SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domínio Cilíndrico

Belém

ICEN - UFPA

Março 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domínio Cilíndrico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof°.Dr. Geraldo Mendes de Araújo

Área de Concentração: ANÁLISE

Belém

ICEN - UFPA

Março 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domínio Cilíndrico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 07 de Março de 2008.

Conceito:_______________

Banca Examinadora

Prof.° Dr. Geraldo Mendes de Araújo	Prof.° Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes
Instituto de Matemática $-UFPA$	Instituto de Matemática $-UFPA$
(Presidente)	(Membro Interno 1)
Prof.° Dr. Ducival Carvalho Pereira	Prof.° Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros
Instituto de Matemática $-UFPA$	Instituto de Matemática $-UFRJ$
(Membro Interno 2)	(Membro Externo 1)

Resumo

Seja $T > 0$ e Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ.

Considere-se o sistema de Navier-Stokes com viscosidade variável:

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad \text{em} \quad Q \\ div\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde Q é o cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $Q = \Gamma \times]0,T[$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$.

Neste trabalho investiga-se a existência de soluções fracas para o sistema (P_1) quando $n \leq 4$ e a unicidade das soluções quando $n \leq 3$, usando-se para isso as idéias de J. L. Lions [9].

Palavras-chaves: Equação de Navier-Stokes com viscosidade variável, domínio cilíndrico, soluções fracas.

Abstract

Let $T > 0$ and Ω a bounded open set of with boundary Γ.

Consider the Navier-Stokes Sistem with variable viscousity:

$$
(P_1) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad \text{in} \quad Q, \\ div\, u = 0 \quad \text{in} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{cases}
$$

where Q is the cylinder of $\mathbb{R}^{n+1}$ defined by $Q = \Gamma \times]0, T[$, with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

In this work we investigate the existence of weak solutions to the sistem (P_1) when $n \leq 4$ and uniquiness of solutions when $n \leq 3$, following the ideas of J. L. Lions [9].

Key Words: Navier-Stokes Equations with variable viscousity, cylindrical domain, weak solutions.

Índice

Introdução

O modelo matemático que descreve o movimento de um fluido incompressível (densidade constante) é dado pelo sistema de equações diferenciais de Navier-Stokes em coordenadas de Euler

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \\ div\, u = 0 \end{cases}$$

Aqui $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ é uma função vetorial com $u = u(x,t)$ onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pertence ao $\mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$ um número real.

Note que u é a velocidade do fluido, f é a densidade volumétrica de forças, $p = p(x,t)$ é a pressão no ponto (x,t) e a constante ν é a viscosidade do fluido que supomos $\nu > 0$.

A análise matemática do problema (P) foi iniciado por Leray em 1934 [8]. Um estudo sistemático do problema (P) em continuação ao de Jean Leray foi realizado por Lions (1969)[9], O.A. Ladyzhenskaya (1989)[7], Roger Teman (1979)[15], Luc Tartar (1999)[14] e vários outros matemáticos.

O problema que será analizado neste trabalho foi proposto por Ladyzhenskaya (1989) o qual consiste em supor que em (P) ν é uma função de u.

Quando ν é da forma $\nu = \nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2$, com ν_0, ν_1 são constantes positivas foi investigado por G.M. de Araújo, M. Milla Miranda, L.A. Medeiros (2003)[4] em um domínio não cilíndrico.

Seguindo as idéias de Lions (1969), G.M. de Araújo, M. Milla Miranda, L.A. Medeiros (2003) estudar-se-à o problema (P) em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times]0, T[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, mais precisamente:

$$
(P_1) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad \text{em} \quad Q, \\ div\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{cases}
$$

com $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, ..., \Delta u_n)$ e

$$
||u(t)||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x,t) \right)^2 dx,
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n \,; \quad div\, u = 0\} \\
&\mathcal{V} = \{\varphi \, \in \, (D(\Omega))^n \,; \quad div\, \varphi = 0\} \\
&H = \{v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n, \, div\, v = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega), v.\eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\}
\end{aligned}
$$

Problema 1. *Sejam* $f \in L^{4/3}(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$. *Determinar*

$$
u \in L^\infty(0,T;H) \,\cap\, L^4(0,T;V) \quad e \quad p \in D'(Q)
$$

tal que

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad em \quad D'(Q) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}
$$

Problema 2. *Sejam* $f \in L^{4/3}(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$. *Determinar*

$$
u \in L^\infty(0,T;H) \,\cap\, L^4(0,T;V)
$$

tal que

$$
\begin{cases} \langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t),v) \quad + \quad \nu_1 \, \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f, v\rangle \quad em \quad D'(0,T) \\ para\ todo \quad v \in V. \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}
$$

onde

$$a(u(t),v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x,t)dx$$

$$\langle \mathcal{A}u(t),v\rangle=-||u(t)||^2\Delta u$$

$$b(u(t),u(t),v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_i dx$$

O plano que se tem em mente é mostrar a equivalência dos dois problemas e a seguir resolver o problema 2.

(i) Problema 1 implica o Problema 2.

Multiplicando e integrando em Ω a equação do problema 1 por $v\in V$ temos

$$\int_{\Omega}u'.v\,dx\;-\nu_0\int_{\Omega}\Delta u.v\,dx+\nu_1\int_{\Omega}-||u(t)||^2\Delta u.v\,dx+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}u_j\frac{\partial u}{\partial x_j}v\,dx\;=\;\int_{\Omega}f.v\,dx$$
$$+\int_{\Omega}-(grad\,p)v\,dx\qquad.$$

Agora,

$$\int_{\Omega}-\Delta u.v\,dx=-\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\eta}.v\,d\Gamma+\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v\,dx=\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v\,dx$$

Lembrando que

$$\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v\,dx=\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx$$

como $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ e $v=(v_1,v_2,...,v_n)$ logo,

$$\int_{\Omega}\nabla u.\nabla v\,dx=\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,dx=a(u(t),v)$$

tem-se também que

$$\int_{\Omega} -||u(t)||^2 \Delta u.v\, dx = \int_{\Omega} \mathcal{A}u(t).v\, dx = \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle$$

e

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\, dx = b(u(t), u(t), v)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}(p, div\, v) &= \int_{\Omega} p.(div\, v)\, dx = \int_{\Omega} p. \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} p. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(p.v_i \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial v_i} v\, dx \right) = \sum_{j=1}^{n} - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial v_i} v\, dx = \int_{\Omega} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial v_i} v\, dx \\ &= \int_{\Omega} (-grad\, p).v\, dx = (-grad\, p, v)\end{aligned}$$

como $v \in V$ temos que $div\, v = 0$, logo, $(-grad\, p, v) = (p, div\, v) = 0$. Portanto

$$\langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v\rangle \quad \text{em} \quad D'(0, T)$$

para todo $v \in V$ e $u(x, 0) = u_0(x)$

(ii) Problema 2 implica no Problema 1.

Usa-se o seguinte resultado

Teorema 0.1. *(De Rham) Seja* $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in (D'(Q))^n$ *tal que* $\langle f, \varphi\rangle = 0$ *para toda* $\varphi \in \mathcal{V}$*, então existe* $p \in D'(Q)$ *tal que* $f = grad\, p$*.*

Para $v \in V$ resulta que

$$\langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t), u(t), v) - \langle f, v\rangle = 0.$$

Seja L tal que

$$\langle u', \varphi\rangle + \nu_0\, a(u(t), \varphi) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), \varphi\rangle + b(u(t), u(t), \varphi) - \langle f, \varphi\rangle = \langle L, \varphi\rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{V}$, assim $L \in D'(Q)$ e $\langle L, \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{V}$. Logo pelo teorema de De Rham existe $p \in D'(Q)$ tal que $L = -grad\, p$. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad \text{em} \quad D'(Q)$$

e $u(x,0) = u_0(x)$

Assim definimos solução fraca do problema (P_1)

Definição 0.1. *(Solução fraca) Dada $f \in L^{4/3}(0,T;V')$ e $u_0 \in H$. Uma função na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \,\cap\, L^4(0,T;V)$$

é denominada solução fraca do problema (P_1) se verificar

$$\langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t),v) + \nu_1 \,\langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f, v\rangle \quad \text{em} \quad D'(0,T)$$

para todo $v \in V$ e $u(x,0) = u_0(x)$

O objetivo no presente trabalho é demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.2. *Sejam $f \in L^{4/3}(0,T;V')$, $n \leq 4$ e $u_0 \in H$. Então existe $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ na classe*

$$u \in L^\infty(0,T;H) \,\cap\, L^4(0,T;V)$$

satisfazendo

$$\begin{cases} \langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t),v) \;+\; \nu_1 \,\langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f, v\rangle \quad em \quad D'(0,T) \\ para\ todo \quad v \in V \\ div\, u = 0 \quad em \quad Q \\ u = 0 \quad em \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Teorema 0.3. *Sejam $f \in L^{4/3}(0,T;V')$, $n \leq 3$ e $u_0 \in H$. Então existe uma única $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ na classe*

$$u \in L^{\infty}(0,T;H) \,\cap\, L^4(0,T;V)$$

satisfazendo

$$\begin{cases} \langle u', v\rangle + \nu_0\, a(u(t),v) \quad + \quad \nu_1\, \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f, v\rangle \quad \text{em} \quad D'(0,T) \\ \text{para todo} \quad v \in V \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesta parte serão fixadas as notações, bem como apresentados os espaços funcionais e resultados importantes utilizados no trabalho.

Seja $T > 0$ um número real e Ω um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ. Considere-se o cilíndro

$$Q = \Omega \times]0, T[$$

com fronteira lateral

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$$

a qual supõe-se regular.

Considere-se o seguinte sistema de Navier-Stokes com Viscosidade Variável:

$$(P_1) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 ||u(t)||^2)\Delta u \quad + \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad\, p \quad \text{em} \quad Q \\ div\, u = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde ν_0 e ν_1 são constantes postivas e

$$||u||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x,t) \right)^2 dx$$

Define-se agora os seguintes espaços funcionais:

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n ; \quad div\, u = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (D(\Omega))^n ; \quad div\, \varphi = 0\}$$

$$H = \{v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n , \, div\, v = 0 \quad \text{em} \quad D'(\Omega), v.\eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\}$$

onde $V = \overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^n}$ com o produto interno e norma dados respectivamente por:

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx$$

$$||u||^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx$$

e $H = \overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^n}$ com o produto interno e norma dados respectivamente por:

$$(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_i(x)\, v_i(x)\, dx$$

$$|u|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |u_i|^2\, dx$$

Denotar-se-à por V' o dual de V e por $\langle \, , \rangle$ a dualidade entre V' e V, quando nada for dito em contrário.

Considere-se a forma bilinear

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx = ((u,v))$$

para todo u e v em $(H_0^1(\Omega))^n$ e a forma trilinear

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, w_i\, dx$$

para toda u, v e w em $(H_0^1(\Omega))^n$.

Lema 1.1. *Relativamente a forma bilinear $a(u,v)$ tem-se:*

i) $\langle Au, v\rangle = a(u,v) \qquad \forall u, v \in V$, *onde* $Au = -\Delta u$.

ii) $a(u,u) = ||u||^2 \qquad \forall u \in V$.

iii) $|a(u,v)| \leq ||u||\, ||v|| \qquad \forall u, v \in V$.

Demonstração:

i) Sejam $\varphi, \phi \in \mathcal{V}$, então,

$$\langle A\varphi, \phi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \phi\rangle = \int_\Omega -\Delta\varphi\, \phi\, dx = -\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\phi\, dx + \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla\phi\, dx = \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla\phi\, dx$$

pois $\phi \in \mathcal{V}$, ou seja $\phi \in (D(\Omega))^n$. Assim,

$$\langle A\varphi, \phi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \phi\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\, dx = a(\varphi, \phi).$$

Desde que $\mathcal{V}$ é denso em V, resulta que

$$\langle Au, v\rangle = a(u, v) \qquad \forall u, v \in V,$$

o que mostra a parte i).

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad a(u,u) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx = \sum_{i=1}^{n} |\nabla u_i|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2_{H_0^1(\Omega)} = ||u||^2 \qquad \forall u \in V, \end{aligned}$$

o que mostra a parte ii).

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad |a(u,v)| &= \left| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \nabla u_i . \nabla v_i\, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\nabla u_i| . |\nabla v_i|\, dx \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy- Schwarz segue-se que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |\nabla u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^{n} |\nabla u_i|_{L^2(\Omega)}\, |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)}\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||u_i||_{H_0^1(\Omega)}\, ||v_i||_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

novamente pela desigualdade de Cauchy- Schwarz segue-se que

$$|a(u,v)| \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{n} ||u_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = ||u||\,||v||.$$

Portanto,

$$|a(u,v)| \leq ||u||\,||v|| \qquad \forall u, v \in V$$

o que mostra a parte iii). ■

Lema 1.2. *Relativamente a forma trilinear $b(u,v,w)$ para $n \leq 4$, tem-se:*

i) $|b(u,v,w)| \leq C\,||u||\,||v||\,||w|| \qquad \forall u, v, w \in V.$

ii) *Para todo $u \in V$ a forma linear Bu definida por $v \longmapsto \langle Bu, v\rangle = b(u,u,v)$ é contínua sobre V, ou seja, $Bu \in V'$ e*

$$||Bu||_{V'} \leq C\,||u||^2.$$

iii) $b(u,u,v) = -b(u,v,u) \qquad \forall u, v \in V$

Demonstração:

i) Mostrar-se-à a continuidade de $b(u,v,w)$ em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. O espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ é dotado da norma,

$$v \longrightarrow \left(||v||^2 + ||v||^2_{(L^n(\Omega))^n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

com

$$||v||^2_{(L^n(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2_{L^n(\Omega)}.$$

Considera-se $u \in V$, $v \in V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Tem-se que $u_i \in H_0^1(\Omega)$; $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$.

Do teorema de Imersão de Sobolev resulta que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $q = \dfrac{2n}{n-2}$. Se $n > 2$ segue-se que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

e $u_i \in L^q(\Omega)$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $w_i \in L^n(\Omega)$, assim tem-se que

$$|b(u,v,w)| = \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| \, dx$$

da desigualdade de Hölder segue-se que:

$$
\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_j|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |w_i|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||u_j||_{L^q(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ vem que $||u_j||_{L^q(\Omega)} \leq C||u_j||_{H_0^1(\Omega)}$ assim

$$
|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||u_j||_{H_0^1(\Omega)} C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^n(\Omega)}
$$

aplicando a desigualdade de Cauchy relativamente ao índice j resulta

$$
|b(u,v,w)| \leq C \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ||u_j||_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} ||w_i||_{L^n(\Omega)}.
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |\nabla v_i|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla v_i|_{L^2(\Omega)} = ||v_i||_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
|b(u,v,w)| \leq C \, ||u|| \sum_{i=1}^{n} ||v_i||_{H_0^1(\Omega)} \, ||w_i||_{L^n(\Omega)}
$$

pela desigualdade de Cauchy para somas segue-se que

$$
|b(u,v,w)| \leq C||u|| \left(\sum_{i=1}^{n} ||v_i||_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_i||_{L^n(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
$$

e assim

$$
|b(u,v,w)| \leq C||u|| \, ||v|| \, ||w||_{(L^n(\Omega))^n}.
$$

Mostrando que $b(u,v,w)$ é contínua em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Agora, para $n \leq 4$ temos que $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$. De fato, é imediato que $(V \cap (L^n(\Omega))^n) \subset V$. Resta mostrar que $V \subset (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. Note que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ quando $n \leq \dfrac{2n}{n-2}$, devido ao teorema de Imersão de Sobolev, ou seja, quando $n \leq 4$. Seja $u \in V$, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ implica que $V \subset (H_0^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^n(\Omega))^n$ resulta que $u \in (L^n(\Omega))^n$ e assim $u \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Portanto $(V \cap (L^n(\Omega))^n) = V$ para $n \leq 4$, assim

$$|b(u,v,w)| \leq C||u||\,||v||\,||w|| \qquad \forall u,v,w \in V.$$

ii) Fixando u em V, resulta que a aplicação Bu definida por $v \mapsto \langle Bu, v\rangle = b(u,u,w)$ é linear e contínua sobre V, pelo item anterior. Resulta que

$$|\langle Bu, v\rangle| = |b(u,u,v)| \leq C||u||^2\,||v||$$

logo,

$$\sup_{||v|| \leq 1} |\langle Bu, v, \rangle| \leq ||u||^2$$

portanto

$$||Bu||_{V'} \leq C||u||^2 \qquad \forall u \in V.$$

iii) Basta mostrar que $b(u,u,v) + b(u,v,u) = 0$ para todo u e v em V. De fato,

$$\begin{aligned}
b(u,u,v) + b(u,v,u) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\,dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i\,dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i\,dx + \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i\,dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i \right) dx \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega u_j \frac{\partial (u_i\, v_i)}{\partial x_j}\,dx \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(u_j\, u_i\, v_i \Big|_\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i\, v_i\ dx \right) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i\, v_i\ dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i\, v_i\ dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (div\, u)\ u_i\, v_i\ dx = 0
\end{aligned}$$

pois $u \in V$. ■

Lema 1.3. *Considere o funcional*

$$J : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$Ju = \frac{1}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2$$

então,

1. *J é diferenciável à Gateaux e sua derivada $J'u$ é dada por*

$$\langle J'u, v\rangle = \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda v) - J(u)}{\lambda} = \left\langle -||u(t)||^2\Delta u, v\right\rangle \qquad \forall v \in V$$

2. *J é convexo.*

Demonstração:

1. Para todo u e v em $\mathcal{V}$, tem-se que :

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda v)-J(u)}{\lambda} = \frac{1}{4}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right]^2 - \left[\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right]^2.$$

Definindo-se

$$\theta(\lambda) = \left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2$$

fazendo-se $a_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $b_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ temos:

$$\theta(\lambda) = \left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})^2\, dx\right)^2 \tag{1.1}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\theta'(\lambda) &= 2\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})^2\, dx\right)\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})^2\, dx\right)\right]\\
&= 2\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})^2\, dx\right)\left[\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}2(a_{ij}+\lambda b_{ij})\left(\frac{d}{d\lambda}(a_{ij})+\frac{d}{d\lambda}(\lambda b_{ij})\right)\right]
\end{aligned}$$

Resulta que

$$\theta'(\lambda) = 4\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})^2\, dx\right)\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}+\lambda b_{ij})\, b_{ij}dx\right) \tag{1.2}$$

Tem-se, por (1.1) que

$$\theta(0) = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2 \tag{1.3}$$

e, por (1.2) que

$$\theta'(0) = 4 \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) \tag{1.4}$$

Assim,

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \frac{1}{4} \lim_{\lambda \to 0} \frac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\lambda} = \frac{1}{4} \theta'(0). \tag{1.5}$$

Resulta de (1.4) e (1.5) que

$$\langle J'u, v \rangle = \frac{1}{4} \theta'(0) = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right). \tag{1.6}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) \\ &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \nabla u_i . \nabla v_i \, dx \right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

pelo Teorema de Green tem-se

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \nabla u_i \, \nabla v_i \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \eta} v_i \, dx - \int_\Omega \Delta u_i \, v_i \, dx = - \int_\Omega \Delta u_i v_i \, dx \tag{1.8}$$

pois $v_i \in D(\Omega)$.

Resulta de (1.6), (1.7), (1.8) e da densidade de $\mathcal{V}$ em V que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} &= - \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i \; dx \right) \\ &= - \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i \; dx \right) \\ &= - \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \Delta u_i \, v_i \; dx \right) \\ &= - \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\nabla u_i|^2 dx \right) \left(\int_\Omega \Delta u \, v \; dx \right) \end{aligned}$$

Logo

$$\langle J'u, v\rangle = \lim_{\lambda\to 0} \frac{J(u+\lambda v) - J(u)}{\lambda} = ||u(t)||^2 \langle -\Delta u, v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.9}$$

Definindo-se $\langle J'u, v\rangle = \langle -||u(t)||^2 \Delta u, v\rangle$ tem-se pelo lema (1.1), partes (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} |\langle J'u, v\rangle| &= |\left\langle -||u(t)||^2 \Delta u, v\right\rangle| = ||u(t)||^2 |\langle -\Delta u, v\rangle| = ||u(t)||^2 |\langle \Delta u, v\rangle| \\ &= ||u(t)||^2 |a(u,v)| \leq ||u(t)||^2 ||u||\,||v|| \end{aligned}$$

assim,

$$|\langle J'u, v\rangle| \leq ||u||^3 ||v|| \tag{1.10}$$

resulta de (1.10) que

$$||J'u||_{V'} \leq ||u||^3 \tag{1.11}$$

ou seja

$$J'u \in V' \qquad \forall u \in V$$

segue-se que

$$\langle J'u, v\rangle_{V'\times V} = \left\langle -||u(t)||^2 \Delta u, v\right\rangle_{V'\times V} \qquad \forall v \in V. \tag{1.12}$$

Pondo-se

$$\langle J'u, v\rangle = \langle \mathcal{A}u, v\rangle$$

resulta que

$$\mathcal{A}u = -||u(t)||^2 \Delta u \tag{1.13}$$

onde

$$\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$$

2. J é convexo.

   Observação: Tem-se que $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta(s) = s^2$ é convexa, pois $\theta''(s) = 2 > 0$, ou seja,

$$\theta[(1-\lambda)u + \lambda v] \ \leq \ (1-\lambda)\theta(u) + \lambda\theta(v)$$

ou

$$((1-\lambda)u+\lambda v)^2 \;\; \leq \;\; (1-\lambda)|u|^2+\lambda|v|^2 \qquad (1.14)$$

Mostrar-se-à agora que J é convexo. De fato,

$$J[(1-\lambda)u+\lambda v] \;\; = \;\; \frac{1}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left((1-\lambda)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2 \qquad (1.15)$$

de (1.14) e (1.15) resulta que

$$\begin{aligned} J[(1-\lambda)u+\lambda v] \;\; &\leq \;\; \frac{1}{4}\left\{\left[(1-\lambda)\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right]^2+\lambda\left[\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right]^2\right\} \\ &\leq \;\; (1-\lambda)\left(\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2+\lambda\left(\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J[(1-\lambda)u+\lambda v] \leq (1-\lambda)\,Ju+\lambda\,Jv \qquad (1.16)$$

o que mostra que J é convexo.

Observação: Sendo $J'=\mathcal{A}$, resulta que $\mathcal{A}$ é monótono conforme J. L. Lions [9]. ■

Lema 1.4. *Seja* $\mathcal{A}: V \longrightarrow V'$ *dado por*

$$\mathcal{A}u=-\left[\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)\right].$$

Então, $\mathcal{A}$ *é hemicontínuo, isto é, para* u, v *e* w *fixos em* V*, porém arbitrários,*

$$\lambda \longmapsto \langle \mathcal{A}(u+\lambda v), w\rangle \quad \textit{é contínua.}$$

Demonstração:

Sejam $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e (λ_n) uma sequência de números reais tais que $\lambda_n \to \lambda_0$ quando $n \to +\infty$. Tem-se:

$$\langle \mathcal{A}(u+\lambda_n v), w\rangle \;\; = \;\; \left\langle -\left[\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i+\lambda_n v_i)\right)^2 dx\right]\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u+\lambda_n v)\right)\right], w\right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left\langle - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u + \lambda_n\, v) \right), w \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left[- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u_i + \lambda_n\, v_i) w_i \, dx \right]$$

Agora, integrando por partes segue-se que:

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u_i + \lambda_n\, v_i) w_i \, dx = - \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i + \lambda_n\, v_i) w_i \Big|_\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i + \lambda_n\, v_i) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \right)$$

desde que $w_i \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(u_i + \lambda_n\, v_i) w_i \, dx = - \sum_{i,j=1}^{n} \left(- \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i + \lambda_n\, v_i) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \right)$$

assim,

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n\, v), w \rangle = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \right].$$

Como para toda u, v e $w \in V$ implica que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \text{para cada } \; i, j \tag{1.17}$$

resulta que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + 2\, \lambda_n \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx + \lambda_n^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

usando a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{2}\, a^2 + \dfrac{1}{2}\, b^2$ temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \;\; &\leq \;\; \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \; + \; \lambda_n \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\ &+ \;\; \lambda_n \int_\Omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \; + \; \lambda_n^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad < +\infty \end{aligned}$$

logo,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \in L^1(\Omega). \tag{1.18}$$

Novamente pela desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{2}\, a^2 + \dfrac{1}{2}\, b^2$ tem-se

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right)^2 dx < +\infty$$

assim,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega) \tag{1.19}$$

Além disso, quando $\lambda_n \to \lambda_0$ resulta, por (1.17), que

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega) \tag{1.20}$$

e

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{em} \quad L^1(\Omega). \tag{1.21}$$

Portanto existe uma subsequência de (λ_n) ainda denotada por (λ_n) tal que

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.22}$$

e

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \to \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.23}$$

segue de (1.22) e (1.23) que

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right]^2 \to \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right]^2 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.24}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \to \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{1.25}$$

Além disso,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right|^2 \leq \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + |\lambda_n|\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right)\right]^2$$

como $\lambda_n \to \lambda_0$ logo $|\lambda_n| \leq C$, assim

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right|^2 \leq \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right)\right]^2 \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{1.26}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right)^2 dx \;&\leq\; \int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 dx + 2C\int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right| dx + \int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx \\
&\leq\; \int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 dx + 2C\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+\; \int_\Omega \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx < +\infty
\end{aligned}$$

logo,

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right]^2 \quad \text{é integrável.} \tag{1.27}$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \\
&\leq \left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| + \left|\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \qquad (1.28)\\
&\leq \left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| + |\lambda_n|\left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \\
&\leq \left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \quad \text{q.s} \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|\right)dx &\leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 dx + \int_\Omega\left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right) \\
&+ \frac{C}{2}\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx + \int_\Omega\left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\right) < +\infty
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| + C\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right| \quad \text{é integrável.} \tag{1.29}$$

Resulta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado a (1.18), (1.19), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.29) que

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \to \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \tag{1.30}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\,dx \to \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\,dx \tag{1.31}$$

Assim de (1.30) e (1.31) obtem-se:

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{A}(u+\lambda_n v)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\left[\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\,dx\right] \\
&\to \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx\left[\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\,dx\right] \\
&= \langle\mathcal{A}(u+\lambda_0 v)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Segue de (1.32) e notando que para qualquer subseqüência (λ_n') de (λ_n) determinamos uma subseqüência (λ_n'') de (λ_n') tal que

$$\langle \mathcal{A}(u+\lambda_n''v)\rangle \to \langle \mathcal{A}(u+\lambda_0 v)\rangle\,,$$

isto é, o limite não depende da subseqüência (λ_n), desta forma obtém-se que

$$\langle \mathcal{A}(u+\lambda_n v)\rangle \to \langle \mathcal{A}(u+\lambda_0 v)\rangle \quad \text{quando} \quad \lambda_n \to \lambda_0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é hemicontínuo. ■

Lema 1.5. *Se $n=2$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ então,*

$$||u||_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} ||u||_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} |u|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração:

Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, a função $\widetilde{u} = u$ em Ω e nula no complemento de Ω, pertence a $H^1(\mathbb{R}^2)$. Sendo $D(\mathbb{R}^2)$ denso em $H^1(\mathbb{R}^2)$ limitar-nos-emos às funções de $D(\mathbb{R}^2)$.

Seja $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x_1,x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s}(\varphi^2(s,x_2))\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} 2\varphi(s,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\,ds \\
&= 2\int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\,ds
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_1,x_2)|^2 &= 2\left|\int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\,ds\right| \leq 2\int_{-\infty}^{x_1} |\varphi(s,x_2)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\right| ds \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s,x_2)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,x_2)\right| ds \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\varphi^2(x_1,x_2) = 2\int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_1,s)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1,s)\,ds$$

e

$$|\varphi(x_1,x_2)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1,s)| \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1,s)\right| ds \qquad (1.34)$$

multiplicando-se (1.33) e (1.34) membro a membro, obtem-se,

$$|\varphi(x_1,x_2)|^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1,x_2)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right| dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1,x_2)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(x_1,x_2)\right| dx_2\right).$$

Integrando-se a inequação acima em $\mathbb{R}^2$ tem-se, com $x = (x_1, x_2)$, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx_1 dx_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right| dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right| dx_2\right) \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right| dx_1 dx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right| dx_1 dx_2\right)\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right| dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right| dx\right).$$

Usando a desigualdade de Hölder resulta que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx &\leq 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

usando a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{2}\,a^2 + \dfrac{1}{2}\,b^2$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^4(x) \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right|^2 dx\right)$$

assim,

$$|\varphi|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2|\varphi|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}||\varphi||^2_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}$$

segue-se que

$$|\varphi|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}}|\varphi|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}||\varphi||^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} \qquad \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$$

Usando-se a densidade de $D(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ resulta

$$|u|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}}|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}||u||^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\widetilde{u}$ a extensão por zero fora de Ω, então $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ e tem-se

$$|\widetilde{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}}|\widetilde{u}|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^2)}||\widetilde{u}||^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Tem-se também que

$$|\widetilde{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} = |u|_{L^4(\Omega)} \quad \text{e} \quad |\widetilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = |u|_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e Ω aberto do $\mathbb{R}^2$, então $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \widetilde{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$ com $i = 1, 2$. Desse modo,

$$||\widetilde{u}||^2_{H_0^1(\mathbb{R}^2)} = \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} \right|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{j=1}^{2} \left| \widetilde{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \right|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} = ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Portanto,

$$|u|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} |u|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} ||u||^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

■

Lema 1.6. *Suponhamos que $n \geq 3$ e $r, s \in \mathbb{R}$ com $s > 2$, $r > n$, verificando*

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1 \tag{1.35}$$

então, se $u \in (L^r(\Omega))^n$ tem-se a desigualdade

$$|b(u, v, w)| \leq C ||u||_{(L^r(\Omega))^n} ||v|| \, |w|^{\frac{2}{s}} ||w||^{\frac{n}{r}} \qquad \forall u, v, w \in V.$$

Demonstração:

Temos que

$$|b(u, v, w)| \leq \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| \, dx$$

se

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \tag{1.36}$$

pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_\Omega |u_j|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |w_i|^\rho dx \right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ||u_j||_{L^r(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^\rho(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy relativamente ao indice j

$$\begin{aligned}
|b(u,v,w)| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}||u_j||^2_{L^r(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}||w_i||_{L^\rho(\Omega)} \\
&= ||u||_{(L^r(\Omega))^n}\sum_{i=1}^{n}||v_i||_{H_0^1(\Omega)}||w_i||_{L^\rho(\Omega)}
\end{aligned}$$

novamente pela desigualdade de Cauchy obtem-se

$$|b(u,v,w)| \leq ||u||_{(L^r(\Omega))^n}||v||_V||w||_{(L^\rho(\Omega))^n} \tag{1.37}$$

de (1.35) segue-se que

$$\frac{1}{s}+\frac{n}{2r}=\frac{1}{2} \tag{1.38}$$

substituindo em (1.36) tem-se

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{n}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}=\frac{1}{s}+\frac{n}{2r}-\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{1}{s}+\frac{n-2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}=\frac{2/s}{2}+\frac{2n}{2n\,(2r/n-2)}$$

Segue- se que

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2/s}{2}+\frac{n/r}{2n/n-2} \tag{1.39}$$

Como $w_i \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Resulta da desigualdade de interpolação

que

$$||w_i||_{L^\rho(\Omega)} \leq |w_i|^{2/s}_{L^2(\Omega)}\,||w_i||^{n/r}_{L^{2n/n-2}} \tag{1.40}$$

usando novamente o fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ pode- se escrever

$$||w_i||_{L^\rho(\Omega)} \leq C\,|w_i|^{2/s}_{L^2(\Omega)}\,||w_i||^{n/r}_{H_0^1(\Omega)} \tag{1.41}$$

ou seja

$$||w_i||^2_{L^\rho(\Omega)} \leq C\,|w_i|^{4/s}_{L^2(\Omega)}\,||w_i||^{2n/r}_{H_0^1(\Omega)}$$

e daí

$$\sum_{i=1}^{n}||w_i||^2_{L^\rho(\Omega)} \leq C\sum_{i=1}^{n}|w_i|^{4/s}_{L^2(\Omega)}\,||w_i||^{2n/r}_{H_0^1(\Omega)}$$

pela desigualdade de Holder com $\left(\dfrac{2}{s} + \dfrac{n}{r} = 1\right)$ segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} ||w_i||^2_{L^\rho(\Omega)} &\leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \left(|w_i|^{4/s}_{L^2(\Omega)} \right)^{s/2} \right)^{2/s} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(||w_i||^{2n/r}_{H_0^1(\Omega)} \right)^{r/n} \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{2/s} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(|w|_{(L^2(\Omega))^n} \right)^{2/s} \left(||w||^2_V \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(|w|^{2/s}_{(L^2(\Omega))^n} \right)^2 \left(||w||^{n/r}_V \right)^2
\end{aligned}
$$

portanto

$$
||w||_{(L^\rho(\Omega))^n} \leq C\, |w|^{2/s}\, ||w||^{n/r} \tag{1.42}
$$

segue- se então de (1.37) e (1.42)

$$
|b(u,v,w)| \leq C||u||_{(L^r(\Omega))^n}\, ||v||\, |w|^{2/s}\, ||w||^{n/r}
$$

■

Capítulo 2

Existência de Soluções

Teorema 2.1. *(Solução fraca)*

Considera-se $n \leq 4$. *Se* $f \in L^{4/3}(0,T;V')$ *e* $u_0 \in H$, *então existe* $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *na classe*

$$u \in L^{\infty}(0,T;H) \cap L^{4}(0,T;V)$$

satisfazendo

$$\begin{cases} \langle u'(t), v\rangle + \nu_0\, a(u(t),v) \quad + \quad \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \quad em \quad D'(0,T) \\ para\ todo \quad v \in V \\ div\, u = 0 \quad em \quad Q \\ u = 0 \quad em \quad \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Demonstração:

Como $V \overset{comp}{\hookrightarrow} H = H' \hookrightarrow V'$ tem-se o seguinte problema espectral

$$((u,v)) = \lambda(u,v) \tag{2.1}$$

Sejam (w_ν) e (λ_ν) soluções de (2.1).

Considera-se $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base Hilbertiana (w_ν) e,

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

solução do problema aproximado,

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_j) + \nu_0 a(u_m(t), w_j) + \nu_1 \langle \mathcal{A} u_m(t), w_j \rangle + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle \\ j = 1, ..., m; \\ u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H, \quad u_{0m} \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m}; \end{cases} \tag{2.2}$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} u_m(t), w_j \rangle &= \left\langle - \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j^2} \right], w_j \right\rangle \\ &= - \left[\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 (u_{im})}{\partial x_j^2} w_j \, dx \right) \end{aligned}$$

O sistema (2.2) possui solução $u_m(t)$ em $[0, t_m]$, $tm > 0$ e as estimativas que serão obtidas permitirão estender a solução a todo intervalo $[0, T]$.

Estimativas à Priori

Estimativa I.

Multiplicando (2.2) por g_{jm} e somando de $j = 1$ a $j = m$ obtém- se

$$\begin{aligned} (u'_m(t), u_m(t)) &+ \nu_0 a(u_m(t), u_m(t)) + \nu_1 \langle \mathcal{A} u_m(t), u_m(t) \rangle \\ &+ b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

pelo lema (1.2) segue que $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$.

Agora

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_m(t), u_m \rangle &= a(u_m(t), u_m(t)) = ||u_m(t)||^2 \\ \langle \mathcal{A} u_m(t), u_m(t) \rangle &= \left\langle -||u_m(t)||^2 \Delta u_m(t), u_m(t) \right\rangle = ||u_m(t)||^2 \langle -\Delta u_m(t), u_m(t) \rangle = ||u_m(t)||^4 \\ \frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^2 \right) &= \frac{d}{dt} (u_m(t), u_m(t)) = 2 (u'_m(t), u_m(t)) \end{aligned}$$

Assim (2.3) torna- se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu_0||u_m(t)||^2 + \nu_1||u_m(t)||^4 &= \langle f(t), u_m(t)\rangle_{V'\times V} \\ &\leq ||f(t)||_{V'}\,||u_m(t)|| = \frac{1}{\varepsilon^{3/4}}\,||f(t)||_{V'}\,\varepsilon^{3/4}||u_m(t)||\end{aligned}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$.

Pela desigualdade de Young, com $p = \dfrac{4}{3}$ e $q = 4$, tem-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu_0||u_m(t)||^2 + \nu_1||u_m(t)||^4 \leq \frac{3}{4}\left(\frac{||f(t)||_{V'}}{\varepsilon^{3/4}}\right)^{4/3} + \frac{1}{4}\left(||u_m(t)||\,\varepsilon^{3/4}\right)^4,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu_0||u_m(t)||^2 + \nu_1||u_m(t)||^4 \leq \frac{3}{4\varepsilon}||f(t)||_{V'}^{4/3} + \frac{\varepsilon^3}{4}||u_m(t)||^4 \tag{2.4}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Segue- se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu_0||u_m(t)||^2 + \left(\nu_1 - \frac{\varepsilon^3}{4}\right)||u_m(t)||^4 \leq \frac{3}{4\varepsilon}||f(t)||_{V'}^{4/3} \tag{2.5}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Desta forma basta que $0 < \varepsilon < \sqrt[3]{4\nu_1}$.

Assim (2.5) torna- se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu_0||u_m(t)||^2 + C_1||u_m(t)||^4 \leq C_2||f(t)||_{V'}^{4/3} \tag{2.6}$$

multiplicando- se por 2 em ambos os membros de (2.6) e integrando de 0 a t, tem-se:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u_m(s)|^2 ds + 2\,\nu_0\int_0^t ||u_m(s)||^2 ds + 2\,C_1\int_0^t ||u_m(s)||^4 ds \leq 2\,C_2\int_0^t ||f(s)||_{V'}^{4/3} ds$$

ou

$$|u_m(t)|^2 - |u_m(0)|^2 + 2\,\nu_0\int_0^t ||u_m(s)||^2 ds + 2\,C_1\int_0^t ||u_m(s)||^4 ds \leq 2\,C_2\int_0^t ||f(s)||_{V'}^{4/3}\, ds$$

logo,

$$\begin{aligned}|u_m(t)|^2 + 2\,\nu_0\int_0^t ||u_m(s)||^2 ds + 2\,C_1\int_0^t ||u_m(s)||^4 ds &\leq |u_m(0)|^2 \\ &+ 2\,C_2\int_0^T ||f(s)||_{V'}^{4/3}\, ds \quad (2.7)\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} |u_m(0)| < K \qquad & \text{pois} \qquad \lim u_m(0) = u_0 \\ \int_0^T ||f(s)||_{V'}^{4/3}\, ds < \infty \qquad & \text{pois} \qquad f \in L^{4/3}(0,T,V') \end{aligned}$$

Assim, $|u_m(t)| \leq K$ que independe de m e $t < T$. Pelo teorema de Carateodory, podemos prolongar a solução ao intevalo $[0,T]$.

Note que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \text{ess}\, |u_m(t)| \leq K$$

daí

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H) \tag{2.8}$$

como podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$ temos,

$$\int_0^T ||u_m(t)||^2 dt \leq K \quad \text{que independe de } m \text{ e } t < T$$

logo

$$||u_m||_{L^2(0,T;V)} \leq K$$

isto é,

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;V) \tag{2.9}$$

Do mesmo modo tem- se que

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^4(0,T;V) \tag{2.10}$$

Estimativa II

Seja $P_m : V \longrightarrow V_m \subset V$ a projeção ortogonal de V sobre V_m, isto é,

$$P_m\varphi = \sum_{j=1}^m \left(\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right)\right) \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \qquad \text{com} \quad \varphi \in V$$

pela escolha da base especial (w_ν) tem- se,

$$||P_m||_{\mathcal{L}(V,V)} \leq 1 \tag{2.11}$$

$$||P_m^*||_{\mathcal{L}(V',V')} \leq 1 \tag{2.12}$$

multiplicando- se a expressão aproximada pelo vetor w_j e somando- se de $j = 1$ a $j = m$ obtém- se, usando- se as notações dos lemas (1.1) e (1.2)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}(u_m'(t), w_j)w_j &+ \nu_0 \sum_{j=1}^{m} \langle Au_m(t), w_j\rangle\, w_j + \sum_{j=1}^{m} \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \langle Bu_m(t), w_j\rangle\, w_j = \sum_{j=1}^{m} \langle f(t), w_j\rangle \end{aligned} \tag{2.13}$$

com $\mathcal{A}$ monótono e hemicontínuo conforme os lemas (1.3) e (1.4).

Segue- se de (2.12), observando que $P_m^* u_m'(t) = u_m'(t)$ devido $u_m'(t) \in V_m$, que

$$\begin{aligned} P_m^*\, u_m'(t) &+ \nu_0 P_m^*\, Au_m(t) + P_m^* \mathcal{A}u_m(t) + P_m^*\, Bu_m(t) = P_m^* f(t) \\ u_m'(t) &= P_m^* f(t) - \nu_0 P_m^*\, Au_m(t) - P_m^* \mathcal{A}u_m(t) - P_m^*\, Bu_m(t) \end{aligned} \tag{2.14}$$

agora pelas partes (i) e (ii) do lema (1.1)

$$|\,\langle Au_m(t), w\rangle\,| = |a(u_m(t), w)| \leq ||u_m(t)||\, ||w|| \tag{2.15}$$

assim

$$\sup_{||w|| \leq 1} |\,\langle Au_m(t), w\rangle\,| \leq ||u_m(t)||$$

logo

$$||Au_m(t)||_{V'} \leq ||u_m(t)|| \tag{2.16}$$

e, portanto

$$\int_0^T ||Au_m(t)||_{V'}^4\, dt \leq \int_0^T ||u_m(t)||^4\, dt \leq C \tag{2.17}$$

pois $(u_m) \in L^4(0, T; V)$. Desta forma

$$(Au_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^4\,(0, T; V')\,. \tag{2.18}$$

resulta de (2.18) que

$$(P_m^*\, Au_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^4\,(0, T; V')$$

como $L^4\,(0, T; V') \hookrightarrow L^{4/3}\,(0, T; V')$, segue- se que

$$(P_m^*\, Au_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\,(0, T; V')\,. \tag{2.19}$$

Tem- se que

$$\begin{aligned} |\left\langle \mathcal{A}u_m(t), w\right\rangle| &= |\left\langle -||u_m(t)||^2 \Delta u_m(t), w\right\rangle| = ||u_m(t)||^2 \left\langle -\Delta u_m(t), w\right\rangle \\ &= ||u_m(t)||^2 \left\langle Au_m(t), w\right\rangle = ||u_m(t)||^2 |a(u_m(t), w)| \\ &\leq ||u_m(t)||^2 \, ||u_m(t)|| \, ||w|| \end{aligned}$$

e assim

$$|\left\langle \mathcal{A}u_m(t), w\right\rangle| \leq ||u_m(t)||^3 ||w|| \tag{2.20}$$

segue- se que

$$\sup_{||w|| \leq 1} |\left\langle \mathcal{A}u_m(t), w\right\rangle| \leq ||u_m(t)||^3$$

logo

$$||\mathcal{A}u_m(t)||_{V'} \leq ||u_m(t)||^3 \tag{2.21}$$

resulta que

$$\int_0^T ||\mathcal{A}u_m(t)||_{V'}^{4/3} \, dt \leq \int_0^T ||u_m(t)||^4 \, dt \tag{2.22}$$

desde que (u_m) é limitada em $L^4(0, T; V)$ tem- se

$$(\mathcal{A}u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\left(0, T; V'\right) \tag{2.23}$$

por (2.23) temos que

$$(P_m^* \mathcal{A}u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\left(0, T; V'\right). \tag{2.24}$$

Pela parte (ii) do lema (1.2) resulta

$$||Bu_m(t)||_{V'} \leq C ||u_m(t)||^2 \tag{2.25}$$

segue- se que

$$\int_0^T ||Bu_m(t)||_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T ||u_m(t)||^4 dt$$

desde que u_m é limitada em $L^4(0,T;V)$ tem- se que

$$(Bu_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2\left(0,T,V'\right)$$

daí

$$(P_m^* Bu_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2\left(0,T;V'\right)$$

sendo $L^2(0,T;V') \hookrightarrow L^{4/3}\left(0,T;V'\right)$ segue- se que

$$(P_m^* Bu_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\left(0,T;V'\right). \tag{2.26}$$

Também como $f \in L^{4/3}\left(0,T;V'\right)$, resulta que

$$(P_m^* f) \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\left(0,T;V'\right). \tag{2.27}$$

segue- se então por (2.14), (2.19), (2.24), (2.26) e (2.27) que

$$(u_m') \quad \text{é limitada em} \quad L^{4/3}\left(0,T;V'\right). \tag{2.28}$$

Usando- se o teorema de compacidade de Aubin- Lions, com $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$, $p_0 = 2$, $p_1 = \dfrac{4}{3}$ e

$$W = \left\{u_m;\, u_m \in L^2(0,T;V), u_m' \in L^{4/3}(0,T;V')\right\}$$

resulta que

$$W \overset{comp}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H) \tag{2.29}$$

conclui- se que existe uma subsucessão, ainda representada por (u_m) tal que

$$u_m \to u \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;H) \tag{2.30}$$

logo,

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{forte em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q) \tag{2.31}$$

segue- se que existe uma subsucessão de (u_{mi}), ainda denotada por (u_{mi}) tal que

$$u_{mi} \to u_i \quad \text{q.s em} \quad Q \tag{2.32}$$

portanto

$$u_{mi}u_{mj} \to u_iu_j \quad \text{q.s em} \quad Q. \tag{2.33}$$

Por outro lado, para $n \leq 4$, tem- se

$$u_{mi} \in L^4(0,T,H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(0,T,L^4(\Omega))$$

logo,

$$\begin{aligned}
||u_{mi}u_{mj}||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T |u_{mi}u_{mj}|^2_{L^2(\Omega)}dt = \int_0^T \left(\int_\Omega |u_{mi}u_{mj}|^2 dx\right) dt \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega |u_{mi}|^2\, |u_{mj}|^2 dx\right) dt \\
&\leq \int_0^T \left[\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u_{mi}|^4 + \frac{1}{2}|u_{mj}|^4\right) dx\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \left(\int_\Omega |u_{mi}|^4 dx\right) dt + \frac{1}{2}\int_0^T \left(\int_\Omega |u_{mj}|^4 dx\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T ||u_{mi}||^4_{L^4(\Omega)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T ||u_{mj}||^4_{L^4(\Omega)}dt \leq K
\end{aligned} \tag{2.34}$$

e, segue- se que

$$(u_{mi}u_{mj}) \quad \text{é limitada em} \quad L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right). \tag{2.35}$$

Usando- se o lema de Lions com(2.32) e (2.34) resulta que

$$u_{mi}u_{mj} \to u_iu_j \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T,L^2(\Omega)) \tag{2.36}$$

Além disso, tem- se por (2.8), (2.9), (2.10), (2.23) e (2.28)

$$u_m \to u \quad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T,H) \tag{2.37}$$

$$u_m \to u \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T,V) \tag{2.38}$$

$$u_m(T) \to \xi \quad \text{fraco em} \quad H \tag{2.39}$$

$$u_m \to u \quad \text{fraco em} \quad L^4(0,T,V) \subset L^4(0,T,V') \tag{2.40}$$

$$\mathcal{A}u_m \to \chi \quad \text{fraco em} \quad L^{4/3}(0,T,V') \tag{2.41}$$

$$u'_m \to u' \quad \text{fraco em} \quad L^{4/3}(0,T,V') \tag{2.42}$$

Desde que, para $v = w_j \in V$ tem- se que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

Considere- se $\theta \in D(0,T) \subset L^2(0,T)$, assim,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \left|\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T \int_\Omega \left|\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega |\theta(t)|^2 \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx\, dt = \int_0^T |\theta(t)|^2 dt \int_0^T \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|^2 dx < +\infty
\end{aligned}$$

logo

$$\theta(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.43}$$

Por (2.36) tem-se, para toda $\psi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, que

$$\int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\psi(x,t)dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \psi(x,t)dx\, dt$$

fazendo $\psi(x,t) = \theta(t)\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)$, que é lícito por (2.43), vem que

$$\int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)dx\, dt.$$

Somando- se de $i = 1$ a $i = m$ e $j = 1$ a $j = m$ resulta que

$$\sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_\Omega u_{mi}u_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)dx\, dt \;\to\; \sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)dx\, dt. \tag{2.44}$$

Como

$$\begin{aligned}
&\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v)\,\theta(t)dt = -\int_0^T b(u_m(t), v, u_m(t))\,\theta(t)dt \\
&= -\int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega u_{mi}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}u_{mj}\, dx\right)\theta(t)\, dt = -\int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega u_{mi}\, u_{mj}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\theta(t)\, dx\right) dt
\end{aligned}$$

segue de (2.44) que,

$$\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v)\,\theta(t)dt \;\to \int_0^T b(u(t), u(t), v)\,\theta(t)dt$$

para toda $\theta \in D(0,T) \subset L^2(0,T)$ e $v \in V$. Em particular, temos

$$b(u_m(t), u_m(t), w_j) \to b(u, u, w_j) \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T). \tag{2.45}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_m'(t), w_j\rangle\, \theta(t)\, dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\langle u_m(t), w_j\rangle\, \theta(t)\, dt \\
&= \langle u_m(t), w_j\rangle\, \theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T \langle u_m(t), w_j\rangle\, \theta'(t)\, dt \\
&= -\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\, dt
\end{aligned}$$

por (2.37) tem- se que $u_m \to u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T,H)$, assim

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_m'(t), w_j\rangle\, \theta(t)\, dt &= -\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\, dt \\
&\to -\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt = \int_0^T \langle u'(t), w_j\rangle\, \theta(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
&u_m \to u \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T,V) \\
&\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} \to \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T,L^2(\Omega))
\end{aligned}$$

logo,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \varphi\right) dt \to \int_0^T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \varphi\right) dt \qquad \forall \varphi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

em particular, $\varphi = \dfrac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}\theta(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, com $v = w_j$ como anteriormente, temos

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \theta(t)\, dt \;\to\; \int_0^T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \theta(t)\, dt.$$

Somando- se em $i = 1$ a $i = m$ e $j = 1$ a $j = m$ tem- se

$$\int_0^T \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \theta(t)\, dt \;\to\; \int_0^T \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \theta(t)\, dt$$

assim

$$\int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx\right) \theta(t)\, dt \;\to\; \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dx\right) \theta(t)\, dt$$

logo,

$$\int_0^T a(u_m(t), v)\, \theta(t)\, dt \ \rightarrow \ \int_0^T a(u(t), v)\, \theta(t)\, dt$$

e portanto,

$$\int_0^T a(u_m(t), w_j)\, \theta(t)\, dt \ \rightarrow \ \int_0^T a(u(t), w_j)\, \theta(t)\, dt \qquad \forall \in D(0,T) \tag{2.47}$$

por (2.41)

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle\, \theta(t)\, dt \ \rightarrow \ \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle\, \theta(t)\, dt \tag{2.48}$$

Tem-se da equação aproximada que,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u'_m(t), w_j)\theta(t)\, dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle\, \theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle\ \theta(t)\, dt \end{aligned} \tag{2.49}$$

para toda $\theta \in D(0,T)$.

Integrando- se por partes o primeiro termo de (2.49) resulta

$$\begin{aligned} &- \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)\, dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle\, \theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle\ \theta(t)\, dt \quad j = 1, ..., m. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Fixando j e tomando- se o limite quando $m \rightarrow \infty$ obtém- se, de (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48), que

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\, dt \ &+ \ \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle\, \theta(t)\, dt \\ &+ \ \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle\ \theta(t)\, dt \quad j = 1, ..., m \end{aligned} \tag{2.51}$$

para toda $\theta \in D(0,T)$.

Mostrar-se-à agora que $u(0) = u_0$. Por (2.40) e (2.42) resulta que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fraco em} \quad L^{4/3}(0,T;V')$$

Assim,

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{fraco em} \quad V' \qquad \forall t \in [0,T] \tag{2.52}$$

portanto

$$u_m(0) \to u(0) \quad \text{fraco em} \quad V'$$

como

$$u_{0m} = u_m(0) \to u_0 \quad \text{fraco em} \quad V'$$

resulta pela unicidade do limite fraco que

$$u(0) = u_0 \tag{2.53}$$

Usando a densidade de (w_ν) em V tem-se

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)\,dt \;&+\; \nu_0 \int_0^T a(u(t),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T \langle \chi, v\rangle\,\theta(t)\,dt \\ &+\; \int_0^T b(u(t),u(t),v)\theta(t)\,dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\;\theta(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.54}$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in D(0,T)$.

Segue- se de (2.54) que pode- se escrever

$$\begin{aligned} &\left\langle -\int_0^T u(t)\theta'(t)\,dt, v\right\rangle_{V'\times V} + \nu_0 \left\langle \int_0^T Au(t)\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{V'\times V} + \left\langle \int_0^T \chi\,\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{V'\times V} \\ &+ \left\langle \int_0^T Bu(t)\,\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{V'\times V} = \left\langle \int_0^T f(t)\theta(t)\,dt, v\right\rangle_{V'\times V} \end{aligned} \tag{2.55}$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in D(0,T)$.

Por (2.55)

$$\begin{aligned} -\int_0^T u(t)\theta'(t)\,dt \;&+\; \nu_0 \int_0^T Au(t)\theta(t)\,dt + \int_0^T \chi\theta(t)\,dt \\ &+\; \int_0^T Bu(t)\theta(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,\theta(t)\,dt \end{aligned} \tag{2.56}$$

em V' para toda $\theta \in D(0,T)$. Resulta de (2.56) que

$$\begin{aligned} \langle u'(t),\theta(t)\rangle_{D'\times D} \;&+\; \nu_0 \langle Au(t),\theta(t)\rangle_{D'\times D} + \langle \chi,\theta(t)\rangle_{D'\times D} \\ &+\; \langle Bu(t),\theta(t)\rangle_{D'\times D} = \langle f(t),\theta(t)\rangle_{D'\times D} \end{aligned} \tag{2.57}$$

em V' para toda $\theta \in D(0,T)$. Assim

$$u' + \nu_0\, Au + \chi + Bu = f \qquad \text{em } D'(0,T;V')$$

isto é,

$$u' = -\nu_0 Au - \chi - Bu + f \qquad \text{em } D'(0,T;V'). \tag{2.58}$$

Como o segundo membro de (2.58) pertence a $L^{4/3}(0,T;V')$ resulta que a distribuição u' pode ser identificada a uma função de $L^{4/3}(0,T;V')$. Desta forma,

$$u' + \nu_0\, Au + \chi + Bu = f \qquad \text{em } L^{4/3}(0,T;V') \tag{2.59}$$

Mostrar-se-à agora que $\chi = \mathcal{A}u(t)$.

Sendo $\mathcal{A}$ monótono temos

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t) - \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0 \qquad \forall \varphi \in L^4(0,T;V)$$

isto é,

$$\int_0^T \left[\langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) - \varphi\rangle - \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi\rangle\right] dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0 \tag{2.60}$$

para toda $\varphi \in L^4(0,T;V)$.

Por outro lado, da equação aproximada (2.2), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m'(t), u_m(t))dt \;&+\; \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt \\ &+ \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle\, dt\end{aligned} \tag{2.61}$$

desde que $(u_m'(t), u_m(t)) = \dfrac{d}{dt}|u_m(t)|^2$ resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 dt \;&+\; \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt \\ &+ \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle\, dt\end{aligned} \tag{2.62}$$

logo, por (2.62) tem- se

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t)\rangle \, dt &= \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle \, dt - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 \\ &- \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt\end{aligned} \tag{2.63}$$

substituindo (2.63) em (2.60) resulta,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle \, dt &+ \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt \\ &- \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi\rangle \, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi\rangle \, dt \geq 0.\end{aligned} \tag{2.64}$$

Mostrar- se- à agora que, $\xi = u(T)$, onde ξ foi definido em (2.39) e a convergência do termo não linear $\displaystyle\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt$ foi mostrada em (2.45).

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$, tem- se da equação aproximada (2.2) que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)\, dt &+ \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt\end{aligned}$$

integrando por partes,

$$\begin{aligned}(u_m(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T &- \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}(u_m(T), w_j) &- \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &+ \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t)\, dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \, \theta(t)\, dt.\end{aligned}$$

Fixando j e tomando- se o limite com $m \to +\infty$ resulta,

$$(\xi, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t)\, dt$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), w_j\rangle\, \theta(t)\, dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&= \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\ \theta(t)\, dt. \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

Por outro lado por (2.59) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u', w_i\rangle\, \theta(t)dt \ &+\ \nu_0 \int_0^T \langle Au, w_j\rangle\, \theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\, \theta(t)dt \\
&+\ \int_0^T \langle Bu, w_j\rangle\, \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\, \theta(t)dt
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u', w_i\rangle\, \theta(t)dt \ &+\ \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\, \theta(t)dt \\
&+\ \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\, \theta(t)dt
\end{aligned}$$

integrando- se por partes,

$$\begin{aligned}
(u(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T \ &-\ \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&+\ \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\, \theta(t)\, dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&=\ \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\ \theta(t)\, dt
\end{aligned}$$

desta forma

$$\begin{aligned}
(u(T), w_j) \ &-\ \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t)\, dt \\
&+\ \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\, \theta(t)\, dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j)\theta(t)\, dt \qquad (2.66) \\
&=\ \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\ \theta(t)\, dt
\end{aligned}$$

de (2.65) e (2.66) tem- se

$$(u(T), w_j) = (\xi, w_j) \quad \forall j$$

e portanto

$$u(T) = \xi$$

logo

$$u_m(T) \rightarrow u(T) \quad \text{fraco em} \quad H \qquad (2.67)$$

assim,

$$|u(T)| \leq \liminf |u_m(T)|$$

logo,

$$|u(T)|^2 \leq \liminf |u_m(T)|^2$$

isto é,

$$-|u(T)|^2 \geq -\liminf |u_m(T)|^2$$

então,

$$-|u(T)|^2 \geq \limsup \left[-|u_m(T)|^2\right]$$

e portanto

$$-\frac{1}{2}|u(T)|^2 \geq \limsup \left(-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2\right). \tag{2.68}$$

Tomando- se o $\limsup$ em ambos os membros de (2.64) e usando (2.2), (2.40) e (2.41) obtém- se:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt + \nu_0 \limsup \left(-\int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt\right) + \frac{1}{2}|u(0)|^2 \\ &+ \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2\right] - \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0 \end{aligned}$$

por (2.68) tem- se

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt &+ \nu_0 \limsup \left(-\int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt\right) + \frac{1}{2}|u(0)|^2 \\ &- \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt &- \nu_0 \liminf \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt + \frac{1}{2}|u(0)|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 \\ &- \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0. \end{aligned} \tag{2.69}$$

De (2.59), usando as notações dos lemas (1.1), (1.2) e (1.3), faz sentido escrever

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \nu_0 \langle Au(t), u(t)\rangle + \langle \chi, u(t)\rangle + \langle Bu(t), u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle$$

para toda $u \in L^4(0, T; V)$. Ou seja,

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t)\rangle + b(u(t), u(t), u(t)) = \langle f(t), u(t)\rangle$$

assim,

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle$$

obtém- se daí que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t)\rangle = \langle f(t), u(t)\rangle \tag{2.70}$$

integrando- se de 0 a T,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u(t)|^2 dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t))dt + \int_0^T \langle \chi, u(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u(0)|^2 + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) + \int_0^T \langle \chi, u(t)\rangle\, dt = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt$$

donde

$$\begin{aligned}\nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) + \int_0^T \langle \chi, u(t)\rangle\, dt &= \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt \\ &+ \frac{1}{2}|u(0)|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 \end{aligned}\tag{2.71}$$

substituindo (2.71) em (2.69) tem- se

$$\begin{aligned}&-\liminf \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t))dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t))dt + \int_0^T \langle \chi, u(t)\rangle\, dt \\ &- \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle\, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi\rangle\, dt \geq 0 \end{aligned}\tag{2.72}$$

como pela lema (1.1)

$$||u(t)||^2 = a(u(t), u(t)),$$

Tem-se, integrando de 0 a T, que

$$\int_0^T ||u(t)||^2 dt = \int_0^T a(u(t),u(t))dt \implies \left(\int_0^T ||u(t)||^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^T a(u(t),u(t))dt\right)^{1/2}$$
$$\implies ||u(t)||_{L^2(0,T;V)} = \left(\int_0^T a(u(t),u(t))dt\right)^{1/2}$$

desde que

$$u_m \to u \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;V)$$

tem- se que

$$||u||^2_{L^2(0,T;V)} \leq \liminf \left(||u_m(t)||^2_{L^2(0,T;V)}\right)$$

ou seja

$$\int_0^T a(u(t),u(t))dt \leq \liminf \left(\int_0^T a(u_m(t),u_m(t))dt\right)$$

logo,

$$-\liminf \left(\int_0^T a(u_m(t),u_m(t))dt\right) + \int_0^T a(u(t),u(t))dt \leq 0 \tag{2.73}$$

segue- se de (2.72) e (2.73) que,

$$\int_0^T \langle \chi, u(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle \, dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t)-\varphi\rangle \, dt \geq 0$$

ou seja,

$$\int_0^T \left(\langle \chi, u(t)-\varphi\rangle - \langle \mathcal{A}\varphi, u(t)-\varphi\rangle\right) dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}\varphi, u(t)-\varphi\rangle \, dt \geq 0 \tag{2.74}$$

para toda $\varphi \in L^4(0,T;V)$.

Seja $\varphi(t) = u(t) - \lambda v(t)$, $\lambda > 0$, $v \in L^4(0,T;V)$ arbitrário. Tem- se por (2.74)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t)-\lambda v(t)], u(t) - (u(t)-\lambda v(t))\rangle \, dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], \lambda v(t)\rangle \, dt \geq 0 \tag{2.75}$$

dividindo- se (2.75) por $\lambda > 0$,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t)\rangle \, dt \geq 0 \tag{2.76}$$

para toda $v \in L^4(0, T; V)$.

Mostrar-se-à agora que

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t)\rangle \, dt \quad \rightarrow \quad \int_0^T \langle \chi - Au(t), v(t)\rangle \, dt$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

Com efeito, tem-se usando o fato que $||\mathcal{A}u(t)||_{V'} \leq ||u(t)||^3$ dado por (1.11) com $J'u(t) = \mathcal{A}u(t)$ e a desigualdade $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, que

$$\begin{aligned}
&|| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)\rangle]||_{L^1(0,T)} = \int_0^T | \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)\rangle |ds \\
&\leq \int_0^T ||\mathcal{A}[u(s) - \lambda v(t)]||_{V'} ||v(s)|| \, ds \leq \int_0^T ||u(s) - \lambda v(s)||^3 ||v(s)|| \, ds \\
&\leq \int_0^T (||u(s)|| + |\lambda| \, ||v(s)||)^3 \, ||v(s)|| \, ds \leq \int_0^T 2^2 \left(||u(s)||^3 + |\lambda|^3 ||v(s)||^3\right) ||v(s)|| \, ds \\
&= \int_0^T \left(C_1 ||u(s)||^3 + C_2 ||v(s)||^3\right) ||v(s)|| \, ds \\
&= C_1 \int_0^T ||u(s)||^3 ||v(s)|| \, ds + C_2 \int_0^T ||u(s)||^4 \, ds
\end{aligned}$$

como $u, v \in L^4(0, T; V)$, resulta que $||u(s)|| \in L^4(0, T)$, logo $||u(s)||^3 \in L^{4/3}(0, T)$ e $||v(s)|| \in L^4(0, T)$. Segue-se então da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)]\rangle ||_{L^1(0,T)} \quad &\leq \quad C_1 \left(\int_0^T \left(||u(s)||^3\right)^{4/3} ds\right)^{3/4} \left(\int_0^T ||v(s)||^4 ds\right)^{1/4} \\
&+ \quad C_2 \int_0^T ||u(s)||^4 ds
\end{aligned}$$

portanto

$$|| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)]\rangle ||_{L^1(0,T)} \quad \leq \quad K$$

isto é,

$$\langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)] \rangle \quad \text{é integrável.} \tag{2.77}$$

Além disso, para cada $t \in [0,T]$, t fixado, tem-se pela hemicontinuidade de $\mathcal{A}$ que

$$\langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t), v(t)] \rangle \;\; \to \;\; \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \tag{2.78}$$

quase sempre em $[0,T]$, quando $\lambda \to 0$.

Por outro lado, para cada $t \in [0,T]$, t fixado tem-se

$$\begin{aligned} |\, \langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle \,| \;&\leq\; ||\mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)]||_{V'} ||v|| \leq ||u(t) - \lambda v(t)||^3 ||v|| \\ &\leq\; (||u(t)|| + |\lambda|\, ||v(t)||)^3 ||v(t)|| \\ &\leq\; 4(||u(t)||^3 + |\lambda|^3 ||v(t)||^3) ||v(t)|| \\ &=\; C_1 ||u(t)||^3 ||v(t)|| + C_2\, ||v(t)||^4 \end{aligned} \tag{2.79}$$

note-se que $||u(t)||^3 \in L^{4/3}(0,T)$ e $||v(t)|| \in L^4(0,T)$. Assim $||u(t)||^3||v(t)|| \in L^1(0,T)$ e como $||v(t)||^4 \in L^1(0,T)$, resulta que o segundo membro de (2.79) é integrável quase sempre em $[0,T]$.

Segue-se então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado a (2.77) e (2.78), que

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle \, dt \;\; \to \;\; \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt$$

portanto,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle \;\; \to \;\; \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt \tag{2.80}$$

para toda $v \in L^4(0,T;V)$.

Por (2.76)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt \geq 0 \qquad \forall v \in L^4(0,T;V) \tag{2.81}$$

em particular, para $-v \in L^4(0,T;V)$. Tem-se por (2.81)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt \leq 0 \qquad \forall v \in L^4(0,T;V)$$

ou seja

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt \leq 0 \qquad \forall v \in L^4(0,T;V)$$

logo,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \, dt \;\; = \;\; 0 \qquad \forall v \in L^4(0,T;V) \tag{2.82}$$

segue-se que

$$\chi - \mathcal{A}u \;\; = \;\; 0 \qquad \text{em} \quad L^{4/3}(0,T;V')$$

portanto

$$\mathcal{A}u = \chi \qquad \text{em} \quad L^{4/3}(0,T;V') \tag{2.83}$$

■

Capítulo 3

Unicidade de Soluções

A seguir será demonstrada a unicidade de soluções do problema estudado no capítulo anterior.

O método utilizado é o da energia, usando-se os resultados obtidos pelo teorema (2.1)

Vamos demostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Supondo-se* $n = 2, 3,$

$$f \in L^{4/3}(0, T; V') \qquad e \qquad u_0 \in H,$$

então existe uma única $u : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *na classe*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V) \tag{3.1}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} &u' + \nu_0 Au + \mathcal{A}u + Bu = f \qquad em \quad L^{4/3}(0, T; V') \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demonstração:

Sejam u e $\widehat{u}$ na classe (3.1) verificando (3.2) e $w = u - \widehat{u}$. Tem-se:

$$u' \ + \ \nu_0 Au + \mathcal{A}u + Bu = f \tag{3.3}$$

$$\widehat{u}' \ + \ \nu_0 A\widehat{u} + \mathcal{A}\widehat{u} + B\widehat{u} = f \tag{3.4}$$

subtraindo-se (3.4) de (3.3) temos

$$w' + \nu_0(Au - A\widehat{u}) + \mathcal{A}u - \mathcal{A}\widehat{u} + Bu - B\widehat{u} = 0 \quad \text{em} \quad L^{4/3}(0,T;V')$$

e

$$u(0) - \widehat{u}(0) = 0 \implies w(0) = 0$$

obtendo-se,

$$\begin{aligned} & w' + \nu_0(Au - A\widehat{u}) + \mathcal{A}u - \mathcal{A}\widehat{u} + Bu - B\widehat{u} = 0 \quad \text{em} \quad L^{4/3}(0,T;V') \\ & u(0) - \widehat{u}(0) = 0 \implies w(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Faz sentido então, escrever, $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} \langle w'(t), v\rangle &+ \nu_0 \langle Au(t) - A(\widehat{u}(t)), v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), v\rangle \\ &+ \langle Bu(t) - B\widehat{u}(t), v\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Segue-se de (3.6), usando-se as linearidades de A e a notação do lema (1.2) que

$$\langle w'(t), v\rangle + \nu_0 \langle A(u(t) - \widehat{u}(t)), v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), v\rangle + \langle Bu(t) - B\widehat{u}(t), v\rangle = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle w'(t), v\rangle &+ \nu_0 \langle A(w(t)), v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), v\rangle \\ &+ b(u(t), u(t), v) - b(\widehat{u}(t), \widehat{u}(t), v) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $w(t) = u(t) - \widehat{u}(t)$, e deixando de escrever a variável t para facilitar a escrita, resulta

$$\begin{aligned} & b(u,u,v) - b(\widehat{u},\widehat{u},v) = b(u - \widehat{u} + \widehat{u}, u, v) - b(\widehat{u} - u + u, \widehat{u} - u + u, v) \\ & = b(w + \widehat{u}, u, v) - b(-w + u, -w + u, v) \\ & = b(w,u,v) + b(\widehat{u},u,v) - [b(-w,-w+u,v) + b(u,-w+u,v)] \\ & = b(w,u,v) + b(\widehat{u},u,v) - b(-w,-w+u,v) - b(u,-w+u,v) \\ & = b(w,u,v) + b(\widehat{u},u,v) - b(-w,-w,v) - b(-w,u,v) - b(u,-w,v) - b(u,u,v) \\ & = b(w,u,v) + b(\widehat{u},u,v) - b(w,w,v) + b(w,u,v) + b(u,w,v) - b(u,u,v) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b(w,u,v) + b(\widehat{u}-u,u,v) - b(w,w,v) + b(w,u,v) + b(u,w,v)\\
&= b(w,u,v) + b(-w,u,v) - b(w,w,v) + b(w,u,v) + b(u,v,w)\\
&= b(w,u,v) - b(w,u,v) - b(w,w,v) + b(w,u,v) + b(u,w,v)\\
&= b(w,u,v) + b(u,w,v) - b(w,w,v)
\end{aligned}
$$

obtendo-se

$$
b(u(t),u(t),v) - b(\widehat{u}(t),\widehat{u}(t),v) = b(w(t),u(t),v) + b(u(t),w(t),v) - b(w(t),w(t),v). \quad (3.8)
$$

Portanto, de (3.7) e (3.8) resulta,

$$
\begin{aligned}
&\langle w'(t),v\rangle + \nu_0 \langle A(w(t)),v\rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t),v\rangle\\
&+ b(w(t),u(t),v) + b(u(t),w(t),v) - b(w(t),w(t),v) = 0, \quad \forall v \in V. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Em particular (3.9) é válida para $v = w \in V$, isto é,

$$
\begin{aligned}
&\langle w'(t),w\rangle + \nu_0 \langle A(w(t)),w\rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t),w\rangle\\
&+ b(w(t),u(t),w) + b(u(t),w(t),w) - b(w(t),w(t),w) = 0, \quad \forall v \in V. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
&b(u(t),w(t),w(t)) = 0\\
&b(w(t),w(t),w(t)) = 0 \qquad \text{e}\\
&\langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), u(t) - \widehat{u}(t)\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

temos,

$$
\langle w'(t),w\rangle + \nu_0 \langle \mathcal{A}w(t),w(t)\rangle + b(w(t),u(t),w(t)) \ \leq \ 0.
$$

Resulta do lema (1.1) partes (i) e (ii) que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||_V^2 + b(w(t),u(t),w(t)) \leq 0 \qquad (3.11)
$$

ou,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||_V^2 \leq -b(w(t),u(t),w(t)) \leq |b(w(t),u(t),w(t))|.
$$

Usando-se o fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta,

$$
\begin{aligned}
|b(w(t),u(t),w(t))| &= \left|\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w_i \, dx\right| \le \sum_{i,j=1}^{n} ||w_j||_{L^4(\Omega)} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} ||w_i||_{L^4(\Omega)} \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} ||w_j||_{L^4(\Omega)} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)}\right) ||w_i||_{L^4(\Omega)} \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} ||w_j||^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}\right] ||w_i||_{L^4(\Omega)} \\
&\le ||w||_{(L^4(\Omega))^n} \sum_{i=1}^{n} ||u_i||_{H_0^1(\Omega)} ||w_i||_{L^4(\Omega)} \\
&\le ||w||_{(L^4(\Omega))^n} \left(\sum_{i=1}^{n} ||u_i||_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_i||^2_{L^4(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&= ||w||_{(L^4(\Omega))^n} \; ||u|| \; ||w||_{(L^4(\Omega))^n}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0 ||w(t)||_V^2 \;\le\; ||w(t)||^2_{(L^4(\Omega))^n} ||u(t)||. \tag{3.12}
$$

Supondo-se $n = 2$, tem-se pelo lema (1.7) que para $w_i \in H_0^1(\Omega)$,

$$
||w_i||_{L^4(\Omega)} \;\le\; 2^{1/4} |w_i|^{1/2}_{L^2(\Omega)} ||w_i||^{1/2}_{H_0^1(\Omega)}
$$

ou seja,

$$
||w_i||^2_{L^4(\Omega)} \;\le\; 2^{1/2} |w_i|_{L^2(\Omega)} \, ||w_i||_{H_0^1(\Omega)}
$$

resulta daí que,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} ||w_i||^2_{L^4(\Omega)} &\le C \sum_{i=1}^{2} |w_i|_{L^2(\Omega)} \, ||w_i||_{H_0^1(\Omega)} \\
&\le C \left(\sum_{i=1}^{2} |w_i|_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} ||w_i||_{H_0^1(\Omega)}\right)^{1/2} \\
&= C|w| \, ||w||
\end{aligned}
$$

portanto,

$$
||w||^2_{L^4(\Omega)} \;\le\; C|w(t)| \, ||w(t)||. \tag{3.13}
$$

De (3.12) e (3.13) temos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \quad \leq \quad C|w(t)|\,||w(t)||\,||u(t)||$$

ou,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\,\nu_0||w(t)||^2 \quad \leq \quad 2C|w(t)|\,||w(t)||\,||u(t)||.$$

Agora,

$$2C|w|\,||w||\,||u|| \quad \leq \quad \frac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2\nu_0}}2C\,|w|\,||w||\,||u|| = 2\sqrt{\nu_0}||w||\frac{2C}{\sqrt{2\nu_0}}|w|\,||u(t)|| \tag{3.14}$$

pois $1 \leq \dfrac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2\nu_0}} = \dfrac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2}\sqrt{\nu_0}} = \sqrt{2}$

Por (3.14) segue-se que,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\,\nu_0||w(t)||_V^2 \quad \leq \quad 2\sqrt{\nu_0}||w||_V\frac{2C}{\sqrt{2\nu_0}}|w|\,||u(t)||_V$$

e usando a desigualdade $ab \leq \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}b^2$ resulta,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\,\nu_0||w(t)||^2 \quad \leq \quad \frac{1}{2}4\nu_0||w||_V^2 + \frac{1}{2}\frac{4C^2}{2\nu_0}|w|^2||u(t)||_V^2$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2\,\nu_0||w(t)||^2 \quad \leq \quad 2\,\nu_0||w(t)||_V^2 + 2\frac{C^2}{\nu_0}|w|^2||u(t)||^2$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \quad \leq \quad 2\frac{C^2}{\nu_0}|w|^2||u(t)||_V^2.$$

Fazendo-se $\theta(t) = \dfrac{C^2}{\nu_0}|w|^2||u(t)||_V^2$ e $\varphi(t) = |w(t)|^2$, segue-se que $\theta \in L^1(0,T)$. De fato,

$$\int_0^T |\theta(t)|\,dt = \frac{C^2}{\nu_0}\int_0^T ||u(t)||_V^2\,dt < \quad \infty$$

pois $u \in L^2(0,T;V)$.

Desde que a norma é uma aplicação contínua temos,

$$\varphi \in C([0,T];\mathbb{R})$$

com isso temos que

$$\varphi'(t) \;\; \leq \;\; \theta(t)\,\varphi(t)$$

logo,

$$\int_0^t \varphi'(s)\,ds \;\; \leq \;\; \int_0^t \theta(s)\,\varphi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

resulta que

$$\varphi(t) - \varphi(0) \;\; \leq \;\; \int_0^t \theta(s)\,\varphi(s)\,ds$$

Notando-se que $\varphi(0) = 0$, pois $\varphi(0) = |w(0)|^2 = 0$ temos,

$$\varphi(t) \;\; \leq \;\; \int_0^t \theta(s)\,\varphi(s)\,ds \tag{3.15}$$

usando-se a desigualdade de Gronwall em (3.15) resulta,

$$\varphi(t) \quad \leq \;\; 0\exp\left(\int_0^t \varphi(s)\,ds\right)$$

ou seja,

$$\varphi(t) \leq 0.$$

Como $\varphi(t) = |w(t)|^2 \geq 0$ resulta

$$\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

e, portanto

$$w(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T]$$

mostrando que

$$u(t) = \widehat{u}(t) \quad \forall t \in [0,T]$$

quando $n = 2$.

Conside-se agora $n = 3$, então se $u \in V$ tem-se que $u \in \left(L^6(\Omega)\right)^3$ pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Aplicando o lema (1.8) para o caso $s = 4$, $n = 3$ e $r = 6$, isto é,

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1$$

segue-se que,

$$|b(u,v,w| \leq C||u||_{(L^6(\Omega))^3}||v||\,|w|^{1/2}\,||w||^{1/2}$$

desta desigualdade resulta,

$$\begin{aligned}|b(w(t),u(t),w(t)| &= |b(w(t)),w(t),u(t)| \leq C||w||_{(L^6(\Omega))^3}||u(t)||\,|w(t)|^{1/2}\,||w(t)||^{1/2} \\ &\leq C_1||w(t)||\,||u(t)||\,|w(t)|^{1/2}\,||w(t)||^{1/2}\end{aligned}$$

isto é,

$$|b(w(t),u(t),w(t)| \leq C_1||w(t)||^{3/2}\,|w(t)|^{1/2}\,||u(t)||. \tag{3.16}$$

Tem-se de (3.11) e (3.16) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \leq C_1||w(t)||^{3/2}\,|w(t)|^{1/2}\,||u(t)||.$$

Fazendo-se $M(t) = ||u(t)||^4$ tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 &\leq C_1|M(t)|^{1/4}||w(t)||^{3/2}\,|w(t)|^{1/2} \\ &\leq C_1\left(\frac{3}{4\nu_0}\right)^{3/4}|M(t)|^{1/4}|w(t)|^{1/2}\left(\frac{4\nu_0}{3}\right)^{3/4}||w(t)||^{3/2}\end{aligned}$$

e, como

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1,$$

segue-se da desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 &\leq \frac{1}{4}C_1^4\left(\frac{3}{4\nu_0}\right)^3|M(t)|\,|w(t)|^2 + \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4\nu_0}{3}\right)^{3/4}\right]^{4/3}\left(||w(t)||^{3/2}\right)^{4/3} \\ &\leq C_2|M(t)|\,|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Resulta de(3.17) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \leq C_2|M(t)|\,|w(t)|^2$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \nu_0||w(t)||^2 \leq C_2||u(t)||^4\,|w(t)|^2 \tag{3.18}$$

integrando-se (3.18) em $[0, T]$, resulta

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 - \frac{1}{2}|w(0)|^2 \quad \leq \quad \int_0^t C_2 ||u(s)||^4 \, |w(s)|^2 ds$$

como $w(0) = 0$ temos,

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \quad \leq \quad \int_0^t C_2 ||u(s)||^4 \, |w(s)|^2 ds. \tag{3.19}$$

Fazendo-se $\varphi(t) = |w(t)|^2$ e $\theta(t) = C_2 ||u(t)||^4 \, |w(t)|^2$ temos que

$$\theta \in L^1(0, T)$$

pois $u \in L^4(0, T; V)$. Desde que a norma é uma aplicação contínua temos que

$$\varphi \in C^0([0, T], \mathbb{R})$$

com isso,

$$|w(t)|^2 \leq \int_0^t \theta(s) \, \varphi(s) \, ds$$

usando-se a desigualdade de Gronwall em (3.19) resulta

$$|w(t)|^2 \leq 0$$

. Como $|w(t)|^2 \geq 0$ logo

$$w(t) = 0$$

portanto,

$$u(t) = \widehat{u}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

quando $n = 3$. ■

Apêndice A

Teorema de Aubin - Lions

No presente apêndice demonstrar-se-à o teorema de compacidade de Aubin-Lions usado na demonstração do teorema de existência de solução do sistema de Navier-Stokes, ver Aubin [1], Lions [9].

Teorema A.1. *Considera-se* $1 < p_i < +\infty$*,* $i = 1, 2$ *e* $B_0 \overset{comp}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ *espaços de Banach.*

Para $0 < T < +\infty$*, seja*

$$W = \{v : \; v \in L^{p_0}(0, T; B_0); \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

munido da norma

$$||v||_W = ||v||_{L^{p_0}} + \left|\left|\frac{dv}{dt}\right|\right|_{L^{p_1}}$$

resulta que W *é um espaço de Banach.*

Demonstração:

Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em W. Logo,

$$||v_n - v_m||_W \to 0$$

se $m, n \to +\infty$. Assim,

$$||v_n - v_m||_W \;\; = \;\; ||v_n - v_m||_{L^{p_0}} + \left|\left|\frac{dv_n}{dt} - \frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{L^{p_1}}$$

desta forma,

$$||v_n - v_m||_{L^{p_0}} \quad \rightarrow \quad 0$$

e

$$\left|\left|\frac{dv_n}{dt} - \frac{dv_m}{dt}\right|\right|_{L^{p_1}} \quad \rightarrow \quad 0.$$

Logo (v_n) é uma sequência de Cauchy em L^{p_0} e $\left(\dfrac{dv_n}{dt}\right)$ é uma sequência de Cauchy em L^{p_1}. Desde que L^{p_0} e L^{p_1} são completos, temos que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad L^{p_0}(0,T;B_0) \hookrightarrow L^{p_0}(0,T;B_1) \hookrightarrow L^{p_1}(0,T;B_1)$$

e

$$\frac{dv_n}{dt} \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^{p_1}(0,T;B_1) \implies \frac{dv_n}{dt} \rightarrow u \quad \text{em} \quad D'(0,T;B_1),$$

como

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad D'(0,T;B_1) \implies \frac{dv_n}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} \quad \text{em} \quad D'(0,T;B_1)$$

pela unicidade do limite temos que $u = \dfrac{dv}{dt}$ logo,

$$\frac{dv_n}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} \quad \text{em} \quad L^{p_1}(0,T;B_1)$$

portanto

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad W \qquad \text{com} \quad v \in W$$

Mostrando que W é um espaço de Banach.

Teorema A.2. *Com as hipóteses acima sobre $B_0 \subset B \subset B_1$, $0 < p_i < +\infty$, $i = 1,2$ resulta ser compacta a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$*

Lema A.1. *Sendo $B_0 \subset B \subset B_1$ nas condições anteriores, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon)$ tal que*

$$||u||_B \quad \leq \quad \varepsilon||u||_{B_0} + c(\varepsilon)||u||_{B_1} \tag{A.1}$$

para toda $u \in B_0$

Demonstração:

Suponha falsa a conclusão do Lema (A.1). Resulta que para algum $\varepsilon > 0$ existe um vetor $u_n \in B$ tal que,

$$||u_n||_B \;>\; \varepsilon||u_n||_{B_0} + n||u_n||_{B_1}. \tag{A.2}$$

Sendo $u_n \neq 0$ faz sentido considerar

$$w_n = \frac{u_n}{||u_n||_{B_0}} \tag{A.3}$$

Substituindo-se (A.3) em (A.2) obtem-se,

$$\begin{aligned} ||w_n||_B &> \varepsilon||w_n||_{B_0} + n||w_n||_{B_1} \\ &> \varepsilon\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_{B_0}}\right|\right|_{B_0} + n\left|\left|\frac{u_n}{||u_n||_{B_0}}\right|\right|_{B_1} \\ &> \varepsilon + n\frac{||u_n||_{B_1}}{||u_n||_{B_0}} \end{aligned}$$

ou,

$$||w_n||_B \;>\; \varepsilon + n||w_n||_{B_1} \tag{A.4}$$

Da continuidade de $B_0 \subset B$ tem-se que,

$$||u_n||_B \;\leq\; C\,||u_n||_{B_0} \Longrightarrow \frac{||u_n||_B}{||u_n||_{B_0}} \leq C$$

ou seja,

$$||w_n||_B \;\leq\; C. \tag{A.5}$$

De (A.4) e (A.5) temos,

$$\begin{aligned} \varepsilon + \eta||w_n||_{B_1} &< ||w_n||_B \leq C \\ \frac{\varepsilon}{n} < \frac{\varepsilon}{\eta} + ||w_n||_{B_1} &< \frac{||w_n||_B}{n} < \frac{C}{n} \end{aligned}$$

da qual resulta pelo teorema do confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} ||w_n||_{B_1} = 0 \tag{A.6}$$

Sendo B_0 reflexivo e de (A.3) $||w_n||_{B_0} = 1$, conclui-se que existe uma subsucessão de (w_n) que converge fraco em B_0 e sendo $B_0 \subset B$ compacta, existe uma subsucessão (w_ν) que converge forte em B para um vetor w.

Da continuidade de $B_1 \subset B$, juntamente com (A.6) resulta que (w_ν) converge forte para zero em B. De fato,

$$\begin{aligned} 0 \leq ||w_\nu||_B &\leq C||w_\nu||_{B_1} \\ 0 \leq \lim_{\nu \to +\infty} ||w_\nu||_B &\leq C \lim_{\nu \to +\infty} ||w_\nu||_{B_1} \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{\nu \to +\infty} ||w_\nu||_B = 0$$

pela unicidade do limite $w = 0$, o que é contraditório, porque $||w_\nu||_B > \varepsilon > 0$. Conclui-se a validade do Lema (A.1).

Demonstração do Teorema A.2

Dever-se-à demonstrar que de toda sucessão (v_n) limitada em W pode-se extrair uma subsucessão, ainda representada por (v_n) fortemente convergente para v em $L^{p_0}(0, T; B)$

A demonstração será feita para o caso $v = 0$, sem perda de generalidade.

Do lema (A.1), para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$||v_n(t)||_B \leq \varepsilon||v_n(t)||_{B_0} + c(\varepsilon)||v_n(t)||_{B_1}$$

pois $v_n \in W$. Tomando-se a norma $L^{p_0}(0, T)$ de ambos os membros, obtem-se que para cada $\eta > 0$ existe $d(\eta) > 0$ tal que,

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + d(\eta)||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_1)} \tag{A.7}$$

sendo (v_n) limitada em W, obtém-se

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} \leq ||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left|\left|\frac{dv_n}{dt}\right|\right|_{L^{p_1}(0,T;B_1)} = ||v_n|| \leq C$$

de (A.7)

$$||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B)} \leq \eta C + d(\eta)||v_n||_{L^{p_0}(0,T;B_1)}, \tag{A.8}$$

sendo W reflexivo, pois B_i o são, resulta que da sucessão (v_n) extrai-se uma subsucessão (v_n) tal que,

$$v_n \quad \rightarrow \quad 0 \quad \text{fraco em} \quad W.$$

De (A.8) e da arbitrariedade do $\eta > 0$, para demonstrar-se que (v_n) converge forte em $L^{p_0}(0,T;B)$, o que implica que a injeção de W neste espaço é compacta. É suficiente verificar que (v_n) converge forte para zero em $L^{p_0}(0,T;B_1)$. De fato, tem-se que a injeção de W em $C^0([0,T];B_1)$ é contínua, ver Lions-Magenes [10]. Logo,

$$||v_n(s)||_{B_1} \quad \leq \quad \max_{s\in[0,T]} ||v_n(s)||_{B_1} = ||v_n||_{C^0([0,T];B_1)} \leq C_0||v_n||_W \leq K, \tag{A.9}$$

sendo K uma constante, pois (v_n) é limitada em W.

Se demonstrarmos que $||v_n(s)||_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0,T)$, obtém-se de (A.9) que $||v_n||_{B_1}^{p_0}$ é limitada e $||v_n||_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $(0,T)$. Logo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante que $||v_n||_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L^1(0,T)$, isto é, (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0,T;B_1)$. Assim retornando a (A.8) conclui-se que (v_n) converge em $L^{p_0}(0,T;B)$ mostrando a compacidade de W em $L^{p_0}(0,T;B)$.

Portanto resta apenas mostrar que $||v_n(s)||_{B_1}$ converge para zero em $(0,T)$. Limitar-se-à ao ponto $s=0$. De fato, seja w_n definida por,

$$w_n(t) = v_n(\lambda\, t), \quad \lambda > 0, \quad \text{a fixar}, \tag{A.10}$$

obtém-se

$$w_n(0) = v_n(0)$$

$$\begin{aligned} ||w_n(t)||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} &\leq C_1\lambda^{-\frac{1}{p_0}} \\ ||w_n'(t)||_{L^{p_0}(0,T;B_1)} &\leq C_2\lambda^{1-\frac{1}{p_0}}. \end{aligned}$$

Seja $\theta \in C^1([0,T];\mathbb{R})$ sendo $\theta(0) = -1$ e $\theta(T) = 0$ tem-se:

$$\int_0^T (\theta\, w_n)' dt \quad = \quad \theta(T)w_n(t) - \theta(0)w_n(0) = w_n(0)$$

assim,

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta\, w_n)' dt = \int_0^T \theta\, w_n' dt + \int_0^T \theta' w_n\, dt = \beta_n + \gamma_n$$

isto é,

$$w_n(0) = \beta_n + \gamma_n$$

Resulta que,

$$||w_n(0)||_{B_1} \;\leq\; ||\beta_n||_{B_1} + ||\gamma_n||_{B_1} \leq C_3\lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + ||\gamma_n||_{B_1}$$

para cada $\varepsilon > 0$ considera-se $\lambda > 0$ tal que,

$$C_3\,\lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se demonstrarmos que $||\gamma_n||_{B_1}$ converge para zero, ou seja, se γ_n converge forte para zero em B_1, resulta que $v_n(0) = w_n(0)$ converge forte para zero em B_1. Assim resta mostrar que γ_n converge forte para zero em B_1. De fato, tem-se que

$$v_n \;\rightarrow\; 0 \quad \text{fraco em} \quad W$$

sendo $W \subset L^{p_0}(0,T;B_0)$ resulta que

$$v_n \;\rightarrow\; 0 \quad \text{fraco em} \quad L^{p_0}(0,T;B_0)$$

logo para $\lambda > 0$ fixo, resulta que

$$w_n \;\rightarrow\; 0 \quad \text{fraco em} \quad L^{p_0}(0,T;B_0)$$

seja

$$\gamma_n = \int_0^T \theta'\, w_n\, dt \qquad \gamma_n \in B_0$$

para toda $\psi \in B_0'$, dual de B_0 tem-se

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta'\psi\,(w_n)\, dt \qquad \gamma_n \in B_0$$

que converge para zero. Logo γ_n converge fraco para zero em B_0. Sendo $B_0 \subset B$ compacta, resulta que γ_n converge forte em B. ■

Enunciamos agora o Lema de Lions, resultado utilizado na demonstração do teorema de existência de soluções, cuja demonstração encontra-se em Lions [9]

Lema A.2. *Sejam Q um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_n e g duas funções de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$ tal que*

$$||g_n||_{L^q(Q)} \;\leq\; C \qquad g_n \rightarrow g \quad \textit{quase sempre em} \quad Q$$

então

$$g_n \;\rightarrow\; g \quad \textit{fraco em} \quad L^q.$$

Apêndice B

Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução

O resultado abordado neste apêndice é de grande importância para a solução do problema principal deste trabalho visto que, nos permite prolongar a solução. Aplicamos este resultado para mostrar a existência de soluções aproximadas, segundo Galerkin.

Seja D um subcojunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos serão denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. O problema é encontrar uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \quad \text{para quase todo} \quad t \quad \text{em} \quad I \tag{B.1}$$

se uma tal função $x(t)$ e um intervalo I existem, então diz-se que $x(t)$ é uma solução de (B.1) sobre I

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Diz-se que as condições de Carathéodory são satisfeitas sobre D se

i) $f(t, x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;

ii) $f(t, x)$ é contínua em x, para cada t fixo;

iii) Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in D$$

Considere o retângulo

$$R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t-t_0| \leq a, \, |x-x_0| \leq b\} \quad \text{com} \quad a,b > 0$$

Teorema B.1. *(Carathéodory)*

Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução do problema de valor inicial

$$(P_0) \begin{cases} X' &= f(t,X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

Demonstração:

Seja $m(t) = m_R(t)$, isto é,

$$|f(t,x)| \leq m(t) \quad \forall (t,x) \in R. \tag{B.2}$$

Consideremos o caso $t \geq t_0$, a demonstração do caso $t \leq t_0$ é semelhante.

Seja $M(t)$ definido por,

$$M(t) = 0 \quad \text{se} \quad t_0 - a < t < t_0 \tag{B.3}$$

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)\, ds \quad \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + a \tag{B.4}$$

Note que $M(t)$ é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$ e $M(t_0) = 0$

Seja $M(t) \in \mathbb{R}^n$ então, $(t, x_0 \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo, $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a$, $\beta > 0$ arbitrário. Definimos, por indução, as seguintes aproximações φ_j ($j = 1, 2, ...$) da seguinte maneira:

$$\varphi_j(t) = x_0 \quad \text{se} \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta_0}{j} \tag{B.5}$$

$$\varphi_j(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds \quad \text{se} \quad t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \tag{B.6}$$

Expliquemos esta definição por indução com relação as partições do intervalo $[t_0, t_0+\beta]$.

Temos que

$$\varphi_1(t) = x_0 \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \beta).$$

Note que (B.6) define $\varphi_j(t)$ sobre $t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{2\beta}{j}$, pois para qualquer t neste intervalo se tem que $t_0 < t - \frac{\beta}{j} \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$, portanto (B.6) está bem definida.

Notamos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $[t_0, t_0 + \frac{2\beta}{j}]$, além disso,

$$\varphi_j(t) = \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds \implies |\varphi_j(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))\, ds \right|$$

logo,

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} |f(s, \varphi_j(s))|\, ds \leq \int_{t_0}^{t-\frac{\beta}{j}} m(s)\, ds$$

por (B.1) e, portanto

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) \tag{B.7}$$

Mostremos que $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $[t_0, t_o + \beta]$. Suponhamos que para $1 < k < j$, $\varphi_j(t)$ está definida sobre $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{k\beta}{j}$, é contínua e sobre este intervalo se tenha (B.7) então, (B.6) define $\varphi_j(t)$ para $t_0 + \frac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$. Também sobre $t_0 < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$ a função $\varphi_j(t)$ é contínua e vale (B.7) sobre este intervalo. Por conseguinte, por indução (B.6) define funções contínuas $\varphi_j(t)$ sobre $[t_0, t_0 + \beta]$ tal que

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \beta]$$

Sendo M contínua em $[t_0, t_0 + \beta]$, logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$, desde que

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right)$$

segue-se que

$$|\varphi_j(t)| \leq |x_0| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mostremos agora que φ_j é equicontínua. Para isto devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 onde $|t_1 - t_2| < \delta$ tem-se que $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{N}$. De fato, sabe-se que

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right|$$

novamente usando a continuidade de M em $[t_0, t_0 + \beta]$ vem que, M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = \left| \left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - \left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \delta \implies \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \varepsilon$$

donde segue o resultado.

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Arzelà-Ascoli, assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[t_0, t_0+\beta]$ para uma função contínua φ.

Resta mostrar que φ é solução do problema de valor inicial (P_0).

Sendo $f(t,x)$ contínua em x, para cada t fixo, decorre que,

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \quad \to \quad f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usando (B.2) segue que $|f(t,\varphi(t))| \leq m(t)$. Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável, então a função f está nas condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resultando que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

além disso, para todo $t \in [t_0, t_0+\beta]$ tem-se que

$$\varphi_{j_k}(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds - \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))\, ds$$

tomando o limite quando $k \to \infty$ resulta que,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

assim, $\varphi(t)$ é a solução que procuramos. ∎

Corolário B.1. *Seja D aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D, então o problema de valor inicial (P_0) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.*

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (B.1) sobre I e $I \subset I_1$, então diz-se que $\varphi(t)$ tem um prolongamento até I_1 se existe $\varphi_1(t)$ tal que $\varphi_1(t)$ é uma solução de (B.1) sobre I_1 e $\varphi_(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I$

Teorema B.2. *Sejam D aberto, limitado e conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f satisfazendo as duas primeiras condições de Carathèodory sobre D e uma função $m(t)$ integrável em D tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$ para todo $(t,x) \in D$. Seja φ uma solução de (B.1) sobre o intervalo aberto (a,b) então,* *i) existem $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$;*

ii) se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$. Análogo resultado para a;

iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, w) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0))$, $(w, \varphi(w-0)) \in \partial D$ (fronteira de D).

Demonstração:

i) Tem-se por hipótese que $\displaystyle\int_a^b m(t)\,dt < \infty$. Seja

$$M(t) = \int_a^t m(s)\,ds \quad a \leq t \leq b.$$

Desde que $\varphi(t)$ é solução de (B.1) tem-se que,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s))\,ds \quad a \leq t \leq b$$

onde $t_0 \in (a, b)$ e $\varphi(t_0) = x_0$, então se $t_1, t_2 \in (a, b)$, obtém-se,

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_1)| \;=\; \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s))\,ds\right| \leq |M(t_2) - M(t_1)|,$$

de onde, por ser $M(t)$ contínua em $[a, b]$ o resultado (i) segue aplicando o critério de Cauchy.

ii) Definamos $\widetilde{\varphi}(t)$ como,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) \quad \text{se} \quad t \in (a, b) \\
\widetilde{\varphi}(t) &= \varphi(b-0) \quad \text{se} \quad t = b
\end{aligned}$$

tem-se que

$$\widetilde{\varphi}(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \widetilde{\varphi}(s))\,ds \quad \forall t \in (a, b]$$

com t_0 e x_0 como na parte (i), pois a igualdade é verdadeira para $t \in (a, b)$ e se $t = b$, então $\widetilde{\varphi}(b) = \varphi(b-0)$ e

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(b) &= x_0 + \int_{t_0}^b f(s, \widetilde{\varphi}(s))\,ds = x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s, \widetilde{\varphi}(s))\,ds \\
&= x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s, \varphi(s))\,ds = x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}[\varphi(b-\epsilon) - \varphi(t_0)] = \varphi(b-0)
\end{aligned}$$

sendo $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então, pelo teorema anterior, segue que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(b) &= \varphi(b-0) \end{cases}$$

tem solução $\psi(t)$ no intervalo $[b, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$.

Seja

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(t) &= \widetilde{\varphi}(t) \quad \forall t \in (a,b] \\ \widehat{\varphi}(t) &= \psi(t) \quad \forall t \in (b, b+\delta] \end{aligned}$$

tem-se que

$$\widehat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))\, ds \quad \forall t \in (a, b+\delta]$$

pois a igualdade é verdadeira para $t \in (a,b]$ e se $b < t \leq b+\delta$ tem-se,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(t) &= \psi(t) = \varphi(b-0) + \int_{b}^{t} f(s,\psi(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s, \widetilde{\psi}(s))\, ds + \int_{b}^{t} f(s,\psi(s))\, ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))\, ds \end{aligned}$$

Assim, $\widehat{\varphi}(t)$ é um prolongamento de $\varphi(t)$ ao intervalo $(a, b+\delta]$.

iii) Demonstraremos para o lado direito, análoga demonstração se faz para o lado esquerdo. Se tem que $(b, \varphi(b-0)) \in D$, de onde $(b, \varphi(b-0)) \in \partial D$ ou $(b, \varphi(b-0)) \in D$.

Suponhamos que $(b, \varphi(b-0)) \in D$, então por (ii) φ pode ser prolongada até um intervalo da forma $(a, b+\delta]$ para algum $\delta > 0$.

Seja U um subconjunto de D compacto, conexo, cujo interior é diferente do vazio tal que $(t, \varphi(t)) \in U$ para todo $t \in (a, b+\delta]$. Agora se $(a, \varphi(a+0)) \in \partial D$ então escolhemos a' tal que $a < a' < b$ e trabalhamos com a' no lugar de a.

Seja $[c,d]$ a projeção de U sobre o eixo dos t e escolhemos $\epsilon > 0$ tal que a projeção de D sobre o eixo dos t contenha o intervalo $[c-\epsilon, d+\epsilon]$.

Seja

$$N(t) = \int_{c-\epsilon}^{t} m(s)\, ds \quad t \in [c-\epsilon, d+\epsilon] \tag{B.8}$$

Assim existem $p, q > 0$ tais que qualquer retângulo

$$R_{s_0,y_0} : |t - s_0| \leq p; |x - y_0| \leq q$$

com (s_0, y_0) percorrendo U, está contido em D. Existe $\beta > 0$, tal que se $|t - s_0| \leq \beta$, com $t, s_0 \in [c - \epsilon, d + \epsilon]$, então

$$|N(t) - N(s_0)| \quad = \quad \left| \int_{s_0}^{t} m(s)\, ds \right| \leq q$$

de onde pela demonstração do teorema (B.1), para qualquer R_{s_0,y_0} sempre existe uma solução φ_{s_0,y_0} do problema de valor inicial no intervalo $[s_0, s_0 + \beta]$. Disto segue que, pela compacidade de U, depois de um número finito de passos, podemos prolongar $\varphi(t)$ até um intervalo $(a, b_U]$ tal que $(b_U, \varphi(b_U)) \notin U$.

Agora, seja (V_m) uma sucessão de conjuntos abertos de D tais que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = D$$

$\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset V_{m+1}$ com $m = 1, 2, \ldots$. Suponhamos que $(t, \varphi(t)) \in V_{m_0}$, $t \in (a, b)$ então prolongamos φ até um intervalo $(a, b_{m_0}]$ tal que $(b_{m_0}, \varphi(b_{m_0})) \notin \overline{V}_{m_0}$. Suponhamos que $(t, \varphi(t)) \in V_{m_1}$, $t \in (a, b)$ então prolongamos φ até um intervalo $(a, b_{m_1}]$ tal que $(b_{m_1}, \varphi(b_{m_1})) \notin \overline{V}_{m_1}$, e assim sucessivamente. Desta forma consegue-se uma sucessão (b_{mj}) não decrescente de números reais. Seja $\omega = \sup_j b_{mj}$ então $\varphi(t)$ tem um prolongamento até (a, ω) e pela construção de ω, $(\omega, \varphi(\omega - 0))$ não pode pertencer a D, daí $(\omega, \varphi(\omega - 0)) \in \partial D$. Assim fica demonstrada a parte (iii) ■

Corolário B.2. *Seja $D = [0, T] \times B$, com $0 < w < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' &= \quad f(t, X) \\ X(t_0) &= \quad X_0, |X_0| \leq b \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração:

Pelo teorema (B.2) $\varphi(t)$ tem um prolongamento até um intervalo $[0,\omega]$ tal que $(\omega,\varphi(\omega)) \in \partial D$. Pela natureza do conjunto D, tem-se que

$$\begin{aligned} (\omega,\varphi(\omega)) &\in \Gamma_1 = \{(t,x); |x| = b, 0 \le t < T\} \quad \text{ou} \\ (\omega,\varphi(\omega)) &\in \Gamma_2 = \{(t,x); |x| \le b, 0 \le t < T\}. \end{aligned}$$

Acontece que $|\varphi(t)| \le M$ para todo $t \in I$, I intervalo qualquer onde está definido $\varphi(t)$, assim $(\omega,\varphi(\omega)) \in \Gamma_2$, donde $\omega = T$, o que prova o corolário. ■

O que faremos agora é adequar o nosso problema de forma a obtermos o prolongamento da solução.

Do problema aproximado (2.2) temos

$$\begin{cases} (u'_m(t),w_i) + \nu_0 a(u_m(t),w_j) + \langle \mathcal{A}u_m(t),w_i\rangle + \langle Bu_m(t),w_i\rangle = \langle f(t),w_j\rangle \\ u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H \end{cases}$$

Queremos mostrar, a priori, a existência de solução $u_m(t)$ em $[0,t_m[$. Temos que,

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j \qquad \text{e} \\ u'_m(t) &= \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j \end{aligned}$$

assim por temos,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j, w_i\right) &+ \nu_0 a\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, w_i\right) + \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j\right), w_i\right\rangle \\ &+ \left\langle B\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j\right), w_i\right\rangle = \langle f(t),w_i\rangle \end{aligned}$$

agora,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j, w_i\right) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(w_j,w_i) = g'_i m(t)$$

e

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, w_i\right) &= a(u_m(t),w_i) = ((u_m(t),w_i)) = \lambda_i(u_m(t),w_i) \\ &= \lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, w_i\right) = \lambda_i g_{im}(t) \end{aligned}$$

desta forma o problema aproximado fica,

$$g'_{im}(t) + \nu_0 \lambda_i g_{im}(t) + \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_i \right\rangle + \left\langle B\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_i \right\rangle = \langle f(t), w_i \rangle$$

temos que $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é denso em V, como V é denso em H resulta que $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é denso em H.

Logo, se $u_0 \in H$ existirá

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \quad \in \quad [(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}]$$

tal que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \ \rightarrow \ u_0 \quad \text{forte em} \quad H \tag{B.9}$$

queremos também que

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(0) w_i \ \rightarrow \ u_0 \quad \text{forte em} \quad H. \tag{B.10}$$

Resulta de (B.9) e (B.10) que,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(0) w_i \implies \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{im} - g_{im}(0)) w_i = 0$$

como os w_i são linearmente independentes temos que,

$$\alpha_{im} \quad = \quad g_{im}(0).$$

Resulta da equação (2.2) que o sistema de equações diferenciais ordinárias é dado por,

$$\begin{cases} g'_{im}(t) + \nu_0 \lambda_i g_{im}(t) + \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_i \right\rangle + \left\langle B\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_i \right\rangle = \langle f(t), w_i \rangle \\ j = 1, ..., m \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} + \nu_0 \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j\right), w_m \right\rangle \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \langle Bw_1, w_1\rangle + \ldots + \langle Bw_m, w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle Bw_1, w_m\rangle + \ldots + \langle Bw_m, w_m\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m\rangle \end{bmatrix}$$

com $\begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{bmatrix}$

Definindo-se,

$$Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}; \, G(Z(t)) = \begin{bmatrix} \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j\right), w_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j\right), w_m \right\rangle \end{bmatrix}$$

e $D = \begin{bmatrix} \langle Bw_1, w_1\rangle + \ldots + \langle Bw_m, w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle Bw_1, w_m\rangle + \ldots + \langle Bw_m, w_m\rangle \end{bmatrix}$

Tem-se

$$Z'(t) + \lambda\, Z(t) + G(Z(t)) + D\, Z(t) = F$$

ou seja,

$$Z'(t) + [D + \lambda]\; Z(t) + G(Z(t)) = F$$

assim

$$Z'(t) = F - [D - \lambda]\; Z(t) - G(Z(t))$$

Define-se a função auxiliar,

$$\begin{aligned} h : [0,T] \times R^{2m} &\longrightarrow R^{2m} \\ (t, Z) &\longrightarrow h(t,Z) = F - [D - \lambda]\ Z(t) - G(Z(t)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} Z' &= h(t,Z) \\ Z(0) &= Z_0 \end{cases}$$

Mostra-se que h satisfaz as condições de Carathéodory em um subconjunto B de R^{2m+1}, o que resulta do teorema (B.1) que nosso problema de valor inicial acima possui uma solução. As estimativas obtidas no capítulo 2 garantem o prolongamento da solução a todo intervalo $[0,T]$, pelo corolário (B.2).

Referências Bibliográficas

[1] Aubin, J.P., Un Théorème de Compacité, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin, 1963 (5042-5044)

[2] Brézis, H., Analyse Functionelle, Théorie et Applications, ed. Masson, 1983.

[3] De Araújo, G.M., Sobre as Equações de Navier- Stokes com Viscosidade Variável em Domínio Não Cilíndrico, Tese de Doutorado, UFRJ,2003.

[4] De Araújo, G.M.,Milla Miranda, M.,Medeiros,L.A., On the Navier- Stokes equations with variable viscosity in a noncylindrical domain. Applicable Anaysis, vol.86, N° 3,287-313, March 2007.

[5] Gomes, A.C., Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de EDP'S Não Linear com Acoplamento na Parte Não Linear, Dissertação de Mestrado, UFPA, 2007.

[6] Kreyszig, E., Introductory Funcional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[7] Ladyzhenskaya, O.A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd Edn, New York, London: Gordon and Beach, 1989.

[8] Leray,J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. Journal de Mathematiques Pures et Applliquees., **XIII**,331-418.

[9] Lions, J.L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[10] Lions, J.L., Magenes, E., Problèmes aux Limites non homogènes et applications, Vol.1, Dunod, Paris, 1969.

[11] Medeiros, L.A.,Milla Miranda,M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos), Instituto de Matemática- UFRJ, 2000.

[12] Milla Miranda, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos- UFRJ, nº 28, 1990.

[13] Medeiros, L.A., Tópicos em Equações Diferenciais Parciais- parte 1, Instituito de Matemática- UFRJ, 2005.

[14] Tartar, L., Partial Differential Equations Models in Oceanography(Pittsburg: Carnegie Mellon University), 1999.

[15] Temam, R., Navier- Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis(Amstendam: North- Holland Publishing Company), 1979.