controle é justamente detectar toda e qualquer mudança que fuja do padrão da dispersão natural. A indicação básica de que um processo está fora de controle estatístico é a presença de pontos fora dos limites de controle, apontando que existem problemas ou irregularidades no nível ou na dispersão do processo produtivo. Os gráficos de controle mais comuns para o nível são o gráfico da média (\bar{X}) e o gráfico da mediana (\tilde{X}) e para a dispersão são os gráficos do desvio padrão (S), da variância (S^2) e da amplitude (R).

Outro exemplo de ferramenta muito útil em *CEQ* são os índices de capacidade, utilizados primordialmente para avaliar a competência de um processo em satisfazer especificações pré-estabelecidas. Trata-se de uma medida da uniformidade inerente ao processo (Prazeres, 1996).

Tanto os gráficos de controle como os índices de capacidade dependem de uma estimativa para o desvio padrão populacional σ . Note-se que o verdadeiro valor de σ é desconhecido, além disso, seria muito dispendioso, impraticável ou destrutivo tentar descobrir seu ver-

dadeiro valor, sob pena de arruinar toda a produção. Tomando como exemplo uma fábrica que decide testar todos os seus produtos para medir determinada grandeza de resistência, por exemplo. Sendo todos os produtos testados, nenhum sobraria para a comercialização, ocasionando assim prejuízo àquela fábrica. Para evitar processos tão dispendiosos e destrutivos como o descrito anteriormente é prudente que se retire uma pequena amostra da produção e, a partir dela, se obter estimativas para os parâmetros de interesse.

Portanto, os métodos de estimação estão sempre presentes em Controle Estatístico de Qualidade, sendo que uma das maiores preocupações é encontrar um bom estimador para σ . Nesse sentido, todas as propostas de novos estimadores para o desvio padrão populacional são de grande valia. Uma alternativa razoável é desvio absoluto mediano (*DAM*), cuja robustez poderá ser muito útil no desenvolvimento de novas ferramentas em Controle Estatístico de Qualidade (*CEQ*), especialmente em processos sujeitos a observações discrepantes (*outliers*). Espera-se, assim, que o *DAM* venha compor a gama de estimadores já utilizados em *CEQ*, constituindo-se em uma alternativa de estimador robusto para σ , com diversas aplicações no Controle Estatístico da Qualidade.

Neste contexto, esta dissertação se propõe a mostrar a utilização de um estimador robusto no aprimoramento de ferramentas no controle estatístico da qualidade. A Seção 1.2 apresenta a justificativa e a importância do trabalho. A Seção 1.3 traz a hipótese básica do trabalho. A Seção 1.4 detalha os objetivos do trabalho (geral e específico). A Seção 1.5 mostra as limitações do trabalho e a seção 1.6 apresenta a estrutura do trabalho.

1.2 Justificativa e Importância do Trabalho

A pesquisa é justificada em função dos constantes avanços nas mais diversas áreas da atividade humana onde o controle estatístico da qualidade se faz necessário. Estes avanços requerem novas necessidades, alternativas ou particularidades que exigirão um aprimoramento das ferramentas de controle estatístico da qualidade.

Uma necessidade premente de um processo que se deseja avaliar do ponto de vista da qualidade é a quantificação da dispersão associada a este processo. É essencial para a qualidade das unidades de um processo fabril que a dispersão natural do processo esteja sob controle estatístico. Desta forma, a busca por bons estimadores de σ torna-se fundamental para o aprimoramento da avaliação da qualidade num determinado processo em estudo.

O estimador baseado no Desvio Absoluto Mediano (*DAM*) é uma alternativa muito útil, especialmente do ponto de vista prático, pois sua medida, baseada em medianas, faz com que este estimador possua boas propriedades de robustez, o que lhe confere um melhor desempenho em processos sujeitos a contaminação por *outliers*.

Assim, espera-se que a aplicação do estimador robusto baseado no desvio absoluto mediano, na construção de gráficos de controle do tipo Shewhart e índices de capacidade, ajude a detectar e avaliar mudanças das características de qualidade com maior rigor, contribuindo para o aprimoramento dessas ferramentas em *CEQ*.

1.3 A Hipótese Básica do Trabalho

Parte-se da hipótese de que o estimador robusto do desvio padrão σ baseado no Desvio Absoluto Mediano (*DAM*), aplicado à construção de gráficos de controle e índices de capacidade, promova o aprimoramento dessas ferramentas em *CEQ*.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo utilizar o estimador do desvio padrão baseado no desvio absoluto mediano no aprimoramento de ferramentas no Controle Estatístico da Qualidade.

1.4.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta dissertação podem ser resumidos como segue:

- Apresentar uma visão geral a respeito dos gráficos de controle e índices de capacidade;
- Mostrar a teoria do desvio absoluto mediano como estimador do desvio padrão em amostras finitas e normalmente distribuídas;
- Aplicar o estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano na construção de gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo, contribuindo para o aprimoramento dessas ferramentas em *CEQ*;
- Aplicar o estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano na obtenção de índices de capacidade, contribuindo para o aprimoramento dessas ferramentas em *CEQ*;
- Avaliar, a partir de um estudo de simulações, o desempenho do estimador de baseado no desvio absoluto mediano, quando utilizado no aprimoramento de ferramentas no Controle Estatístico da Qualidade.

1.5 As Limitações do Trabalho

Como principais limitações deste trabalho têm-se:

- A escassez de material bibliográfico abordando a teoria do Desvio Absoluto Mediano como estimador de σ ;
- Alguns aspectos teóricos relativos ao Desvio Absoluto Mediano ainda são desconhecidos, como fórmulas analíticas para a esperança e a variância, por exemplo.

1.6 Estrutura do Trabalho

Esta dissertação encontra-se estruturada em 6 capítulos, conforme é mostrado a seguir:

- Capítulo 1: traz a introdução do trabalho, onde serão apresentadas a justificativa e a importância do trabalho, hipótese básica, objetivos, além das limitações do trabalho;
- Capítulo 2: mostra uma breve apresentação dos princípios de estimação, bem como os principais estimadores para o nível e para a dispersão;
- Capítulo 3: aborda a base estatística para a construção, análise e interpretação de gráficos de controle e os principais gráficos de controle para variáveis, utilizados no monitoramento do nível e da dispersão, além dos principais índices para a avaliação da capacidade do processo;
- Capítulo 4: traz os princípios de estimação robusta e a estrutura teórica da estimação do desvio padrão a partir do estimador baseado no desvio absoluto mediano (*DAM*);
- Capítulo 5: mostra a aplicação do estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano aos principais gráficos de controle para variáveis e índices de capacidade;
- Capítulo 6: apresenta as considerações finais e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Princípios de Estimação em *CEQ*

2.1 Aspectos Gerais

O objetivo da inferência estatística é produzir afirmações sobre dada característica da população de interesse a partir de informações colhidas numa amostra dessa população. O problema consiste, basicamente, em especificar um ou mais valores para um parâmetro desconhecido θ , baseado em um conjunto de valores observados de X , onde X é uma variável aleatória com função de densidade (ou de probabilidade, no caso discreto) dada por $f(x|\theta)$. Diz-se que população é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação e parâmetro é uma característica dos elementos da população. A amostra é definida como um subconjunto da população. Vale ressaltar que os parâmetros são funções de valores populacionais, enquanto que as estatísticas são funções de valores amostrais. Amostra aleatória é uma seqüência X_1, \dots, X_n de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com uma função de densidade (*f.d.p.*), no caso contínuo, ou função de probabilidade (*f.p.*), no caso discreto.

O conjunto Θ , onde θ toma valores é chamado espaço paramétrico. Por exemplo, seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se $\mu = 0$, então $\theta = \sigma^2$ será o parâmetro desconhecido e $\Theta = \{\sigma^2, \sigma^2 > 0\}$. Um estimador para θ é qualquer estatística (função dos dados amostrais) que assuma valores em Θ .

Algumas das principais propriedades dos estimadores são o erro quadrático médio, a eficiência e a consistência.

2.1.1 Erro Quadrático Médio

É uma questão de grande relevância em estatística encontrar um estimador razoável (com boas propriedades) para um parâmetro desconhecido θ . Existem vários procedimen-

tos na teoria de inferência estatística para se avaliar o desempenho de um estimador $\hat{\theta}$. Um deles é o erro quadrático médio (*EQM*), definido por

$$EQM[\hat{\theta}] = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]. \quad (2.1)$$

Pode-se mostrar que

$$EQM[\hat{\theta}] = Var[\hat{\theta}] - B^2(\hat{\theta}), \quad (2.2)$$

onde

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta, \quad (2.3)$$

é denominado o viés (ou vício) do estimador $\hat{\theta}$. Note-se que $\hat{\theta}$ é uma função da amostra, portanto, $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidade depende de θ . Quando $B(\hat{\theta}) = 0$, ou seja, $E[\hat{\theta}] = \theta$ para todo $\theta \in \Theta$, diz-se que o estimador é não-viciado ou não-viesado para θ . Assim, quando $\hat{\theta}$ for um estimador não-viesado para θ , ocorrerá

$$EQM[\hat{\theta}] = Var[\hat{\theta}]. \quad (2.4)$$

Neste caso, o erro quadrático médio do estimador se resume à sua variância. Portanto, entende-se que, para estimadores não-viesados, quanto menor for sua variância, menor será seu erro quadrático médio. E quanto menor for o erro quadrático médio de um estimador, melhor esse estimador será, ou seja, para dois estimadores $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, diz-se que $\hat{\theta}_1$ será melhor estimador que $\hat{\theta}_2$ se $EQM[\hat{\theta}_1] \leq EQM[\hat{\theta}_2]$, para todo θ . Entende-se por melhor aquele estimador que produz melhores estimativas para o parâmetro de interesse.

Se, para todo $\theta \in \Theta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}) = 0$, diz-se que $\hat{\theta}$ é um estimador assintoticamente não-viesado para θ . Tomando como exemplo uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n da variável aleatória X , com $E[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$, define-se os estimadores $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Tem-se que $E[\bar{X}] = \mu$ e $E[\hat{\sigma}^2] = [n - 1/n]\sigma^2$. Portanto, verifica-se

que a média amostral \bar{X} é um estimador não-viesado para a média populacional μ e que a variância $\hat{\sigma}^2$ é um estimador viesado, porém assintoticamente não-viesado para σ^2 . Desta forma, quanto maior for o tamanho n da amostra, menor será o viés de $\hat{\sigma}^2$. Por essa razão, define-se o estimador S^2 , dado por

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (2.5)$$

denominado variância amostral. Como $E[S^2] = \sigma^2$, S^2 é dito um estimador não-viesado para σ^2 .

2.1.2 Eficiência

Outra propriedade importante dos estimadores é a eficiência. Um estimador $\hat{\theta}$ é dito eficiente quando a sua variância coincide com o limite inferior da variância dos estimadores não-viesados de θ . Assim, a eficiência de um estimador $\hat{\theta}$, não-viesado para θ , é dada por

$$e(\hat{\theta}) = \frac{LI(\theta)}{Var(\hat{\theta})}, \quad (2.6)$$

onde $LI(\theta)$ é o limite inferior da variância dos estimadores não-viesados de θ . Nota-se que quando $LI(\theta) = Var(\hat{\theta})$, tem-se $e(\hat{\theta}) = 1$ (estimador eficiente).

Tomando como estimadores para a média populacional μ , a média amostral \bar{X} e a mediana amostral \tilde{X} , numa população normal X , com parâmetros μ e σ^2 , tem-se que

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n). \quad (2.7)$$

A distribuição da mediana pode ser aproximada para uma distribuição normal:

$$\tilde{X} \sim N(Md(X), \pi\sigma^2/2n), \quad (2.8)$$

onde Md é a mediana e π é uma constante ($\pi = 3,14\dots$). Nota-se, portanto, que ambos os estimadores são não-viesados, pois $E[\bar{X}] = \mu$ e $E[\tilde{X}] = Md(X)$. Entretanto, é possível notar que \bar{X} é mais eficiente, pois $Var(\tilde{X})/Var(\bar{X}) = \pi/2 > 1$. A média amostral \bar{X} possui muitas propriedades desejáveis, dentre elas a eficiência e a ausência de viés.

2.1.3 Consistência

Em uma amostra aleatória X_1, \dots, X_n da distribuição da variável aleatória X , um estimador $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ é consistente ou coerente para o parâmetro θ se converge em probabilidade para θ . Isto é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon) = 0 \quad , \quad \forall \epsilon > 0, \quad (2.9)$$

ou, equivalentemente, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \leq \epsilon) = 1 \quad , \quad \forall \epsilon > 0. \quad (2.10)$$

Alternativamente, $\hat{\theta}$ é consistente para θ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Var[\hat{\theta}] = 0$.

Ao levar em consideração a proposta de $\hat{\theta}$ como um estimador para θ , não deve-se esperar realmente que $\hat{\theta}$ venha a ser igual a θ , pois $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória e, como tal, pode vir a tomar diferentes valores (estimativas pontuais). Em primeiro lugar deve ficar claro quais as características desejáveis de um bom estimador. E, em seguida, deve-se estabelecer critérios para decidir se um estimador é melhor que outro. Estes aspectos podem variar bastante, principalmente devido à diversidade de casos onde o termo “características desejáveis” toma diferentes conotações. Por exemplo, sabe-se que a média amostral possui muitas dessas “características desejáveis” e é um estimador com excelentes propriedades para estimar o nível, no entanto, não é aconselhável que se faça uso dela em amostras contaminadas por outliers, uma vez que a média amostral é bastante sensível a observações discrepantes. Assim, cada caso exige uma análise isolada. Portanto, de uma maneira geral, espera-se que o estimador escolhido dê estimativas confiáveis para o parâmetro de interesse.

Uma estimativa pontual é obtida a partir de um único valor (ou ponto) utilizado para aproximar o verdadeiro valor de um parâmetro populacional. Como o estimador é uma função dos dados da amostra, a estimativa pontual será um valor específico de uma escala numérica (espaço paramétrico), definido por essa função. Quando, ao invés de um

valor pontual, é utilizado um intervalo de valores que tem uma certa probabilidade de conter o verdadeiro valor do parâmetro, tem-se uma estimativa intervalar, ou como é mais comumente conhecido, intervalo de confiança.

2.2 Estimando a Dispersão em *CEQ*

Bussab e Morettin (2002) ressaltam a importância da utilização de medidas que sumariem a variabilidade de um conjunto de observações e que permitam, por exemplo, comparar conjuntos diferentes de valores, segundo algum critério estabelecido. Para Lucas (1976), um problema prático e muito importante é o de se obter uma boa estimativa do desvio padrão.

O pressuposto básico da teoria de estimação reside no fato de que, na maioria das vezes, é impossível conhecer o verdadeiro valor de determinado parâmetro. Assim, é conveniente que se utilizem medidas baseadas em estatísticas amostrais (estimadores) para tentar obter valores aproximados do parâmetro de interesse (estimativas).

Os principais estimadores para a dispersão são a variância amostral S , um estimador não-viesado de σ^2 , e o desvio padrão amostral S , um estimador viesado, porém assintoticamente não-viesado para o parâmetro σ . Outro estimador bastante utilizado baseia-se na amplitude amostral R . Ao contrário de S e S^2 , R possui a limitação de não levar em consideração todos os dados da amostra, tomando apenas o seu valor máximo e o seu valor mínimo, nada dizendo a respeito dos dados entre estes dois valores.

A seguir, são apresentadas quatro alternativas para estimar σ . Os estimadores mostrados são todos não-viesados, mas diferem entre si pelas suas variâncias.

2.2.1 Média dos Desvios Padrão Amostrais Corrigidos

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). S_i é o desvio padrão da i -ésima amostra e \bar{S} é a média dos m desvios padrão amostrais. Logo, um estimador não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{S}}{c_n}, \quad (2.11)$$

onde a variância de $\hat{\sigma}_1$ é dada por

$$Var[\hat{\sigma}_1] = Var\left[\frac{\bar{S}}{c_n}\right] = \frac{(1 - c_n^2)}{c_n^2} \sigma^2, \quad (2.12)$$

onde c_n é um fator de correção que tira o viés associado ao estimador. Valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.2.2 Média das Amplitudes Amostrais Corrigidas

Supondo m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). R_i é a amplitude da i -ésima amostra e \bar{R} é a média das m amplitudes amostrais. Portanto, um estimador não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (2.13)$$

onde a variância de $\hat{\sigma}_2$ é dada por

$$Var[\hat{\sigma}_2] = Var\left[\frac{\bar{R}}{d_2}\right] = \frac{d_3^2}{d_2^2} \sigma^2, \quad (2.14)$$

onde d_2 e d_3 são fatores de correção que tiram o viés associado ao estimador. Valores de d_2 e d_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.2.3 Mediana das Amplitudes Amostrais Corrigidas

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Sejam R_1, \dots, R_m as amplitudes de cada amostra, então, a amplitude mediana é dada por

$$\tilde{R} = R_{(i)}, \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (2.15)$$

para m ímpar, onde $R_{(i)}$ representa a i -ésima amplitude. Para um número de amplitudes par, toma-se como mediana a média aritmética das duas amplitudes centrais, ordenadas segundo algum critério de grandeza. Portanto, um estimador não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_3 = \frac{\tilde{R}}{\tilde{d}_2}, \quad (2.16)$$

onde a variância de $\hat{\sigma}_3$ é dada por

$$Var[\hat{\sigma}_3] = Var \left[\frac{\tilde{R}}{\tilde{d}_2} \right] = \frac{\sigma^2}{\tilde{d}_3^2}, \quad (2.17)$$

onde \tilde{d}_2 e \tilde{d}_3 são fatores de correção que tiram o viés associado ao estimador. Valores de \tilde{d}_2 e \tilde{d}_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.2.4 Média dos Quartis Amostrais Corrigidos

Considerando $IQ = q_{3/4} - q_{1/4}$, onde $q_{3/4}$ e $q_{1/4}$ são o 3º e o 1º quartil, respectivamente, e supondo m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). IQ_i é o intervalo interquartilício da i -ésima amostra e \overline{IQ} é a média dos m intervalos interquartilícios amostrais. Um possível estimador não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_4 = \frac{\overline{IQ}}{\xi_n}, \quad (2.18)$$

onde a variância de $\hat{\sigma}_4$ é dada por

$$Var[\hat{\sigma}_4] = Var \left[\frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \right] = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\sigma^2}{n\xi_n^2}, \quad (2.19)$$

onde ξ_n é um fator de correção que tira o viés associado ao estimador. Valores de ξ_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.3 Estimando o Nível em *CEQ*

Costa Neto (1977) apresenta algumas propriedades que um estimador deve possuir: Por exemplo, ausência de viés, consistência e eficiência. Dentre os estimadores para o nível, a média amostral \bar{X} é o que melhor detém essas propriedades. Por essa razão, a média amostral \bar{X} é utilizada como o melhor estimador da média populacional μ .

A seguir, serão mostrados quatro estimadores para μ , todos não-viesados e, no mínimo, distribuídos assintoticamente de modo normal, além de suas respectivas variâncias.

2.3.1 Média das Médias Amostrais

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Sejam $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ as médias calculadas de cada amostra, então, a média das médias amostrais é dada por

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i. \quad (2.20)$$

A variância de $\bar{\bar{X}}$ é dada por

$$Var[\bar{\bar{X}}] = Var\left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{X}_i\right] = \frac{\sigma^2}{m \cdot n}, \quad (2.21)$$

onde σ^2 é a variância do processo.

2.3.2 Mediana das medianas amostrais

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Sejam $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ as medianas calculadas de cada amostra, então, a mediana das medianas amostrais é dada por

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{X}_i; \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (2.22)$$

onde \tilde{X}_i representa a mediana de ordem i para número de amostras ímpar. Quando o número de amostras é par, utiliza-se como mediana das medianas amostrais a média aritmética das duas medianas centrais, estando estas ordenadas segundo suas grandezas.

A variância de $\tilde{\tilde{X}}$ é dada por

$$Var[\tilde{\tilde{X}}] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^4, \quad (2.23)$$

onde σ^2 é a variância do processo. Valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.3.3 Média das Medianas Amostrais

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Sejam $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ as medianas calculadas de cada amostra, então, a média das medianas amostrais é dada por

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{X}_i \quad (2.24)$$

A variância de $\bar{\tilde{X}}$ é dada por

$$Var[\bar{\tilde{X}}] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^2, \quad (2.25)$$

onde σ^2 é a variância do processo. Os valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

2.3.4 Mediana das Médias Amostrais

Considerando m amostras, cada uma de tamanho n , da característica da qualidade X ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$). Sejam $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ as médias calculadas de cada amostra, então, a mediana das médias amostrais é dada por

$$\tilde{\bar{X}} = \bar{X}_i; \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (2.26)$$

para m ímpar, onde \bar{X}_i representa a média de ordem i . Quando o número de amostras é par utiliza-se como mediana das médias amostrais a média aritmética das duas médias centrais, estando estas ordenadas segundo algum critério de grandeza.

A variância de $\tilde{\bar{X}}$ é dada por

$$Var[\tilde{\bar{X}}] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^2, \quad (2.27)$$

onde σ^2 é a variância do processo. Valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

O Capítulo 3 aborda a base estatística para a construção, análise e interpretação de gráficos de controle e os principais gráficos de controle para variáveis, além dos principais índices para a avaliação da capacidade do processo.

Capítulo 3

Gráficos de Controle e Índices de Capacidade

3.1 Gráficos de Controle

3.1.1 Aspectos Gerais

Em 1924, Walter Andrew Shewhart, então trabalhando no Departamento de Engenharia e Inspeção dos laboratórios da *Bell Telephone*, apresentou o primeiro gráfico de controle. Shewhart, que na época investigava o assunto da Qualidade, percebeu a não existência de duas peças absolutamente iguais dentro de um processo produtivo. Segundo ele, todo e qualquer processo estaria sujeito a uma determinada variabilidade da qual seria impossível se livrar. A partir desta conclusão, Shewhart, aceitando a hipótese de que existe uma variação natural, passou a monitorar na mesma todos as observações que seriam consideradas como problemas. Assim, o processo estaria sob controle estatístico se todas as observações estivessem dentro de um intervalo de aceitação definido para o qual este processo seria considerado adequado. Analogamente, qualquer observação dissidente da variação natural seria identificada como uma anomalia no processo e imediatamente associada a uma causa atribuível, acusando um possível problema no processo produtivo. A partir da descoberta de Shewhart, os gráficos de controle passaram a ser amplamente utilizados, não se limitando apenas aos processos fabris, mas a implicações mais amplas em outros processos de gerenciamento.

Um gráfico de controle é constituído basicamente de uma linha horizontal central (LC), que representa o valor médio da característica da qualidade de interesse e de duas outras linhas horizontais, conhecidas como limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC). Esses limites de controle são equidistantes da linha central (pelo menos teoricamente) e essa distância é geralmente dada por um múltiplo do desvio padrão da

estatística estudada no gráfico. Assim, são “plotadas” as amostras da característica da qualidade, unidas por segmentos de reta para facilitar a visualização da evolução dos pontos ao longo do tempo. De acordo com o guia do usuário do SAS (1999), o gráfico de controle de Shewhart é uma ferramenta gráfica e analítica para decidir se o processo está em estado de controle estatístico ou não. A Figura (3.1) mostra um exemplo de gráfico de controle do tipo Shewhart.

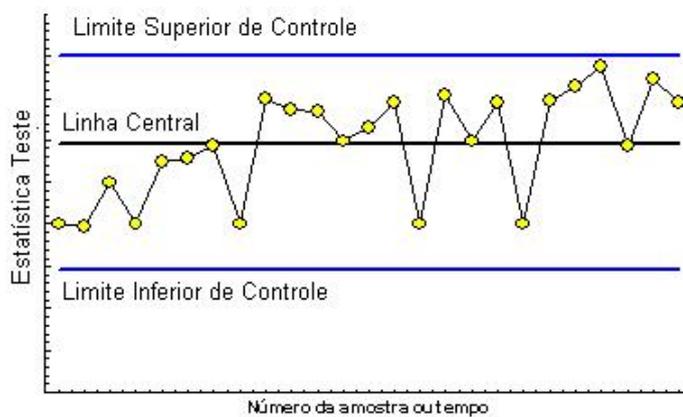


Figura 3.1 *Exemplo de Gráfico de Controle do Tipo Shewhart.*

Um processo estatisticamente sob controle será caracterizado por oscilar aleatoriamente em torno da média (linha central) e dentro dos limites de controle. Uma vez que são detectados um ou mais pontos fora dos limites de controle (acima de LSC ou abaixo de LIC), o processo pode ser caracterizado como estando fora de controle estatístico. Neste caso, o processo produtivo pode estar sujeito a alguma irregularidade e ações corretivas deverão ser tomadas. Note-se que esta análise não é definitiva, pois poderão ocorrer casos onde todos os pontos se localizam dentro dos limites de controle e, ainda assim, o processo estará fora de controle.

Para Neave e Wheeler (1996), a construção de um gráfico de controle não envolve tentar encontrar um modelo exato para descrever o processo, mas sim tentar determinar se o processo se encaixa (pelo menos aproximadamente) num modelo de comportamento aleatório desejado. Assim, o gráfico de controle nada mais é do que um estudo da variabilidade do

processo, uma ferramenta que monitora padrões que fogem do comportamento aleatório previsto na variabilidade natural. Esses padrões, geralmente oriundos de fatores externos, comprometem a produtividade, desestabilizando o processo e aumentando os custos da produção.

Deming (1982) descreve um processo estável como aquele em que todas as causas especiais da variabilidade foram eliminadas. Esse estado de controle é o maior objetivo de toda produção, pois ele acarreta eficiência, economia de tempo e, principalmente, redução de custos na produção ou no serviço prestado.

3.1.2 Limites de Controle

Montgomery (2001) mostra uma interessante relação entre gráficos de controle e teste de hipóteses. Supondo que se tenha em mente avaliar determinada característica de interesse w num dado processo produtivo. Se o valor de w se localiza entre os limites de controle, conclui-se que w está sob controle, isto é, w é igual a algum valor w_0 . Por outro lado, se w se localiza fora da região entre os limites de controle, conclui-se que w está fora de controle, ou seja, w é igual a algum valor $w_1 \neq w_0$. Assim, de certa forma, o gráfico de controle é um teste de hipóteses, onde as hipóteses correspondem ao processo estar ou não sob controle estatístico. Desta forma, um ponto localizado entre os limites de controle é equivalente à não rejeição da hipótese de controle estatístico e, analogamente, um ponto localizado fora da região entre os limites de controle é equivalente à rejeição da hipótese de controle estatístico.

Este esquema de teste de hipóteses se torna muito útil na hora de avaliar o desempenho de um gráfico de controle. Esta avaliação leva em consideração os critérios de análise do erro tipo I e do erro tipo II. Segundo Bolfarine e Sandoval (2001), o erro tipo I ocorre quando rejeita-se a hipótese H_0 , sendo esta verdadeira, enquanto que o erro tipo II ocorre quando aceita-se a hipótese H_0 , esta sendo falsa. Desta forma, quanto mais afastados da média do parâmetro de interesse forem os limites de controle, maior a probabilidade de cometer o erro tipo II (concluir que o processo está sob controle quando, de fato, não está), portanto, tem-se uma situação onde não se interfere em um processo que está perturbado (alarme negligenciado). Se o inverso ocorrer, ou seja, quanto mais próximos da média do parâmetro de interesse estiverem os limites de controle, maior será a probabilidade de

cometer o erro tipo I (concluir que o processo não está sob controle quando, de fato, está), portanto, aqui tem-se uma situação onde interfere-se em um processo sem perturbações (alarme falso).

Adotando como exemplo uma linha de produção, onde pretende-se realizar um teste de hipóteses sob a média de uma determinada característica de interesse x . Sejam μ_x e σ_x a média e o desvio padrão populacionais de x . As hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_x &= \mu_0 \\ H_1 : \mu_x &\neq \mu_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando a média amostral \bar{x} para estimar a média populacional μ_x e admitindo que, pelo teorema central do limite, \bar{x} seja normalmente distribuída (James, 2006), espera-se que $100(1 - \alpha)\%$ dos valores médios, \bar{x} , fiquem entre

$$\bar{x} + (Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}) \quad \text{e} \quad \bar{x} - (Z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{x}}). \tag{3.2}$$

Esta é a região de aceitação para o teste de hipóteses proposto em (3.1). $Z_{\alpha/2}$ é uma constante associada à probabilidade α de erro tipo I e pode ser escolhida arbitrariamente. Se a constante $Z_{\alpha/2}$ for substituída por 3, tem-se

$$\bar{x} + (3 \sigma_{\bar{x}}) \quad \text{e} \quad \bar{x} - (3 \sigma_{\bar{x}}). \tag{3.3}$$

Fazendo agora uma analogia com os gráficos de controle, tem-se que os limites inferior e superior da região crítica descrita em (3.3) seriam equivalentes aos limites inferior e superior de controle, respectivamente. Esse esquema é tipicamente chamado de *3-sigma* e é o mais comumente utilizado em gráficos de controle. Para dar um tratamento mais geral ao modelo, pode-se escrever

$$\begin{aligned}LSC &= \mu_x + k\sigma_x \\LC &= \mu_x \\LIC &= \mu_x - k\sigma_x,\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde k é uma constante expressa em unidades de desvio padrão. Essa constante determinará a distância dos limites de controle à linha central. É importante que essa distância não seja muito pequena, sob pena de induzir uma intervenção mesmo quando o processo esteja sujeito apenas à variabilidade natural. Conforme já mencionado, é de praxe que se utilize $k = 3$, mas isso não é regra. Na verdade, o valor arbitrário da constante k vai depender também do rigor que se pretende aplicar ao processo.

Em alguns gráficos de controle, além dos limites de controle usuais, costuma se estipular outros limites que servem de alerta para indicar possíveis problemas no processo. Esses limites, que operam conjuntamente com os limites de controle usuais, são chamados de limites de advertência. Nesses casos, pode-se ter $k = 1,5$ ou $k = 2$, ou ainda, qualquer outro valor arbitrário, dependendo da especificidade do processo. Se um ou mais pontos situam-se entre os limites de advertência e os limites de controle, isto pode indicar uma suspeita de que o processo pode não estar operando adequadamente. O uso dos limites de advertência aumenta a sensibilidade do gráfico de controle, porém, pode contribuir para um aumento do risco de ocorrência de alarmes falsos. A especificação dos limites de controle é uma das decisões mais importantes a serem tomadas no planejamento de um gráfico de controle, pois eles irão determinar o quanto de variabilidade poderá ser considerado como aceitável dentro de um processo.

Vale notar que também pode-se obter o valor de k a partir da probabilidade α de erro tipo I associada ao processo ao qual se deseja controlar. Assim, se a variável da característica da qualidade for normalmente distribuída e o processo estiver sendo controlado por limites de controle *3-sigma*, verifica-se a partir da tabela da normal padronizada que a probabilidade α de ocorrer um erro do tipo I é de 0,0027. Isto implica, obviamente, que a probabilidade de não ocorrer um erro tipo I é de 0,9973, portanto, conclui-se que, num gráfico com limites de controle *3-sigma*, a estatística amostral de interesse de um processo

sem perturbações situa-se dentro das linhas de controle com probabilidade aproximadamente igual a 99%. É claro que esta análise dá margem a um outro parâmetro na escolha dos limites de controle: a escolha da probabilidade α do erro tipo I para o posterior cálculo dos limites de controle. Desta forma, para uma estatística com distribuição normal, se fosse estipulada uma probabilidade de erro tipo I em 0,05, por exemplo, o múltiplo de sigma para a construção dos limites de controle seria dado por $k = Z_{\alpha/2}$, como em (3.2), onde $Z_{\alpha/2}$ é a constante associada à probabilidade numa distribuição normal padrão. Assim, os limites de controle seriam obtidos e calculados em 1,96 desvios (valor obtido na tabela da normal padrão). Esses limites de controle são chamados limites de probabilidade de 0,05.

3.1.3 Construção de um Gráfico de Controle

A construção de um gráfico de controle envolve algumas condições específicas principalmente a respeito da amostra a ser analisada. Antes de mais nada, deve ficar claro que as características mais importantes de um processo produtivo, no controle para variáveis, são o nível e a dispersão do processo. Para um gerenciamento eficiente dessas características é fundamental que a amostra satisfaça certas condições pré-estabelecidas. Primeiramente, é importante para o controle da variabilidade de um processo que a característica de qualidade seja normalmente distribuída. Entretanto, essa condição não é restritiva, ou seja, é possível fazer uso dos gráficos de controle de Shewhart, mesmo quando a característica de interesse não tiver distribuição normal. Na prática, observa-se que, em geral, as características da qualidade possuem distribuição normal ou, pelo menos, aproximadamente normal. Em todo caso, especialmente diante de um processo novo e desconhecido, convém fazer um teste de normalidade para a característica de interesse. Em algumas situações, transformações nas variáveis podem ser úteis para tentar atingir a normalidade dos dados.

Se por um lado, a condição de normalidade não é tão restritiva, a de independência o é de forma bem mais significativa. É essencialmente necessário para o monitoramento de um processo que utiliza gráficos convencionais de Shewhart, que os valores observados da variável em estudo sejam não-correlacionados. Do contrário, a utilização dos gráficos convencionais de controle poderia resultar em conclusões errôneas a respeito da estabilidade do processo, confundindo, por exemplo, causas comuns (naturais) com causas especiais (atribuíveis), ocasionando ainda a detecção de possíveis falsos alarmes. Para Moreira e

Echeveste (2004), nestes casos, não há lógica em se utilizar os gráficos de controle de Shewhart, já que com a falta de suposição de independência não há garantia de que o processo se encontre ou não, de fato, sob controle estatístico. Kume (1993) alerta para o fato de que as ferramentas estatísticas são apenas ferramentas, e como tais, elas podem ou não funcionar caso sejam aplicadas inadequadamente. Portanto, é prudente que, primeiramente, seja realizado um teste para detectar a autocorrelação. Caso seja detectada, não se aconselha a utilização dos gráficos convencionais de Shewhart. Nessas situações, existem métodos específicos de construção de gráficos de controle aplicados a dados autocorrelacionados [ver Montgomery (2001), por exemplo].

O planejamento de um gráfico de controle envolve basicamente três fatores: a seleção do tamanho da amostra, da seqüência de amostragem e a escolha dos limites de controle.

A seleção do tamanho da amostra e da freqüência de amostragem são de fundamental importância para a eficácia do gerenciamento do processo. Não existem receitas ou fórmulas prontas para a tomada dessa decisão, pois muito depende das particularidades de cada processo. Entretanto, alguns fatores teóricos devem ser levados em consideração na hora da escolha do tamanho da amostra e da freqüência de amostragem. O processo de amostragem deve ser utilizado sempre que for impossível, ou mesmo economicamente inviável testar todas as unidades de produção, seja pelo fato de que isso seria extremamente dispendioso, seja pelo fato de que isso resultaria num processo destrutivo da produção. Portanto, para a efetivação do controle, se faz necessário tomar amostras, de forma que boa parte da produção seja preservada, mantendo ainda o padrão de qualidade desejado. De uma maneira geral, uma amostra suficientemente grande torna mais fácil detectar pequenas mudanças no processo. Isso ocorre porque a probabilidade de detectar determinada mudança aumenta na medida em que se aumenta o tamanho de amostra n . Se para detectar mudanças sutis recomenda-se um tamanho amostral grande, de forma análoga, para detectar mudanças bruscas e notáveis recomenda-se a utilização de amostras menores do que as que se usariam se a mudança de interesse fosse mais sutil. Deve-se ter em mente sempre a magnitude da mudança que se deseja detectar. Fatores como a viabilização prática e econômica devem ser sempre levados em consideração na tomada dessa decisão.

Outro fator importante é a freqüência de amostragem. Trata-se, basicamente, do inter-

valo de tempo escolhido para selecionar amostras. A escolha da frequência de amostragem, assim como a do tamanho amostral, vai depender de diversas particularidades do processo de produção. O ideal é que se tome grandes amostras muito frequentemente. Essa é a situação mais desejável quando o intuito é detectar mudanças num processo. No entanto, na prática, essa situação torna-se, muitas vezes, inviável, já que isso acarreta grandes custos na produção, reduzindo conseqüentemente os lucros, ou mesmo, gerando prejuízos. Montgomery (2001) recomenda que, num processo potencialmente sujeito à influência de causas atribuíveis, utilizem-se amostras pequenas mais frequentes. Essa é a prática mais corrente no meio industrial (produção em larga escala). Contudo, em processos mais estáveis e “seguros”, convém tomar amostras maiores em intervalos mais longos. Ultimamente, a tecnologia vem solucionando muitos desses problemas, permitindo, em muitos casos, que todas as unidades produzidas sejam testadas. Isto pode se dar através de medidores eletrônicos, sensores automáticos, microcomputadores e outras ferramentas tecnológicas que viabilizam um controle mais eficaz e consistente das unidades produzidas.

A construção de um gráfico de controle é fundamentada basicamente na idéia de se tomar várias amostras, conhecidas também como subgrupos racionais, sendo “plotados” no gráfico apenas os valores representativos de cada uma dessas amostras. A utilização desse método tem em vista dois objetivos, o de reduzir a variabilidade dentro de cada amostra e ressaltar a variabilidade entre as amostras. Aqui, encontra-se uma das idéias fundamentais do gráfico de Shewhart. A utilização de amostras ou subgrupos faz com que as chances de surgirem diferenças dentro de um subgrupo devido a causas atribuíveis seja minimizada, enquanto que as chances de surgirem diferenças entre subgrupos devido a causas atribuíveis seja maximizada.

Montgomery (2001) aponta duas abordagens gerais para a obtenção dos subgrupos. Na primeira, cada amostra consiste basicamente em unidades que foram produzidas ao mesmo tempo, ou pelo menos tão próximo quanto for possível. A idéia básica desta abordagem é tomar unidades consecutivas; Na segunda, tomam-se unidades representativas de todo o processo durante o intervalo de amostragem, ou seja, cada subgrupo seria como uma amostra aleatória de todo o processo desde que a última amostra foi coletada. Na primeira abordagem, a intenção do gráfico de controle é detectar mudanças no processo, mostrando

como cada amostra se comportou ao longo do tempo. Na segunda abordagem, o intuito é tomar decisões sobre a aceitação de todas as unidades produzidas desde a última amostra. Essa abordagem mostra-se mais útil quando há um estado de descontrole temporário, ou seja, quando, após um descontrole detectado em uma amostra, retorna-se ao estado de controle na amostra seguinte. Entende-se que a primeira abordagem pode se mostrar ineficaz contra esse tipo de mudança.

Uma vez selecionado o tamanho da amostra e a frequência de amostragem, parte-se para a construção dos limites de controle. Como mostrado em (3.4), os limites de controle para a média de uma característica de interesse x qualquer são dados por

$$LSC = \mu_x + k\sigma_x$$

$$LC = \mu_x$$

$$LIC = \mu_x - k\sigma_x.$$

O LIC (limite inferior de controle), a LC (linha central) e o LSC (limite superior de controle) constituem-se de linhas horizontais que serão utilizadas como parâmetro para avaliar todo o processo. Os parâmetros populacionais μ_x e σ_x são, na grande maioria das vezes, desconhecidos. Portanto, seus valores devem ser estimados. Como a amostra total é dividida em amostras menores (subgrupos racionais), cada ponto “plotado” no gráfico é um valor representativo da estatística de interesse em cada amostra. Por exemplo, se a intenção for construir um gráfico de controle para monitorar o nível do processo, os pontos “plotados” no gráfico poderão ser representados pela média \bar{x} de cada amostra. Desta forma, o teste de hipóteses proposto em (3.1), pode ser apresentado da seguinte maneira:

$$H_0: O \text{ processo está sob controle estatístico}$$

$$H_1: O \text{ processo não está sob controle estatístico.}$$

Assim, a partir da análise do comportamento dos pontos dentro ou fora dos limites de controle, decide-se se o processo está ou não sob controle estatístico. Essa análise muitas vezes não é trivial e exige conhecimento e prática por parte do analista. É de vital

importância que essa análise seja feita de forma correta, do contrário, todo o trabalho de construção do gráfico terá sido em vão, pois de nada adiantaria um gráfico corretamente construído diante de uma interpretação equivocada.

3.1.4 Análise de Padrões em Gráficos de Controle

O fato de um gráfico de controle conter todos os pontos dentro de seus limites de controle não é, necessariamente, um indicativo de que este processo esteja sob controle. É verdade que, de uma maneira geral, estabelece-se como regra que um processo está sob controle estatístico quando todos os seus pontos estão situados entre os limites inferior e superior de controle. No entanto, esta não é a única e definitiva regra. Vale ressaltar que o comportamento desejado num processo é aquele onde todos os pontos encontram-se aleatoriamente distribuídos em torno da média (linha central), ou seja, o comportamento desejado num processo presume apenas a ação da variabilidade natural. Portanto, de nada adiantaria se todos os pontos estivessem situados entre os limites de controle, mas apresentassem um comportamento sistemático (ou não-aleatório) oriundo de causas atribuíveis. Essa falta de aleatoriedade é justamente o que caracteriza um processo fora de controle estatístico. Por exemplo, é de se estranhar que ocorram 8 pontos consecutivamente localizados abaixo ou acima da linha central (ver Figura 3.2), já que a probabilidade de que tal situação ocorra é muito pequena. Isso pode caracterizar um problema no processo. Num processo regularmente controlado espera-se que haja uma distribuição equilibrada dos pontos, tanto acima como abaixo da linha central.

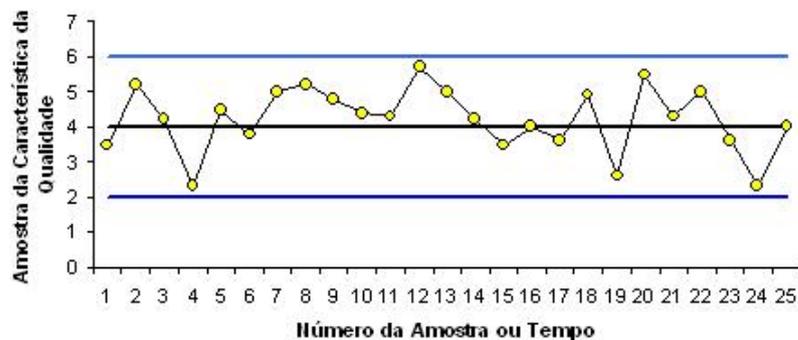


Figura 3.2 *Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Oito Pontos Consecutivos Acima da Linha Central.*

Um fator bastante indesejado no controle de processos é a formação de seqüências. Quando um determinado número de pontos em fila começa a aumentar ou diminuir em magnitude, isso caracteriza a formação de uma seqüência. É fácil perceber, por exemplo, que todos os pontos aumentando em seqüência são um indicativo de falta de aleatoriedade, portanto, é muito provável que haja algum problema envolvendo este processo. A Figura 3.3 ilustra este tipo de conjuntura. Quando as observações estão aumentando, diz-se que há uma seqüência crescente. Analogamente, quando as observações estão diminuindo, há uma seqüência decrescente.

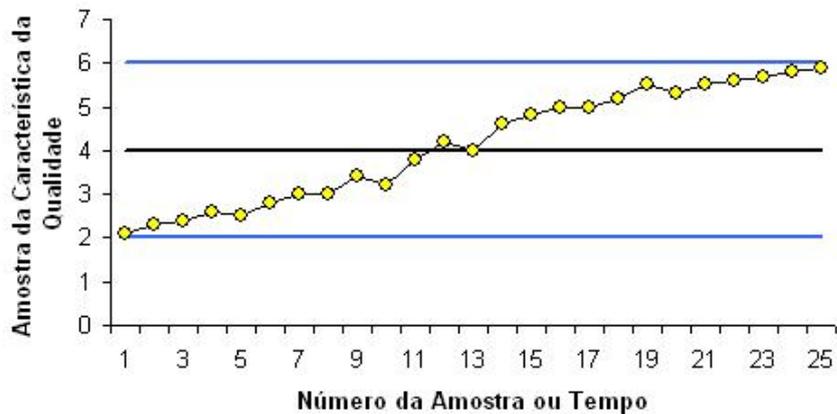


Figura 3.3 *Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Seqüência Crescente.*

Muitas das vezes, a seqüência pode não envolver todas as observações de um processo, mas sim, atuar em intervalos, ou seja, em grupos separados de pontos. No final, ao observar-se o gráfico, tem-se a impressão de que haja uma tendência, que pode ser crescente ou decrescente. Isto também configura um estado de descontrole estatístico do processo.

Outro fator bastante indesejado é a sazonalidade dos dados. Quando as amostras são tomadas seqüencialmente ao longo do tempo, podem ocorrer padrões de repetição em intervalos de tempo regulares, como mostra a Figura 3.4. Geralmente, esse comportamento se mostra no gráfico com um aspecto ondular, descaracterizando o comportamento aleatório desejado e, portanto, configurando que pode haver um problema no processo.

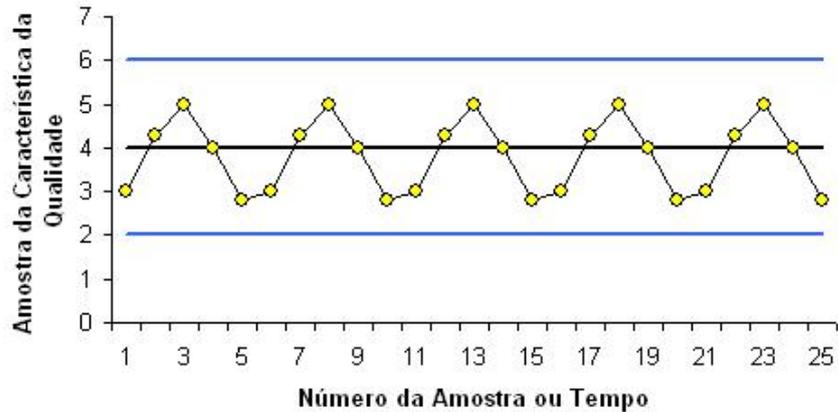


Figura 3.4 *Exemplo de Processo Fora de Controle Estatístico - Sazonalidade.*

Outro fator que pode indicar descontrole no processo é a ocorrência de diversos pontos muito próximos dos limites de controle. O *Western Electric Handbook* (1956) aponta que quando quatro, em cada cinco pontos consecutivos, se localizarem a uma distância de um sigma ou mais em relação à linha central, isso pode indicar que há um problema no processo. Outro indicativo de problemas é quando dois, em cada três pontos consecutivos, se localizarem além dos limites de alerta *2-sigma*.

De uma maneira geral, pode-se estabelecer como regra de decisão para a caracterização de um processo como estatisticamente descontrolado, a ausência de aleatoriedade das observações. Toda e qualquer influência de causas atribuíveis começará por prejudicar a aleatoriedade dos pontos, ocasionando comportamentos sistemáticos ou outras configurações típicas da não-aleatoriedade. Um processo sob controle estatístico será sempre caracterizado por uma distribuição equilibrada (aleatória) dos pontos em torno da média (Linha Central).

3.2 Gráficos de Controle para Variáveis

O nível e a dispersão natural são as características mais importantes de um processo produtivo no controle para variáveis. Essas duas características são comumente controladas simultaneamente, pois qualquer mudança significativa no nível ou na dispersão do processo produtivo pode originar alterações significativas na fração não-conforme. Os

gráficos para o nível monitoram a variabilidade entre as amostras, enquanto que, os gráficos para a dispersão monitoram a variabilidade dentro da amostra. Para o monitoramento do nível, comumente se utiliza o gráfico da média (\bar{X}) ou o gráfico da mediana (\tilde{X}), e para o monitoramento da dispersão, comumente se utiliza o gráfico do desvio padrão (S), o gráfico da variância (S^2) ou o gráfico da amplitude (R). Nas Seções 3.3 e 3.4, são abordados os principais gráficos de controle para variáveis utilizados no monitoramento do nível e da dispersão do processo.

3.3 Gráficos de Controle para Monitorar a Dispersão do Processo

3.3.1 Gráfico do Desvio Padrão (Gráfico S)

Para determinar os limites de controle do gráfico S é necessário supor que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos, com média μ e variância σ^2 . Sendo S_j o desvio padrão amostral do j -ésimo subgrupo, dado por

$$S_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}. \quad (3.5)$$

Como o desvio padrão amostral S_j não é um estimador não-viesado de σ e $(n-1)S_j^2/\sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade, pode-se verificar que

$$\mu_{S_j} = E[S_j] = c_n \sigma \quad (3.6)$$

e

$$\sigma_{S_j} = \sqrt{Var[S_j]} = \sqrt{\sigma^2 - c_n^2 \sigma^2} = \sigma \sqrt{1 - c_n^2}, \quad (3.7)$$

onde n é o tamanho do subgrupo amostral e

$$c_n = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}. \quad (3.8)$$

A partir das expressões (3.6) e (3.7), pode-se definir a linha central e os limites de controle 3-sigma para o gráfico S , quando um valor padrão é dado por σ , como

$$\begin{aligned} LSC &= c_n\sigma + 3\sigma\sqrt{1 - c_n^2} \\ LC &= c_n\sigma \\ LIC &= c_n\sigma - 3\sigma\sqrt{1 - c_n^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quando nenhum valor padrão é dado para σ , pode-se utilizar o estimador não-viesado \bar{S}/c_n para construir a linha central e os limites de controle 3-sigma, dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2} \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.3.2 Gráfico da Variância (Gráfico S^2)

Duncan (1974) mostra que, para a construção do gráfico S^2 , os limites de controle podem ser determinados de forma probabilística. Supondo que os valores da característica da qualidade observados tenham distribuição normal, com média μ e variância σ^2 e sendo S_j^2 a variância do j -ésimo subgrupo, então

$$S_j^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}. \quad (3.11)$$

Como a estatística $(n - 1)S_j^2/\sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade, pode-se verificar que

$$\mu_{S_j^2} = E[S_j^2] = \sigma^2 \quad (3.12)$$

e

$$\sigma_{S_j^2}^2 = Var[S_j^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \quad (3.13)$$

Se m amostras, cada uma de tamanho n , são analisadas e suas variâncias $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ calculadas, um estimador não-viesado de σ^2 é

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_j^2. \quad (3.14)$$

A partir de (3.13) e (3.14), um estimador não-viesado para o desvio padrão de S_j^2 é

$$\hat{\sigma}_{S_j^2} = \bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.15)$$

A linha central e os limites de controle *3-sigma* do gráfico S^2 são obtidos a partir de

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S}^2 + 3\bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\ LC &= \bar{S}^2 \\ LIC &= \bar{S}^2 - 3\bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.3.3 Gráfico da Amplitude (Gráfico R)

Supondo que os valores da característica da qualidade observados tenham distribuição normal, com média μ e variância σ^2 , define-se, então, a amplitude amostral R de uma amostra de tamanho n como

$$R = X_{max} - X_{min}, \quad (3.17)$$

onde X_{max} é o maior valor observado na amostra e X_{min} é o menor valor observado na amostra.

Se são tomadas m amostras, cada uma de tamanho n , e suas amplitudes R_1, R_2, \dots, R_m obtidas, então a média das amplitudes é dada por

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}. \quad (3.18)$$

Um estimador não-viesado de σ é \bar{R}/d_2 . Portanto, obtêm-se

$$\mu_R = E[R] = \bar{R} \quad (3.19)$$

e

$$\sigma_R = \sqrt{Var[R]} = d_3\sigma = d_3\frac{\bar{R}}{d_2}. \quad (3.20)$$

Conseqüentemente, a linha central e os gráficos de controle 3-*sigma* do gráfico R são

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \\ LC &= \bar{R} \\ LIC &= \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.4 Gráficos de Controle para Monitorar o Nível do Processo

3.4.1 Gráfico da Média (Gráfico \bar{X})

Assumindo que a característica da qualidade monitorada X tem distribuição normal, com média μ e variância σ^2 . A média de uma amostra de tamanho n é dada por

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3.22)$$

Seja $\bar{X}_i, i = 1, 2, \dots$, a média do i -ésimo subgrupo. Os \bar{X}_i são normalmente distribuídos, com média e variância dadas, respectivamente, por

$$E[\bar{X}_i] = \mu \quad (3.23)$$

e

$$Var[\bar{X}_i] = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (3.24)$$

Define-se uma variável Z dada por

$$Z = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1). \quad (3.25)$$

Se o processo permanece sob controle, então Z tem distribuição normal padrão e permanece quase sempre entre -3 e 3, pois $P[-3 < Z < 3] = 0,9973$. Logo

$$P \left[-3 < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu)}{\sigma} < 3 \right] = 0,9973,$$

portanto

$$P \left[\frac{\mu - 3\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_i < \frac{\mu + 3\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0,9973.$$

Assim, a linha central e os limites de controle do gráfico \bar{X} são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Supondo que m amostras, cada uma de tamanho n , são analisadas e suas médias $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ calculadas, então um estimador não-viesado de μ é a média das médias, dada por

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}. \quad (3.27)$$

Em processos onde a média μ não é conhecida inicialmente, pode-se estimar o seu valor a partir de (3.27). Caso σ também seja desconhecido, pode-se recorrer a um estimador para a dispersão (\bar{S}/c_n ou \bar{R}/d_2 , por exemplo).

Assim, ao estimar μ por $\bar{\bar{X}}$ e σ por \bar{S}/c_n , têm-se a linha central e os limites de controle dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{S}}{c_n \sqrt{n}} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{S}}{c_n \sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.4.2 Gráfico da Mediana (Gráfico \tilde{X})

Considerando uma característica da qualidade X normalmente distribuída, com média μ e variância σ^2 , sendo \tilde{X} a mediana de uma amostra de tamanho n e \tilde{X}_i , $i = 1, 2, \dots$, a mediana do i -ésimo subgrupo, sabe-se que as \tilde{X}_i têm distribuição normal, com média e variância dada, respectivamente, por

$$E[\tilde{X}_i] = \mu \quad (3.29)$$

e

$$Var[\tilde{X}_i] = \sigma^2 \frac{\pi}{2n}. \quad (3.30)$$

Define-se uma variável Z , dada por

$$Z = \frac{\tilde{X}_i - \mu}{\sigma \sqrt{\pi/2n}} \sim N(0, 1). \quad (3.31)$$

Se o processo permanece sob controle, então Z tem distribuição normal padrão. Conseqüentemente, a probabilidade do intervalo de variação bilateral da estatística teste \tilde{X} conter todas as suas realizações é de $1 - \alpha$, assim

$$P \left[\mu - Z_{1-\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq \tilde{X}_i \leq \mu + Z_{1-\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \right] = 1 - \alpha. \quad (3.32)$$

Portanto, a linha central e os limites de controle do gráfico \tilde{X} são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3\sigma \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Em processos onde a média μ e a variância σ^2 não são conhecidas inicialmente, pode-se estimar o seus valores. Assim, considerando que m amostras, cada uma de tamanho n , são analisadas e suas medianas $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_m$ calculadas, então dois possíveis estimadores não-viesados de μ são a média das medianas amostrais e a mediana das medianas amostrais, obtidas, respectivamente, a partir de

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_m}{m} \quad (3.34)$$

e

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{(i)}; \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (3.35)$$

onde $\tilde{X}_{(i)}$ representa a mediana de ordem i . Para número de amostras par, utiliza-se como mediana das medianas amostrais a média aritmética das duas medianas centrais.

Para estimar σ pode-se recorrer a um estimador para a dispersão (\bar{S}/c_n ou \bar{R}/d_2 , por exemplo).

Ao estimar μ por $\bar{\tilde{X}}$ e σ por \bar{S}/c_n , têm-se a linha central e os limites de controle dados por

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{S}}{c_n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\
 LC &= \bar{\bar{X}} \\
 LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{S}}{c_n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

3.5 Análise da Capacidade de Processos

3.5.1 Aspectos Gerais

Os índices de capacidade constituem uma ferramenta bastante útil em controle estatístico da qualidade e sua aplicabilidade se mostra de grande valia para avaliar se um determinado processo consegue atender às especificações de engenharia. Basicamente, a metodologia consiste em avaliar a estabilidade estatística de um processo mediante a utilização de gráficos de controle para, em seguida, determinar a capacidade do processo em gerar produtos conformes. Em outras palavras, é avaliado se a dispersão natural (6σ) de um processo está dentro dos limites de especificação. A dispersão de *6-sigma* é comumente tomada como medida da capacidade de um processo. Assim, para uma característica da qualidade normalmente distribuída com média μ e desvio padrão σ , se estabelece o intervalo com três desvios à direita e à esquerda de μ ($\mu \pm 3\sigma$). Este intervalo é denominado faixa característica de um processo. Numa distribuição normal, esta faixa inclui 99,73% da variável de interesse, contra os 0,27% que ficam de fora. Para que um processo seja considerado capaz, suas especificações devem conter a amplitude *6-sigma*, o que equivale a dizer que pelo menos 99,73% das unidades produzidas devem ser conformes, admitindo, além da normalidade da característica de qualidade, que a média do processo é centralizada na especificação.

μ e σ são desconhecidos, portanto, para que a capacidade do processo seja avaliada, eles devem ser estimados por meio de dados amostrais, assim como nos gráficos de controle.

A capacidade de um processo só pode ser estimada quando o processo está sob controle estatístico, ou seja, possui um comportamento previsível, caracterizado por uma distribuição de probabilidade. Além disso, a característica de interesse deve ter distribuição, pelo menos aproximadamente, normal e suas observações devem ser independentes (Kotz

e Johnson, 1993). Quando a capacidade do processo for avaliada em circunstâncias diferentes dessas é muito provável que se produzam estimativas incorretas.

Existe uma grande variedade de índices de capacidade [ver Kotz e Lovelace (1998), por exemplo], entretanto, este trabalho abordará nas próximas seções os quatro índices mais freqüentemente utilizados para medir a capacidade de um processo. Esses índices são comumente conhecidos como C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} .

3.5.2 Índice C_p

O índice C_p é uma medida de capacidade potencial do processo em satisfazer as exigências estabelecidas (especificações de engenharia) e é definido por

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}, \quad (3.37)$$

onde LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e σ é o desvio padrão do processo. σ é um parâmetro desconhecido e, como tal, deve ser estimado a partir de estatísticas amostrais (\bar{S}/c_n , por exemplo). De uma maneira geral, espera-se que, para que um processo seja considerado capaz, a especificação do produto deve ser superior à capacidade do processo.

A definição de C_p leva em consideração que as especificações do processo são dadas por limites bilaterais (LSE e LIE) e assume implicitamente que o processo está centrado no valor nominal da especificação. Caso o processo não esteja centrado, corre-se o risco de o valor real da capacidade ser menor que o valor indicado por C_p .

O índice C_p considera as dispersões (permitida e natural) do processo, não fazendo qualquer referência ao nível do processo. Se a capacidade do processo for superior à especificação do produto, o processo não será capaz. Fica claro, portanto, que para se encontrar diante de um processo capaz, o analista deve esperar um C_p tão grande quanto possível, pelo menos igual a 1,00. Num processo normalmente distribuído, onde a média seja centrada na especificação, um $C_p = 1,00$ equivale a dizer que pelo menos 99,73% das unidades produzidas serão conformes, pois neste caso, a variação natural do processo coincide com a variação permissível. Entretanto, o ideal é que se tenha uma dispersão per-

mitida superior à dispersão natural. Isso equivale a dizer que o ideal seria um $C_p > 1,00$. Entretanto, o critério mais comumente aceito como limite inferior para a determinação da capacidade de um processo é uma estimativa de $C_p = 1,33$. De acordo com Ramos (2003), esta estimativa assegura que os dados do processo utilizem aproximadamente 75% ou menos da amplitude de especificação. Isso garante uma taxa de 0,007% de rejeição, o que é uma taxa bastante baixa. Essa estratégia se demonstra bastante eficaz na prevenção de itens defeituosos.

Como regra geral para análise do índice de capacidade do processo, adotam-se as seguintes especificações:

- $C_p < 1,00$: A capacidade do processo é inadequada à especificação exigida. O processo é considerado vermelho. Nesta situação, o responsável pela produção deverá tentar diminuir a variabilidade do processo ou realizar o trabalho em outro processo que atenda as especificações;
- $1,00 \leq C_p \leq 1,33$: A capacidade do processo está dentro da especificação exigida. O processo é considerado amarelo. Nesta situação, o responsável pela produção deverá tentar diminuir a variabilidade do processo. Gráficos de controle são úteis para manter o processo sob controle estatístico, evitando a produção de unidades não-conformes;
- $C_p > 1,33$: A capacidade do processo é adequada à especificação exigida. O processo é considerado verde. Nesta situação, o responsável pela produção não precisa tomar maiores cuidados com o processo, a menos que se queira reduzir a variabilidade para aumentar a qualidade dos produtos.

A utilização do índice C_p apresenta algumas desvantagens para o analista. Primeiramente, a definição de C_p leva em consideração que as especificações do processo são dadas por limites bilaterais (*LSE* e *LIE*) e assume implicitamente que o processo está centrado no valor nominal da especificação. Caso o processo não esteja centrado, corre-se o risco de o valor real da capacidade ser menor que o valor indicado por C_p . Outra desvantagem é que o índice C_p leva em consideração as dispersões (permitida e natural) do processo, não fazendo qualquer referência ao nível do processo.

3.5.3 Índices C_{pu} , C_{pl} e C_{pk}

Conforme abordado na Subseção 2.3.1, o C_p tem o problema de medir a capacidade somente em termos de dispersão, não levando em consideração o nível do processo. Neste sentido, o índice C_{pk} vem suprir certas lacunas deixadas pelo C_p .

Uma grande vantagem do C_{pk} é que, ao contrário do C_p , ele pode ser utilizado numa situação de especificação unilateral. Neste caso o índice é tomado pelo limite (inferior ou superior) de especificação, juntamente com o nível do processo. Portanto, surgem dois novos índices, definidos por

$$C_{pu} = \frac{\text{Dispersão Superior Permitida}}{\text{Dispersão Superior Natural}} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \quad (3.38)$$

e

$$C_{pl} = \frac{\text{Dispersão Inferior Permitida}}{\text{Dispersão Inferior Natural}} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}. \quad (3.39)$$

Estes índices são denominados de índices de capacidade superior e inferior, respectivamente. LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e σ é o desvio padrão do processo.

No caso de especificação bilateral, um índice natural, denominado C_{pk} , obtido a partir das Equações (3.38) e (3.39), é definido por

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\}. \quad (3.40)$$

Outra forma de escrever o índice C_{pk} é

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}, \quad (3.41)$$

onde d é a média aritmética dos limites inferior e superior de especificação ($d = (LSE - LIE)/2$), indicando o comprimento da metade do intervalo de especificação. $M = (LSE + LIE)/2$ é o ponto médio do intervalo de especificação.

Para o processo ser considerado capaz, o C_{pk} deve ser igual ou superior a um. É importante notar que, na hora de quantificar a capacidade do processo, o índice C_{pk} leva em consideração a pior metade dos dados do processo. Portanto, além de avaliar a capacidade do processo, o índice C_{pk} também leva em conta a centralização do processo, relacionando a distância escalar entre a média do processo e o limite de especificação mais próximo. Segundo Montgomery (2001), a magnitude de C_{pk} em relação a C_p é uma medida direta de quão fora de centro o processo está. De uma maneira geral, quando $C_p = C_{pk}$, significa que o processo está centrado no ponto médio das especificações. Se $C_{pk} < C_p$, o processo está descentrado. Assim, chega-se a conclusão de que o C_p mede a capacidade potencial no processo, enquanto que C_{pk} mede a capacidade efetiva.

O Capítulo 4 aborda os princípios de estimação robusta e a teoria do desvio absoluto mediano como estimador robusto de σ , além de alguns estudos de simulação.

Capítulo 4

Estimando o Desvio Padrão a partir do Desvio Absoluto Mediano

4.1 Princípios de Estimação Robusta

O ponto de partida do estudo da estatística robusta está no fato de que muitas suposições comumente feitas em estatística clássica (como normalidade, linearidade ou independência, por exemplo) são, em sua maioria, apenas aproximações da realidade. Neste sentido, a estatística clássica se utiliza de procedimentos para distribuições e modelos exatos, mas não diz muito quando a suposição é apenas aproximadamente válida.

Na expressão (4.1), é definida uma distribuição G a partir de uma combinação de duas distribuições (H e W). Assim,

$$G = (1 - \varepsilon)H + \varepsilon W \quad , \text{ sendo } \varepsilon \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

A distribuição G pode ser considerada uma distribuição mista entre a distribuição H e uma contaminação dada pela distribuição W . Diz-se que um estimador é robusto se permanece estável no conjunto de distribuições G formadas a partir de H .

Para Damiano (2007), a estatística robusta pode ser descrita como uma generalização da estatística clássica que leva em consideração a possibilidade de especificações incorretas do modelo e da distribuição dos dados em estudo. Esta teoria e seus resultados são válidos tanto dentro do modelo especificado como nas proximidades desse modelo, neste caso, por exemplo, quando a amostra em estudo está contaminada por observações discrepantes (*outliers*).

Hampel (2001) define *outliers* simplesmente como observações que não se ajustam ao padrão dos dados. Na obtenção de estimativas para um determinado parâmetro, a pre-

sença de *outliers* pode se transformar num grande problema. Por exemplo, numa amostra aleatória X_1, \dots, X_n da característica X , tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sabe-se que a média amostral \bar{X} funciona como um excelente estimador para o nível, pois possui propriedades como eficiência, consistência e ausência de viés. Entretanto, se for considerada a presença de *outliers* na amostra, a média amostral, que toma todas as observações da amostra para seu cálculo, será bastante influenciada. Isso fará com que a média amostral ofereça uma estimativa ruim. Agora, se a mediana amostral \tilde{X} fosse tomada como estimador para o nível, este mesmo problema não ocorreria, pois a mediana não se deixa afetar por valores extremos. Isso fará com que a mediana ofereça melhores estimativas para o nível em caso de contaminação por *outliers*. Diz-se, portanto, que a mediana amostral é mais robusta. Duas importantes propriedades de robustez são o ponto de ruptura e a consistência de Fisher.

4.1.1 Ponto de Ruptura

Intuitivamente, o ponto de ruptura de um estimador é a proporção de contaminação (ou seja, observações arbitrariamente grandes em módulo) que um estimador pode suportar antes de acusar resultados arbitrariamente grandes. Por exemplo, tomando a média amostral como estimador de μ , é fácil perceber que o seu ponto de ruptura é zero, pois substituindo apenas uma única observação da amostra por uma observação discrepante pode-se tornar a média amostral arbitrariamente grande. Nota-se que a mediana amostral não apresenta esse problema, pois toma o termo do meio da amostra quando esta está ordenada segundo algum critério de grandeza. Isso dá à mediana amostral o maior ponto de ruptura possível, 50% ou 0,5. Intuitivamente, entende-se que o ponto de ruptura não pode exceder 50%, pois se mais da metade das observações estiver contaminada então não será mais possível distinguir entre a distribuição base e a distribuição contaminada.

A noção de ponto de ruptura foi tomada, formalmente definida, e brevemente discutida por Hampel (1968). Desde então, foi uma medida que se popularizou bastante nos artigos de estatística robusta. Vale ressaltar que, originalmente, o ponto de ruptura é um conceito assintótico, mas que, no entanto, foi adaptado para amostras finitas por Donoho e Huber (1983).

Antes de abordar a definição teórica do ponto de ruptura, algumas considerações devem

ser feitas. Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra fixada de tamanho n . Esta amostra pode ser corrompida de diversas maneiras. Três maneiras são mostradas a seguir.

i) ε -contaminação: acrescentam-se m valores arbitrários $Y = (y_1, \dots, y_m)$ à amostra. Assim, a fração de valores “ruins” na amostra contaminada $X' = X \cup Y$ é $\varepsilon = m/(m+n)$;

ii) ε -substituição: substitui-se um conjunto arbitrário de tamanho m da amostra por valores arbitrários y_1, \dots, y_m . A fração de valores “ruins” da amostra contaminada X' é $\varepsilon = m/n$;

iii) ε -modificação: seja π uma função de distância arbitrária definida no espaço de medidas empíricas. Seja F_n uma medida empírica correspondente à amostra dada X , e seja X' qualquer outra amostra com medida empírica G_n , de forma que $\pi(F_n, G_n) \leq \varepsilon$. O tamanho amostral n' deve ser diferente de n .

Tomando $T = \{T_n\}$, com $n = 1, 2, \dots$, como o estimador de algum parâmetro de interesse e sendo $T(X)$ o valor deste estimador na amostra X . Pode-se dizer que o ponto de ruptura da contaminação/substituição/modificação de T em X é ε^* , onde ε^* é o menor valor de ε para o qual o estimador, quando aplicado à amostra ε -corrompida X' , pode tomar valores arbitrariamente distantes de $T(X)$. Assim, inicialmente define-se o máximo viés que pode ser causado por uma ε -corrupção como

$$b(\varepsilon; X, T) = \sup |T(X') - T(X)|, \quad (4.2)$$

onde o supremo é tomado sob a gama de todas as amostras ε -corrompidas X' . Pode-se definir o ponto de ruptura como

$$\varepsilon^*(X, T) = \inf\{\varepsilon : b(\varepsilon; X, T) = \infty\}. \quad (4.3)$$

Desta forma, o ponto de ruptura para amostras finitas nada mais é do que a menor fração de contaminação que pode fazer com que o estimador tome valores arbitrariamente grandes. Tipicamente, em amostras finitas, o ponto de ruptura é uma função do tamanho de amostra n . Para se obter um único valor utiliza-se o ponto de ruptura assintótico, que

é o limite do ponto de ruptura para amostras finitas quando n tende para infinito. É de praxe que sempre se diga “ponto de ruptura” se referindo ao ponto de ruptura assintótico.

Para estimadores como a média amostral, por exemplo, uma única observação pode causar a ruptura, ou seja, corromper um único valor da amostra já é fator suficiente para que o estimador acuse um valor diferente do inicial. Portanto, para a média amostral o ponto de ruptura para amostras finitas (a menor fração de contaminação que pode fazer com que o estimador tome valores arbitrariamente grandes) é $1/n$ e o ponto de ruptura assintótico (que é o limite do ponto de ruptura para amostras finitas quando n tende a infinito) é igual a zero ($\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$).

Alguns estimadores para a dispersão utilizam a média amostral para o seu cálculo (S e S^2 , por exemplo) e, portanto, também apresentam ponto de ruptura igual a zero. Um estimador mais robusto para a dispersão é o intervalo interquartilício (IQ), que toma a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil. Seu ponto de ruptura é 0,25 ou 25%.

4.1.2 Consistência de Fisher

O estimador $\hat{\theta}_n$, baseado nas observações X_1, \dots, X_n , com função de probabilidade F , é dito um estimador Fisher-consistente do parâmetro θ se, escrito como uma funcional $\hat{\theta}_n = T(F_n)$ da função de distribuição empírica do vetor (X_1, \dots, X_n) , $n = 1, \dots$, satisfaz $T(F) = \theta$. Em Matemática, uma funcional é toda função cujo domínio é um espaço vetorial e a imagem é o corpo de escalares. Em outras palavras, a funcional é uma função que toma outra função como seu argumento e retorna um escalar. Portanto, para que um estimador seja Fisher-consistente ele deve ser igual à funcional da função de distribuição empírica, assim como o parâmetro também deve ser igual à funcional da função de distribuição verdadeira, ou seja

$$\hat{\theta}_n = t(F_n) \quad \text{e} \quad \theta = T(F). \quad (4.4)$$

A consistência de Fisher recebeu este nome por ser o conceito de consistência originalmente proposto por Fisher em 1922 (Jurecková e Picek, 2006). Alguns exemplos de medidas Fisher-consistentes são a média amostral \bar{X} e a variância amostral S^2 , como é demonstrado a seguir.

4.2 O Desvio Absoluto Mediano como Estimador Robusto para o Desvio Padrão 46

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória X e seja $\theta = T(F) = \mu$, então a média amostral $\hat{\theta}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ será Fisher-consistente, pois

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{n} T(F_n) = T(F_n).$$

O mesmo vale para a variância amostral. Seja $\theta = T(F) = Var(X)$, então a variância amostral $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ será Fisher-consistente, pois

$$\hat{\theta}_n = \frac{n}{n} T(F_n) = T(F_n).$$

Vale ressaltar que o estimador $\hat{\theta}_n$, apesar de Fisher-consistente, é viesado. Por outro lado, o estimador não-viesado $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ não será Fisher-consistente, pois

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} T(F_n) \quad \text{e} \quad \frac{1}{n-1} T(F) \neq T(F).$$

4.2 O Desvio Absoluto Mediano como Estimador Robusto para o Desvio Padrão σ

A busca por estimativas para o desvio padrão populacional σ é objeto de grande interesse na pesquisa em *CEQ*. Esta é uma preocupação que está sempre em voga, pois um monitoramento eficiente de um determinado parâmetro de interesse do ponto de vista da qualidade, depende acima de tudo, de uma estimação, no mínimo, precisa deste mesmo parâmetro e de outros parâmetros auxiliares. Por exemplo, supondo que se deseja controlar o nível de um determinado processo. Para que haja um controle seguro e inequívoco, é necessário que se tenha uma boa estimativa para esse nível, assim como para a dispersão associada, já que ambas as estimativas serão utilizadas na construção do gráfico de controle.

Três estimadores comumente utilizados para estimar a dispersão de um processo são o desvio padrão amostral corrigido (\bar{S}/c_n), a amplitude amostral corrigida (\bar{R}/d_2) e a variância amostral (\bar{S}^2). Estes três estimadores, apesar de oferecerem boas estimativas

para a dispersão, apresentam o mesmo problema: são extremamente afetados por observações discrepantes, ou em outras palavras, não são resistentes. Segundo Mosteller e Tukey (1977), a resistência, característica típica dos estimadores robustos, é a capacidade desse estimador de não sofrer grandes alterações quando se altera uma pequena parte dos dados, mesmo quando essas alterações resultarem em valores extremos nas observações.

Uma possível alternativa de medida de dispersão resistente é o desvio absoluto mediano, conhecido também apenas por desvio mediano, e definido como

$$DAM_n = c \operatorname{med}_i |x_i - \operatorname{med}_j x_j|, \quad (4.5)$$

onde c é uma constante obtida a partir de uma relação entre o DAM e o desvio padrão σ . Para dados normalmente distribuídos, c é tomada como $1/\Phi^{-1}(3/4)$ (onde Φ^{-1} é o inverso da função de distribuição acumulada de uma normal padrão) ou 1,4826, conforme é demonstrado a seguir.

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da variável aleatória X normalmente distribuída, com média μ e variância σ^2 , tem-se que

$$P(|X - \mu| \leq DAM) = P\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \leq \frac{DAM}{\sigma}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{DAM}{\sigma}\right) = \frac{1}{2},$$

com $Z \sim N(0, 1)$, portanto,

$$\frac{DAM}{\sigma} = \Phi^{-1}(3/4) \approx 0,6745,$$

ou seja,

$$\hat{\sigma} \approx 1,4826 DAM. \quad (4.6)$$

Fazendo $\hat{\sigma} = DAM_n$, tem-se

$$DAM_n = 1,4826 \text{ med}_i|x_i - \text{med}_jx_j|. \quad (4.7)$$

A constante 1,4826 em (4.7) é necessária para tornar o estimador consistente (consistência de Fisher) para o parâmetro σ em distribuições normais. O *DAM* apresenta o maior ponto de ruptura dentre os estimadores para a dispersão: 0,5 ou 50%, conforme é verificado a seguir.

Tomando uma amostra $X = (x_1, \dots, x_n)$, pode-se obter uma nova amostra X' a partir da primeira fazendo uma ε -substituição de m dos n valores da amostra inicial X . A proporção de valores corrompidos em X' é m/n . De acordo com a expressão (4.3), tem-se

$$\varepsilon^*(X, DAM) = \inf \left\{ \frac{m}{n} : b(\varepsilon; X, DAM) = \infty \right\},$$

onde $b(\varepsilon; X, DAM) = \sup |DAM(X') - DAM(X)|$.

Para $m = n/2$ tem-se o menor ε para o qual $b(\varepsilon; X, DAM) = \infty$. Assim,

$$\varepsilon^*(X, DAM) = [n/2]/n,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n/2]/n = 0,5,$$

que é o maior ponto de ruptura dentre os estimadores para a dispersão.

A partir de um estudo de simulação, Croux e Rousseeuw (1992) definem um fator de correção b_n para amostras finitas que torna o estimador

$$DAM_n = b_n 1,4826 \text{ med}_i|x_i - \text{med}_jx_j|, \quad (4.8)$$

4.2 O Desvio Absoluto Mediano como Estimador Robusto para o Desvio Padrão 49

aproximadamente não-viesado para o parâmetro σ , onde b_n é um fator de correção associado ao tamanho da amostra. Os valores de b_n para alguns tamanhos amostrais são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 *Fator de Correção b_n para o Desvio Absoluto Mediano.*

n	2	3	4	5	6	7	8	9
b_n	1,196	1,495	1,363	1,206	1,200	1,140	1,129	1,107

e para $n > 9$, tem-se

$$b_n = \frac{n}{n - 0,8}.$$

O fator de correção b_n tira o viés associado ao estimador. Portanto, para o estimador proposto em (4.8), tem-se,

$$E[DAM_n] \approx \sigma \quad (\text{não - viesado}). \quad (4.9)$$

Por uma questão de conveniência, o produto (b_n 1,4826), cujos fatores são constantes, será tratado como uma nova constante ω . Valores de ω estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A. Assim, o estimador mostrado em (4.8), passa a ser dado por

$$DAM_n = \omega \text{ med}_i |x_i - \text{med}_j x_j|. \quad (4.10)$$

Considerando agora m amostras da característica de qualidade X , com $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, cada uma com tamanho n , e seus desvios padrão $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$, obtidos a partir de (4.10), então a média dos desvios padrão é estimada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \dots + \hat{\sigma}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega DAM_i}{m} = \omega \overline{DAM}. \quad (4.11)$$

É fácil verificar que a esperança de $\omega \overline{DAM}$ é

$$E[\omega \overline{DAM}] = E \left[\frac{\sum_{i=1}^m \omega DAM_i}{m} \right] = \frac{1}{m} E \left[\sum_{i=1}^m \omega DAM_i \right] = \frac{1}{m} m E[\omega DAM] = \sigma. \quad (4.12)$$

Muitos aspectos a cerca das propriedades e medidas relacionadas ao desvio absoluto mediano ainda são desconhecidos para amostras finitas. Sua distribuição de probabilidade, por exemplo, ainda é desconhecida. Outra importante lacuna a ser preenchida é a busca por uma fórmula analítica para a variância do DAM em amostras finitas. Segundo Rousseeuw (2008), como o DAM possui uma definição de dois passos (primeiramente, a mediana amostral e, em seguida, os desvios em relação a ela) torna-se muito difícil ou extremamente complicado desenvolver uma fórmula analítica para a variância do DAM . Ainda de acordo com Rousseeuw (2008), até hoje, todos os pesquisadores que quiseram dizer alguma coisa a respeito da variância do DAM em amostras finitas recorreram a algum estudo de simulação.

4.3 Simulações

Para verificar a adequação do estimador do desvio padrão baseado no desvio absoluto mediano, foi realizado um estudo de simulação. Foram tomadas 100.000 amostras de tamanho $n = 5, 8, 10, 15, 20, 40, 60$ e 100. As amostras são independentes e normalmente distribuídas com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$. Para cada tamanho amostral n , foram calculados os valores de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ e seus respectivos erros quadráticos médios. As simulações foram feitas utilizando o simulador do aplicativo *Matlab for windows*, versão 5.3.0.10183, da *MathWorks Inc*.

Tabela 4.2 Valor Médio das Estimativas de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ .

n	\bar{R}/d_2	\bar{S}/c_n	$\omega \overline{DAM}$
5	0,998	0,998	0,991
8	1,001	1,001	1,004
10	1,000	1,000	0,993
15	1,000	1,000	0,999
20	1,000	1,001	1,000
40	1,001	1,000	1,000
60	1,000	1,000	1,000
100	1,000	1,000	1,000

A Tabela 4.2 mostra o valor médio das estimativas de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ para o desvio padrão σ . Os resultados mostram que os estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ apresentam desempenhos semelhantes, com diferenças pouco significativas, especialmente para tamanhos amostrais grandes ($n \geq 20$), onde os três estimadores produzem estimativas mais precisas para o verdadeiro valor do parâmetro σ . A Tabela 4.3 mostra os valores dos erros quadráticos médios dos estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$.

Tabela 4.3 Valores dos Erros Quadráticos Médios dos Estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ .

n	\bar{R}/d_2	\bar{S}/c_n	$\omega \overline{DAM}$
5	0,028	0,026	0,067
8	0,010	0,009	0,021
10	0,007	0,006	0,013
15	0,003	0,002	0,007
20	0,002	0,001	0,003
40	0,001	0,000	0,001
60	0,000	0,000	0,000
100	0,000	0,000	0,000

A partir da análise da Tabela 4.3, percebe-se que a variabilidade do estimador $\omega \overline{DAM}$, medida a partir do seu erro quadrático médio, é maior que a dos estimadores \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n , especialmente para pequenos tamanhos amostrais ($n < 20$), onde essa diferença fica mais evidente. Os resultados sugerem que, para $n \rightarrow \infty$, os três estimadores apresentam a mesma eficiência para estimar o verdadeiro valor de σ .

A vantagem do estimador $\omega \overline{DAM}$ em relação aos demais estimadores para a dispersão (incluindo o intervalo interquartilico) é o seu alto ponto de ruptura (0,5 ou 50%), pois essa característica confere ao $\omega \overline{DAM}$ um desempenho consideravelmente melhor em processos potencialmente sujeitos a contaminação por *outliers*. Para comprovar esta afirmação, é desenvolvido um novo estudo de simulação, no qual é realizada uma experiência para testar a robustez dos estimadores estudados. Para tanto, é gerada uma amostra de tamanho $n = 10$ de uma variável normalmente distribuída, com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$. Novamente, é utilizado o simulador do aplicativo *Matlab for windows*, versão 5.3.0.10183, da *MathWorks Inc*. Os dados resultantes são

-1,088 -1,088 0,274 1,073 -1,305 0,176 0,611 -0,143 0,369 1,007

A experiência consiste em inserir arbitrariamente (por ε -substituição) um *outlier* na amostra e observar como os estimadores em questão se comportam. Será dito mais robusto o estimador que for capaz de se manter inalterado diante da implantação do *outlier*. O valor 1,073 é arbitrariamente substituído pelo valor 8, que é um *outlier*. A Tabela 4.4 mostra as estimativas obtidas a partir dos estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ para o desvio padrão σ , antes e após a introdução do *outlier* na amostra.

Tabela 4.4 Valores da Estimativas Obtidas a partir de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ Antes e Após a Introdução do Outlier na Amostra.

	\bar{R}/d_2	\bar{S}/c_n	$\omega \overline{DAM}$
Antes do <i>outlier</i>	0,772	0,898	0,941
Após o <i>outlier</i>	3,023	2,764	0,941

A partir da análise da Tabela 4.4, percebe-se que os valores das estimativas obtidas de \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n para o desvio padrão σ aumentaram significativamente de valor com a introdução do *outlier* na amostra. Isso se deve ao fato de que o *DAM* é uma medida mais robusta, o que é facilmente comprovado pelo seu alto ponto de ruptura (0,5 ou 50%). Portanto, fica comprovado que, diante de processos potencialmente sujeitos à interferência de *outliers*, os estimadores \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n não apresentam um desempenho satisfatório, já que são extremamente influenciados por valores discrepantes. Neste caso, convém utilizar uma medida mais robusta, como o desvio absoluto mediano, por exemplo.

A idéia de utilizar um estimador robusto para o desvio padrão σ e, a partir dele, aprimorar ferramentas para o controle estatístico da qualidade, não é inteiramente nova. Ramos (2003) utilizou um estimador baseado no intervalo interquartilico (\overline{IQ}/ξ_n) para estimar σ , aplicando-o na construção de gráficos de controle e índices de capacidade. O \overline{IQ}/ξ_n é, de fato, um estimador robusto de σ , pelo menos mais robusto que \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n . Entretanto, com um ponto de ruptura de apenas 25% o estimador \overline{IQ}/ξ_n não é o mais adequado para processos sujeitos a ação de muitos *outliers* simultaneamente. Para isso, seria necessário uma medida com um ponto de ruptura maior.

Um novo estudo de simulação será realizado com o intuito de demonstrar como o estimador $\omega \overline{DAM}$ se comporta melhor sob a presença de muitos *outliers* na amostra, em comparação com os estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e \overline{IQ}/ξ_n . Para tanto, é utilizada a mesma amostra de tamanho $n = 10$, mostrada anteriormente.

-1,088 **-1,088** 0,274 **1,073** **-1,305** 0,176 0,611 -0,143 0,369 1,007

onde os valores em negrito serão substituídos pelos *outliers* -6, -7, 8 e -7, respectivamente. A Tabela 4.5 mostra os valores de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n , \overline{IQ}/ξ_n e $\omega \overline{DAM}$, antes e após a introdução dos *outliers* na amostra.

Tabela 4.5 Valores da Estimativas Obtidas Através de \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n , \overline{IQ}/ξ_n e $\omega \overline{DAM}$ para o Desvio Padrão σ Antes e Após a Introdução dos *Outliers* na Amostra.

	\bar{R}/d_2	\bar{S}/c_n	\overline{IQ}/ξ_n	$\omega \overline{DAM}$
Antes do <i>outlier</i>	0,772	0,898	1,198	0,941
Após o <i>outlier</i>	4,873	4,725	4,344	0,941
Aumento Percentual (%)	531,2	426,2	262,6	0,000

A partir da análise da Tabela 4.5, nota-se que, com a introdução dos quatro *outliers* na amostra, os estimadores \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e \overline{IQ}/ξ_n apresentam valores arbitrariamente grandes. Em termos percentuais, o estimador \bar{R}/d_2 aumentou 531,2 %, o estimador \bar{S}/c_n aumentou 426,2 %, o estimador \overline{IQ}/ξ_n sofreu um aumento de 262,6 %, enquanto que o estimador $\omega \overline{DAM}$ permaneceu inalterado. Esses resultados mostram que estimadores com um ponto de ruptura de apenas 25%, como é o caso do \overline{IQ}/ξ_n , podem suportar a presença de poucos *outliers* na amostra, mas não respondem bem quando a quantidade de *outliers* na amostra

é grande, problema que o estimador $\omega \overline{DAM}$ não apresenta, pois o DAM possui um ponto de ruptura de 50%, que é o maior possível.

O Capítulo 5 mostra o aprimoramento de ferramentas no controle estatístico da qualidade a partir da utilização do estimador robusto de σ baseado no desvio absoluto mediano.

Capítulo 5

Aprimoramento de Ferramentas em *CEQ*

5.1 Introdução

Em um gráfico de controle, os limites de controle são expressos por um múltiplo do desvio padrão. Para um múltiplo k do desvio padrão, tem-se limites de controle *k-sigma*. Uma escolha comum é $k = 3$. A distância entre os limites de controle está associada ao tipo de erro que se pode cometer na utilização de um gráfico de controle. Por exemplo, se a distância entre os limites de controle diminui, maior será a probabilidade de ocorrência do erro tipo I (concluir que o processo está fora de controle quando, de fato, ele está sob controle) e se a distância entre os limites de controle aumenta, maior será a probabilidade de ocorrência do erro tipo II (concluir que o processo está sob controle quando ele realmente está fora de controle).

Se a estatística teste avaliada possuir distribuição pelo menos aproximadamente normal, pode-se obter uma probabilidade α do erro tipo I na escolha do múltiplo k de σ a partir de $k = Z_{\alpha/2}$, onde $Z_{\alpha/2}$ são pontos percentuais da distribuição normal, de acordo com a probabilidade α associada. Utilizar limites *3-sigma* na construção de gráficos de controle implica numa probabilidade $\alpha = 0,0027$ do erro tipo I.

Este capítulo aborda o aprimoramento de ferramentas em *CEQ*, a partir da utilização do estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano em gráficos de controle e índices de capacidade. Para tanto, são utilizados como exemplo os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, retirados de Montgomery (2001). Este conjunto de dados consiste de 125 observações, divididas em 25 amostras, de 5 observações cada. Os dados em questão descrevem um processo estatisticamente sob controle e sua utilização no presente trabalho tem fins meramente ilustrativos.

5.2 $\omega\overline{DAM}$ Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar a Dispersão do Processo

5.2.1 $\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico do Desvio Padrão

A partir das expressões dadas por (3.10), utilizadas para obtenção do limite superior de controle, da linha central e do limite inferior de controle para o gráfico S , substituindo \bar{S}/c_n por $\omega\overline{DAM}$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S} + 3\omega\overline{DAM}\sqrt{1 - c_n^2} \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} - 3\omega\overline{DAM}\sqrt{1 - c_n^2}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Fazendo $\lambda_1 = 3\omega\sqrt{1 - c_n^2}$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S} + \lambda_1\overline{DAM} \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} - \lambda_1\overline{DAM}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Valores de λ_1 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

Considerando os dados medidos dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{S} = 0,010$ e $\overline{DAM} = 0,006$. Para tamanho amostral $n = 5$, a partir das Tabelas A.1 e A.2, do Apêndice A, tem-se $c_n = 0,940$, $\omega = 1,788$ e $\lambda_1 = 1,830$.

O Gráfico S , para os valores dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, quando os limites de controle são obtidos a partir de (3.10) e (5.2), ou seja, quando σ é estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$, respectivamente, é mostrado na Figura 5.1.

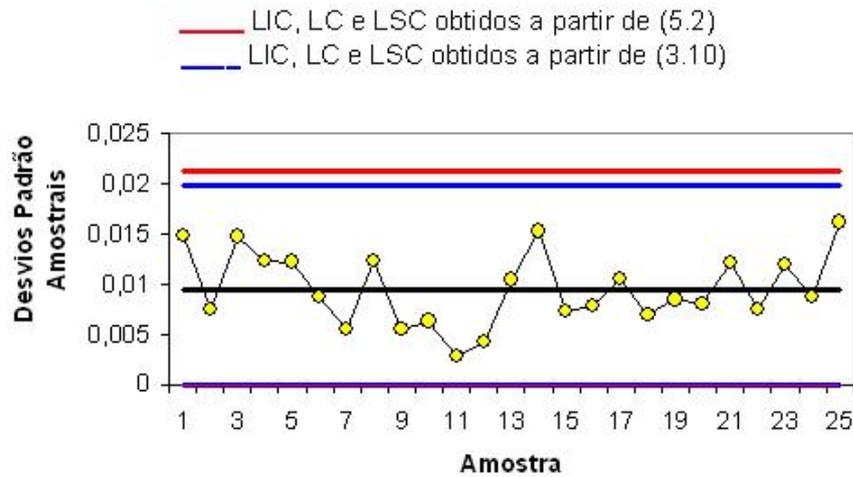


Figura 5.1 Gráfico S para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$.

A partir da análise da Figura 5.1, nota-se que, para os valores dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, os limites de controle obtidos a partir de (5.2) encontram-se bem próximos daqueles obtidos a partir de (3.10). Esta proximidade permite, para (3.10) e (5.2), uma análise similar a respeito do estado de controle estatístico do processo neste caso em particular. Não havendo grandes níveis de variabilidade, ou mesmo *outliers* nas amostras, (3.10) e (5.2) fornecem estimativas bastante próximas para os limites de controle.

5.2.2 $\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Amplitude

A partir das expressões dadas por (3.21), utilizadas para obtenção do limite superior de controle, da linha central e do limite inferior de controle para o gráfico R , substituindo \bar{R}/d_2 por $\omega\overline{DAM}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{R} + 3d_3\omega\overline{DAM} \\
 LC &= \bar{R} \\
 LIC &= \bar{R} - 3d_3\omega\overline{DAM}.
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

Fazendo $\lambda_2 = 3d_3\omega$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{R} + \lambda_2 \overline{DAM} \\ LC &= \bar{R} \\ LIC &= \bar{R} - \lambda_2 \overline{DAM}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Valores de λ_2 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

Considerando os dados medidos dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{R} = 0,024$ e $\overline{DAM} = 0,006$. Para tamanho amostral $n = 5$, a partir das Tabelas A.1 e A.2, do Apêndice A, tem-se $d_2 = 2,326$, $d_3 = 0,864$, $\omega = 1,788$ e $\lambda_2 = 4,634$.

O Gráfico R , para os valores dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, quando os limites de controle são obtidos a partir de (3.21) e (5.4), ou seja, quando σ é estimado por \bar{R}/d_2 e $\omega\overline{DAM}$, respectivamente, é mostrado na Figura 5.2.

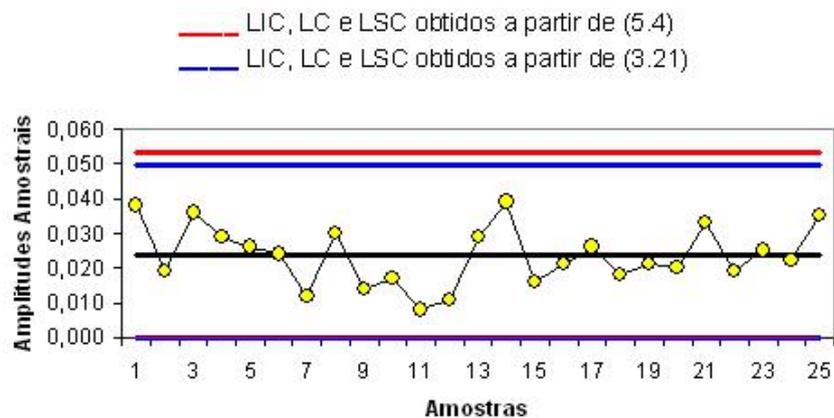


Figura 5.2 Gráfico R para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{R}/d_2 e $\omega\overline{DAM}$.

A partir da análise da Figura 5.2, percebe-se que, assim como no Gráfico do desvio padrão, o Gráfico da amplitude também produz estimativas muito próximas para os limites de controle obtidos a partir de (3.21) e (5.4). Diferenças mais significativas de desempenho

devem ser notadas diante de níveis mais altos de variabilidade nas amostras, ou mesmo na presença de *outliers*.

5.2.3 $\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Variância

A partir das expressões dadas por (3.16), utilizadas para obtenção do limite superior de controle, da linha central e do limite inferior de controle para o gráfico S^2 , substituindo $\overline{S^2}$ por $(\omega\overline{DAM})^2$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \overline{S^2} + 3(\omega\overline{DAM})^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\ LC &= \overline{S^2} \\ LIC &= \overline{S^2} - 3(\omega\overline{DAM})^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Fazendo $\lambda_3 = 3\omega^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \overline{S^2} + \lambda_3(\overline{DAM})^2 \\ LC &= \overline{S^2} \\ LIC &= \overline{S^2} - \lambda_3(\overline{DAM})^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Valores de λ_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

Considerando os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, têm-se que $\overline{S^2} = 0,0001$ e $\overline{DAM} = 0,006$. Para tamanho amostral $n = 5$, a partir das Tabelas A.1 e A.2, do Apêndice A, tem-se $\omega = 1,788$ e $\lambda_3 = 6,782$.

O Gráfico S^2 , para os valores dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, quando os limites de controle são obtidos a partir de (3.16) e (5.6), ou seja, quando σ^2 é estimado por $\overline{S^2}$ e $(\omega\overline{DAM})^2$, respectivamente, é mostrado na Figura 5.3.

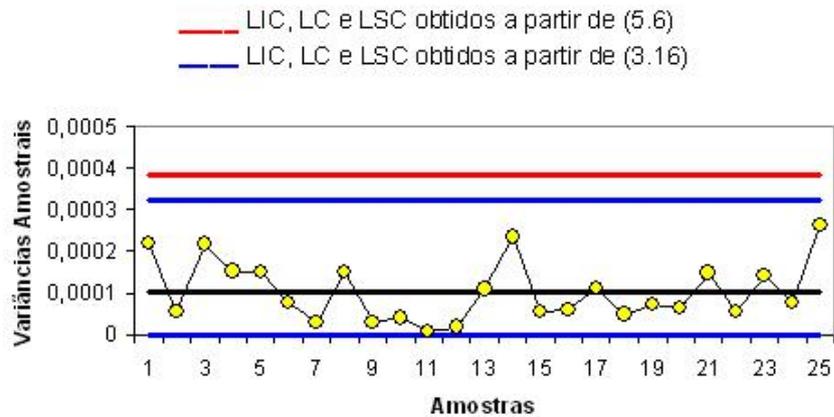


Figura 5.3 Gráfico S^2 para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ^2 estimado por $\overline{S^2}$ e $(\overline{\omega DAM})^2$.

A partir da análise da Figura 5.3, nota-se que, para o Gráfico S^2 , os limites de controle obtidos a partir de (5.6) encontram-se relativamente afastados daqueles obtidos a partir de (3.16), podendo ocasionar possíveis alarmes negligenciados (erro tipo II).

5.3 $\overline{\omega DAM}$ Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar o Nível do Processo

5.3.1 $\overline{\omega DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Média

A partir das expressões dadas por (3.28), utilizadas para obtenção do limite superior de controle, da linha central e do limite inferior de controle para o gráfico \bar{X} , substituindo \bar{S}/c_n por $\overline{\omega DAM}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\overline{\omega DAM}}{\sqrt{n}} \\
 LC &= \bar{\bar{X}} \\
 LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\overline{\omega DAM}}{\sqrt{n}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Fazendo $\lambda_4 = \frac{3\omega}{\sqrt{n}}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{\bar{X}} + \lambda_4 \overline{DAM} \\
 LC &= \bar{\bar{X}} \\
 LIC &= \bar{\bar{X}} - \lambda_4 \overline{DAM}.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Valores de λ_4 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

Considerando os dados medidos dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{\bar{X}} = 54,001$ e $\overline{DAM} = 0,006$. Para tamanho amostral $n = 5$, a partir das Tabelas A.1 e A.2, do Apêndice A, tem-se $\omega = 1,788$ e $\lambda_4 = 2,399$.

O Gráfico \bar{X} , para os valores dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, quando os limites de controle são obtidos a partir de (3.28) e (5.8), ou seja, quando σ é estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$, respectivamente, é mostrado na Figura 5.4.

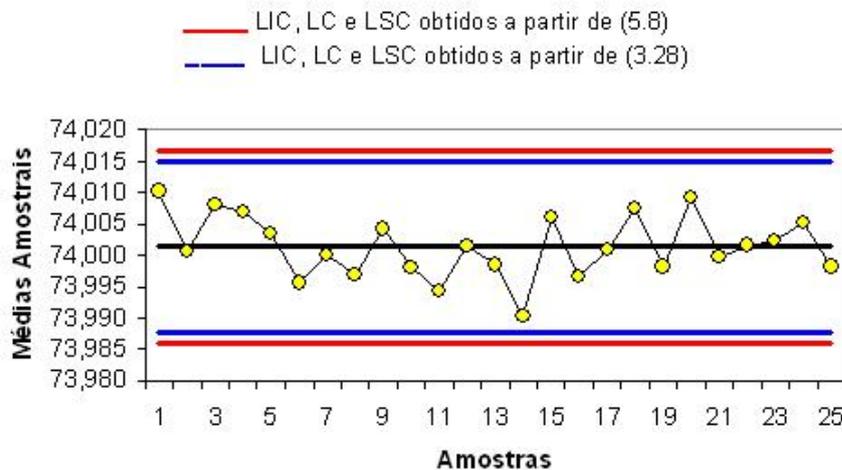


Figura 5.4 Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$.

A partir da análise da Figura 5.4, nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (3.28) e (5.8) encontram-se muito próximos um do outro, fato que permite uma análise similar a respeito do estado de controle estatístico do processo em relação ao nível.

Diferenças mais significativas de desempenho devem ser notadas em amostras com maior grau de variabilidade ou sob a presença de *outliers*.

5.3.2 $\omega\overline{DAM}$ Aplicado ao Gráfico da Mediana

A partir das expressões dadas por (3.36), utilizadas para obtenção do limite superior de controle, da linha central e do limite inferior de controle para o gráfico \tilde{X} , substituindo \bar{S}/c_n por $\omega\overline{DAM}$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\tilde{X}} + 3\omega\overline{DAM}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \\ LC &= \bar{\tilde{X}} \\ LIC &= \bar{\tilde{X}} - 3\omega\overline{DAM}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Fazendo $\lambda_5 = 3\omega\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, obtém-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\tilde{X}} + \lambda_5\overline{DAM} \\ LC &= \bar{\tilde{X}} \\ LIC &= \bar{\tilde{X}} - \lambda_5\overline{DAM}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Valores de λ_5 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

Considerando os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{\tilde{X}} = 74,002$ e $\overline{DAM} = 0,006$. Para tamanho amostral $n = 5$, a partir das Tabelas A.1 e A.2, do Apêndice A, tem-se $\omega = 1,788$ e $\lambda_5 = 3,006$.

O Gráfico \tilde{X} , para os valores dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, quando os limites de controle são obtidos a partir de (3.36) e (5.10), ou seja, quando σ é estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$, respectivamente, é mostrado na Figura 5.5.

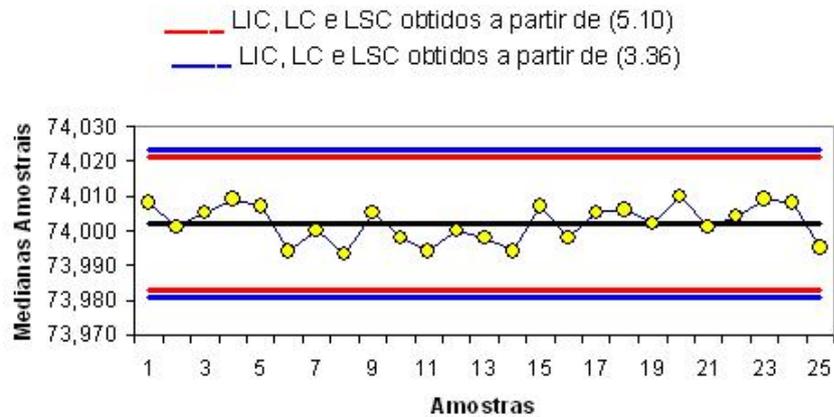


Figura 5.5 Gráfico \tilde{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$.

A partir da análise da Figura 5.5, é possível verificar que as estimativas para os limites de controle, obtidas a partir de (3.36) e (5.10), encontram-se muito próximas uma da outra, o que permite uma análise similar a respeito do estado de controle estatístico do processo.

Nota-se que, para os dados medidos dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão, retirados de Montgomery (2001), os gráficos de controle aprimorados a partir da utilização do estimador $\omega\overline{DAM}$ apresentam um desempenho semelhante ao dos Gráficos convencionais de Shewhart. Para uma avaliação mais detalhada do desempenho dos gráficos de controle aprimorados, é realizado na Seção 5.4 um novo estudo comparativo de desempenho que visa avaliar como estes gráficos se comportam diante de níveis mais altos de variabilidade nas amostras.

5.4 Avaliação do Desempenho dos Gráficos de Controle para Variáveis quando σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$

Um dos principais aspectos que define um estimador como robusto é a forma como ele se comporta diante de uma amostra ε -corrompida. Quanto menor for a alteração sofrida por este estimador sob a presença de *outliers* na amostra, mais robusto ele será dito. Uma importante propriedade de robustez é o ponto de ruptura, que pode ser definido

intuitivamente como a proporção de contaminação que um estimador pode suportar antes de acusar resultados arbitrariamente grandes.

Usualmente, define-se *outlier* (em termos quantitativos) como uma observação cujo valor está distante dos valores dos demais dados. Segundo Hampel *et al* (1986), a decisão a respeito do significado da palavra “distante” pode ser feita subjetivamente ou a partir de algum método formal. Uma contaminação por *outliers* nunca deve exceder 50% da amostra, pois se mais da metade das observações estiver contaminada então não será mais possível distinguir entre a distribuição base e a distribuição contaminada.

Em controle estatístico da qualidade, mais especificamente em gráficos de controle, os *outliers* são geralmente agentes indesejados, pois alteram significativamente a variabilidade e se tornam potenciais causadores da indicação de descontrole estatístico no processo. De uma maneira geral, várias causas podem ser apontadas para o surgimento de um *outlier* no processo, por exemplo, erro de digitação, erro de medição, erro de dosagem, problemas no maquinário, etc. Uma decisão comum é simplesmente ignorar a observação discrepante, retirando-a da amostra. No entanto, muitas vezes o *outlier* pode ser uma observação genuína da amostra e sua aparição, embora muitas vezes sob uma probabilidade muito pequena, pode ocorrer sob circunstâncias legítimas e isentas de falha (em modelos de caudas longas, por exemplo). Nestes casos, ignorar o *outlier* pode ser um erro.

Nesta Seção, é avaliado o desempenho dos gráficos de controle para variáveis aprimoradas nas Seções 5.2 e 5.3. Esta avaliação ocorre sob a presença de *outliers* nas amostras. Para tanto, são utilizados os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, retirados de Montgomery (2001) e mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.

A Figura 5.6 mostra o gráfico de controle do desvio padrão (Gráfico *S*) para os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão em quatro situações distintas. A linha central e os limites inferior e superior de controle são obtidos a partir de (5.2) e (3.10).

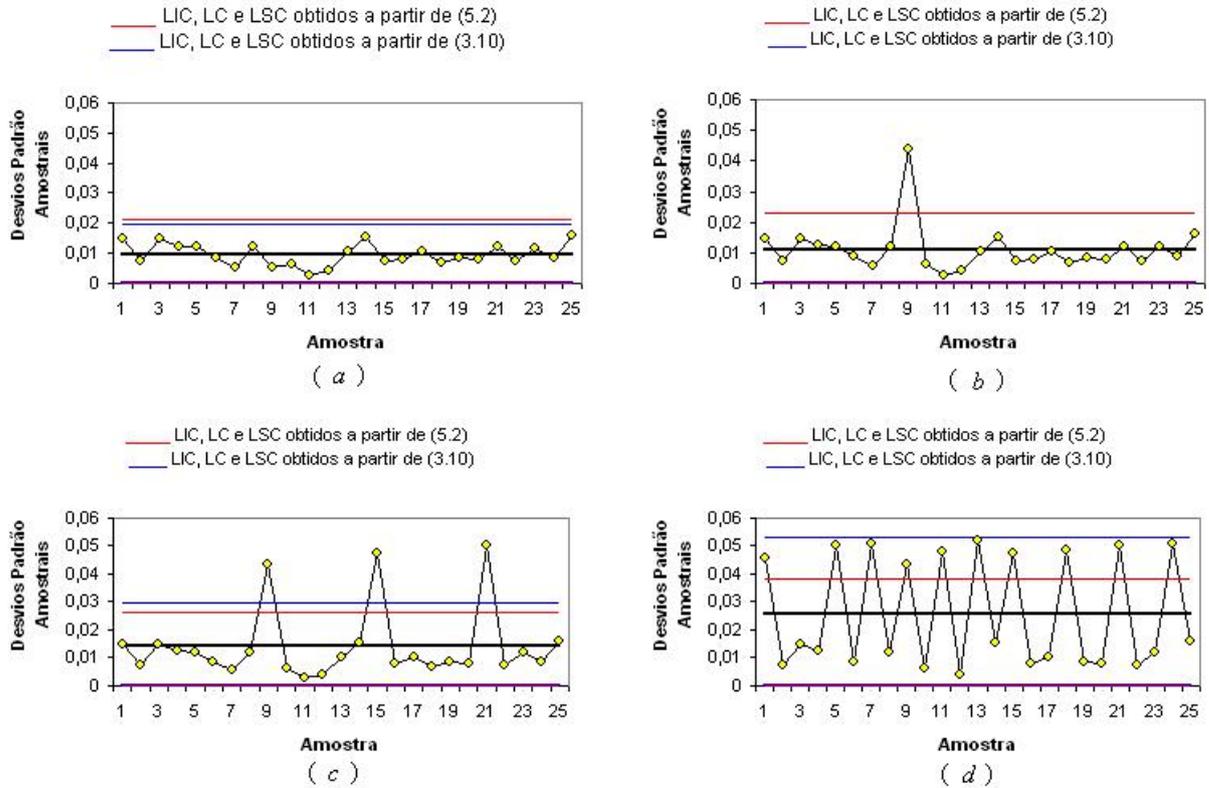


Figura 5.6 Gráfico \bar{S} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com três amostras contaminadas; (d) Processo com dez amostras contaminadas.

Na Figura 5.6, os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (5.2) estão em vermelho e são obtidos com σ sendo estimado por $\omega\overline{DAM}$. Os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (3.10) estão em azul e são calculados com σ sendo estimado por \bar{S}/c_n .

A Figura 5.6 (a) mostra o gráfico de controle do desvio padrão para os dados medidos do diâmetro interno (mm) de anéis de pistão (processo original). Nele, pode-se observar que o processo encontra-se sob controle estatístico. Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.2) e (3.10) localizam-se bem próximos um do outro, sendo os limites de controle obtidos a partir de (5.2) mais abertos do que aqueles obtidos a partir de (3.10).

A Figura 5.6 (b) mostra o gráfico do desvio padrão quando um *outlier* é introduzido na amostra 9 (ϵ -substituição). O *outlier* afeta os limites de controle obtidos a partir de (3.10),

que são calculados a partir de \bar{S}/c_n , um estimador não-robusto que se deixa influenciar fortemente por observações discrepantes. Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.2) permanecem inalterados. Como \bar{S}/c_n não é robusto, os limites de controle calculados a partir deste estimador tendem a “abrir” quando um *outlier* é introduzido na amostra. O mesmo não ocorre com os limites obtidos a partir de (5.2) porque seu cálculo é obtido a partir de $\omega\overline{DAM}$. Vale notar que, neste ponto, os limites de controle obtidos a partir de (3.10) e (5.2) praticamente coincidem.

Na Figura 5.6 (c), além do *outlier* introduzido na amostra 9, mais dois *outliers* são introduzidos (por ε -substituição) nas amostras 15 e 21, respectivamente. Percebe-se que, com a introdução dos dois *outliers*, os limites de controle obtidos a partir de (3.10) são mais fortemente afetados do que os obtidos a partir de (5.2), “abrindo” bem mais.

Na Figura 5.6 (d), além dos três *outliers* nas amostras 9, 15 e 21, são introduzidos mais sete *outliers* nas amostras 1, 5, 7, 11, 13, 18 e 24, respectivamente, somando dez *outliers* no total. Novamente, os limites de controle obtidos a partir de (3.10) são mais afetados do que aqueles obtidos a partir de (5.2). Neste caso, os limites de controle calculados a partir de (3.10), onde σ é estimado por \bar{S}/c_n , são tão fortemente influenciados pelos *outliers* que podem induzir o analista a acreditar que o processo esteja sob controle estatístico pelo simples fato de que todos os pontos estão localizados dentro dos limites de controle. Esta interpretação errônea do controle do processo só ocorre porque \bar{S}/c_n não possui boas propriedades de robustez, sendo fortemente afetado por *outliers* e fazendo, portanto, que os limites de controle se expandam indevidamente. Ainda sob o aspecto da análise da Figura 5.6 (d), nota-se que os limites calculados a partir de (5.2) se deixam afetar de forma menos significativa pelos *outliers*, acusando que o processo está, de fato, fora de controle estatístico. Como os limites obtidos a partir de (5.2) são calculados com σ estimado por $\omega\overline{DAM}$, torna-se possível a utilização de um gráfico de controle mais rigoroso, ou seja, menos tolerante a altos níveis de variabilidade e, conseqüentemente, menos tolerante a *outliers*. Vale notar que todos os dez *outliers* estão situados fora dos limites de controle obtidos a partir de (5.2), o que comprova o rigor aplicado pelo gráfico a partir da baixa tolerância a grandes níveis de variabilidade.

A Figura 5.7 mostra o gráfico de controle da média (Gráfico \bar{X}) para os dados medidos

dos diâmetros internos (mm) de anéis de pistão em quatro situações distintas. A linha central e os limites inferior e superior de controle são obtidos a partir de (5.8) e (3.30).

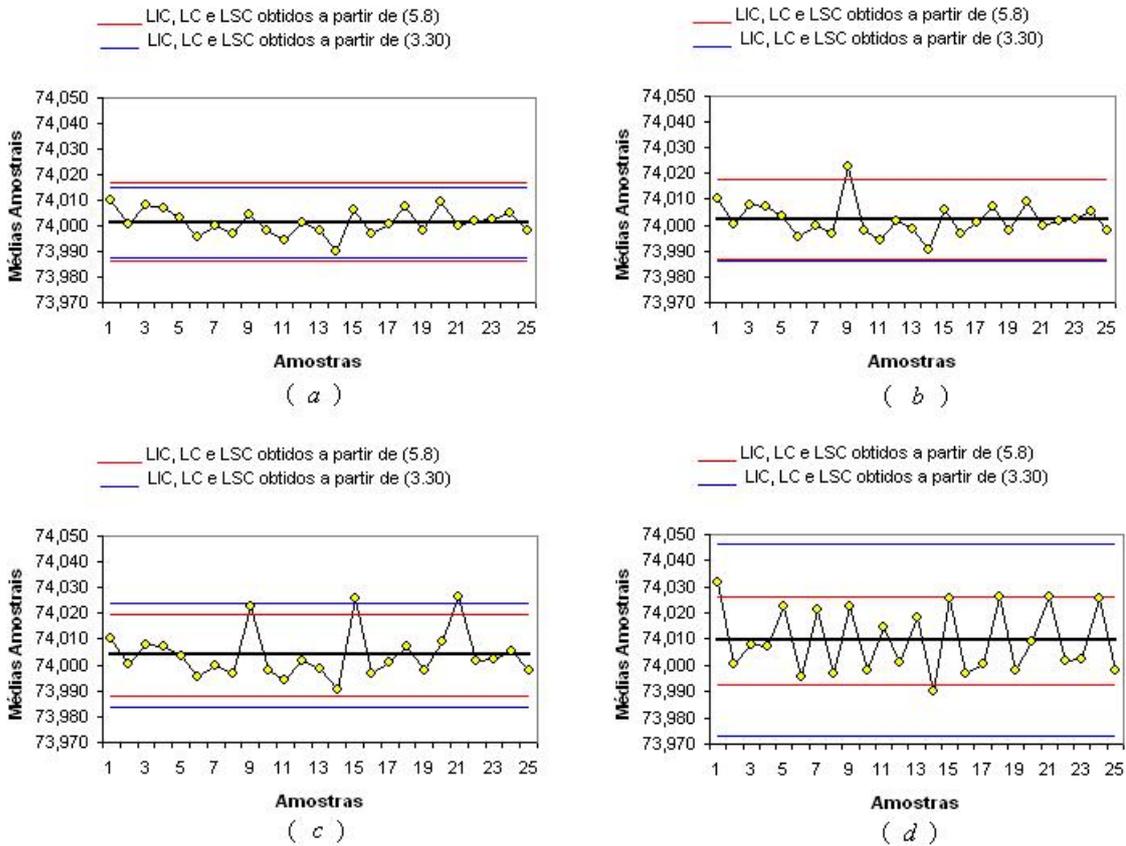


Figura 5.7 Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com três amostras contaminadas; (d) Processo com dez amostras contaminadas.

Na Figura 5.7, os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (5.8) estão em vermelho e são calculados com σ sendo estimado por $\omega\overline{DAM}$. Os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (3.28) estão em azul e são calculados com σ sendo estimado por \bar{S}/c_n . A Figura 5.7 ilustra, para o nível, a mesma situação já ilustrada na Figura 5.6, onde *outliers* são introduzidos arbitrariamente (por ε -substituição) no processo. Portanto, trata-se da mesma ε -corrupção já mostrada na Figura 5.6, mas agora sob o ponto de vista do nível do processo.

A Figura 5.7 (a) mostra o gráfico de controle da média para os dados medidos do

diâmetro interno (mm) de anéis de pistão (processo original). Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.8) são levemente mais abertos do que os limites de controle obtidos a partir de (3.28).

A Figura 5.7 (b) mostra o gráfico da média quando um *outlier* é introduzido na amostra 9. Os limites de controle obtidos a partir de (3.28), calculados com σ estimado por \bar{S}/c_n , são imediatamente afetados. Como \bar{S}/c_n não é robusto, os limites de controle calculados a partir deste estimador tendem a “abrir” quando um *outlier* é introduzido na amostra. Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.8) permanecem inalterados, pois sua obtenção é realizada a partir de $\omega\overline{DAM}$.

Na Figura 5.7 (c), além do *outlier* introduzido na amostra 9, mais dois *outliers* são introduzidos (por ε -substituição) nas amostras 15 e 21, respectivamente. Percebe-se que, com a introdução dos dois *outliers*, os limites de controle obtidos a partir de (3.28) são mais fortemente afetados do que os obtidos a partir de (5.8), “abrindo” bem mais. Já é possível observar que os três pontos contaminados por *outliers* estão fora dos limites de controle obtidos a partir de (5.8).

Na Figura 5.7 (d), além dos três *outliers* nas amostras 9, 15 e 21, são introduzidos mais sete *outliers* nas amostras 1, 5, 7, 11, 13, 18 e 24, respectivamente, somando dez *outliers* no total. Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (3.28) são mais afetados do que aqueles obtidos a partir de (5.8), fato explicado pela robustez do estimador $\omega\overline{DAM}$, utilizado em (5.8), que, não se deixando afetar tanto pelos *outliers*, acaba por produzir limites de controle menos sensíveis a discrepâncias nas amostras.

Em gráficos de controle para o nível, assim como os para a dispersão, a utilização de $\omega\overline{DAM}$ como estimador de σ induz a um controle mais rigoroso, posto que produz gráficos com limites de controle mais “fechados” e menos tolerantes sob a presença de *outliers* nas amostras que os produzidos por \bar{S}/c_n ou \bar{R}/d_2 , por exemplo. Isto contribui para uma redução da probabilidade de ocorrência do erro tipo II, o que por sua vez diminui a chance de que um alarme genuíno passe despercebido, reduzindo a tolerância do gráfico a possíveis *outliers* nas amostras.

A partir de um estimador de σ baseado no intervalo interquartil (medida que toma a

diferença entre o terceiro e o primeiro quartil), Ramos (2003) desenvolveu um gráfico de controle para o nível, onde LSC , LC e LIC são calculados, respectivamente, a partir de

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\overline{IQ}}{\xi_n \sqrt{n}} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\overline{IQ}}{\xi_n \sqrt{n}}, \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde ξ_n é uma constante necessária para tornar o estimador não-viesado para o parâmetro σ .

A utilização de \overline{IQ}/ξ_n como estimador de σ aplicado a construção de gráficos de controle tem a sua razão de ser fundamentada no fato de que \overline{IQ}/ξ_n é um estimador robusto de σ e apresenta um desempenho consideravelmente melhor que \overline{S}/c_n e \overline{R}/d_2 em processos potencialmente sujeitos a contaminação por *outliers*. Entretanto, com um ponto de ruptura de apenas 25%, \overline{IQ}/ξ_n pode não apresentar um desempenho tão satisfatório quando há ocorrência de diversos *outliers* numa mesma amostra, pois, assim sendo, dependendo da magnitude da contaminação, \overline{IQ}/ξ_n pode passar a tomar valores arbitrariamente grandes. Para evitar este problema seria necessário um estimador com um ponto de ruptura maior: $\omega\overline{DAM}$, por exemplo. Com um ponto de ruptura de 50%, o estimador $\omega\overline{DAM}$ tende a ter um desempenho razoavelmente melhor na presença de amostras massivamente contaminadas por *outliers*.

A Figura 5.8 ilustra uma comparação de desempenho entre os estimadores \overline{IQ}/ξ_n e $\omega\overline{DAM}$, quando estes são aplicados à construção de gráficos de controle. Para tanto, é utilizado o gráfico de controle da média (Gráfico \bar{X}) para os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão em quatro situações distintas. A linha central e os limites inferior e superior de controle são obtidos a partir de (5.8) e (5.12).

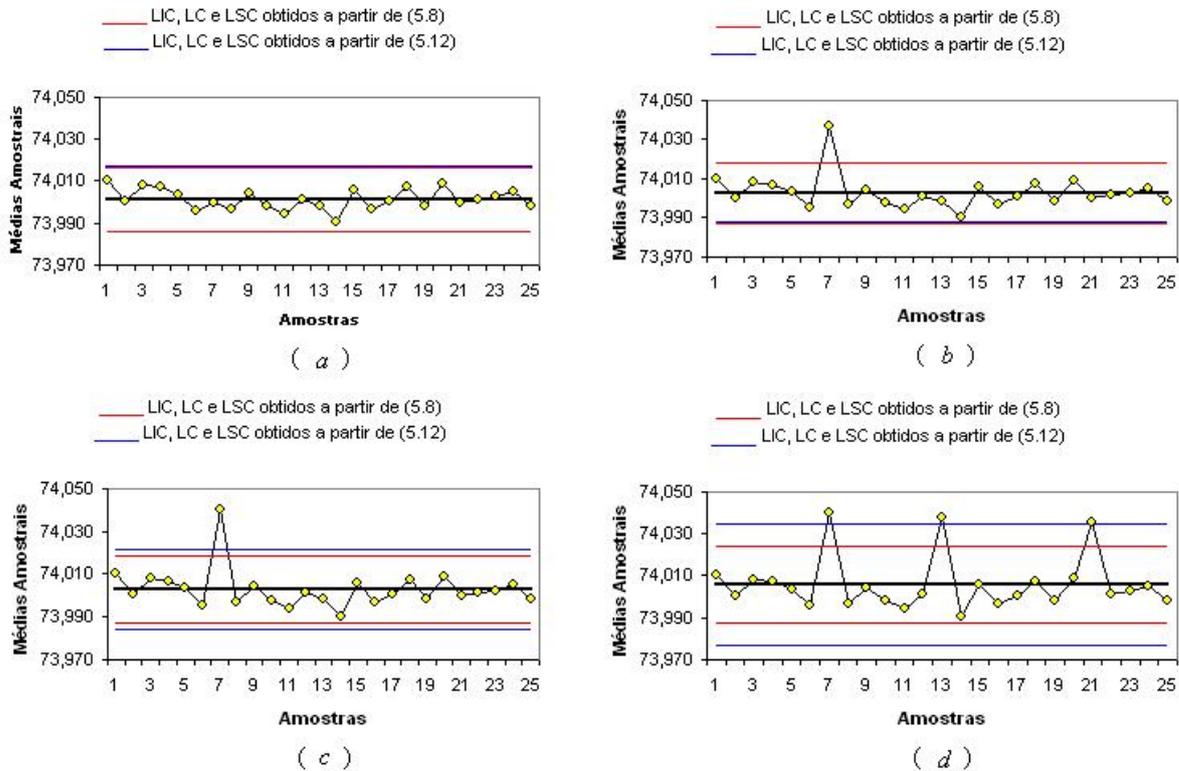


Figura 5.8 Gráfico \bar{X} para os diâmetros internos (mm) de anéis de pistão - σ estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e $\omega\overline{DAM}$: (a) Processo original; (b) Processo com uma amostra contaminada; (c) Processo com uma amostra contaminada; (d) Processo com três amostras contaminadas.

Na Figura 5.8, os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (5.8) estão em vermelho e são calculados com σ sendo estimado por $\omega\overline{DAM}$. Os limites inferior e superior de controle obtidos a partir de (5.12) estão em azul e são calculados com σ sendo estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$.

A Figura 5.8 (a) mostra o gráfico de controle da média para os dados medidos do diâmetro interno (mm) de anéis de pistão (processo original). Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.8) são muito próximos dos limites de controle obtidos a partir de (5.12), chegando praticamente a coincidir.

A Figura 5.8 (b) mostra o gráfico da média quando um *outlier* é introduzido na amostra 7. Nota-se que o *outlier* não afeta nenhum dos limites de controle, fato justificado pela já mencionada robustez dos estimadores $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e $\omega\overline{DAM}$. Entretanto, a diferença entre

os pontos de ruptura de \overline{IQ}/ξ_n (25%) e $\omega\overline{DAM}$ (50%) terá uma implicação direta no desempenho dos dois estimadores quando outro *outlier* for inserido na amostra 7.

A Figura 5.8 (c) ilustra o gráfico de controle para o nível quando um segundo *outlier* é inserido na amostra 7. Percebe-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.12) “abrem”, pois a introdução do segundo *outlier* na amostra 7 implica numa contaminação de 40% nesta amostra e na conseqüente ruptura do estimador \overline{IQ}/ξ_n . Com um ponto de ruptura de 50%, o estimador $\omega\overline{DAM}$ mantém-se inalterado e, conseqüentemente, também os limites de controle obtidos a partir dele.

A Figura 5.8 (d) mostra o gráfico de controle para o nível quando, além dos dois *outliers* inseridos na amostra 7, outros dois *outliers* são inseridos na amostra 13 e, ainda, outros dois são inseridos na amostra 21. Nota-se que os limites de controle obtidos a partir de (5.12) tendem a ser mais afetados do que aqueles obtidos a partir de (5.8). Novamente, a explicação para este fato encontra-se na diferença entre os pontos de ruptura de \overline{IQ}/ξ_n e $\omega\overline{DAM}$. Em (5.8) σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$, um estimador com um ponto de ruptura de 50%, e, em (5.12), σ é estimado por \overline{IQ}/ξ_n , um estimador com um ponto de ruptura de 25%. Em processos onde há um pequeno percentual de contaminação por amostras, os limites de controle obtidos a partir de (5.8) e (5.12) apresentam um desempenho semelhante. No entanto, quando esta fração de contaminação atinge níveis maiores dentro de uma mesma amostra, os limites de controle obtidos a partir de (5.8) são menos afetados do que os limites obtidos a partir de (5.12).

Nota-se que, de uma maneira geral, os limites de controle calculados com σ estimado por $\omega\overline{DAM}$ são menos afetados quando há observações discrepantes nas amostras. Isso ocorre porque $\omega\overline{DAM}$ é um estimador robusto com um ponto de ruptura de 50%, o maior possível dentre os estimadores para a dispersão. Essa propriedade garante a construção de um gráfico de controle que aplica maior rigor ao processo, justamente por ser menos tolerante a grandes níveis de variabilidade e, conseqüentemente, menos tolerante a observações discrepantes.

5.5 $\overline{\omega DAM}$ Aplicado aos Índices de Capacidade

Os índices de capacidade são medidas utilizadas para avaliar se um determinado processo consegue ou não atender às especificações de engenharia. Os índices mais comumente utilizados na literatura são C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} . Estes quatro índices possuem em comum o fato de que, para todos, o cálculo exige uma estimativa pontual de σ . Esta estimativa de σ terá uma função muito importante no cálculo dos índices de capacidade, pois é exatamente ela que determinará se o processo será capaz ou não dentro dos limites de especificação.

Tomando o índice C_p , previamente definido na Seção 3.5.2 do Capítulo 3 deste trabalho, tem-se

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma},$$

onde LIE e LSE são, respectivamente, os limites inferior e superior de especificação. Ao estimar σ por $\overline{\omega DAM}$, obtém-se

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\overline{\omega DAM}}. \quad (5.12)$$

Analogamente, tomando os índices C_{pu} e C_{pl} , formalmente definidos da Seção 3.5.3 do Capítulo 3 deste trabalho, têm-se

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\sigma}$$

e

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\sigma}.$$

Estimando σ por $\overline{\omega DAM}$, obtém-se

$$C_{pu} = \frac{LSE - \mu}{3\overline{\omega DAM}} \quad (5.13)$$

e

$$C_{pl} = \frac{\mu - LIE}{3\omega\overline{DAM}}, \quad (5.14)$$

onde μ é a média populacional. Naturalmente, no caso de especificação bilateral, pode-se tomar o índice C_{pk} , obtido a partir de (5.13) e (5.14), e dado por

$$C_{pk} = \min\{C_{pu}, C_{pl}\}. \quad (5.15)$$

Ao estimar σ por $\omega\overline{DAM}$ na obtenção de índices de capacidade, espera-se produzir índices mais robustos, ou, em outras palavras, menos sensíveis a discrepâncias nas amostras. Na Seção 5.6, é realizado um estudo de simulação com o intuito de avaliar o desempenho dos índices de capacidade aprimorados.

5.6 Avaliação do Desempenho dos Índices de Capacidade quando σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$

Para avaliar o desempenho dos índices C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} quando σ é estimado por $\omega\overline{DAM}$, são utilizados novamente os dados medidos dos diâmetros internos (*mm*) de anéis de pistão, retirados de Montgomery (2001) e mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B. São adotados como limites inferior e superior de especificação os valores 244 e 255, respectivamente, e então são calculados os índices que medem a capacidade deste processo segundo as especificações tomadas.

Após a obtenção dos índices de capacidade, um *outlier* é arbitrariamente introduzido na amostra 6. A presença deste *outlier* não chega a causar descontrole estatístico no processo, mas é suficiente para afetar o cálculo dos índices de capacidade. A Tabela 5.1 mostra os valores obtidos dos índices C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} , para quando σ é estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$ em dois momentos: antes e após a introdução do *outlier* em uma das amostras.

Tabela 5.1 Índices C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} para σ estimado por \bar{S}/c_n e $\omega\overline{DAM}$ em dois momentos: antes e após a introdução do outlier em uma das amostras.

Índices	Antes do outlier		Após o outlier	
	\bar{S}/C_n	$\omega\overline{DAM}$	\bar{S}/C_n	$\omega\overline{DAM}$
C_p	1,37	1,36	1,29	1,36
C_{pu}	1,33	1,32	1,25	1,32
C_{pl}	1,40	1,40	1,34	1,40
C_{pk}	1,33	1,32	1,25	1,32

De acordo com a análise da Tabela 5.1, nota-se que os índices C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} , obtidos com σ sendo estimado por $\omega\overline{DAM}$, mantêm-se inalterados quando o outlier é inserido em uma das amostras. O mesmo não ocorre quando os índices são obtidos com σ estimado por \bar{S}/c_n . Percebe-se que todos os índices têm seus respectivos valores alterados quando o outlier é inserido na amostra. Esta constatação comprova que a utilização de um estimador não-robusto no cálculo de índices de capacidade pode comprometer a análise do processo quando houver uma observação discrepante em uma das amostras. Isso fica ainda mais claro se, na Tabela 5.1, for feita uma análise isolada do índice C_p . Quando σ é estimado por \bar{S}/c_n , tem-se duas situações distintas para o índice C_p : uma anterior ao outlier, quando $C_p=1,37$ e o processo, portanto, é dito verde ($C_p > 1,33$), e outra posterior à introdução do outlier, onde $C_p = 1,29$ e o processo, portanto, é dito amarelo ($C_p \leq 1,33$). Logo, fica claro que, ao estimar σ a partir de um estimador não-robusto (como \bar{S}/c_n , por exemplo), uma única observação discrepante pode afetar todo o julgamento da capacidade do processo. Para σ estimado por $\omega\overline{DAM}$, a capacidade do processo permanece inalterada antes e após a introdução do outlier em uma das amostras.

Ao tomar a porcentagem da faixa de especificação utilizada, dada por $P = (1/C_p) \times 100\%$, verifica-se que $P(\bar{S}/c_n) = 72,99\%$ da faixa de especificação está sendo utilizada pelo processo antes da introdução do outlier na amostra. Após a introdução do outlier na amostra, a faixa de especificação utilizada sobe para $P(\bar{S}/c_n) = 77,52\%$. É importante notar que este acréscimo de quase 5% na faixa de especificação utilizada foi causado por um único outlier. Para σ estimado por $\omega\overline{DAM}$, tem-se $P(\omega\overline{DAM}) = 73,53\%$, tanto antes como após a introdução do outlier na amostra. Neste caso, a utilização de $\omega\overline{DAM}$ como

estimador de σ impede que uma única observação discrepante interfira diretamente na análise da faixa de especificação percentual utilizada pelo processo.

Uma vez que estimadores não-robustos se deixam influenciar fortemente por observações discrepantes, o valor estimado de σ no denominador aumenta diante de uma observação arbitrariamente grande, o que, em contrapartida, acaba por afetar a capacidade do processo. Se, sob as mesmas circunstâncias, um estimador robusto é utilizado na obtenção dos índices de capacidade, o *outlier* não terá grande influência no cálculo de σ (estimado). Isso impedirá que uma única observação comprometa a capacidade do processo. Não se deixando influenciar por uma única observação discrepante, espera-se que um estimador robusto induza a uma análise mais justa e mais próxima da real capacidade do processo.

Vale notar que a utilização de um estimador robusto na obtenção dos índices de capacidade pode se tornar um grande problema quando as amostras em questão estiverem contaminadas por uma quantidade considerável de *outliers*. Para um processo massivamente contaminado por *outliers*, seria interessante que o índice de capacidade mostrasse claramente o problema. Ao utilizar um estimador robusto no cálculo do índice de capacidade, pode-se estar indevidamente ocultando o problema, já que o estimador robusto não se deixa alterar significativamente diante de observações discrepantes. Portanto, a utilização de um estimador robusto na obtenção de índices de capacidade exigirá por parte do analista, acima de tudo, cautela e um estudo detalhado das amostras estudadas.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 6

Considerações Finais e Recomendações

6.1 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo aprimorar ferramentas do controle estatístico da qualidade a partir da utilização de um estimador robusto do desvio padrão σ baseado no desvio absoluto mediano. Para tanto, foi mostrada inicialmente uma breve apresentação dos princípios de estimação, bem como as principais propriedades e os estimadores para o nível e para a dispersão utilizados em controle estatístico de qualidade.

Foi apresentada a uma visão geral a respeito dos gráficos de controle, bem como da base estatística para a sua construção, obtenção dos limites de controle, análise e interpretação. Também foram abordados os principais gráficos de controle para variáveis utilizados no monitoramento tanto do nível como da dispersão, além dos principais índices para a avaliação da capacidade do processo, destacando suas metodologias de construção e formas de interpretação.

Além disso, foram mostrados princípios de estimação robusta, bem como algumas propriedades de robustez. A estrutura teórica da estimação do desvio padrão σ a partir do estimador robusto baseado no desvio absoluto mediano foi desenvolvida e o estimador apresentado. Resultados de simulação sugerem que o estimador baseado no desvio absoluto mediano apresenta um desempenho satisfatório em comparação com os estimadores \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 , possuindo ainda, melhores propriedades de robustez que os referidos estimadores e, por isso, apresentando um desempenho mais satisfatório em amostras contaminadas por *outliers*.

A aplicação do estimador do desvio padrão σ baseado no desvio absoluto mediano no processo de construção de gráficos de controle para variáveis, utilizados no monitoramento do nível e da dispersão do processo, foi mostrada. Verificou-se que os gráficos de controle

construídos com os limites obtidos a partir do estimador baseado no desvio absoluto mediano são mais robustos, detectando com maior eficácia a presença de observações discrepantes na amostra. Verificou-se também que, na presença de *outliers*, os limites produzidos tendem a reduzir a probabilidade do erro tipo II. Assim, sua utilização se mostrará eficiente também em processos onde se deseja aplicar um maior rigor de controle, ou seja, menor tolerância a altos níveis de variabilidade.

Para os índices C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} , a aplicação do estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano possibilitou a obtenção de estimativas mais robustas, induzindo a uma análise mais justa e mais próxima da real capacidade do processo, já que uma possível observação discrepante não irá interferir no valor final do índice.

Finalmente, quatro índices de capacidade e cinco gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo foram aprimorados.

6.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

Recomenda-se para trabalhos futuros:

- Utilizar novos estimadores robustos de σ e avaliar sua aplicação no aprimoramento de ferramentas em *CEQ*;
- Utilizar o estimador de σ baseado no desvio absoluto mediano para construção de limites de controle do gráfico de controle de regressão;
- Obter o *ARL* (estatística que define o número de amostras selecionadas antes de ocorrer um sinal fora dos limites de controle) para os gráficos de controle da média, da mediana, da amplitude, da variância e do desvio padrão, quando o estimador de σ for baseado no desvio absoluto mediano;
- Construir as *CCO* (curvas que indicam a probabilidade de ocorrência do erro tipo II) para os gráficos de controle da média, da mediana, da amplitude, da variância e do desvio padrão, quando o estimador de σ for baseado no desvio absoluto mediano;
- E finalmente, estender a aplicação de $\omega\overline{DAM}$ a outros índices de capacidade, como o índice C_{pm} , por exemplo.

..

Apêndice A

**Tabelas dos Fatores para Construção dos
Gráficos de Controle**

Tabela A.1 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis.*

n	ω	d_2	d_3	c_n	ξ_m	\tilde{d}_2	\tilde{d}_3
2	1,773	1,128	0,853	0,798	0,562	0,954	0,450
3	2,216	1,693	0,888	0,886	0,845	1,588	0,435
4	2,021	2,059	0,880	0,921	0,962	1,978	0,445
5	1,788	2,326	0,864	0,940	0,987	2,257	0,457
6	1,779	2,534	0,848	0,915	1,061	2,472	0,468
7	1,690	2,704	0,833	0,959	1,112	2,645	0,477
8	1,674	2,847	0,820	0,965	1,136	2,791	0,487
9	1,641	2,970	0,808	0,969	1,142	2,915	0,495
10	1,612	3,078	0,797	0,973	1,171	3,024	0,503
11	1,590	3,173	0,787	0,975	1,190	3,121	0,509
12	1,586	3,258	0,778	0,978	1,203	3,207	0,515
13	1,579	3,336	0,770	0,979	1,206	3,285	0,521
14	1,579	3,407	0,763	0,981	1,224	3,356	0,527
15	1,566	3,472	0,756	0,982	1,232	3,422	0,532
16	1,565	3,532	0,750	0,984	1,234	3,382	—
17	1,554	3,588	0,744	0,985	1,240	3,538	—
18	1,565	3,640	0,739	0,985	1,248	3,591	—
19	1,546	3,689	0,733	0,986	1,253	3,640	—
20	1,544	3,735	0,729	0,987	1,258	3,686	—
21	1,537	3,778	0,724	0,988	1,261	—	—
22	1,541	3,819	0,720	0,988	1,264	—	—
23	1,539	3,858	0,716	0,989	1,270	—	—
24	1,536	3,895	0,712	0,989	1,274	—	—
25	1,532	3,931	0,708	0,990	1,274	—	—

Fonte: Montgomery (2001).

Tabela A.2 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - σ estimado por ωDAM .*

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2	3,206	4,537	13,337	3,761	4,714
3	3,083	5,903	14,732	3,838	4,810
4	2,362	5,335	10,005	3,032	3,799
5	1,830	4,634	6,782	2,399	3,006
6	2,153	4,526	6,005	2,179	2,731
7	1,437	4,223	4,947	1,916	2,402
8	1,317	4,118	4,494	1,776	2,225
9	1,216	3,978	4,039	1,641	2,057
10	1,116	3,854	3,675	1,529	1,917
11	1,060	3,754	3,392	1,438	1,803
12	0,993	3,702	3,218	1,374	1,721
13	0,966	3,647	3,054	1,314	1,647
14	0,919	3,614	2,934	1,266	1,587
15	0,887	3,552	2,781	1,213	1,520
16	0,837	3,521	2,683	1,174	1,471
17	0,804	3,469	2,561	1,131	1,417
18	0,810	3,470	2,520	1,107	1,387
19	0,773	3,400	2,390	1,064	1,334
20	0,744	3,337	2,320	1,036	1,298
21	0,712	3,338	2,241	1,006	1,261
22	0,714	3,329	2,199	0,986	1,235
23	0,683	3,306	2,142	0,963	1,207
24	0,682	3,281	2,087	0,941	1,179
25	0,648	3,254	2,033	0,919	1,152

Apêndice B

Tabela com Exemplo para Aplicação

Tabela B.1 *Medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistão.*

n	ω
20	1,544
21	1,537
22	1,541
23	1,539
24	1,536
25	1,532

Bibliografia

- BANKS, J. **Principles of Quality Control**. New York: John Wiley & Sons, 1989.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- BUSSAB, W. O.; MORETTIN P. A. **Estatística Básica**. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2002.
- CHAVES, J. B. P. **Controle de Qualidade para Indústrias de Alimentos (Princípios Gerais)**. Viçosa: Imprensa Universitária, 1980.
- COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico da qualidade**. 2.ed, São Paulo: Atlas, 2005.
- COSTA NETO, P. L. O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.
- CROUX, C.; ROUSSEEUW, P. J. **Time-Efficient Algorithms for two highly Robust Estimators of Scale** Computational Statistics, *v. 1*, eds. Y. Dodge and John Whittaker, Heidelberg: Physika - Verlag, 1992.
- DAMIÃO, J. E. F. **Comparação de Carteiras Otimizadas Segundo o Critério Media-Variância Formadas Através de Estimativas Robustas de Risco e Retorno**. São Paulo, 2007. Dissertação (Mestrado em Economia). Programa de mestrado profissional em economia, Faculdade IBMEC São Paulo.
- DEMING, W. E. **Quality, Productivity and Competitive Position**, Cambridge, 1982.
- DONOHO, D. L.; HUBER, P. J. **The notion of breakdown point**. In a festschrift for Erich L. Lemann, P. J. Bickel, K. A. Doksum, J. L. Hodges Jr. (eds.). Wadsworth, Belmont, California, 1983.
- DUNCAN, A. J. **Quality Control and Industrial Statistics**. Homewood: Richard D. Irwin, 1974.
- GEYER, C. J. **Breakdown Point Theory Notes**. 2006. Disponível em <www.stat.umn.edu/geyer/560/notes/break.pdf>. Acesso em 10/09/2008.
- HAMPEL, F. Robust Statistics: a Brief Introduction and Overview. In: SEMINAR FÜR STATISTIK, 2001, Switzerland. **Robust Statistics: a Brief Introduction and Overview**. Switzerland: 2001.
-**Contributions to the theory of robust estimation**. Berkeley, 1968. Phd

- thesis. University of California.
- HAMPEL, F. R.; RONCHETTI, E. M.; ROUSSEEUW, P. J. e STAHEL, W. A. **Robust Statistics - The Approach Based on Influence Functions**. New York: John Wiley and Sons, 1986.
- JURAN, J. M.; MOTINGELLI, N. **A Qualidade desde o projeto: Novos Passos para o Planejamento da Qualidade em Produtos e Serviços**. São Paulo: Pioneira, 1997.
- JURECKOVÁ, J.; PICEK, J. **Robust Statistical Methods with R**. Boca Raton: Chapman & Hall, 2006.
- KOTZ, S.; JOHNSON, N. L. **Process Capability Índices**. London: Chapman Hall, 1993.
- KOTZ, S.; LOVELACE, C. R. **Process Capability Indices in Theory and Practice**, New York: Arnold, 1998.
- KUME, H. **Métodos Estatísticos para Melhoria da Qualidade**. São Paulo: Gente, 1993.
- LUCAS, J. M. **The Design and the Use of V-Mask Control Schemes**. *Journal of Quality Technology*, v. 8, n. 1, 1976.
- MEYER, P. L. **Probabilidade: Aplicações à Estatística**. Rio de Janeiro: editora S.A., 1978.
- MONTGOMERY, D. C.; **Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade**. New York: John Wiley & Sons, 4th.ed., 2001.
- MOREIRA, F.; ECHEVESTE. Uma abordagem de Análise para o Controle Estatístico de Processo com Dados Autocorrelacionados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, XXIV, 2004, Florianópolis. **Uma abordagem de Análise para o Controle Estatístico de Processo com Dados Autocorrelacionados**. Florianópolis: 2004.
- MOSTELLER, F.; TUKEY, J. W. **Data Analysis and Regression: A second course in Statistics**. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
- NEAVE, H. R.; WHEELER, D. J. **Shewhart's Charts and the Probability Approach**. Ninth annual conference of the British Deming association. May, 1996.
- PRAZERES, P. M. **Dicionário de Termos da Qualidade**. São Paulo: Atlas, 1996.
- RAMOS, E. M. L. S. **Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas do Controle Estatístico da Qualidade - Utilizando Quartis para Estimar o Desvio Padrão**. Florianópolis, 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina.
- REIS, M. M.; PALADINI, E. P. e EPPRECHT. E. **STCEQ - Um Sistema Tutorial Inteligente para Controle Estatístico da Qualidade**. Departamento de engenharia de produção e sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2000.
- ROUSEEUW, P. J. **Re: Question about median absolute deviation**. [Mensagem pessoal] Mensagem recebida por Peter.Rousseeuw@ua.ac.be em 22 jun. 2008.

SAS Institute Inc., **SAS/QC® User'S Guide, version 8**, Cary, NC: SAS Institute Inc., 1999.

WESTERN ELECTRIC. **Statistical Quality Control Handbook**. Western Electric Corporation, Indianapolis, 1956.