MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM EXPOENTE VARIÁVEL DA NÃO LINEARIDADE

BELÉM

2008

MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM EXPOENTE VARIÁVEL DA NÃO LINEARIDADE

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME - da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. FRANCISCO PAULO MARQUES LOPES

BELÉM

2008

MANOEL JEREMIAS DOS SANTOS

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO PARABÓLICA COM EXPOENTE VARIÁVEL DA NÃO LINEARIDADE

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do grau ou título de **Mestre**, na área de concentração **Matemática**, à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

Aprovada em 12/12/2008

BANCA EXAMINADORA

Francisco Paulo Marques Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Pará

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Universidade Federal do Pará

Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará

Miguel Fidencio Loayza Lozano
Universidade Federal de Pernambuco

BELÉM

Dedicatória

Aos meus pais, meus irmãos, minhas tias, minha prima, meus sobrinhos

e

em especial à minha amada Karen Luana.

Agradecimentos

Foram muitos, os que me ajudaram a concluir este trabalho.

Meus sinceros agradecimentos...

...A Deus, por minha saúde e pela paz necessária à realização deste trabalho;

...A minha família, pelo amor, compreensão e apoio;

...Ao professor, orientador e hoje amigo Paulo Marques Lopes, pelos três anos de estudos entre a especialização e o mestrado;

...Ao professor Giovany Figueiredo, por sua disposição e paciência com minhas "infindáveis" dúvidas;

...Ao professor Mauro de Lima Santos, por sua dedicação, seriedade e extrema competência à frente do PPGME, proporcionando aos alunos do programa as melhores condições possíveis para a realização de seus trabalhos;

...Aos amigos do mestrado que muito me apoiaram;

...Ao professor Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano que aceitou fazer parte da banca examinado de minha dissertação.

Resumo

Neste trabalho foi estudado as questões de existência e unicidade de solução fraca para um problema parabólico, não linear, com respeito ao gradiente da solução, com expoente variável da não linearidade e com as condições de Dirichlet. Foi estudado o problema

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) &= f \quad \text{em} \quad (0,T)\times\Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad [0,T]\times\Gamma \\ u(x,0) &= u_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

com f e u_0 conhecidas.

Para resolver a questão da existência de solução foi utilizado o método de Faedo-Galerkin, sobre o espaço generalizado de Sobolev. A unicidade foi obtida utilizando o método padrão que considera duas soluções para o problema em questão e mostra que elas são iguais quase sempre.

Palavras-chave: Problemas Parabólicos. Expoente Variável. Espaço Generalizado de Sobolev. Faedo-Galerkin. Teorema de Existência de Carathéodory.

Abstract

It was studied questions of existence and unicity in weak solution to a non-linear parabolic problem about gradient of solution, with non-linearity variable exponent and Dirichlet's conditions. The under problems was analysed, to f and u_0 being known

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) & = & f & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ u & = & 0 & \text{em} & [0,T]\times\Gamma \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{em} & \Omega. \end{cases}$$

To answer the existence solutions, Faedo-Galerkin's methods on the space generalized of sobolev was used. The unicity was responded through of pattern method, witch was consider two solutions to a problem and to prove that it was similar almost ever.

Key-words: Parabolic problem. Variable exponent. Space generalized of Sobolev. Faedo-Galerkin. Theorem of Carathéodory existence.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos o problema de Dirichlet para uma equação parabólica degenerada com expoente variável da não linearidade. Consideremos o problema:

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(x,t) \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T); \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times [0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega; \tag{3}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira $\partial\Omega$ suave; T é um número real positivo e $p(\cdot)$, $u_0(\cdot)$ e $f(\cdot,\cdot)$ são funções dadas.

Existe uma literatura abundante sobre as questões de existência e unicidade de soluções para equações parabólicas degeneradas do tipo (1), considerando o expoente ($p(x) = p$) uma função constante. As aplicações para tais problemas encontram-se na teoria dos fluidos com viscosidade variável, estes fluidos são chamados de não-Newtonianos e a viscosidade varia de acordo com o grau de deformação aplicado. Para mais informações veja [3, 16, 17, 32, 42].

J. L. LIONS em [32], estuda a existência e unicidade de solução para o problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f$$

usando o método de Faedo-Galerkin para obter soluções de problemas aproximados e, em seguida, utiliza o método da Monotonia para fazer a passagem ao limite. Tal trabalho nos serviu como fonte motivadora para considerarmos p uma função definida em Ω e buscarmos solução nos espaços generalizados de Sobolev.

O estudo apresentado, por J. ZHAO, [42], permite resolver problemas do tipo

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = u^q$$

com as condições (2)-(3). F. LI e C. XIE em [31], estudam, entre outras coisas, soluções para o problema

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \int u^q \, dx$$

com as condições (2)-(3), tais problemas são chamado de problemas com *fontes não locais*. G. M. FIGUEIREDO e S. B. MENEZES [26], utilizam métodos de compacidade e monotonia para encontrar solução de uma equação do tipo

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f$$

com as condições (2)-(3).

Nosso principal objetivo é estudar as questões de existência e unicidade de soluções fracas (em um certo sentido) para o problema (1)-(3), considerando o expoente $(p(x))$ uma função contínua sobre $\overline{\Omega}$. Problemas envolvendo equações elípticas e parabólicas não lineares, com respeito ao gradiente da solução, com expoente variável da não linearidade, aparecem em vários modelos matemáticos como por exemplo na descrição matemática do processo de filtração em meios porosos não homogêneos [7, 9], fluidos eletroreológicos [1, 5, 8, 18, 40] e em processamento de imagens [4].

Para apresentarmos nosso estudo de forma mais consistente, no primeiro capítulo, abordamos os pressupostos que dão a sustentação teórica necessária ao nosso trabalho. No segundo capítulo, nos baseamos em [32] para estudarmos a existência e unicidade de solução para o problema (1)-(3) no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, considerando p uma constante maior do que dois. Para terminar, no capítulo 3, estudamos o problema (1)-(3) no espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, considerando $p(x)$ uma função continua definida sobre $\overline{\Omega}$. Tais espaços funcionais são chamados de espaços generalizados de Sobolev. Informações mais detalhadas sobre esses espaços poderão ser encontradas em [22, 28].

Esperamos que este seja um trabalho de bom nível matemático e que de alguma forma possa contribuir com alunos e professores que se interessem por problemas desse tipo.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, estabeleceremos algumas notações, conceitos e resultados que serão de grande importância na resolução dos problemas nos capítulos seguintes.

1.1 Distribuições Escalares

1.1.1 Suporte de uma função, Desigualdade de Young e Teorema da Convergência Dominada

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^N$ aberto, limitado e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função definida em Ω com valores reais. Chamamos de *suporte* de f, ao conjunto denotado e definido respectivamente por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}. \tag{1.1}$$

Com esta definição, fica claro que nem sempre o suporte de uma função é subconjunto de seu domínio. Enunciaremos a seguir uma proposição que será bastante usado nos próximos capítulos, para sua demonstração ver [25], p. 79, corolário 4.2.1.

Proposição 1.1.1 (Desigualdade Young)**.** Sejam a e b números reais e p e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$|a||b| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se $|a|^p = |b|^q$. Assim para todo $\epsilon > 0$ temos

$$|a||b| \leqslant \frac{\epsilon^p |a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{\epsilon^q q}. \tag{1.2}$$

O teorema seguinte é conhecido como teorema da convergência dominada de Lebesgue e sua demonstração pode ser encontrada em [10], p. 44.

Teorema 1.1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** Seja (f_n), uma sequência de funções reais definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, integráveis tais que $f_n(x) \to f(x)$, q.t.p em Ω, se existe uma função $g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrável, tal que para todo n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ q.t.p em Ω, então

$$\int_\Omega f(x)\ dx = \lim_n \int_\Omega f_n(x)\ dx. \tag{1.3}$$

1.1.2 O Espaço $L^p(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leqslant p < \infty$, os espaços denotados por $L^p(\Omega)$, são espaços vetoriais formados pelas classes de funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que $\int_\Omega |u(x)|^p\ dx$ é finito, isto é

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mensuráveis};\ \int_\Omega |u(x)|^p\ dx < \infty\}$$

o espaço vetorial acima torna-se um espaço vetorial normado quando o dotamos com a seguinte norma

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

em outra mão o espaço vetorial $L^\infty(\Omega)$ é constituído das classes de funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que são *essencialmente limitadas*, isto é

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mensurável};\ \exists\ M > 0,\ |u(x)| \leqslant M \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

antes de falarmos da norma neste espaço, faremos duas definições, uma de *supremo essencial* e a outra de *ínfimo essencial*, para isto, consideremos $f : \Omega \to \mathbb{R}$, com $f \in L^\infty(\Omega)$, denotamos

$$[f > k] = \{x \in \Omega;\ f(x) > k\}$$

esta notação pode ser estendida analogamente para $[f \leqslant k]$, $[f \geqslant k]$ e $[f < k]$. Chamamos de supremo essencial e ínfimo essencial respectivamente os seguintes números

$$\begin{aligned} \text{sup ess } f &= \inf\{k;\ \mu([f > k]) = 0\}, \\ \text{inf ess } f &= \sup\{k;\ \mu([f < k]) = 0\} \end{aligned}$$

assim, definimos a norma no espaço $L^{\infty}(\Omega)$, pela relação

$$\|u\|_{\infty} = \text{sup ess} \ \ |u|$$

onde μ é a medida em $\mathbb{R}^N$.

O teorema seguinte estabelece algumas propriedades importantes dos espaços $L^p(\Omega)$ e pode-se encontrar sua demonstração em [2, 12].

Teorema 1.1.2. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$, então

a) $L^p(\Omega)$ é espaço de Banach;

b) Se $1 < p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo e uniformemente convexo;

c) Se $1 \leqslant p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ é separável.

Falaremos agora um pouco sobre o dual topológico de $L^p(\Omega)$. O *dual topológico* de um espaço normado X é o espaço vetorial de todas as formas lineares (funcionais lineares) contínuas definidas em X. Chamaremos daqui em diante ao dual topológico de um espaço normado X apenas de dual e o denotaremos por X'.

Enunciaremos a seguir o teorema da representação de Riesz, que relaciona todo elemento do dual de um espaço $L^p(\Omega)$ com um elemento do espaço $L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (neste caso dizemos que q é o *expoente conjugado* de p, quando $p = 1$, consideramos $q = \infty$ e vice-versa), a demonstração pode ser encontrada em [2], p. 47 e [12], p. 61.

Teorema 1.1.3. Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in [L^p(\Omega)]'$, então existe $u \in L^q(\Omega)$, tal que

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} v(x) u(x) \ dx \tag{1.4}$$

para toda $v \in L^p(\Omega)$.

Outro resultado importante cuja demonstração encontra-se em [2], p. 24 e [12], p. 56, é a desigualdade de Hölder, enunciada abaixo

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $1 < p < \infty$ e q seu expoente conjugado, se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e além disso

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| \ dx \leqslant \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.5}$$

a igualdade se verifica se $|u(x)|^p$ e $|v(x)|^q$ forem proporcionais. Observe que se $p = 1$ e $q = \infty$ então o resultado é imediato.

Outros espaços derivados dos espaços $L^p(\Omega)$ que são de grande importância em análise, são os espaços $L^p_{loc}(\Omega)$, que são constituídos das funções (classes de funções) $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tais que para todo compacto $K \subset \Omega$

$$\int_K |u(x)|^p \, dx < \infty.$$

Um resultado demonstrado em [2], p. 29 é $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e qualquer aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, outro também demonstrado em [2], p. 74, é conhecido como lema de **Du Boys Reymound**, que é muito utilizado para provar unicidade de Distribuições.

Lema 1.1.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, com $\displaystyle\int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então $u(x) = 0$ q.t.p. em Ω.

Observação 1.1.1. Quando $p = 2$, o espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, isto é, um espaço de Banach, com um produto interno $(\ ,\ )_2$ definido sobre ele e dado pela fórmula

$$(u, v)_2 = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

Observe que pela desigualdade de Hölder a integral acima é finita.

1.1.3 Distribuições Escalares

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ ao espaço vetorial das funções φ infinitamente continuamente diferenciáveis, com suporte (ver (1.1)) compacto contido em Ω.

Seja agora, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ um multi-índice de números inteiros não negativos, representaremos a derivada parcial de uma função da seguinte maneira

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_N} u}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}...\partial^{\alpha_N}_{x_N}}, \qquad D^0 u = u.$$

Definiremos a seguir a convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, esta convergência introduz uma topologia neste espaço (ver [39], capítulo 4 para mais detalhes), topologia esta que fará com que possamos falar em funcional continuo em $C_0^\infty(\Omega)$ que é o coração do conceito de Distribuição.

Definição 1.1.1. Seja (φ_n) uma sequência de funções em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que φ_n converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ e denotamos por

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{em} \quad C_0^\infty(\Omega) \tag{1.6}$$

se existe um compacto $K \subset \Omega$, tal que $\text{supp}(\varphi), \text{supp}(\varphi_n) \subset K$, para todo n e

$$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi \ \text{ uniformemente em } K, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ ao espaço vetorial topológico formado por $C_0^\infty(\Omega)$ munido da convergência acima.

Definição 1.1.2. Uma distribuição T sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$, tal que

$$\lim_n \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

para qualquer sequência (φ_n) convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$.

Cabe-nos observar da definição acima que uma distribuição é um elemento do espaço dual de $\mathcal{D}(\Omega)$. Iremos denotar o espaço de todas as distribuições sobre Ω, por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e algumas vezes usaremos a convenção $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$.

Não é difícil ver que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial, para isso, relembremos da definição de soma e produto por escalar definidos na álgebra linear para elementos do dual, assim para $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle T + S, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \\ \langle \alpha T, \varphi \rangle &= \alpha \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

usando as propriedades de limite de sequência na reta teremos $T + S, \alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. É importante observar e pode ser visto com mais detalhes em [2] p. 38, que $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e além disso $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $1 \leqslant p < \infty$.

Vejamos abaixo alguns exemplos de distribuição.

Exemplo 1.1.1. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos T_u pela fórmula

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx$$

observemos que T_u é um funcional e devido a unicidade da integral, está bem definido e como

$$\begin{aligned} \langle T_u, \alpha\varphi_1 + \varphi_2 \rangle &= \int_\Omega u(x)(\alpha\varphi_1(x) + \varphi_2(x))\, dx \\ &= \int_\Omega \alpha u(x)\varphi_1(x)\, dx + \int_\Omega u(x)\varphi_2(x)\, dx \\ &= \alpha\langle T_u, \varphi_1 \rangle + \langle T_u, \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

então T_u é linear e além disso, se $\varphi_n \to \varphi$, então $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K \subset \Omega$, para algum K e daí

$$|\langle T_u, \varphi_n - \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega u(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))\right| \leqslant \max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \int_K |u(x)|\, dx$$

assim, quando $n \to \infty$, $\max_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0$ e portanto $|\langle T_u, \varphi_n - \varphi\rangle| \to 0$, isto é

$$\lim_n \langle T_u, \varphi_n\rangle = \langle T_u, \varphi\rangle.$$

A definição que daremos a seguir é a de derivada de uma distribuição, ela generaliza o conceito de derivada.

Definição 1.1.3. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$, definimos por

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$$

a distribuição que chamamos de derivada de T, e denotamos por $D^\alpha T$, assim

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 1.1.4. Seja (T_i), uma sequência de distribuições em $\mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que (T_i) converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, quando $i \to \infty$ e denotamos por

$$T_i \to T \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

se e somente se

$$\lim_i \langle T_i, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uma aplicação bem concreta do conceito de distribuição escalar, encontra-se na definição de *espaços de Sobolev*, que daremos a seguir.

1.2 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev, são subespaços dos espaços $L^p(\Omega)$ cujos elementos possuem derivadas no sentido das distribuições ainda nos espaços $L^p(\Omega)$, isto é, se Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$, p um real tal que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e m é um inteiro não negativo, definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha \in L^p(\Omega)\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leqslant m\}$$

onde D^α é a derivada no sentido das distribuições.

Observação 1.2.1. Quando dizemos que a derivada $D^\alpha v \in L^p(\Omega)$ de v é no sentido distribucional, significa que existe uma função $w = D^\alpha v \in L^p(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega w(x)\varphi(x)\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x) D^\alpha \varphi(x)\ dx \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nos espaços de Sobolev, podemos definir uma norma que leva em conta, as derivadas das funções, esta norma é definida por

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $\|\ \|_p$ é a norma de $L^p(\Omega)$.

Observação 1.2.2. Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2.$$

O próximo resultado, não será demonstrado aqui, porém sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 1.2.1. Sejam, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e m um inteiro não negativo então

a) $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach;

b) Se $1 \leqslant p < \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é separável;

c) Se $1 < p < \infty$, então $W^{m,p}(\Omega)$ é uniformemente convexo.

Um espaço que usaremos bastante neste trabalho é $W_0^{1,p}(\Omega)$ definido

$$W_0^{1,p}(\Omega) \equiv \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ no espaço } W^{1,p}(\Omega).$$

Neste trabalho, denotaremos por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Um resultado importante cuja demonstração pode ser encontrado em [14], p. 35, é uma caracterização de $W^{-1,p'}(\Omega)$

Teorema 1.2.2. Se $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, então existem $f_0,\ f_1, ...,\ f_N$ em $L^{p'}(\Omega)$ tais que

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega f_0(x) u(x)\ dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ dx$$

para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Observemos que no sentido distribucional temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\ dx &= -\int_\Omega -f_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\ dx,\\
&= \langle D(-f_i),\varphi\rangle\\
&= -\frac{\partial f_i}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

portanto, segue-se que

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

esta relação justifica a notação $W^{-1,p'}(\Omega)$ para o dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.3 Distribuições Vetoriais

Nesta secção, faremos alguns comentários a respeito do conceito de distribuições vetoriais, conceito este de extrema importância na teoria das equações diferenciais parciais parabólicas.

1.3.1 Funções de Valores Vetoriais Fracamente e Fortemente Mensuráveis

Definição 1.3.1. Sejam $(S,\mathfrak{B},\mu)$ um espaço de medida e X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$. Uma função $x : S \to X$ é chamada de *simples*, se existe somente um número finito n de $B_i \in \mathfrak{B}$ disjuntos, com $\mu(\cup B_i) < \infty$ tais que $x(t) = x_i$, constante e diferente de zero em B_i e $x(t) = 0$ em $S \setminus \cup B_i$, além disso, sua integral é definida por

$$\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)x_i.$$

Definição 1.3.2. Sejam $(S,\mathfrak{B},\mu)$ um espaço de medida e X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$, com dual X'. Uma função $x : S \to X$ é dita *fracamente mensurável*, se para toda $f \in X'$, a função

$$t \mapsto \langle f, x(t)\rangle$$

é mensurável.

Definição 1.3.3. Sejam $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de medida e X um espaço de Banach de norma $\|\cdot\|_X$. Uma função $x : S \to X$ é dita *fortemente mensurável* ou apenas *mensurável* se existe uma sequência de funções simples convergindo fortemente para x q.t.p.

Observação 1.3.1. Uma sequência (x_n) em um espaço de Banach X é dita converge fortemente para o elemento x, se $\|x_n - x\|_X \to 0$.

Definição 1.3.4. Uma função x definida em um espaço de medida $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ com valores em um espaço de Banach X é dita *Bochner integrável* ou apenas *integrável*, se existe uma sequência de funções simples $x_n : S \to X$ tal que, para todo n, a função

$$t \mapsto \|x_n(t) - x(t)\|_X$$

é integrável e além disso

$$\lim_n \int \|x(t) - x_n(t)\|_X \, d\mu = 0.$$

Não é difícil ver que o limite acima independe da escolha da sequência de funções, isto pode ser visto com mais detalhes em [41], p. 132 e [13], p. 137. O próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [41], p. 133, relaciona a norma de uma função com sua Bochner integrabilidade.

Teorema 1.3.1 (de Bochner)**.** Sejam X um espaço de Banach e $(S, \mathfrak{B}, \mu)$ um espaço de medida. Uma função fortemente mensurável $x : S \to X$ é Bochner integrável se, e somente se $\|u(\cdot)\|_X$ é integrável em S.

Definição 1.3.5. Sejam $a,\ b \in \mathbb{R}$, e X um espaço de Banach, denotamos por

$$L^p(a, b; X), \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

o espaço das classes de funções fortemente mensuráveis $f : (a, b) \to X$, tais que

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty,$$

podemos dotar este espaço com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X \, dx \right)^{1/p}.$$

Denotamos por $L^\infty(a, b; X)$ o espaço das funções essencialmente limitadas em (a, b), isto é, existe M tal que

$$\|f(t)\|_X \leqslant M \quad \text{q.t.p. em} \;\; (a, b)$$

quando introduzimos em $L^\infty(a,b;X)$ a norma

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \text{sup ess } \ \|f\|_X$$

ele torna-se um espaço vetorial normado.

Observação 1.3.2. os espaços $L^p(0,T;X)$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ são espaços de Banach, isto pode ser visto em [11], p. 127.

1.3.2 Distribuições Vetoriais

Definição 1.3.6. Uma *distribuição vetorial* sobre o intervalo (a,b), com valores em um espaço de Banach X, é uma transformação linear

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(a,b) &\rightarrow X, \\ \varphi &\mapsto \langle T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

contínua em $\mathcal{D}(a,b)$, isto é, para toda sequência (φ_i), com $\varphi_i \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b)$

$$\lim_i \langle T, \varphi_i \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{em} \quad X.$$

Neste trabalho denotaremos por $\mathcal{D}'(a,b;X)$, o espaço das distribuições vetoriais sobre (a,b) com valores em X.

Definição 1.3.7. Seja $T \in \mathcal{D}'(a,b;X)$. Para todo inteiro k, definimos uma nova distribuição denotada por $T^{(k)}$ da seguinte maneira

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \left\langle T, \frac{d^k \varphi}{dt^k} \right\rangle$$

esta distribuição é chamada de k-ésima derivada de T em (a,b) e será algumas vezes denotada por $\dfrac{d^k T}{dt^k}$.

1.4 O Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$

1.4.1 O Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Faremos nesta secção um breve esclarecimento para efeito de notações dos espaços generalizados de Lebesgue, um estudo detalhado desses espaços, pode ser encontrado em [22, 28].

Consideraremos por toda esta secção a menos que seja explicitamente declarado, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e mensurável e $p \in L^{\infty}(\Omega)$, com $p \geqslant 1$. Definimos

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$$

Observação 1.4.1. Usaremos algumas notações especiais encontradas em [22, 28] tais como

$$L_{+}^{\infty}(\Omega) = \{u \in L^{\infty}(\Omega) :\ \text{inf ess } u \geqslant 1\}.$$

Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $p \in L_{+}^{\infty}(\Omega)$, definimos a *função modular* por

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx,$$

além disso,

$$p^{-} = \text{inf ess } p \quad \text{e} \quad p^{+} = \text{sup ess } p.$$

As demonstrações das proposições abaixo, pode ser encontradas em [22, 28].

Proposição 1.4.1. $\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0;\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\}$ é uma norma em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Quando p é constante as normas $\|\cdot\|_{p(x)}$ e $\|\cdot\|_{p}$ coincidem.

Proposição 1.4.2. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então,

a) $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1)$ se, e somente se, $\rho(u) < 1 (= 1; > 1)$;

b) Se $\|u\|_{p(x)} > 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^{-}} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^{+}}$;

c) Se $\|u\|_{p(x)} < 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^{+}} \leqslant \rho(u) \leqslant \|u\|_{p(x)}^{p^{-}}$.

Proposição 1.4.3. Sejam $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\lim_{n} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$;

b) $\lim_{n} \rho(u_n - u) = 0$.

Teorema 1.4.1. O espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ com a norma definida anteriormente é um espaço de Banach. Se $p^{-} > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é reflexivo e separável.

Proposição 1.4.4 (Desigualdade de Hölder)**.** Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tais que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega.$$

Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ e $v \in L^{q(x)}(\Omega)$, então

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x) \ dx \right| \leqslant \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}.$$

Teorema 1.4.2 (da Representação de Riesz)**.** Sejam $p^- > 1$ e $q \in L^\infty_+(\Omega)$ tais que

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega.$$

Então, para todo $f \in (L^{p(x)}(\Omega))'$ existe um único $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x) \ dx, \ \ \text{para todo} \ \ v \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Teorema 1.4.3. O espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$, com a norma de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.4.4. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$, com a norma de $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.4.5. Sejam $|\Omega| < \infty$, $p, q \in L^\infty_+(\Omega)$. Então

$$L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

se, e somente se, $q(x) \leqslant p(x)$ q.t.p. em Ω e neste caso a imersão é contínua.

1.4.2 O espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Nesta subsecção estabeleceremos alguns resultados e notações sobre os espaços generalizados de Sobolev que serão utilizados no capítulo 3.

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), \ j = 1, ..., N \right\}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ é a í-ésima derivada no sentido das distribuições de u, isto é

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \ dx, \ \ \text{para toda} \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Uma outra definição para o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ pode ser dada por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \ |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \}$$

onde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

as seguintes normas em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ são equivalentes

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}$$
$$\|u\|_* = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$$

Teorema 1.4.6. $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, além disso, se $p^- > 1$, então $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo.

Definição 1.4.1. O espaço denotado por $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é o definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.4.7. Se $p^- > 1$, O espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo.

Teorema 1.4.8 (Desigualdade de Poincaré)**.** Sejam Ω limitado, $p \in C(\overline{\Omega})$ com $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{p(x)} \leqslant C\|\nabla u\|_{p(x)}, \quad \text{para todo} \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

1.5 Os operadores p-Laplaciano e $p(x)$-Laplaciano.

Faremos a seguir um breve comentário sobre os operadores p-Laplaciano e $p(x)$-Laplaciano, destacando suas propriedades que serão utilizadas nos próximos capítulos. Estudos mais detalhados sobre o assunto, podem ser encontrados em [21] e [37].

1.5.1 Operadores Limitados, Contínuos, Monótonos e Hemi-contínuos.

Definição 1.5.1. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(V, \|\cdot\|_V)$ espaços normados. Toda aplicação

$$T : E \longrightarrow V$$

é chamada de *operador* e o valor de T no ponto $x \in E$ é denotado por Tx ou $T(x)$.

Definição 1.5.2. Um operador $T : E \longrightarrow V$ é dito *limitado*, se existe um número real positivo k, tal que

$$\|Tx\|_V \leqslant k\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Definição 1.5.3. Um operador $T : E \to V$ é dito *continuo no ponto* $x_0 \in E$, se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\forall x \in E,\ \|x - x_0\|_E < \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - Tx_0\|_E < \epsilon.$$

Se T é continuo em todo $x \in E$, então dizemos que T é um *operador continuo.*

Quando um operador $T : E \to V$ é limitado, podemos definir sua *norma* pela expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in E} \left\{ \frac{\|Tx\|_V}{\|x\|_E};\ x \neq 0 \right\}$$

Definição 1.5.4. Sejam V um espaço normal e V' seu dual. Um operador $T : V \to V'$ é dito *monótono*, se

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geqslant 0, \quad \forall x, y \in V$$

e se tivermos

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in V, \quad \text{com} \quad x \neq y,$$

então T é dita *estritamente monótona.*

Definição 1.5.5. Um operador $T : V \to V'$ é dito *hemicontínuo* se a função real

$$\lambda \mapsto \langle T(x + \lambda y), z \rangle$$

é contínua para todo $x, y, z \in V$.

Observação 1.5.1. Se um operador $T : V \to V'$ é continuo, então é hemicontinuo. Com efeito, para todo $x,\ y,\ z \in V$

$$x + \lambda y \to x + \lambda_0 y$$

quando $\lambda \to \lambda_0$, assim

$$T(x + \lambda y) \to T(x + \lambda_0 y),$$

logo

$$\begin{aligned} |\langle T(x + \lambda y), z \rangle - \langle T(x + \lambda_0 y), z \rangle| &\leqslant |\langle T(x + \lambda y) - T(x + \lambda_0 y), z \rangle| \\ &\leqslant \|T(x + \lambda y) - T(x + \lambda_0 y)\|_{V'} \|z\|_V. \end{aligned}$$

1.5.2 O Operador p-Laplaciano.

O operador p-Laplaciano $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ é definido pela relação

$$\begin{aligned} -\Delta_p w &= -\mathrm{div}(|\nabla w|^{p-2}\nabla w) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\nabla w|^{p-2}\frac{\partial w}{\partial x_i}\Big). \end{aligned}$$

A igualdade acima não acontece no sentido literal, visto que $-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é uma função definida em Ω e não um funcional, porém, esta função dá origem a um funcional definido por

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \; dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

O próximo resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [21, 28], considerando $p(x) = p$ com p uma constante real.

Teorema 1.5.1. O operador p-Laplaciano $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{-1,p'}(\Omega)$ é limitado, contínuo, monótono e hemicontínuo.

1.5.3 O Operador $p(x)$-Laplaciano

Seja $p \in L^\infty_+(\Omega)$, o $p(x)$-Laplaciano é o operador $\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))'$ definido por

$$-\Delta_{p(x)} u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Da mesma forma que o p-Laplaciano, o operador $p(x)$-Laplaciano, para cada $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ dá origem a um funcional

$$\langle -\Delta_{p(x)} u, v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v \quad \forall v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

O teorema seguinte cuja demonstração pode ser encontrada em [21, 28] resume as propriedades do $p(x)$-Laplaciano necessárias para o capítulo III.

Teorema 1.5.2. O operador $p(x)$-Laplaciano, $\Delta_{p(x)} : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))'$ é limitado, contínuo, monótono e hemicontínuo.

1.6 Existência de soluções de EDO's pelo método de Carathéodory

Nesta secção apresentaremos alguns fatos concernentes a existência de soluções de certas equações diferenciais ordinárias. As demonstrações para tais resultados podem ser encontrados em [29, 33].

O problema que nos interessa nesta secção, é o de estudar soluções para a equação abaixo sob determinadas condições

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.7}$$

Definição 1.6.1. Seja $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ um conjunto aberto. Dizemos que a função $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory em D, se f é mensurável em t, para cada x fixado, contínua em x para cada t fixado e para todo conjunto compacto $K \subset D$, existe uma função integrável $g_K(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leqslant g_K(t), \qquad (t, x) \in K.$$

O próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [29], p. 28, possui um papel importante nos próximos capítulos deste trabalho

Teorema 1.6.1 (Carathéodory)**.** Se D é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{N+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfaz as condições de Carathéodory em D, então para qualquer $(t_0, y_0) \in D$, existe uma solução de (1.7) tal que $\varphi(t_0) = y_0$.

O resultado a seguir possui também um papel chave nos próximos capítulos e sua demonstração pode ser encontrada em [33].

Teorema 1.6.2 (Prolongamento de soluções)**.** Seja $D = [0, T] \times E$, com $0 < T < \infty$, $E = \{y \in \mathbb{R}^N,\ \|y\| < \gamma\}$, com $\gamma > 0$ e $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja ainda φ uma solução de

$$\begin{cases} \varphi' &= f(t, \varphi) \\ \varphi(0) &= y_0, \quad \|y_0\| \leqslant \gamma. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde φ está definida, se tenha $\|\varphi(t)\| \leqslant M$, para todo $t \in I$, M independe de t e $M < \gamma$. Então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

1.7 Bases de Schauder e Sistemas Biortogonais

Por toda esta secção, denotaremos por X^* o dual topológico do espaço normado X, isto é, X^* é o espaço vetorial de todos os funcionais lineares continuos sobre X e se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em X denotaremos por $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ ao espaço $\overline{\text{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}}$.

Definição 1.7.1. Seja X um espaço de Banach, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ é uma *base de Schauder* de X, se para cada $x \in X$ existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x.$$

Mesmo que um espaço de Banach, possua base de Schauder, nem sempre é possível exibi-las; mas existem alguns espaços onde a prova da existência de base de Schauder é feita usando teoria de aproximação de operadores.

Definição 1.7.2. Seja X um espaço de Banach. Um *sistema biortogonal* é um par de sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tais que

$$\langle f_m, x_n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad m = n \\ 0, & \text{se} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é chamada de *sistema minimal*, se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^*$, tal que $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é um sistema biortogonal.

Observação 1.7.1. Observemos que os x_n's acima são todos l.i., com efeito, consideremos sem perda de generalidade $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, assim, para todo $1 \leqslant i \leqslant k$

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k &= 0 \\ f_i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_k) &= 0 \\ \alpha_i &= 0. \end{aligned}$$

Definição 1.7.3. Um sistema minimal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é chamado de *fundamental*, se $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$. Um sistema minimal $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é chamado de *total* se $\overline{\text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}^{w^*} = X^*$, onde w^* significa a topologia fraco-$*$.

O próximo teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [34], p. 43 e em [38], p. 8, desempenhará um papel fundamental neste trabalho.

Teorema 1.7.1. Se X um espaço de Banach separável. Então X contém um sistema minimal fundamental total.

Definição 1.7.4. Um sistema biortogonal $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ é chamado de *retraído* (do inglês *shrinking*), se $\overline{\text{span}\{f_i : i \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} = X^*$, onde $\|\cdot\|$ significa a norma do espaço dual X^*.

Uma observação feita em [34], p. 44 e demonstrada em [38], p. 8, é que se X é um espaço de Banach separável e X^* é separável, então existe um sistema biortogonal $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\mathbb{N}})$, fundamental e retraído.

Observação 1.7.2. Assim, se X é um espaço de Banach separável e reflexivo, então X^* é separável e reflexivo (ver [12], p. 48, corolário III.24.), portanto existe um sistema biortogonal $((e_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tal que

$$\langle f_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad m = n \\ 0, & \text{se} \quad m \neq n \end{cases}$$

com $\overline{\text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}} = X$ e $\overline{\text{span}\{f_i : i \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} = X^*$.

Capítulo 2

Estudo do problema no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2.1 Análise do Problema e Resultados Obtidos

Nesta secção estudaremos o problema que consiste em encontrar uma função

$$u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

com $\Omega \in \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente suave, solução do problema

$$u_t - \Delta_p u = f \tag{2.1}$$

onde $2 < p < \infty$ é uma constante real, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, e u satisfazendo ainda

$$u = 0 \quad \text{em} \quad [0,T] \times \Gamma, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad u_0 \in L^2(\Omega) \ \text{ é dado.} \tag{2.3}$$

Um espaço apropriado para buscarmos soluções do problema será o espaço $X = W_0^{1,p}(\Omega)$, pois neste espaço as funções satisfazem $v = 0$ em $\partial\Omega$ (ver [12], p. 171).

Definição 2.1.1. Uma *solução fraca* para o problema (2.1)-(2.3), é uma função u, tal que $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $u' \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$ e

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle \, dt + \int_0^T \langle \Delta_p u(t), v(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \, dt \tag{2.4}$$

para toda $v \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, com $u(x,0) = u_0$.

Observação 2.1.1. Um fato observado em [32], p. 156, é que se $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ e $u' \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ então $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ (na verdade u pode ser redefinida em um subconjunto de medida nula de $[0,T]$, tornando-a contínua), isto quer dizer que mesmo $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, ela está definida no intervalo $[0,T]$ todo.

Teorema 2.1.1 (Existência)**.** Sejam f e u_0 funções tais que

$$f \in L^{p'}(0,T;X'), \quad \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{p'}=1,$$
$$u_0 \in L^2(\Omega).$$

Então existe uma função u, solução fraca do problema (2.1)-(2.3).

Demonstração.

Utilizaremos o método de Faedo-Galerkin, para encontrarmos a solução desta equação. Sejam $\mathbf{B} = \{w_1, w_2, ..\}$ uma base de Schauder[1] de X, $\mathbb{V}_m = \text{span}\{w_1, w_2, ..., w_m\}$ o subespaço de X de dimensão m gerado pelos m primeiros vetores de X, $\tilde{f}$ uma extensão de f em $L^p(\mathbb{R};X)$, definida por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se} \quad t \in (0,T) \\ 0 & \text{se} \quad t \notin (0,T) \end{cases},$$

e u_{0m} a projeção[2] de u_0 sobre $\mathbb{V}_m$. Nosso próximo passo será a busca por funções

$$u_m(t,x) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) w_i(x)$$

com $\alpha_i : [0,T] \to \mathbb{R}$, do problema aproximado

$$\begin{cases} \langle u_m'(t), v\rangle + \langle \Delta_p u_m(t), v\rangle = \langle \tilde{f}(t), v\rangle \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x), \end{cases} \tag{P_m}$$

para todo $v \in \mathbb{V}_m$. Em particular, temos

$$\begin{cases} \langle u_m'(t), w_j\rangle + \langle \Delta_p u_m(t), w_j\rangle = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x), \qquad \forall\ j = 1,2,...,m. \end{cases} \tag{2.5}$$

[1]Como pode ser visto em [27], este tipo de base é possível em X, graças a regularidade de Γ.

[2]Observe que todo $x \in L^2(\Omega)$ pode ser escrito de modo único como uma série $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i w_i$, então a projeção mencionada é um operador $P_m : L^2(\Omega) \to \mathbb{V}_m$, definido por $P_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i$. Para mais detalhes sobre esta projeção, ver [34], p. 2.

Mais detalhadamente

$$\begin{cases} \left\langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i'(t) w_i, w_j \right\rangle + \int_\Omega \left| \nabla \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i(t) w_i \right) \right|^{p-2} \nabla \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) w_i \right) \nabla w_j \, dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \langle \tilde{f}(t), w_j \rangle \\ u_m(x,0) = u_{0m}(x), \end{cases}$$

como $u_{0m} = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_m w_m$, com $\beta_i \in \mathbb{R}$, deveremos ter ainda $\alpha_i(0) = \beta_i$, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$. Assim a relação acima torna-se

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i'(t) \langle w_i, w_j \rangle + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) \int_\Omega \left| \nabla \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_i(t) w_i \right) \right|^{p-2} \nabla w_i \nabla w_j \, dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \langle \tilde{f}(t), w_j \rangle \\ \alpha_i(0) = \beta_i, \end{cases}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant m$. De onde obtemos o sistema de EDO's

$$\begin{cases} B\alpha'(t) &= -A(\alpha(t))\alpha(t) + F(t) \\ \alpha(0) &= (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $\alpha(t) = [\alpha_i(t)]_{m \times 1}$, $A(\alpha(t)) = \left[\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{m} \Pi_i(\alpha(t)) \nabla w_i \right|^{p-2} \nabla w_i \nabla w_j \, dx \right]_{m \times m}$, Π_i é a projeção da i-ésima coordenada de $\alpha(t)$, $B = [\langle w_i, w_j \rangle]_{m \times m}$, com $\det B \neq 0$, pois os w_i's são l.i. e $F(t) = [\langle \tilde{f}(t), w_j \rangle]_{m \times 1}$. Para provarmos que (2.6) possui solução, lançaremos mão do teorema de existência de Carathéodory. Para isso deveremos provar que a função $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definida por

$$H(r, Y) = -B^{-1} A(Y) Y + B^{-1} F(r), \quad \forall (r, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

é uma função de Caratheodory.

• *Fixando r, H é contínua em Y*, com efeito, $F(r)$ é constante, pois só depende de r, logo é contínua em Y. Como Π_i é contínua para $1 \leqslant i \leqslant m$, segue-se que $\sum_{i=1}^{m} \Pi_i(Y) \nabla w_i$ é contínua em relação a Y, pois é soma de funções contínuas, como $|s|^{p-2}$ é contínua em s, segue-se que $\left| \sum_{i=1}^{m} \Pi_i(Y) \nabla w_i \right|^{p-2}$ é contínua e assim sua integral também será (ver [10], p. 46 corolário 5.8), portanto A é contínua em relação a Y.

• *Fixando Y, H é mensurável em r.* Com efeito, A é constante em relação a r e daí mensurável; das propriedades de $\tilde{f}$ segue-se que $F(r)$ também é mensurável.

• *H é limitada por uma função integrável em todo compacto*, com efeito, seja

$$E = \{Y \in \mathbb{R}^N; \|Y\|_m \leqslant \gamma\},$$

onde $\|\cdot\|_m$ denota a norma no $\mathbb{R}^N$. Consideremos $H : [-a, a] \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, com $a > 0$, assim

$$\begin{aligned}\|H(r,Y)\|_m = \|B^{-1}\|_{m\times m}(\|-A(Y)Y + F(r)\|_m) &\leqslant \|B^{-1}\|_{m\times m}(\|A(Y)Y\|_m + \|F(r)\|_m)\\ &\leqslant \|B^{-1}\|_{m\times m}(\|A(Y)\|_{m\times m}\|Y\|_m + \|F(r)\|_m),\end{aligned}$$

como A é contínua, leva conjuntos compactos em conjuntos compactos do $\mathbb{R}^N$, então existe um $c_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|H(r,Y)\|_m &\leqslant \|B^{-1}\|_{m\times m}(\|A(Y)\|_{m\times m}\|Y\|_m + \|F(r)\|_m)\\ &\leqslant \|B^{-1}\|_{m\times m}c_1\gamma + \|B^{-1}\|_{m\times m}\|F(r)\|_m\end{aligned}$$

como $\tilde{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}, X)$ e $p' > 1$, segue-se que $\|F(r)\|_m$ é integrável em $[-a, a]$. Assim, (2.6) satisfaz as condições de Carathéodory e portanto existe um intervalo I e uma função $\tilde{\psi} : I \to \mathbb{R}^N$, com $\tilde{\psi}(0) = (\beta_1, ..., \beta_m)$ solução de (2.6), isto é

$$B\psi'(t) = -A(\psi(t))\psi(t) + F(t).$$

Assim, podemos considerar ψ, a restrição de $\tilde{\psi}$ ao intervalo $[0, T_m]$. Observe que para cada m existe um $0 \leqslant T_m \leqslant T$, tal que as ψ_i's, coordenadas de ψ, estão definidas em $[0, T_m]$. Para que tenhamos as ψ_i's definidas no intervalo $[0, T]$ inteiro, deveremos provar que as soluções u_m são limitadas independentemente de m e t, para isso substituiremos em (2.5), v por u_m, e buscaremos as estimativas a priori.

• *Estimativas a priori.*

$$\begin{aligned}\langle u_m'(t), u_m(t)\rangle + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p-2}\nabla u_m(t)\nabla u_m(t) &= \langle f(t), u_m(t)\rangle\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^p\, dx &= \langle f(t), u_m(t)\rangle\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_p^p &\leqslant \|f(t)\|_{X'}\|u_m(t)\|_{1,p}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Como Ω é um aberto e limitado, segue-se que as normas $\|\cdot\|_{1,p}$ e $\|\nabla\cdot\|_p$ são equivalentes em X (ver [14], p. 33), portanto, existe $c_0 > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leqslant c_0\|\nabla u\|_p \quad \text{para todo} \quad u \in X$$

e assim

$$\|u\|_p^p \leqslant c_0^p \|\nabla u\|_p^p \quad \text{para todo} \quad u \in X$$

usando a desigualdade de Young em (2.7), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_p^p &\leqslant \frac{1}{p'\epsilon^{p'}}\|f(t)\|_{X'}^{p'} + \frac{\epsilon^p}{p}\|u_m(t)\|_{1,p}^p \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_p^p &\leqslant \frac{1}{p'\epsilon^{p'}}\|f(t)\|_{X'}^{p'} + \frac{\epsilon^p c_0^p}{p}\|\nabla u_m\|_p^p \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \left(1 - \frac{\epsilon^p c_0^p}{p}\right)\|\nabla u_m(t)\|_p^p &\leqslant \frac{1}{p'\epsilon^{p'}}\|f(t)\|_{X'}^{p'}
\end{aligned}$$

tomando ϵ de modo que $1 - \frac{\epsilon^p c_0^p}{p} = \frac{1}{2}$ segue-se

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_p^p \leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\|f(t)\|_{X'}^{p'}$$

integrando em $[0,t]$

$$\begin{aligned}
\|u_m(t)\|_2^2 - \|u_m(0)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|_p^p \, dt &\leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\int_0^t \|f(t)\|_{X'}^{p'} \, dt \\
\|u_m(t)\|_2^2 - \|u_m(0)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|_p^p \, dt &\leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\int_0^T \|f(t)\|_{X'}^{p'} \, dt \\
\|u_m(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|_p^p \, dt &\leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\|f\|_{L^{p'}(0,T;X')}^{p'} + \|u_m(0)\|_2^2
\end{aligned}$$

como $u_m(0)$ é a projecção de $u_0(x)$ sobre $\mathbb{V}_m$, então $\|u_m(0)\|_2 \leqslant \|u_0\|_2$ para todo m (ver [34], p. 2), portanto

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|_p^p \, dt \leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\|f\|_{L^{p'}(0,T;X')}^{p'} + \|u_0\|_2^2$$

assim, para todo m, $\|u_m(t)\|_2$ é limitada em $[0,T]$, isto é

$$\left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^m \psi_i(t)w_i(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\|f\|_{L^{p'}(0,T;X')}^{p'} + \|u_0\|_2^2\right)^{1/2}$$

para todo $t \in [0,T]$, e como

$$|\psi_i(t)|\|w_i\|_2 \leqslant \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^m \psi_i(t)w_i(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} = \|u_m(t)\|_2$$

segue-se que as ψ_i's são limitadas, e pelo teorema do prolongamento de soluções, podemos estende-las ao intervalo $[0,T]$ inteiro, e daí

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_p^p \, dt \leqslant \frac{2}{p'\epsilon^{p'}}\|f\|_{L^{p'}(0,T;X')}^{p'} + \|u_0\|_2^2$$

para todo $t \in [0,T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Desta forma, existe um C_0 tal que

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))},\ \|u_m\|_{L^p(0,T;X)} \leqslant C_0 \tag{2.8}$$

observemos que de (2.8) $u_m \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;X)$ e como o operador $M : X \longrightarrow X'$ definido por $M\varphi = -\mathrm{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi)$ é limitado, segue-se que podemos extrair de (u_m) uma subsequência ainda denotada por (u_m), tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.9}$$

$$u_m \rightharpoonup u \qquad \text{fraco em} \quad L^p(0,T;X) \tag{2.10}$$

$$u_m(T) \rightharpoonup \xi \qquad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega) \tag{2.11}$$

$$M(u_m) \rightharpoonup \chi \qquad \text{fraco em} \quad L^{p'}(0,T;X') \quad ({}^3) \tag{2.12}$$

• *Passagem ao limite*. Provaremos que

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle\ dt + \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\ dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle\ dt \qquad \forall v \in L^p(0,T;X)$$

e conseqüentemente

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle \chi(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \qquad \forall v \in X \tag{2.13}$$

no sentido das distribuições escalares, isto é, em $\mathcal{D}'(0,T)$. Com efeito, sejam $\tilde{u}_m$, $\widetilde{M(u_m)}$ para todo m, as extensões de u_m, $M(u_m)$ em todo $\mathbb{R}$, que são 0 fora de $[0,T]$. Assim, se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de (2.5) temos

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{u}_m(t), w_j\rangle \varphi'(t)\ dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widetilde{M(u_m(t))}, w_j\rangle \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \varphi(t)\ dt +$$
$$+ \langle u_m(0), w_j\rangle \delta_0(\varphi(t)) - \langle u_m(T), w_j\rangle \delta_T(\varphi(t)) \quad ({}^4)$$

observemos que isto é válido para todo m, assim, fazendo $m \to \infty$ e levando em conta o conceito de convergência de distribuições escalares (ver [14], p. 17), (2.10), (2.11) e (2.12)

[3] Na verdade, não é obvio que $M(u_m) \in L^{p'}(0,T;X')$, haja vista que não está explicito que $M(u_m(\cdot))$ é mensurável no intervalo $(0,T)$, porém como observado em [32], p. 159, o fato de que os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{-1,p'}(\Omega)$ são separáveis nos garante a inclusão.

[4] δ_0 e δ_T são as Distribuição delta de Dirac, centradas no ponto 0 e T

temos

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\tilde{u}(t),w_j\rangle\varphi'(t)\ dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\tilde{\chi}(t),w_j\rangle\varphi(t)\ dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\tilde{f}(t),w_j\rangle\varphi(t)\ dt+$$
$$+\langle u_0,w_j\rangle\delta_0(\varphi(t))-\langle\xi,w_j\rangle\delta_T(\varphi(t))$$

de onde resulta

$$\langle\tilde{u}'(t),w_j\rangle+\langle\tilde{\chi}(t),w_j\rangle=\langle\tilde{f}(t),w_j\rangle+\langle u_0,w_j\rangle\delta_0-\langle\xi,w_j\rangle\delta_T \quad ({}^5) \tag{2.14}$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Assim se restringirmos (2.14) ao intervalo $(0,T)$ ficaremos com

$$u'+\chi=f \tag{2.15}$$

no sentido das distribuições vetoriais. Desta maneira $u'\in L^{p'}(0,T;X')$ e de (2.10), $u\in L^p(0,T;X)$. Portanto $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$ assegurando sentido para $u(0)$ e $u(T)$.

Como as relações acima são válidas para todo w_j, consideremos $\mathbb{I}$ um subconjunto finito de índices e

$$v(t)=\sum_{i\in\mathbb{I}}\varphi_i(t)w_i \tag{2.16}$$

desta forma, para cada $i\in\mathbb{I}$ podemos multiplicar (2.14), por $\varphi_i(t)$ e soma-las, obtendo

$$\langle\tilde{u}'(t),v(t)\rangle+\langle\tilde{\chi}(t),v(t)\rangle=\langle\tilde{f}(t),v(t)\rangle+\langle u_0,v(t)\rangle\delta_0-\langle\xi,v(t)\rangle\delta_T$$

como o conjunto formado por todos os elementos da forma (2.16) é denso em $L^p(0,T;X)$ (ver [36], Apêndice II), segue-se que

$$\langle\tilde{u}'(t),v(t)\rangle+\langle\tilde{\chi}(t),v(t)\rangle=\langle\tilde{f}(t),v(t)\rangle+\langle u_0,v(t)\rangle\delta_0-\langle\xi,v(t)\rangle\delta_T \tag{2.17}$$

para toda $v\in L^p(0,T;X)$. Analogamente de (2.15) temos

$$\langle u'(t),v(t)\rangle+\langle\chi(t),v(t)\rangle=\langle f(t),v(t)\rangle$$

e portanto

$$\int_0^T\langle u'(t),v(t)\rangle\ dt+\int_0^T\langle\chi(t),v(t)\rangle\ dt=\int_0^T\langle f(t),v(t)\rangle\ dt \quad ({}^6)$$

para toda $v\in L^p(0,T;X)$.

[5] $\tilde{u}(t)$ é a extensão de $u(t)$ a todo o $\mathbb{R}$ definido como 0 fora de [0,T].

[6] A integração em $[0,T]$ é possível, pois u', χ e f estão em $L^{p'}(0,T;X')$ e as integrais $\int_0^T\int_\Omega u'(t)\cdot dxdt$, $\int_0^T\langle\chi(t),\cdot\rangle\ dt$ e $\int_0^T\int_\Omega f(t)\ \cdot\ dtdx$ definem funcionais lineares contínuos em $L^p(0,T;X)$.

• *Afirmamos que em (2.11),* $\xi = u(T)$ *e* $u_0 = u(0)$. Com efeito, para toda $\varphi \in C^\infty([0,T])$ e para toda $v \in X$, $\varphi v \in L^p(0,T;X)$, de (2.17)

$$\begin{aligned}\langle \xi, v\rangle\varphi(T) - \langle u_0, v\rangle\varphi(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), \varphi(t)v\rangle\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{\chi}(t), \varphi(t)v\rangle\ dt - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{u}(t), \varphi'(t)v\rangle\ dt \\ &= \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v\rangle\ dt - \int_0^T \langle \chi(t), \varphi(t)v\rangle\ dt - \\ &- \int_0^T \langle u(t), \varphi(t)'v\rangle\ dt\end{aligned}$$

de (2.15)

$$\begin{aligned}\langle \xi, v\rangle\varphi(T) - \langle u_0, v\rangle\varphi(0) &= \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v\rangle\ dt - \int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)v\rangle\ dt \\ &= \langle u(T), v\rangle\varphi(T) - \langle u(0), v\rangle\varphi(0)\end{aligned}$$

considerando φ, com $\varphi(T) \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$ segue-se

$$\begin{aligned}\langle u(T), v\rangle &= \langle \xi, v\rangle \\ \langle u(T) - \xi, v\rangle &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

como o funcional acima é nulo para toda $v \in X$, então

$$u(T) = \xi.$$

De um modo similar pode-se demonstrar que $u(0) = u_0$, basta tomar φ com $\varphi(0) \neq 0$ e $\varphi(T) = 0$.

• *Para completar a demonstração, deveremos provar que em (2.12),* $\chi = M(u)$. Com efeito, da monotonicidade de M, segue-se que a sequência de números reais

$$X_m = \int_0^T \langle M(u_m(t)) - M(v(t)), u_m(t) - v(t)\rangle\ dt \geqslant 0 \quad \forall v \in L^p(0,T;X)$$

e do problema aproximado (P_m) temos

$$\int_0^T \langle M(u_m(t)), u_m(t)\rangle\ dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle\ dt + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2$$

assim

$$\begin{aligned}X_m = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle\ dt + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|_2^2 - \int_0^T \langle M(u_m(t)), v(t)\rangle\ dt \\ - \int_0^T \langle M(v(t)), u_m(t) - v(t)\rangle\ dt\end{aligned}$$

e como $\liminf \|u_m(T)\|_2^2 \geqslant \|u(T)\|_2^2$, (ver [12], p. 35, proposição III.5) e levando em conta (2.12), segue-se que

$$\begin{aligned}\limsup X_m \leqslant \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2 - \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\, dt \\ - \int_0^T \langle M(v(t)), u(t) - v(t)\rangle\, dt\end{aligned} \tag{2.19}$$

porém, de (2.13) temos

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle\, dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2 = \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\, dt \tag{2.20}$$

assim de (2.19) e de (2.20) temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(v(t)), u(t) - v(t)\rangle\, dt \geqslant 0.$$

Utilizaremos agora a hemicontinuidade de M, considerando $v = u - \alpha w$, $\alpha > 0$, $w \in L^p(0, T, X)$, de (2.20) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), \alpha w(t)\rangle\, dt &\geqslant 0\\ \alpha \int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), w(t)\rangle\, dt &\geqslant 0\\ \int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), w(t)\rangle\, dt &\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Observemos que a função

$$t \longrightarrow \langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), w(t)\rangle$$

é integrável, para todo $\alpha > 0$ e pela hemicontinuidade de M temos

$$\lim_{\alpha \to 0} \langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), w(t)\rangle = \langle \chi(t) - M(u(t)), w(t)\rangle.$$

Observando ainda que $\langle \chi(t) - M(u(t) - \alpha w(t)), w(t)\rangle$ é limitado, então fazendo $\alpha \to 0$ em (2.21) e pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t)), w(t)\rangle\, dt \geqslant 0. \quad \forall w \in L^p(0, T; X)$$

E em outra mão, para todo $\lambda < 0$, e para todo $w \in L^p(0, T, X)$, $\lambda w \in L^p(0, T, X)$ e assim

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t)), \lambda w(t)\rangle\, dt = \lambda \int_0^T \langle \chi(t) - M(u), w(t)\rangle\, dt \leqslant 0$$

para todo $w \in L^p(0, T, X)$, portanto

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(u), w(t) \rangle \; dt = 0 \quad \forall w \in L^p(0, T, X)$$

notemos que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ e para toda $v \in X$, $\varphi v \in L^p(0, T; X)$ e assim

$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t)), \varphi(t) v \rangle \; dt = 0$$
$$\int_0^T \langle \chi(t) - M(u(t)), v \rangle \varphi(t) \; dt = 0$$

e novamente, pelo lema de Du Boys Raymound

$$\langle \chi(t) - M(u(t)), v \rangle = 0$$

q.t.p. em $[0, T]$ e para todo $v \in X$ e por um argumento análogo ao feito em (2.18) segue-se que

$$\chi(t) - M(u(t)) = 0$$

q.t.p. em $[0, T]$ e portanto

$$\chi = M(u).$$

daí e de (2.15) podemos concluir que

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t) \rangle \; dt + \int_0^T \langle \Delta_p u, v \rangle \; dt = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle \; dt$$

para toda $v \in L^p(0, T; X)$.

Teorema 2.1.2 (Unicidade)**.** A solução do problema (2.1)-(2.3) é única.

Demonstração.

Suponhamos que u_1 e u_2 sejam duas soluções de (2.1)-(2.3), assim

$$\langle u_1'(t), v \rangle + \langle M(u_1(t)), v \rangle = \langle f(t), v \rangle$$
$$\langle u_2'(t), v \rangle + \langle M(u_2(t)), v \rangle = \langle f(t), v \rangle$$

para toda $v \in X$ e assim

$$\langle u_1'(t), v \rangle - \langle u_2'(t), v \rangle + \langle M(u_1(t)), v \rangle - \langle M(u_2(t)), v \rangle = 0$$
$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), v \rangle + \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), v \rangle = 0$$

tomando $v = u_1 - u_2$ temos

$$\begin{aligned}\langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0\\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 + \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0\end{aligned}$$

integrando em $[0, t]$ temos

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2\ dt + \int_0^t \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle\ dt = 0$$

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_1(0) - u_2(0)\|_2^2 + \int_0^t \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle\ dt = 0$$

e como $u_1(0) - u_2(0) = 0$ temos

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 + \int_0^t \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle\ dt = 0 \tag{2.22}$$

como M é um operador monótono, segue-se que

$$\langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \geqslant 0$$

para todo $t \in [0, t]$ e daí

$$\int_0^t \langle M(u_1(t)) - M(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle\ dt \geqslant 0$$

segue-se de (2.22) que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 \leqslant 0$$

e portanto

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 = 0$$

q.t.p. em $[0, T]$, logo

$$u_1 = u_2.$$

Capítulo 3

Estudo do Problema no espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

3.1 Análise do Problema e Resultados Obtidos

Neste capítulo estudaremos o problema anterior no espaço generalizado de Lebesgue $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, isto é, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado com fronteira Γ e p uma função em $C(\overline{\Omega})$, buscaremos solução para o problema

$$\begin{cases} u' - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) & = & f & \text{em} & (0,T)\times\Omega \\ u & = & 0 & \text{em} & [0,T]\times\Gamma \\ u(x,0) & = & u_0 & \text{em} & \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

onde $u' = u_t$, isto é, a derivada de u em relação a variável t.

Consideraremos as seguintes notações para os valores

$$p^- = \inf \operatorname{ess} p,\ p^+ = \sup \operatorname{ess} p$$

e q^-, q^+ seus respectivos conjugados, isto é

$$\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} = 1,\ \frac{1}{p^+} + \frac{1}{q^+} = 1$$

além disso, denotaremos por p' a função conjugada de p definida por

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

para todo $x \in \Omega$.

Definição 3.1.1. Uma *solução fraca* do problema (P), é uma função u, tal que $u \in L^{p^-}(0,T;X)$, $u' \in L^{q^-}(0,T;X')$ e

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle \, dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p(x)-2} \nabla u(t) \nabla v(t) \, dxdt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \, dt$$

para toda $v \in L^{p^-}(0,T;X)$, com $u(x,0) = u_0$.

Com as considerações feitas acima, estamos prontos para demonstrar o principal resultado deste trabalho

Teorema 3.1.1. Sejam f e u_0 funções tais que

$$\begin{aligned} f &\in L^{q^-}(0,T;X') \cap L^{q^+}(0,T;X') \\ u_0 &\in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Então existe uma função u solução fraca do problema (P).

Demonstração.

Para encontrarmos uma solução do problema (P), usaremos o método de Galerkin (para maiores detalhes deste método ver [15], p. 503). Consideremos o seguinte resultado já observado no capítulo I, cujo a demonstração encontra-se em [38].

O espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ não possui base de Schauder, no entanto para aplicarmos o método de Faedo-Galerkin, necessitamos de algo que funcione como uma espécie de base para $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e que seja enumerável; o Lema de Zorn pode ser usado para demonstrar que todo espaço vetorial possui base de Hamel (ver [30], p. 211), mas nada é explicitado a respeito da enumerabilidade de tal base, para contornar esta situação lançaremos mão do

Lema 3.1.1. Se E é um espaço de Banach, reflexivo e separável, então existe $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ e $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E'$, tal que

$$\langle f_n, w_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n = m, \\ 0, & \text{se} \quad n \neq m, \end{cases}$$

$E = \overline{\text{span}\{w_n : n = 1, 2, ...\}}$ e $E' = \overline{\text{span}\{f_n : n = 1, 2, ...\}}$.

Seja $\mathbf{B} = \{w_1, w_2, ...\} \subset X$ como do lema 3.1.1. Já que $p > 2$, segue-se que $X \subset L^2(\Omega)$ e considerando $\mathbb{V}_m$, o subespaço vetorial de X gerado pelos m primeiros vetores de $\mathbf{B}$, isto é, $\mathbb{V}_m = \text{span}\{w_1, w_2, ..., w_m\}$, buscaremos soluções de (P), no espaço $\mathbb{V}_m$, portanto, queremos encontrar funções

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i(t) w_i$$

solução do problema aproximado, isto é, u_m satisfaz

$$\begin{cases} \langle u_m'(t), v\rangle + \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)-2} \nabla u_m(t) \nabla v \; dx = \langle f(t), v\rangle \\ u_m(x,0) = u_{0m} \end{cases} \tag{P_m}$$

para toda $v \in \mathbb{V}_m$ com $u_{0m} \to u_0$, de modo que $u_{0m} \in \mathbb{V}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ (ver capítulo I para mais detalhes) e $u_{0m} = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m$. Observe porém, que f não está definida em $t = 0$, mas, podemos considerar suas extensões definidas em $\mathbb{R}$ assumindo o valor 0 (função identicamente nula) fora do intervalo $(0, T)$, portanto teremos agora $\tilde{f} : \mathbb{R} \to X'$, além disso em particular temos.

$$\begin{cases} \langle u_m'(t), w_j\rangle + \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)-2} \nabla u_m(t) \nabla w_j \; dx = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \\ u_m(x,0) = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m \end{cases} \tag{3.1}$$

para todo $1 \leqslant j \leqslant N$. Assim, como $u_m'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i'(t) w_i(x)$, o sistema (P_m) torna-se

$$\begin{cases} \left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta'(t) w_i, w_j \right\rangle + \displaystyle\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \theta_i(t) \nabla w_i \right|^{p(x)-2} \nabla \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_i(t) w_i \right) \nabla w_j \; dx = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \\ u_m(0) = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m \end{cases}$$

que é o mesmo que

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i'(t) \langle w_i, w_j\rangle + \sum_{i=1}^{m} \theta_i(t) \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \theta_i(t) \nabla w_i \right|^{p(x)-2} \nabla w_i \nabla w_j \; dx = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \\ u_m(0) = \beta_1 w_1 + ... + \beta_m w_m. \end{cases}$$

Assim, para cada m, temos o sistema de EDO's

$$\begin{aligned} B\theta'(t) &= -A(\theta(t))\theta(t) + F(t) \\ \theta(0) &= (\beta_1, ..., \beta_m) \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\theta(t) = [\theta(t)_i]_{m,1}$, $A(\theta(t)) = \left[\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^{m} \Pi_i(\theta(t)) \nabla w_i \right|^{p(x)-2} \nabla w_i \nabla w_j \ dx \right]_{m,m}$, onde Π_i é a projeção da i-ésima coordenada de $\theta(t)$, $F(t) = [\langle \tilde{f}(t), w_j \rangle]_{m,1}$ e $B = [\langle w_i, w_j \rangle]_{m,m}$, para $1 \leqslant i, j \leqslant m$, com $\det B \neq 0$, pois os $w_j's$ são l.i.. Para provarmos que (3.2) tem solução, deveremos provar que a função $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$H(s, Y) = B^{-1}A(Y)Y + B^{-1}F(s)$$

é função de Carathéodory e assim, existirá um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\psi : I \to \mathbb{R}^N$, tal que

$$\psi'(t) = -B^{-1}A(\psi(t))\psi(t) + B^{-1}F(t) = H(t, \psi(t)).$$

• *Fixando s, H é contínua em Y.* Com efeito, temos que $F(s)$ é constante, pois só depende de s. Como Π_i é contínua para $1 \leqslant i \leqslant m$, segue-se que $\sum_{i=1}^{m} \Pi_i(Y) \nabla w_i$ é contínua em relação a Y, pois é soma de funções contínuas. Como $|s|^{p(x)-2}$ é contínua em s e daí $\left| \sum_{i=1}^{m} \Pi_i(Y) \nabla w_i \right|^{p(x)-2}$ é contínua, segue-se das propriedades da integral que $A(Y)$ é contínua em relação a Y.

• *Fixando Y, H é mensurável em s.* De fato, da hipótese, temos que $A(Y)$ é constante e daí mensurável e das propriedades de f segue-se que $F(s)$ também é mensurável.

• *H é majorada por uma função integrável em todo compacto.* Com efeito, se $E = \{Y \in \mathbb{R}^N; \|Y\|_m \leqslant \alpha\}$, $H : [-a, a] \times E \to \mathbb{R}^N$, para $a > 0$ e $\| \cdot \|_m$ denotar a norma no $\mathbb{R}^m$, temos

$$\begin{aligned} \|H(s, Y)\|_m = \| - B^{-1}A(Y)Y + B^{-1}F(s)\|_m &\leqslant \|B^{-1}\|_{m \times m}(\|A(Y)Y\|_m + \|F(s)\|_m) \\ &\leqslant \|B^{-1}\|_{m \times m}(\|A(Y)\|_{m \times m}\|Y\|_m + \|F(s)\|_m) \end{aligned}$$

Como $A(Y)$ é contínua, leva conjuntos compactos em conjuntos compactos do $\mathbb{R}^N$, então existe um $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|H(s, Y)\|_m &\leqslant \|B^{-1}\|_{m \times m}(\|A(Y)\|_{m \times m}\|Y\|_m + \|F(s)\|_m) \\ &\leqslant \|B^{-1}\|_{m \times m} c\alpha + \|B^{-1}\|_{m \times m}\|F(s)\|_m \end{aligned}$$

e das propriedades de f, segue-se que $\|F(s)\|_m$ é integrável em $[-a, a]$. Assim, (3.2) satisfaz as condições de Carathéodory e portanto existe uma solução para o sistema (P_m).

Provada a existência de solução, podemos restringi-las aos intervalos $[0,t_m]$. Nosso próximo passo é estender ou restringir tais soluções para o intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$. Para isso, provaremos que a sequência de soluções (u_m) de (P_m) é limitada em $[0,T]$. Com efeito, fazendo $v = u_m(t)$ em (P_m) temos

$$\begin{aligned} \langle u_m'(t), u_m(t)\rangle + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)-2}\nabla u_m(t)\nabla u_m(t)\,dx &= \langle f(t), u_m(t)\rangle \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}\,dx &= \langle f(t), u_m(t)\rangle \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}\,dx &\leqslant \|f(t)\|_{X'}\|u_m(t)\|_{1,p(x)} \quad (3.3) \end{aligned}$$

Antes de darmos prosseguimento aos cálculos, observemos que $t \to \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}$ é mensurável, pois, $\nabla u_m(x,t) = \sum \theta_i(t)\nabla w_i(x)$, é uma soma de funções mensuráveis em t, daí consideremos dois casos:

Caso 1: Seja $I_m = \{t \in [0,t_m];\ \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)} \leqslant 1\}$, neste caso teremos

$$\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}dx$$

e pela desigualdade de Poincaré, existe um $c_0 > 0$ tal que

$$\|u_m(t)\|_{p(x)} \leqslant c_0\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}$$

considerando ainda q^+, tal que $\frac{1}{p^+} + \frac{1}{q^+} = 1$ e pela desigualdade de Young, (3.3) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}\,dx &\leqslant \frac{1}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f(t)\|_{X'}^{q^+} + \frac{\epsilon_1^{p^+}}{p^+}\|u_m(t)\|_{1,p(x)}^{p^+} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} &\leqslant \frac{1}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f(t)\|_{X'}^{q^+} + \frac{\epsilon_1^{p^+}}{p^+}\|u_m(t)\|_{1,p(x)}^{p^+} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} &\leqslant \frac{1}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f(t)\|_{X'}^{q^+} + \frac{\epsilon_1^{p^+}c_0^{p^+}}{p^+}\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \left(1 - \frac{\epsilon_1^{p^+}c_0^{p^+}}{p^+}\right)\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} &\leqslant \frac{1}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f(t)\|_{X'}^{q^+} \end{aligned}$$

tomando ϵ_1 de modo que $1 - \frac{\epsilon_1^{p^+}c_0^{p^+}}{p^+} = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+} \leqslant \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f(t)\|_{X'}^{q^+}$$

integrando em I_m temos

$$\int_{I_m} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2\ dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\ dt \leqslant \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}} \int_{I_m} \|f(t)\|_{X'}^{q^+}\ dt \tag{3.4}$$

Caso 2: Seja $J_m = \{t \in [0, t_m];\ 1 < \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}\}$, nesta situação teremos

$$\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)} dx$$

e pela desigualdade de Poincaré, existe um $c_2 > 0$ tal que

$$\|u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant c_2^{p^-} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}$$

considerando q^-, tal que $\frac{1}{q^-} + \frac{1}{p^-} = 1$ e pela desigualdade de Young, (3.3) torna-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}\ dx \leqslant \frac{1}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f(t)\|_{X'}^{q^-} + \frac{\epsilon_2^{p^-}}{p^-}\|u_m(t)\|_{1,p(x)}^{p^-}$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^{p(x)}\ dx \leqslant \frac{1}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f(t)\|_{X'}^{q^-} + \frac{\epsilon_2^{p^-}}{p^-}\|u_m(t)\|_{1,p(x)}^{p^-}$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \frac{1}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f(t)\|_{X'}^{q^-} + \frac{c_2^{p^-}\epsilon_2^{p^-}}{p^-}\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} - \frac{c_2^{p^-}\epsilon_2^{p^-}}{p^-}\|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} \leqslant \frac{1}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f(t)\|_{X'}^{q^-}$$

tomando ϵ_2 de modo que $1 - \frac{c_2^{p^-}\epsilon_2^{p^-}}{p^-} = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-} \ \leqslant\ \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f(t)\|_{X'}^{q^-}$$

integrando em relação a J_m temos

$$\int_{J_m} \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2\ dt + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\ dt \ \leqslant\ \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}} \int_{J_m} \|f(t)\|_{X'}^{q^-}\ dt \tag{3.5}$$

somando as desigualdades (3.4) e (3.5), temos

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2\ dt + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\ dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\ dt \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}} \int_{J_m} \|f(t)\|_{X'}^{q^-}\ dt + \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}} \int_{I_m} \|f(t)\|_{X'}^{q^+}\ dt \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2\ dt + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\ dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\ dt \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}} \int_0^T \|f(t)\|_{X'}^{q^-}\ dt + \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}} \int_0^T \|f(t)\|_{X'}^{q^+}\ dt \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\|u_m(t)\|_2^2 - \|u_m(0)\|_2^2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\ dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\ dt \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}}\|f\|_{L^{q^-}(0,T;X')}^{q^-} + \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}}\|f\|_{L^{q+}(0,T;X')}^{q^+}, \end{aligned}\right.$$

como $\|u_m(0)\|_2 \leqslant \|u_0\|_2$ para todo m, temos

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}} \|f\|_{L^{q^-}(0,T;X')}^{q^-} + \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}} \|f\|_{L^{q^+}(0,T;X')}^{q^+} + \|u_0\|_2^2$$

considerando

$$C_0 = \frac{2}{q^-\epsilon_2^{q^-}} \|f\|_{L^{q^-}(0,T;X')}^{q^-} + \frac{2}{q^+\epsilon_1^{q^+}} \|f\|_{L^{q+}(0,T;X')}^{q^+} + \|u_0\|_2^2$$

temos

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\, dt \leqslant C_0 \tag{3.6}$$

observemos que $|\nabla u_m|\Big|_{I_m \times \Omega} \in L^{p^+}(I_m; L^{p(x)}(\Omega))$, (a restrição de $|\nabla u_m|$ a $I_m \times \Omega$) e como I_m é limitado, segue-se que

$$L^{p^+}(I_m; L^{p(x)}(\Omega)) \hookrightarrow L^{p^-}(I_m; L^{p(x)}(\Omega))$$

continuamente, assim, existe $c_3 = c_3([0,T]) > 0$ tal que

$$\left(\int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \right)^{\frac{1}{p^-}} \leqslant c_3 \left(\int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\, dt \right)^{\frac{1}{p^+}}$$

e assim

$$\frac{1}{c_3^{p^+}} \left(\int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \right)^{\frac{p^+}{p^-}} \leqslant \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^+}\, dt$$

daí, (3.6) torna-se

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \frac{1}{c_3^{p^+}} \left(\int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \right)^{\frac{p^+}{p^-}} \leqslant C_0$$

desta forma, existirá um $C_1 > 0$ tal que para todo m e para todo $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\|u_m(t)\|_2 + \int_{J_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \int_{I_m} \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \leqslant C_1$$
$$\|u_m(t)\|_2 + \int_0^t \chi_{J_m}(t) \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt + \int_0^t \chi_{I_m}(t) \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \leqslant C_1$$

onde χ_{J_m} e χ_{I_m}, são as funções características de J_m e I_m, respectivamente, assim

$$\|u_m(t)\|_2 + \int_0^t \|\nabla u_m(t)\|_{p(x)}^{p^-}\, dt \leqslant C_1$$

$$\|u_m(t)\|_2 + \|u_m\|_{L^{p^-}(0,T;X)} \leqslant C_1 + C_1^{1/p^-}$$

portanto

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.7}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^{p^-}(0,T;X) \tag{3.8}$$

assim, como as soluções do problema aproximado são limitadas, pelo teorema da extensão de soluções, podemos estender as soluções aproximadas $u_m(t)$ ao intervalo inteiro $[0,T]$, além disso de (3.7), (3.8) e do fato de que o operador $L : X \to X'$, definido por

$$L(u) = -\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$$

ser limitado [21, 28], segue-se que podemos extrair de (u_m), uma subsequência ainda denotada por (u_m), tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{fraco estrela em} \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \tag{3.9}$$

$$u_m \rightharpoonup u \qquad \text{fraco em} \quad L^{p^-}(0,T,X) \tag{3.10}$$

$$u_m(T) \rightharpoonup \xi \qquad \text{fraco em} \quad L^2(\Omega) \tag{3.11}$$

$$L(u_m) \rightharpoonup \chi \qquad \text{fraco em} \quad L^{q^-}(0,T;X'). \tag{3.12}$$

Provaremos agora que u encontrada acima é solução de (P).

• *Passagem ao limite.* Sejam $\tilde{u}_m$ e $\widetilde{L(u_m)}$ para todo m, as extensões de u_m e $L(u_m)$ respectivamente, em todo $\mathbb{R}$, que são 0 fora de $[0,T]$. Assim, se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de (3.1) temos

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{u}_m(t), w_j\rangle \varphi'(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widetilde{L(u_m(t))}, w_j\rangle \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \varphi(t)\,dt +$$
$$+ \langle u_m(0), w_j\rangle \varphi(0) - \langle u_m(T), w_j\rangle \varphi(T)$$

fazendo $m \to \infty$, por (3.10), (3.11) e (3.12) temos

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(t), w_j\rangle \varphi'(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{\chi}(t), w_j\rangle \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle \varphi(t)\,dt +$$
$$+ \langle u_0, w_j\rangle \delta_0(\varphi(t)) - \langle \xi, w_j\rangle \delta_T(\varphi(t))$$

assim

$$\langle \tilde{u}'(t), w_j\rangle + \langle \tilde{\chi}(t), w_j\rangle = \langle \tilde{f}(t), w_j\rangle + \langle u_0, w_j\rangle \delta_0 - \langle \xi, w_j\rangle \delta_T \tag{3.13}$$

em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Restringindo (3.13) ao intervalo $(0,T)$ temos

$$u' + \chi = f \tag{3.14}$$

no sentido das distribuições. Desta maneira $u' \in L^{p'}(0,T;X')$ e de (3.10), $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Faz sentido, portanto, $u(0)$ e $u(T)$. Em outra mão, para toda função simples

$$v : (0,T) \to X$$

teremos de (3.14)

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle \; dt + \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle \; dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \; dt$$

e como o conjunto formado pelas funções simples é denso em $L^{p^-}(0,T;X)$ (ver apêndice de [13], p. 132 de [41]) segue-se que

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle \; dt + \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle \; dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle \; dt$$

para toda $v \in L^{p^-}(0,T;X)$.

• *Afirmamos que em (3.11), $\xi = u(T)$ e $u_0 = u(0)$.* Com efeito, para toda $\varphi \in C^\infty([0,T])$ e para toda $v \in X$, $\varphi v \in L^p(0,T;X)$, de (3.13)

$$\begin{aligned}
\langle \xi, v\rangle \varphi(T) - \langle u_0, v\rangle \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{f}(t), \varphi(t) v\rangle \; dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{\chi}(t), \varphi(t) v\rangle \; dt - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{u}(t), \varphi'(t) v\rangle \; dt \\
&= \int_0^T \langle f(t), \varphi(t) v\rangle \; dt - \int_0^T \langle \chi(t), \varphi(t) v\rangle \; dt - \\
&\quad - \int_0^T \langle u(t), \varphi(t)' v\rangle \; dt
\end{aligned}$$

e de (3.14)

$$\begin{aligned}
\langle \xi, v\rangle \varphi(T) - \langle u_0, v\rangle \varphi(0) &= \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t) v\rangle \; dt - \int_0^T \langle u(t), \varphi'(t) v\rangle \; dt \\
&= \langle u(T), v\rangle \varphi(T) - \langle u(0), v\rangle \varphi(0)
\end{aligned}$$

considerando φ, com $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) \neq 0$ segue-se

$$\langle u(0), v\rangle = \langle u_0, v\rangle$$

$$\langle u(0) - u_0, v\rangle = 0.$$

Como o funcional acima é nulo para toda $v \in X$, também será para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, portanto

$$u(0) = u_0.$$

De um modo similar pode-se demonstrar que $u(T) = \xi$, basta tomar φ com $\varphi(T) \neq 0$ e $\varphi(0) = 0$.

• *Afirmamos que* $\chi = L(u)$. Com efeito, como L é um operador monótono (ver [28]), assim temos

$$\langle Lu_m(t) - Lv(t), u_m(t) - v(t)\rangle \geqslant 0 \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } \forall v \in L^{p^-}(0,T;X)$$

e integrando em $[0,T]$ temos

$$\int_0^T \langle Lu_m(t) - Lv(t), u_m(t) - v(t)\rangle \, dt \geqslant 0 \;\; \forall v \in L^{p^-}(0,T;X)$$

e consideremos a sequência de números reais dada por

$$H_m = \int_0^T \langle Lu_m(t) - Lv(t), u_m(t) - v(t)\rangle \, dt \geqslant 0, \tag{3.15}$$

e tomando $v = u_m(t)$ em (P_m) temos

$$\int_0^T \langle Lu_m(t), u_m(t)\rangle \, dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|_2^2 \tag{3.16}$$

levando em conta (3.15) e (3.17) temos

$$H_m = \int_0^T \langle f(t), u_m(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|_2^2 - \int_0^T \langle Lu_m(t), v(t)\rangle \, dt \\ - \int_0^T \langle Lv(t), u_m(t) - v(t)\rangle \, dt$$

de (3.11) temos $\liminf \|u_m(T)\|_2^2 \geqslant \|u(T)\|_2^2$, (ver [12]) e por (3.10) e (3.17) temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \limsup H_m \leqslant & \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}\|u(0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2 - \\ & - \int_0^T \langle Lu(t), v(t)\rangle \, dt - \int_0^T \langle Lv(t), u(t) - v(t)\rangle \, dt \end{aligned} \tag{3.17}$$

e tomando $w_j = u(t)$ em (3.14) e integrando em $[0,T]$ temos

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle \, dt + \frac{1}{2}\|u(0)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_2^2 = \int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle \, dt \tag{3.18}$$

combinando (3.17) e (3.18) temos

$$\int_0^T \langle \chi(t), u(t)\rangle\ dt - \int_0^T \langle \chi(t), v(t)\rangle\ dt - \int_0^T \langle Lv(t), u(t)-v(t)\rangle \geqslant 0$$
$$\int_0^T \langle \chi(t), u(t)-v(t)\rangle\ dt - \int_0^T \langle Lv(t), u(t)-v(t)\rangle \geqslant 0$$
$$\int_0^T \langle \chi(t)-Lv(t), u(t)-v(t)\rangle\ dt \geqslant 0$$

daí e do fato de L ser hemicontinuo (pois é a derivada de Gâteaux de um operador, ver [28, 21]), fazendo $v = u - \alpha w$, com $\alpha > 0$ e $w \in L^{p^-}(0,T;X)$, temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - L(u(t)-\alpha w(t)), \alpha w(t)\rangle\ dt \geqslant 0$$
$$\alpha \int_0^T \langle \chi(t) - L(u(t)-\alpha w(t)), w(t)\rangle\ dt \geqslant 0$$

então

$$\int_0^T \langle \chi(t) - L(u(t)-\alpha w(t)), w(t)\rangle\ dt \geqslant 0$$

Observemos agora que se (α_n) é uma sequência real tal que $\alpha_n \to 0$, então pela hemicontinuidade de L, segue-se que a sequência de funções em t

$$\langle L(u(t)-\alpha_n w(t)), w(t)\rangle \to \langle Lu(t), w(t)\rangle$$

e assim

$$\langle \chi(t) - L(u(t)-\alpha_n w(t)), w(t)\rangle \to \langle \chi(t) - Lu(t), w(t)\rangle$$

como a sequência $\langle \chi(t) - L(u(t)-\alpha_n w(t)), w(t)\rangle$ é limitada, fazendo $n \to \infty$ e usando o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), w(t)\rangle\ dt \geqslant 0 \quad \forall w \in L^{p^-}(0,T;X)$$

e daí, se $\lambda < 0$, segue-se que

$$\lambda \int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), w(t)\rangle\ dt \leqslant 0 \quad \forall w \in L^{p^-}(0,T;X)$$
$$\int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), \lambda w(t)\rangle\ dt \leqslant 0 \quad \forall w \in L^{p^-}(0,T;X)$$

assim

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), w(t)\rangle\ dt = 0 \quad \forall w \in L^{p^-}(0,T;X). \tag{3.19}$$

Antes de continuarmos, faremos uma breve observação. Como Lu e χ estão em $L^\infty(0,T;X')$, então para todo $t \in [0,T]$, $Lu(t)$ e $\chi(t)$ estão em X', assim, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ e para toda $v \in X$, temos $\varphi v \in L^{p^-}(0,T;X)$ assim de (3.19) temos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), \varphi(t)v\rangle \, dt = 0$$
$$\int_0^T \langle \chi(t) - Lu(t), v\rangle \, \varphi(t)dt = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ e para toda $v \in X$, logo

$$\langle \chi(t) - Lu(t), v\rangle = 0$$

q.t.p em $[0,T]$ e para toda $v \in X$, então $\chi - Lu = 0$ q.t.p em $[0,T]$, portanto

$$\chi = Lu.$$

Teorema 3.1.2 (Unicidade)**.** A solução do problema (P) é única.

Demonstração.

A prova é similar a feita no capítulo II, porém iremos repeti-lá. Suponhamos que u_1 e u_2 sejam duas soluções de (P), assim

$$\langle u_1'(t), v\rangle + \langle L(u_1(t)), v\rangle = \langle f(t), v\rangle$$
$$\langle u_2'(t), v\rangle + \langle L(u_2(t)), v\rangle = \langle f(t), v\rangle$$

para toda $v \in X$ e daí

$$\langle u_1'(t), v\rangle - \langle u_2'(t), v\rangle + \langle L(u_1(t)), v\rangle - \langle L(u_2(t)), v\rangle = 0$$
$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), v\rangle + \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), v\rangle = 0$$

tomando $v = u_1 - u_2$ temos

$$\langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 + \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0$$

integrando em $[0,t]$ temos

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 \, dt + \int_0^t \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \, dt = 0$$
$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_1(0) - u_2(0)\|_2^2 + \int_0^t \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \, dt = 0$$

e como $u_1(0) - u_2(0) = 0$ temos

$$\frac{1}{2}\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 + \int_0^t \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \; dt = 0 \tag{3.20}$$

como L é um operador monótono, segue-se que

$$\langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \geqslant 0$$

para todo $t \in [0, t]$ e daí

$$\int_0^t \langle L(u_1(t)) - L(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \; dt \geqslant 0$$

de (3.20) temos

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2^2 \leqslant 0$$

portanto

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 = 0$$

q.t.p. em $[0, T]$, logo

$$u_1 = u_2.$$

Considerações Finais

Os estudos envolvendo equações diferenciais parciais nos espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ tem crescido bastante nos últimos anos, principalmente, devido a sua aplicabilidade. Os resultados obtidos para a existência e a unicidade de solução do problema (P) caracterizam, portanto, uma generalização ao espaço de Sobolev com expoente variado do problema estudado no capítulo II. Esses resultados abrem perspectivas e nos motivam à estudos futuros envolvendo equações de evolução de diferentes formas nos espaços generalizados de Sobolev, já que existem poucos resultados relacionados a equações parabólicas ou hiperbólicas nesses espaços.

Para trabalhos futuros, poderemos considerar questões de comportamento assintótico, regularidade e estabilidade de soluções, assim como aplicação da teoria dos semi-grupos no estudo de equações de cunho mais gerais nos espaços $W^{m,p(x)}(\Omega)$.

Referências Bibliográficas

[1] ACERBI, E; MINGIONE, G. Regularity results for electorheological Fluids: stationary case. **C. R. Math. Acad. Sci.** Paris: 334, 817-822, 2002.

[2] ADAMS, R.; FOURNIER, J. **Sobolev Spaces**. 2th. ed. Amsterdam: Academic Press, 2006.

[3] ALIKAKOS, D.; EVANS L. C. Continuity of the gradient for weak solutions of a degenerate parabolic equation. **J. Math. Anal. appl.** 63, 253-268, 1983.

[4] ALVES, C. O. Existence of solution for a degenerate $p(x)$-Laplacian equation in $\mathbb{R}^N$. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**. 345, 731-742, 2008.

[5] ANTONTSEV, S. N.; RODRIGUES, J. F. On Stationary thermo-rheological viscous flows. **Ann. Univ. Ferrara.** 52, 19-36, 2006.

[6] ANTONTSEV, S. N.; CHIPOT, M. Uniqueness results for equation of the p(x)-Laplacian type. **Adv. Math. Sc. and Appl.** 17, 287-304, 2007.

[7] ANTONTSEV, S. N.; SHMAREV, S. I. A model porous medium equation with variable exponentes of nonlinearity: existence uniqueness and localization properties of solutions. **Nonlinear Analysis, Theory Metholds Appl.** 60, No. 3, 515-545, 2005.

[8] ANTONTSEV, S. N.; SHMAREV, S. I. Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponentes of nonlinearity. **Journal of Mathematical Sciences.** 150, No. 5, 2008.

[9] ARONSO, D. G. The porous medium equation. In: **Nonlinear Diffusion Problems.** Berlin: Springer, 1-46, 1986.

[10] BARTLE, R. G. **The elements of integration and Lebesgue measure.** New York: John Wiley & Sons, 1995.

[11] BOURBAKI, N. **Éléments de mathématique, intégration: chapitres 1 à 4.** Springer-Verlag: Berlin, 2007.

[12] BRÉZIS, H. **Analyse fonctionnelle, théorie et applications.** Paris: Dunod, 2005.

[13] BRÉZIS, H. **Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert.** New York: North Holland, 1973.

[14] CHIPOT. M. **Elements of nonlinear analysis.** Berlin: Birkhäuser Basel, 2000.

[15] DAUTRY, R.; LIONS J. L. **Mathematical analysis and numerical metholds for science and tecnology.** New-York: Spriger-Verlag, vol. 5, 2000.

[16] DIAZ, J. L. **Nonlinear partial differential equations and free boundaries.** Londres: Pitman, 1985.

[17] DIBENEDETTO, E. **Degenerate parabolic equation.** Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[18] DIENING, L. **Theoretical and numerical results for electrorheological fluids.** Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade de Freiburg, Germany, 2002.

[19] EVAN, L. C. **Partial differential equations.** Rhode Island: American Mathematical Society, 1998.

[20] FAN, X. L.; ZHAO, D. Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problem. **Nonlinear Analysis**, 52, 1843-1852, 2003.

[21] FAN. X. L.; ZHANG, Q. H. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem. **Nonlinear Anal.** 52, No. 8, 1843-1852, 2003.

[22] FAN, X. L.; ZHAO, D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. **Journal of Mathematical Analysis and Applications.** 263, 424- 446, 2001.

[23] FAN, X. L.; SHEN, J. S.; ZHAO, D. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{m,p(x)}(\Omega)$. **J. Math. Anal. Appl.** 262, 749-760, 2001.

[24] FAN, X. L. Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients. **J. Math. Anal. Appl.** 312, 464-477, 2005.

[25] FERNANDEZ, P. J. **Medida e integração.** Rio de Janeiro: IMPA, Segunda Edição, 2002.

[26] FIGUEIREDO, G. M.; MENEZES, S. B. On a class of problem involving the N-Laplacian operator with exponential nonlinear with critical growth. Preprint.

[27] FUCIK, S.; JOHN, O.; NECAS, J. On the existence of Schauder bases in Sobolev spaces. **Commentationes Mathematicae Universitatis Caroline.** 13, 163-175, 1972.

[28] GUIMARÃES, C. J. **Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações envolvendo o p(x)-Laplaciano.** Dissertação de Mestrado, PPGM, UFCG, 2006.

[29] HALE, J. K. **Ordinary differential equations.** New York: Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.

[30] KREYSZIG, E. **Introdutory functional analysis with applications.** New York: John Wiley e Sons, 1989.

[31] LI, F.; XIE, C. Global and blow-up solutions to a p-Laplacian equation with nonlocal source. **Computers and Mathematics with Applications.** 46, 1525-1533, 2003.

[32] LIONS, J. L. **Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.** Paris: Dunod-Gauthier Villars, First edition, 1969.

[33] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Non-homogeneous boundary value problems and applications.** New York: Springer, vol I, 1972.

[34] LINDENSTRAUSS, J. TZAFRIRI, L. **Classical Banach spaces I and II.** Berlin: Springer, 1991.

[35] MEDEIROS, L. A.; MILLA, M. A. **Espaços de Sobolev Spaces (Iniciação aos Problemas Elípticos Nao Homogêneos).** Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[36] NORBERT, H. Quasilinear parabolic systems in divergence form with weak monotonicity. **Duke Math. J.** 107, No. 3, 497-520, 2001.

[37] PERAL, I. Multiplicity of solutions for the p-Laplacian. In: SECOND SCHOOL ON NONLINEAR FUNCTIONAL ANALYSYS AND APPLICATIONS TO DIFFERENTIAL EQUATION, Miramare, 1997.

[38] HAJEK, P. et al. **Biorthogonal systems in Banach spaces.** New York: Springer, 2000.

[39] RIVERA, J. E. M. **Introdução às distribuições e equações diferenciais parciais.** Rio de Janeiro: LNCC, 2004.

[40] RUZICKA, M. **Electrorheological fluids: modeling and Mathematical Theory.** Berlin: Springer-Verlage, 2000.

[41] YOSIDA, K. **Functional analysis.** 6th. ed. Berlin: Springer-Verlar, 1995.

[42] ZHAO, J. Existence and noexistence of solutions for $u_t = \mathrm{div}|\nabla u|^{p-2}\nabla u + f(\nabla u, u, x, t)$. **J. Math. Anal. Appl.** 172, 130-146, 1993.