

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Multiplicidade de soluções positivas para um
problema envolvendo o expoente crítico de
Sobolev em $\mathbb{R}^N$**

Genivaldo dos Passos Corrêa

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém
ICEN - UFPA
Fevereiro 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Multiplicidade de soluções positivas para um
problema envolvendo o expoente crítico de
Sobolev em $\mathbb{R}^N$**

Genivaldo dos Passos Corrêa

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará como pré-requisito para a ob-
tenção do título de Mestre em Matemática.

**Belém
ICEN - UFPA
Fevereiro 2008**

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Multiplicidade de soluções positivas para um problema
envolvendo o expoente crítico de Sobolev em $\mathbb{R}^N$

Genivaldo dos Passos Corrêa

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará como pré-requisito para a ob-
tenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 28 de fevereiro de 2008.

Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof.º Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Orientador
Faculdade de Matemática - UFPA.

Prof.º Dr. Everaldo Souto de Medeiros
Departamento de Matemática - UFPB.

Prof.º Dr. Mauro de Lima Santos
Faculdade de Matemática - UFPA.

AGRADECIMENTOS

A Deus que no decorrer dessa jornada me deu saúde para que este trabalho fosse realizado.

A minha família que sempre me incetivou a nunca desistir do curso devido as dificuldades e em especial aos meus pais, os principais responsáveis pela minha existência nessa vida.

A meu filho e minha esposa os quais me fazem feliz, e querer sempre continuar lutando por melhores condições de vida.

Ao meu orientador Profº. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo por está sempre disposto a esclarecer todas as dúvidas surgidas e sobretudo pela sua amizade e palavras de incentivo nos momentos mais difíceis dessa jornada.

Aos professores Francisco Júlio, Paulo Marques, Mauro de Lima Santos e Marcus Pinto, os quais com seus conhecimentos me proporcionaram uma base bastante sólida a qual fez com que esse trabalho fosse menos árduo.

A todos meus colegas de turma, em especial aos colegas Andreino Santos Vasconcelos e Elizabeth Rego Sabino pela força, companheirismo, incentivo e amizade.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

”O espirito só usa sua faculdade criadora quando a experiência lhe impõem tal necessidade”.

Henri Poincaré(Matemático francês).

Resumo

Este trabalho trata da existência de pelo menos duas soluções positivas para o problema

$$-div(|\nabla u|^{m-2} \nabla u) = \lambda h u^q + u^{m^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Mais precisamente, usando o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha, mostraremos a existência de $\lambda^* > 0$ tal que o Problema (1) tem pelo menos duas soluções fracas não-negativas para cada $\lambda \in (0, \lambda^*)$.

Abstract

This work concerns with the problem

$$-div(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) = \lambda h u^q + u^{m^*-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Using the Ekeland Variational Principle and Mountain Pass Theorem, we show the existence of $\lambda^* > 0$ such that there are at least two non-negative solutions for all λ in $(0, \lambda^*)$.

Índice

Introdução	9
Capítulo 1 : Resultados Preliminares e Existência da primeira solução via princípio Variacional de Ekeland	12
Capítulo 2 : Existência da segunda solução via Teorema do passo da Montanha	41
Appendix A: Funcionais diferenciáveis e Resultados Importantes	45
Appendix B: Princípio Variacional de Ekeland e Teorema do Passo da Montanha	57
Appendix C: Resultados Básicos	66
Referências Bibliograficas	70

Introdução

Nesta dissertação estudaremos um resultado de multiplicidade de soluções para o problema

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_m u = \lambda h u^q + u^{m^*-1} & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, u \neq 0, u \in \mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

onde $\Delta_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2} \nabla u)$, $\lambda > 0$, $N > m \geq 2$, $m^* = \frac{Nm}{(N-m)}$, $0 < q < m - 1$, h é uma função não-negativa em $L^\theta(\mathbb{R}^N)$ com $\theta = \frac{Nm}{Nm-(q+1)(N-m)}$ e

$$\mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{m^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^m(\mathbb{R}^N); i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

munido da norma $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m \right)^{1/m}$.

Este estudo será feito seguindo um artigo de C.O.Alves [1], que usou técnicas variacionais para tratar o problema, as quais descreveremos abaixo.

Uma solução fraca de (P) é uma função $u \in \mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$, $u \geq 0$, $u \neq 0$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla \varphi = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h u^q \varphi + \int_{\mathbb{R}^N} u^{m^*-1} \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

As soluções do problema (P) serão obtidas como pontos críticos do funcional energia definido por

$$I(u) = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(u^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{m^*}, \quad (2)$$

onde $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

Esse funcional é de classe C^1 [ver Proposição A.2] com derivada dada por

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla \varphi - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(u^+)^q \varphi - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{m^*-1} \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N).$$

Mais precisamente, mostraremos a existência de dois pontos críticos do funcional energia usando o Princípio Variacional de Ekeland [8] e o Teorema do Passo da Montanha em uma versão devido à Willem [18]. A grande dificuldade que surge no uso dessas técnicas é que a condição de Palais-Smale, em geral, não é válida quando o problema está posto em domínio não-limitado ou quando o crescimento da não linearidade é crítica. Isto ocorre,

devido ao fato, das imersões de Sobolev $W^{1,m}(\mathbb{R}^N)$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$, com $2 \leq s \leq m^*$ serem contínuas e não compactas. Contudo, aplicando técnicas usadas por Cao, Li & Zhou [6], Chabrowski [7], Noussair, Swanson & Jianfu [16], Jianfu & Xiping [13], Azorero & Alonzo [11] e Gonçalves & Alves [12], mostraremos a validade da condição de Palais-Smale para níveis de energia abaixo de um certo número fixado e que está relacionado com a melhor constante de Sobolev da imersão $D^{1,m}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{m^*}(\mathbb{R}^N)$. O principal resultado deste trabalho é o seguinte:

Teorema 0.1. Existe uma constante $\lambda^* > 0$, tal que (P) possui duas soluções fracas, u_1 e u_2 , satisfazendo

$$I(u_1) < 0 < I(u_2), \forall \lambda \in (0, \lambda^*).$$

Para uma melhor compreensão, este texto será escrito com a seguinte estruturação.

No **Capítulo 1** começaremos apresentando alguns resultados preliminares e também mostraremos a existência da primeira solução usando o Princípio Variacional de Ekeland [8].

No **Capítulo 2** mostraremos a existência da segunda solução, usando o Teorema do Passo da Montanha em uma versão devido à Willem [18].

Para a completeza deste trabalho, colocaremos em apêndices demonstrações de alguns resultados que são usados no corpo desta dissertação.

No **Apêndice A** demonstraremos que o funcional associado ao problema (P) é de classe C^1 . Demonstraremos ainda uma importante desigualdade que ocorre no $\mathbb{R}^N$ e uma outra desigualdade envolvendo o nível minimax do funcional I .

No **Apêndice B** demonstraremos o conhecido Princípio Variacional de Ekeland, o qual é usado para obter soluções de alguns problemas elípticos via método de minimização de funcionais. Demonstraremos também o Teorema do Passo da Montanha em uma versão devido à Willem, para tal faremos uso do Lema de Deformação.

E finalmente, no **Apêndice C** enunciaremos alguns resultados básicos que estão sendo usados na dissertação, indicando referências para as consultas das demonstrações caso o leitor julgue necessário.

No corpo dessa dissertação usaremos as seguintes notações:

- $\int = \int_{\mathbb{R}^N}$
- $\mathcal{D}^{1,m} = \mathcal{D}^{1,m}(\mathbb{R}^N)$

- $L^p = L^p(\mathbb{R}^N)$
- $\|\cdot\|_{\mathcal{D}'} = \|\cdot\|_{(D^{1,m}(\mathbb{R}^N))'}$
- $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{D^{1,m}(\mathbb{R}^N)}$
- $|\cdot|_p = |\cdot|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$
- $|A|$ é a medida de Lebesgue do conjunto A

Capítulo 1

Existência da primeira solução via Princípio Variacional de Ekeland

Neste capítulo mostraremos a existência da primeira solução do problema (P) usando o Princípio Variacional de Ekeland. Para isso, começaremos apresentando alguns resultados preliminares.

1.1 Resultados Preliminares

Definição 1.1. Uma seqüência $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$ é dita uma seqüência de Palais-Smale no nível c , ou abreviadamente $(PS)_c$, para o funcional I se

$$I(u_n) \longrightarrow c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Lema 1.1. Se $\{u_n\}$ é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , então $\{u_n\}$ é limitada, e $\{u_n^+\}$ também é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I .

Demonstração: Por hipótese $\{u_n\}$ é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , então $I(u_n) \longrightarrow c$ e portanto $\{I(u_n)\}$ é uma seqüência limitada em $\mathbb{R}$, ou seja, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que

$$|I(u_n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

e desde que,

$$I'(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty$$

segue-se que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_n)\|_{\mathcal{D}'} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -I'(u_n)u_n &\leq |I'(u_n)u_n| \\ &\leq \|I'(u_n)\|_{\mathcal{D}'} \|u_n\| \\ &\leq \epsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon < m^*$ na última desigualdade acima, obtemos

$$-\frac{1}{m^*}I'(u_n)u_n \leq \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0. \quad (1.2)$$

Agora somando membro a membro (1.1) e (1.2), concluimos que

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*}I'(u_n)u_n \leq M + \|u_n\|. \quad (1.3)$$

Por outro lado,

$$I(u_n) = \frac{1}{m} \int |\nabla u_n|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u_n^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u_n^+)^{m^*} \quad (1.4)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^*}I'(u_n)u_n &= \frac{1}{m^*} \left[\int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u_n - \lambda \int h(u_n^+)^q u_n - \int (u_n^+)^{m^*-1} u_n \right] \\ &= \frac{1}{m^*} \int |\nabla u_n|^m - \frac{\lambda}{m^*} \int h(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) \\ &\quad - \frac{1}{m^*} \int (u_n^+)^{m^*-1} (u_n^+ - u_n^-) \\ &= \frac{1}{m^*} \int |\nabla u_n|^m - \frac{\lambda}{m^*} \int h(u_n^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u_n^+)^{m^*} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Subtraindo membro a membro (1.4) de (1.5), obtemos

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*}I'(u_n)u_n = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} \right) \int |\nabla u_n|^m + \left(\frac{\lambda}{m^*} - \frac{\lambda}{q+1} \right) \int h(u_n^+)^{q+1}$$

e desde que

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{1}{\frac{Nm}{N-m}} = \frac{1}{m} - \frac{N-m}{Nm} = \frac{N-N+m}{Nm} = \frac{m}{Nm} = \frac{1}{N}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda}{m^*} - \frac{\lambda}{q+1} \right) &= -\lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{\frac{Nm}{N-m}} \right) = -\lambda \left(\frac{Nm - (q+1)(N-m)}{Nm(q+1)} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{(q+1)} \left(\frac{Nm - (q+1)(N-m)}{Nm} \right) \\ &= -\frac{\lambda}{\theta(q+1)}, \end{aligned}$$

segue-se que

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*}I'(u_n)u_n = \frac{1}{N} \|u_n\|^m - \frac{\lambda}{\theta(q+1)} \int h(u_n^+)^{q+1}. \quad (1.6)$$

Notando que $u_n^+ \leq |u_n|$, tem-se

$$\int |(u_n^+)^{q+1}|^{\frac{m^*}{q+1}} = \int |(u_n^+)|^{m^*} \leq \int |u_n|^{m^*} < +\infty,$$

ou seja,

$$(u_n^+)^{q+1} \in L^{\frac{m^*}{q+1}}$$

e como

$$h \in L^\theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\frac{m^*}{q+1}} = 1,$$

segue pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \int h(u_n^+)^{q+1} &\leq \left(\int |h|^\theta \right)^{1/\theta} \left(\int |(u_n^+)^{q+1}|^{m^*/q+1} \right)^{q+1/m^*} \\ &\leq |h|_\theta |u_n|_{m^*}^{q+1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

De (1.6) e (1.7), obtemos

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*} I'(u_n) u_n \geq \frac{1}{N} \|u_n\|^m - \frac{\lambda}{\theta(q+1)} |h|_\theta |u_n|_{m^*}^{q+1}. \quad (1.8)$$

Da imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$, obtemos uma constante $C > 0$ tal que

$$|u_n|_{m^*} \leq C \|u_n\|.$$

Assim,

$$|u_n|_{m^*}^{q+1} \leq C^{q+1} \|u_n\|^{q+1} \quad (1.9)$$

e de (1.8) e (1.9) concluímos que

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*} I'(u_n) u_n \geq \frac{1}{N} \|u_n\|^m - \left(\frac{\lambda C^{q+1}}{\theta(q+1)} |h|_\theta \right) \|u_n\|^{q+1}.$$

Fazendo $C_1 = \left(\frac{\lambda C^{q+1}}{\theta(q+1)} |h|_\theta \right) > 0$ na desigualdade acima obtém-se

$$I(u_n) - \frac{1}{m^*} I'(u_n) u_n \geq \frac{1}{N} \|u_n\|^m - C_1 \|u_n\|^{q+1} \quad (1.10)$$

e combinando (1.3) e (1.10), teremos

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^m - C_1 \|u_n\|^{q+1} \leq M + \|u_n\|. \quad (1.11)$$

Agora suponhamos por contradição que a sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$ não seja limitada, então existe uma subsequência que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ tal que

$$\|u_n\| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Lembrando que $0 < q < m - 1$, então $1 < q + 1 < m$, assim, por (1.11)

$$\frac{1}{N} \leq \frac{M}{\|u_n\|^m} + \frac{1}{\|u_n\|^{m-1}} + \frac{C_1}{\|u_n\|^{m-(q+1)}}.$$

Agora passando ao limite com $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, obtemos

$$\frac{1}{N} \leq 0.$$

O que é contradição, logo $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$. Agora mostraremos que $\{u_n^+\}$ é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I . De fato, desde que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, a seqüência $\{u_n^-\}$ também é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ e sendo $I'(u_n)$ um funcional linear contínuo temos que

$$|I'(u_n)u_n^-| \leq \|I'(u_n)\| \|u_n^-\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty$$

ou seja,

$$I'(u_n)u_n^- \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Por outro lado, da definição de I' temos

$$\begin{aligned} I'(u_n)u_n^- &= \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u_n^- \\ &= - \int |\nabla u_n^+ - \nabla u_n^-|^{m-2} |\nabla u_n^-|^2 \\ &= - \int |\nabla u_n^-|^m = -\|u_n^-\|^m. \end{aligned} \quad (1.13)$$

De (1.12) e (1.13), obtemos

$$\|u_n^-\| \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,m}$$

o que implica

$$\|u_n\| = \|u_n^+\| + o_n(1). \quad (1.14)$$

Além disso,

$$I(u_n) = \frac{1}{m} \int |\nabla u_n|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u_n^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u_n^+)^{m^*},$$

$$I(u_n^+) = \frac{1}{m} \int |\nabla u_n^+|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u_n^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u_n^+)^{m^*}$$

e daí

$$\begin{aligned} |I(u_n) - I(u_n^+)| &= \left| \frac{1}{m} \|u_n\|^m - \frac{1}{m} \|u_n^+\|^m \right| \\ &= \frac{1}{m} \left| \|u_n\|^m - \|u_n^+\|^m \right|. \end{aligned}$$

De onde segue por (1.14) que

$$I(u_n) = I(u_n^+) + o_n(1). \quad (1.15)$$

Note também que $\|u_n - u_n^+\| = \|u_n^-\| \longrightarrow 0$ e daí, da continuidade de I' , concluímos que

$$I'(u_n) = I'(u_n^+) + o_n(1). \quad (1.16)$$

Agora por (1.15) e (1.16) e do fato de $\{u_n\}$ ser uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , concluímos que

$$I(u_n^+) \longrightarrow c \quad \text{e} \quad I'(u_n^+) \longrightarrow 0.$$

Mostrando que $\{u_n^+\}$ é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , o que conclui a prova do lema. ■

Lema 1.2. Seja $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I . Então existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$, tal que

- (a) $u_{n_j}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^N$
- (b) $\nabla u_{n_j}(x) \longrightarrow \nabla u(x) \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^N$
- (c) $u(x) \geq 0 \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^N$.

Demonstração: De fato, sendo $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , então pelo Lema 1.1 tem-se que $\{u_n\}$ é limitada, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $\mathcal{D}^{1,m}$ é reflexivo, temos que, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,m}$$

e usando a imersão compacta $D^{1,m}(B_R) \hookrightarrow L^s(B_R)$ com $m \leq s < m^*$, obtemos

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^s(B_R).$$

Em particular,

$$u_n|_{B_R} \longrightarrow u|_{B_R} \quad \text{em} \quad L^m(B_R) \quad \forall R > 0.$$

Assim, fixado $R = 1$, existe uma subsequência $u_{1n} \subset \{u_n\}$ tal que

$$u_{1n}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad B_1.$$

Usando agora a imersão compacta na sequência u_{1n} e fixando $R = 2$, existe uma subsequência $u_{2n} \subset \{u_{1n}\}$ tal que

$$u_{2n}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad B_2.$$

Seguindo este mesmo raciocínio, fixando $k \in \mathbb{N}$ existe $u_{kn} \subset \{u_n\}$ tal que

$$u_{kn}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad B_k.$$

Agora vamos mostrar que a sequência $\{u_{jj}\}$ é tal que

$$u_{jj}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Considere $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, onde, $S_n = \{x \in B_k : u_{kn}(x) \not\rightarrow u(x)\}$, então $|S| = 0$. Seja $x \in \mathbb{R}^N \setminus S$ e $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{j_0}$, então

$$x \in B_j \quad \text{para} \quad j \geq j_0.$$

Além disso,

$$u_{j_0n}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{em} \quad B_{j_0}.$$

Como $\{u_{jj}(x)\}$ é uma subsequência de $\{u_{j_0n}(x)\}$ para $j \geq j_0$, podemos concluir que

$$u_{jj}(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Denotando ainda tal subsequência por $\{u_n\}$ obteremos:

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

o que prova **(a)**.

Demonstração(b): Pelo Lema 1.1, temos que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ e da reflexividade deste espaço, segue-se que, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$. Seja $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \Phi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^N$ e

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{1/2}(0) \\ 0, & \text{se } x \in B_1^c(0). \end{cases}$$

Para cada $\epsilon > 0$ defina

$$\Psi_\epsilon(x) = \Phi\left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right),$$

onde $\{x_j\}$ é uma sequência de pontos do $\mathbb{R}^N$ que será fixada posteriormente.

Note que se $\frac{x - x_j}{\epsilon} \in B_{1/2}(0)$, então $|x - x_j| < \epsilon/2$ e se $\frac{x - x_j}{\epsilon} \in B_1^c(0)$, tem-se que $|x - x_j| \geq \epsilon$. Assim,

$$\Psi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_{\epsilon/2}(x_j) \\ 0, & \text{se } x \in B_\epsilon^c(x_j). \end{cases}$$

Mostraremos que para cada $\epsilon > 0$ a seqüência $\{\Psi_\epsilon u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$. De fato

$$\begin{aligned} \|\Psi_\epsilon u_n\|^m &= \int |\nabla(\Psi_\epsilon u_n)|^m = \int |\nabla u_n \Psi_\epsilon + \nabla \Psi_\epsilon u_n|^m \\ &\leq 2^m \int |\nabla u_n \Psi_\epsilon|^m + 2^m \int |u_n \nabla \Psi_\epsilon|^m \\ &\leq 2^m \|u_n\|^m + 2^m \int |u_n|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{m^*}{m}$ e $\frac{m^*}{m^*-m}$, temos

$$\|\Psi_\epsilon u_n\|^m \leq 2^m \|u_n\|^m + 2^m \left(\int |u_n|^{m^*} \right)^{m/m^*} \left(\int |\nabla \Psi_\epsilon|^{\frac{m m^*}{m^*-m}} \right)^{(m^*-m)/m}$$

e da imersão contínua $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$, obtemos

$$\|\Psi_\epsilon u_n\|^m \leq C \|u_n\|^m$$

e desde que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, segue-se que $\{\Psi_\epsilon u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$. Assim

$$I'(u_n)(\Psi_\epsilon u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I'(u_n)(\Psi_\epsilon u_n) &= \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla(\Psi_\epsilon u_n) - \lambda \int h u_n^q \Psi_\epsilon u_n - \int u_n^{m^*-1} \Psi_\epsilon u_n \\ &= \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n + \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u_n \Psi_\epsilon \\ &\quad - \lambda \int h u_n^{q+1} \Psi_\epsilon - \int u_n^{m^*} \Psi_\epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n + \int |\nabla u_n|^m \Psi_\epsilon - \lambda \int h u_n^{q+1} \Psi_\epsilon - \int u_n^{m^*} \Psi_\epsilon = o_n(1).$$

Agora passando ao limite na equação acima com $n \rightarrow \infty$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int u_n^{m^*} \Psi_\epsilon + \lambda \int h u_n^{q+1} \Psi_\epsilon - \int |\nabla u_n|^m \Psi_\epsilon \right]. \quad (1.17)$$

Note que $\{u_n^{q+1} \Psi_\epsilon\} \subset L^{m^*/q+1}$, $u_n^{q+1} \Psi_\epsilon \longrightarrow u^{q+1} \Psi_\epsilon$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e desde que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, segue da imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ que existe $C > 0$, tal que

$$\int |u_n^{q+1} \Psi_\epsilon|^{m^*/q+1} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

além disso, $h \in L^\theta$, $\frac{m^*}{q+1} > 1$ e $\frac{q+1}{m^*} + \frac{1}{\theta} = 1$, então do Lema de Brezis-Lieb[Lema C.1]ou [5]

$$\lambda \int h u_n^{q+1} \Psi_\epsilon \longrightarrow \lambda \int h u^{q+1} \Psi_\epsilon. \quad (1.18)$$

Agora afim de mostrar a convergência das integrais $\int u_n^{m^*} \Psi_\epsilon$ e $\int |\nabla u_n|^m \Psi_\epsilon$, faremos algumas observações:

i) Dada uma função $v \in L^1(\Omega)$, definimos uma medida $\hat{\mu} : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$\hat{\mu}(\omega) = \int \omega v dx \quad \forall \omega \in C_0(\Omega),$$

com $\hat{\mu} \in M(\Omega)$, onde $M(\Omega) = \left\{ \mu : C_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \|\mu\| = \sup_{\|u\|_\infty=1} \mu(u); u \in C_0(\Omega) \right\}$,

$C_0(\Omega) = \overline{K(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$ e $K(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{supp}(u) \subset\subset \Omega\}$. Dessa forma, toda função em $L^1(\Omega)$ determina uma medida, assim a menos de identificação $v \cong \hat{\mu}$, ou seja

$$v(\omega) = \hat{\mu}(\omega) = \int \omega v dx.$$

ii) Se $u \in L^p(\Omega)$, então $|u|^p \in L^1(\Omega)$ e assim pela observação acima existe uma medida $\hat{\mu} \in M(\Omega)$ tal que

$$\hat{\mu} \cong v \cong |u|^p.$$

Em particular para $u \in L^{m^*}(\mathbb{R}^N)$ tem-se que $|u|^{m^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e assim $|u|^{m^*} \cong v \in M(\mathbb{R}^N)$.

iii) Se $\{v_n\} \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência limitada, então, a menos de identificação, $\{v_n\} \subset M(\mathbb{R}^N)$ é limitada, assim, a menos de subsequência, existe $v \in M(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad M(\mathbb{R}^N)$$

isto é

$$v_n(\omega) \longrightarrow v(\omega) \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

ou equivalente

$$\int \omega v_n dx \longrightarrow \int \omega v dx \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N).$$

iv) Se v é um funcional linear contínuo sobre $C_0(\mathbb{R}^N)$, então existe uma medida de conjunto dv sobre o $\mathbb{R}^N$ tal que

$$v(\omega) = \int \omega h dx = \int \omega dv \quad \forall h \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Agora apresentaremos uma relação entre o resultado de Lions [Teorema C.8] e o espaço $M(\mathbb{R}^N)$. Considere $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$ uma seqüência limitada com $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$. Defina o funcional $\nu_n : C_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\nu_n(\omega) = \int \omega |u_n|^{m^*} dx \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N),$$

de (ii), $|u_n|^{m^*} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e assim por (i), a menos de identificação, $\nu_n \cong |u_n|^{m^*}$ em $M(\mathbb{R}^N)$, e desde que u_n é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ segue pela imersão contínua $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ que $\{|u_n|^{m^*}\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, a menos de subsequência, $\nu_n \rightharpoonup \hat{\nu}$ em $M(\mathbb{R}^N)$, ou seja

$$\nu_n(\omega) \longrightarrow \hat{\nu}(\omega) \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N)$$

e portanto

$$\int |u_n|^{m^*} \omega dx \longrightarrow \int \hat{\nu} \omega dx \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N). \quad (1.19)$$

Da mesma forma

$$\int |\nabla u_n|^m \omega dx \longrightarrow \int \hat{\mu} \omega dx \quad \forall \omega \in C_0(\mathbb{R}^N). \quad (1.20)$$

Além disso, Lions mostrou que as medidas $\hat{\nu}$ e $\hat{\mu}$ são da seguinte forma

$$\hat{\nu} = |u|^{m^*} + \nu \quad \text{e} \quad \hat{\mu} \geq |\nabla u|^m + \mu, \quad (1.21)$$

onde $\nu = \sum_{j \in J} \nu_j \delta x_j$, $\mu = \sum_{j \in J} \mu_j \delta x_j$ e $\mu_j, \nu_j \in [0, +\infty)$, com J sendo finito ou enumerável.

Logo por (1.19), (1.20), (1.21) e por (iv) temos que

$$\int |u_n|^{m^*} \omega dx \longrightarrow \int |u|^{m^*} \omega dx + \int \omega d\nu \quad (1.22)$$

e

$$\int |\nabla u_n|^m \omega dx \longrightarrow \int |\nabla u|^m \omega dx + \int \omega d\mu. \quad (1.23)$$

Desde que u_n é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ e $\Psi_\epsilon \in C_0(\mathbb{R}^N)$, então, existem medidas ν e μ tais que

$$\int u_n^{m^*} \Psi_\epsilon \longrightarrow \int u^{m^*} \Psi_\epsilon + \int \Psi_\epsilon d\nu \quad (1.24)$$

e

$$\int |\nabla u_n|^m \Psi_\epsilon \longrightarrow \int |\nabla u|^m \Psi_\epsilon + \int \Psi_\epsilon d\mu. \quad (1.25)$$

Assim, por (1.17), (1.18), (1.24) e (1.25) teremos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n &\leq \int u^{m*} \Psi_\epsilon + \int \Psi_\epsilon d\nu + \lambda \int h u^{q+1} \Psi_\epsilon \\ &\quad - \int |\nabla u|^m \Psi_\epsilon - \int \Psi_\epsilon d\mu, \end{aligned}$$

e lembrando que $\text{supp}(\Psi_\epsilon) \subset B_\epsilon(x_j)$, então

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n &\leq \int_{B_\epsilon(x_j)} u^{m*} \Psi_\epsilon + \int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\nu + \lambda \int_{B_\epsilon(x_j)} h u^{q+1} \Psi_\epsilon \\ &\quad - \int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla u|^m \Psi_\epsilon - \int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\mu. \end{aligned}$$

Note que

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} u^{m*} \Psi_\epsilon = \int u^{m*} \Psi_\epsilon \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x)$$

e além disso se $\epsilon \rightarrow 0$

$$u^{m*} \Psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x) \longrightarrow 0 \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|u^{m*} \Psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x)| \leq |u|^{m*} \in L^1.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} u^{m*} \Psi_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0.$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente conclui-se que

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla u|^m \Psi_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0,$$

$$\lambda \int_{B_\epsilon(x_j)} h u^q \Psi_\epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \epsilon \longrightarrow 0$$

e portanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n \right] \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\nu - \int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\mu \right]. \quad (1.26)$$

Afirmção 1.1. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n \right] = 0.$

De fato, note que da desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{m}{m-1}$ e m , obtemos

$$\left| \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n \right| \leq \left(\int |\nabla u_n|^m \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int |\nabla \Psi_\epsilon|^m |u_n|^m \right)^{\frac{1}{m}}$$

e desde que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, $\Psi_\epsilon \equiv 1$ se $x \in B_{\epsilon/2}(x_j)$ e $\text{supp}(\Psi_\epsilon) \subset B_\epsilon(x_j)$ temos que

$$\begin{aligned} \left(\int |\nabla u_n|^m \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int |\nabla \Psi_\epsilon|^m |u_n|^m \right)^{\frac{1}{m}} &\leq \|u_n\|^{m-1} \left(\int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \Psi_\epsilon|^m |u_n|^m \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq C \left(\int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u_n|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m \right)^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

onde $C \geq \|u_n\|^{m-1}$, ou seja,

$$\left| \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon u_n \right| \leq C \left(\int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u_n|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (1.27)$$

Da imersão contínua $\mathcal{D}^{1,m}(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^m(\Omega)$ obtemos, a menos de subsequência,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L_{loc}^m(\Omega).$$

Portanto, a menos de subsequência, $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ q.t.p em Ω e existe $g \in L_{loc}^m(\Omega)$, tal que $|u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω , onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Assim, fazendo $f_n(x) = |u_n(x)|^m |\nabla \Psi_\epsilon(x)|^m$, concluímos que

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{q.t.p em} \quad B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j),$$

onde $f(x) = |u(x)|^m |\nabla \Psi_\epsilon(x)|^m$. Além disso,

$$|f_n(x)| = |u_n(x)|^m |\nabla \Psi_\epsilon(x)|^m \leq g(x)^m |\nabla \Psi_\epsilon(x)|^m \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u_n|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m = \int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m. \quad (1.28)$$

Portanto de (1.27) e (1.28) podemos concluir que

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} u_n \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon \right| \leq C \left(\int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u|^m |\nabla \Psi_\epsilon|^m \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (1.29)$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{N}{N-m}$ e $\frac{N}{m}$ no segundo membro da desigualdade (1.29) teremos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} u_n \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon \right| \leq C \left(\int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |u|^{m^*} \right)^{\frac{N-m}{N}} \left(\int_{B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j)} |\nabla \Psi_\epsilon|^N \right)^{\frac{m}{N}}$$

e desde que $B_\epsilon(x_j) \setminus B_{\epsilon/2}(x_j) \subset B_\epsilon(x_j)$ segue-se que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} u_n \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon \right| \leq C \left(\int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^{m^*} \right)^{\frac{N-m}{N}} \left(\int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \Psi_\epsilon|^N \right)^{\frac{m}{N}}. \quad (1.30)$$

Note que pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial \Psi_\epsilon(x)}{\partial x_j} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \left(\frac{x - x_j}{\epsilon} \right)$$

e fazendo $y = \frac{x - x_j}{\epsilon}$, implica $dx = \epsilon dy$, além disso, se $x \in B_\epsilon(x_j)$ tem-se $y \in B_1(0)$, assim

$$\left(\int_{B_\epsilon(x_j)} |\nabla \Psi_\epsilon|^N \right)^{\frac{m}{N}} = \left(\int_{B_1(0)} |\nabla \Phi|^N \right)^{\frac{m}{N}}$$

de onde obtemos por (1.30) que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} u_n \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon \right| \leq C_1 \left(\int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^{m^*} \right)^{\frac{N-m}{N}}. \quad (1.31)$$

Agora, considere a sequência $h_\epsilon(x) = |u(x)|^{m^*} \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x)$, note que se $\epsilon \rightarrow 0$

$$h_\epsilon(x) \longrightarrow 0 \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e além disso,

$$|h_\epsilon(x)| = |u(x)|^{m^*} |\chi_{B_\epsilon(x_j)}(x)| \leq |u(x)|^{m^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{B_\epsilon(x_j)} |u|^{m^*} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int |u|^{m^*} \chi_{B_\epsilon(x_j)} \right] = 0. \quad (1.32)$$

Portanto decorre de (1.31) e (1.32) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} u_n \nabla u_n \nabla \Psi_\epsilon \right| \right] = 0 \quad (1.33)$$

o que prova a afirmação, assim segue de (1.26) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\nu - \int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\mu \right] \geq 0. \quad (1.34)$$

Observe ainda que

$$\Psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x) \longrightarrow \chi(x_j)$$

e

$$|\Psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x)| \leq 1.$$

Sendo as medidas de Radon finitas, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\nu = \int \Psi_\epsilon(x) \chi_{B_\epsilon(x_j)}(x) d\nu \longrightarrow \int \chi(x_j) d\nu = \int_{\{x_j\}} d\nu \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Do mesmo modo tem-se que

$$\int_{B_\epsilon(x_j)} \Psi_\epsilon d\mu \longrightarrow \int_{\{x_j\}} d\mu \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Logo, por (1.34), concluímos que

$$\int_{\{x_j\}} d\nu \geq \int_{\{x_j\}} d\mu$$

ou seja

$$\nu(\{x_j\}) \geq \mu(\{x_j\}). \quad (1.35)$$

Além disso,

$$\nu(\{x_j\}) = \int_{\{x_j\}} d\nu = \int_{\{x_j\}} \Psi_\epsilon d\nu = \nu_j \Psi_\epsilon(x_j) = \nu_j,$$

e do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [Teorema C.8], temos

$$\mu_j(\{x_j\}) \geq S \nu_j^{m/m^*}(\{x_j\}),$$

e por (1.35)

$$\nu_j \geq S \nu_j^{m/m^*}$$

e portanto

$$\nu_j \geq S^{N/m}$$

implicando que $\nu_j \not\rightarrow 0$ e sendo $\sum_{j \in J} \nu_j^{m/m^*} < \infty$ concluímos que J é finito ou vazio. De fato, se J não fosse finito, então $\sum_{j \in J} \nu_j^{m/m^*}$ seria convergente e $\nu_j \rightarrow 0$, o que seria uma contradição.

Agora estudaremos os seguintes casos

(a') O conjunto J é finito, ou seja, existe uma quantidade finita de índices j tal que $\nu_j > 0$

(b') $\nu_j = 0$, para todo $j \in J$.

Caso (a')

Seja $\epsilon_0 > 0$ tal que $B_{1/2\epsilon_0}(0) \supset \{x_1, x_2, \dots, x_R\}$ e $B_{\epsilon_0}(x_j) \cap B_{\epsilon_0}(x_i) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, onde R é a quantidade de índices j tais que $\nu_j > 0$. Defina $\varphi_\epsilon(x) = \Phi(\epsilon x) - \sum_{i=1}^R \Phi\left(\frac{x - x_j}{\epsilon}\right)$ onde, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, dessa forma teremos

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \bigcup_{j=1}^R B_{\epsilon/2}(x_j) \\ 0, & \text{se } x \in A_\epsilon = B_{1/2\epsilon}(0) \setminus \bigcup_{j=1}^R B_\epsilon(x_j), \end{cases}$$

isso de fato ocorre, pois se $x \in \bigcup_{j=1}^R B_{\epsilon/2}(x_j)$ então $x \in B_{1/2\epsilon}(0)$.

Agora fixando $\rho, \epsilon > 0$ com $0 < \epsilon < \rho < \epsilon_0$, defina

$$G_n(x) = (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{m-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)(x)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} G_n(x) &= |\nabla u_n(x)|^m - |\nabla u_n(x)|^{m-2} \nabla u_n(x) \nabla u(x) - |\nabla u(x)|^{m-2} \nabla u(x) \nabla u_n(x) \\ &+ |\nabla u(x)|^m \end{aligned}$$

considerando que $A_\rho \subset A_\epsilon$ então

$$\int_{A_\rho} G_n = \int_{A_\epsilon} G_n \varphi_\epsilon$$

e daí fazendo $x = \nabla u_n$ e $y = \nabla u$ na primeira desigualdade do Lema A.1 [ver Apêndice A], obtemos

$$\langle |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{m-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle \geq C_m |\nabla u_n - \nabla u|^m$$

de onde concluímos que $G_n \geq 0$, assim

$$\begin{aligned} \int_{A_\rho} G_n &= \int_{A_\epsilon} G_n \varphi_\epsilon \leq \int G_n \varphi_\epsilon \\ &= \int |\nabla u_n|^m \varphi_\epsilon - \int |\nabla u_n|^{m-2} \varphi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - \int |\nabla u|^{m-2} \varphi_\epsilon \nabla u_n \nabla u \\ &+ \int |\nabla u|^m \varphi_\epsilon = \Lambda. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \int (|\nabla u_n|^m \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon) \\
&- \int (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^q u \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*-1} u \varphi_\epsilon) \\
&- \int (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u \varphi_\epsilon - |\nabla u|^m \varphi_\epsilon) \\
&+ \int (\lambda h(u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon + (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^q u \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*-1} u \varphi_\epsilon).
\end{aligned}$$

Considere

$$I_1 = \int (|\nabla u_n|^m \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon),$$

$$I_2 = \int (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^q u \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*-1} u \varphi_\epsilon),$$

$$I_3 = \int (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla u \varphi_\epsilon - |\nabla u|^m \varphi_\epsilon)$$

e

$$I_4 = \int (\lambda h(u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon + (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^q u \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*-1} u \varphi_\epsilon).$$

Vamos agora estimar cada I_j com $j = 1, \dots, 4$.

1º) caso: Note que

$$I'(u_n) u_n \varphi_\epsilon = \int (|\nabla u_n|^m \varphi_\epsilon - \lambda h(u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon - (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon) + \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon u_n.$$

ou seja

$$I_1 = I'(u_n) u_n \varphi_\epsilon - \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon u_n.$$

Desde que $\{u_n \varphi_\epsilon\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$, temos que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_1 = - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon u_n \right]. \quad (1.36)$$

Passando ao limite com $\epsilon \rightarrow 0$ em (1.36), obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_1 \right] = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon u_n \right] = 0.$$

Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = o_\epsilon(1). \quad (1.37)$$

2º) caso: Observando que

$$I_2 = I'(u_n)u\varphi_\epsilon - \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla \varphi_\epsilon u$$

e procedendo de maneira análoga ao que fizemos anteriormente teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = o_\epsilon(1). \quad (1.38)$$

3º) Caso: Considere $F(w) = \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla w \varphi_\epsilon$, com $w \in \mathcal{D}^{1,m}$, note que F é um funcional linear contínuo e desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$, então

$$\int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla u_n \varphi_\epsilon \longrightarrow \int |\nabla u|^m \varphi_\epsilon$$

e daí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = 0. \quad (1.39)$$

4º) Caso: Da mesma forma que provamos que $\lambda \int h u_n^{q+1} \Psi_\epsilon \longrightarrow \lambda \int h u^{q+1} \Psi_\epsilon$, mostra-se que

$$\lambda \int (u_n^+)^{q+1} \varphi_\epsilon \longrightarrow \lambda \int h u^{q+1} \varphi_\epsilon, \quad (1.40)$$

$$\lambda \int (u_n^+)^q u \varphi_\epsilon \longrightarrow \lambda \int h u^{q+1} \varphi_\epsilon \quad \text{e} \quad (1.41)$$

$$\lambda \int (u_n^+)^{m^*-1} u \varphi_\epsilon \longrightarrow \lambda \int h u^{m^*} \varphi_\epsilon. \quad (1.42)$$

Agora aplicando novamente o Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [Teorema C.8], mostra-se que

$$\int (u_n^+)^{m^*} \varphi_\epsilon \longrightarrow \int u^{m^*} \varphi_\epsilon. \quad (1.43)$$

De (1.40), (1.41), (1.42) e (1.43), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

Assim,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \int_{A_\rho} G_n \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} o_\epsilon(1) = 0$$

e concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_\rho} C_m |\nabla u_n - \nabla u|^m = 0$$

implicando que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^m(A_\rho).$$

Assim a menos de subsequência

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad A_\rho,$$

e desde que ρ é arbitrário, então usando argumento diagonal concluimos que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Caso (b') $\nu = 0, \forall j \in J$.

Nesse caso φ_ϵ se reduz a

$$\varphi_\epsilon = \Phi(\epsilon x)$$

e

$$A_\rho = B_{1/2\rho}(0)$$

e repetindo os mesmos argumentos aplicados no caso (a') obtemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

O que prova a parte (b) do teorema.

Para provar a parte (c) é suficiente provar que $u_n^+(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$. De fato,

$$\begin{aligned} |u_n^+(x) - u(x)| &= |u_n(x) + u_n^-(x) - u(x)| \\ &\leq |u_n(x) - u(x)| + |u_n^-(x)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

logo,

$$u_n^+(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e portanto

$$u(x) \geq 0 \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

■

Lema 1.3. Se $\{u_n\}$ é uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I com $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$, então $I'(u) = 0$, e existe uma constante $M > 0$ dependendo de $N, m, q, |h|_{L^\theta}$ e θ , tal que

$$I(u) \geq -M\lambda^\theta.$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_c$, para o funcional I , com $u_n \rightharpoonup u$, então do Lema 1.2, podemos obter uma subsequência, que ainda denotaremos por u_n , satisfazendo

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (1.45)$$

e

$$u_n(x), u(x) \geq 0 \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (1.46)$$

Pelo Lema 1.1, tem-se que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, ou seja, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.47)$$

e do fato de $\{u_n\}$ ser uma seqüência $(PS)_c$, para o funcional I , segue-se que

$$|I'(u_n)v| \leq \|I'(u_n)\| \|v\| \longrightarrow 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}$$

de onde concluímos que

$$I'(u_n)v = \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla v - \lambda \int h u_n^q v - \int u_n^{m^*-1} v = o_n(1). \quad (1.48)$$

Considere a seqüência

$$g_n(x) = |\nabla u_n(x)|^{m-2} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \quad (1.49)$$

segue de (1.45) e (1.47) que

$$g_n(x) \longrightarrow g(x) = |\nabla u(x)|^{m-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (1.50)$$

e

$$\int |g_n(x)|^{m/m-1} = \int |\nabla u_n|^m = \|u_n\|^m \leq C_1^m \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desde que $m \geq 2$ então $m/m-1 > 1$ e como $\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} = 1$, segue do Lema de Brezis-Lieb [Lema C.1] ou [5] que

$$\int g_n(x)v \longrightarrow \int g(x)v \quad \forall v \in L^m. \quad (1.51)$$

Note que se $v \in \mathcal{D}^{1,m}$, tem-se que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^m$, então segue de (1.50) e (1.51) que

$$\int |\nabla u_n(x)|^{m-2} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \longrightarrow \int |\nabla u(x)|^{m-2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}$$

o que implica

$$\int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla v \longrightarrow \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}. \quad (1.52)$$

Considere agora a seqüência

$$f_n(x) = u_n(x)^q$$

temos por (1.44) que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, onde $f(x) = u(x)^q$, além disso da imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ existe uma constante C_2 tal que

$$|u_n|_{m^*} \leq C_2 \|u_n\|$$

assim

$$\int |f_n(x)|^{\frac{m^*}{q}} = |u_n|_{m^*}^{m^*} \leq C_2^{m^*} \|u_n\|^{m^*} \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $K = (C_1 C_2)^{m^*} > 0$. Note que $h \in L^\theta$, $u_n^q \in L^{\frac{m^*}{q}}$, $\frac{1}{\theta} + \frac{q}{m^*} + \frac{1}{m^*} = 1$ e $\frac{m^*}{q} > 1$, assim do Lema de Brezis-Lieb [Lema C.1] ou [5]

$$\int h u_n^q v \longrightarrow \int h u^q v \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}. \quad (1.53)$$

Seja agora a seqüência

$$\varphi_n(x) = u_n(x)^{m^*-1}$$

segue novamente por (1.44) e pela imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ que

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x) = u(x)^{m^*-1} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\int |\varphi_n(x)|^{\frac{m^*}{m^*-1}} = \int |u_n(x)|^{m^*} = |u_n|_{m^*}^{m^*} \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que $u_n \in L^{m^*}$, $\frac{m^*-1}{m^*} + \frac{1}{m^*} = 1$ e $\frac{m^*}{m^*-1} > 1$. Assim, do Lema de Brezis-Lieb [Lema C.1] ou [5]

$$\int u_n^{m^*-1} v \longrightarrow \int u^{m^*-1} v \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}. \quad (1.54)$$

De (1.52), (1.53), (1.54) e da unicidade do limite, obtemos

$$\int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v - \lambda \int h u^q v - \int u^{m^*-1} v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}, \quad (1.55)$$

de onde concluimos que

$$I'(u)v = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}$$

conseqüentemente,

$$I'(u) = 0 \quad (1.56)$$

Agora fazendo $v = u$ em (1.55) segue que

$$\|u\|^m = \lambda \int h u^{q+1} + \int u^{m^*},$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{m} \int |\nabla u|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h u^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int u^{m^*} \\ &= \frac{1}{m} \left[\lambda \int h u^{q+1} + \int u^{m^*} \right] - \frac{\lambda}{q+1} \int h u^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int u^{m^*} \\ &= \lambda \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) \int h u^{q+1} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} \right) \int u^{m^*}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

E desde de que, $0 < q < m-1 \Rightarrow 1 < q+1 < m \Rightarrow \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) < 0$ e sendo $\lambda > 0$ segue-se que

$$\lambda \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) < 0. \quad (1.58)$$

Além disso, $h \in L^\theta$, $u^{q+1} \in L^{\frac{m^*}{q+1}}$ e $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\frac{m^*}{q+1}} = 1$. Então, usando a desigualdade de Hölder, tem-se que

$$\int h u^{q+1} \leq |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1}$$

e por (1.58) teremos

$$\lambda \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) \int h(u^+)^{q+1} \geq \lambda \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1}. \quad (1.59)$$

Usando agora (1.57) e (1.59) obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \lambda \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} \right) \int u^{m^*} \\ &\geq -\frac{\lambda}{q+1} |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1} + \frac{1}{N} |u|_{m^*}^{m^*}. \end{aligned}$$

Note que para $\epsilon > 0$, temos

$$\lambda |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1} = \epsilon |u|_{m^*}^{q+1} \frac{\lambda}{\epsilon} |h|_\theta$$

e daí usando a desigualdade de Young com os expoentes θ e $\frac{m^*}{q+1}$ teremos

$$\lambda |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1} \leq \frac{(q+1)\epsilon^{m^*/q+1}}{m^*} |u|_{m^*}^{m^*} + \frac{\lambda^\theta}{\theta\epsilon^\theta} |h|_\theta^\theta$$

e portanto

$$\begin{aligned} I(u) &\geq -\frac{|h|_\theta^\theta}{(q+1)\theta\epsilon^\theta} \lambda^\theta - \frac{\epsilon^{m^*/q+1}}{m^*} |u|_{m^*}^{m^*} + \frac{1}{N} |u|_{m^*}^{m^*} \\ &= -\frac{|h|_\theta^\theta}{(q+1)\theta\epsilon^\theta} \lambda^\theta + \left(\frac{1}{N} - \frac{\epsilon^{m^*/q+1}}{m^*} \right) |u|_{m^*}^{m^*}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = \left(\frac{m^*}{N}\right)^{q+1/m^*}$, teremos

$$I(u) \geq -\frac{|h|_\theta^\theta}{\theta(q+1)\left(\frac{m^*}{N}\right)^{\theta(q+1)/m^*}} \lambda^\theta,$$

fazendo $M = \frac{|h|_\theta^\theta}{\theta(q+1)\left(\frac{m^*}{N}\right)^{\theta(q+1)/m^*}} > 0$, temos o resultado. ■

Lema 1.4. Seja $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$ uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I com

$$c < \frac{1}{N} S^{N/m} - M \lambda^\theta,$$

com S a melhor constante de Sobolev para a imersão $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ e $M > 0$ a constante obtida no Lema 1.3. Então, existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\}$ que converge forte em $\mathcal{D}^{1,m}$.

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ uma seqüência $(PS)_c$, então pelo Lema 1.1, $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$ e como $\mathcal{D}^{1,m}$ é um espaço de Banach reflexivo, segue-se que, a menos de subseqüência, $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$. Assim, do Lema 1.2, existe uma subseqüência que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ e uma função $u \in D^{1,m}$ tal que

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então, do Teorema de Brezis-Lieb [Teorema C.10], obtemos

$$\|u_n\|^m = \|u\|^m + \|u_n - u\|^m + o_n(1) \tag{1.60}$$

e

$$|u_n|_{m^*}^{m^*} = |u|_{m^*}^{m^*} + |u_n - u|_{m^*}^{m^*} + o_n(1). \quad (1.61)$$

Considere $w_n = u_n - u$, então decorre de (1.60) e (1.61) que

$$\|w_n\|^m = \|u_n\|^m - \|u\|^m + o_n(1) \quad (1.62)$$

e

$$|w_n|_{m^*}^{m^*} = |u_n|_{m^*}^{m^*} - |u|_{m^*}^{m^*} + o_n(1). \quad (1.63)$$

Além disso, $h \in L^\theta$, $u_n^{q+1} \in L^{\frac{m^*}{q+1}}$, $u_n^{q+1} \rightarrow u^{q+1}$ *q.t.p* em $\mathbb{R}^N$ e $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\frac{m^*}{q+1}} = 1$. Note também que

$$0 < q < m - 1 \Rightarrow (q + 1)(N - m) < m(N - m) < Nm$$

ou seja

$$(q + 1) < \frac{Nm}{(N - m)} = m^* \Rightarrow \frac{m^*}{q + 1} > 1.$$

Por outro lado, decorre da limitação de $\{u_n\}$ e da imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$, que existe $C > 0$, tal que

$$\int |u_n^{q+1}|^{\frac{m^*}{q+1}} = |u_n|_{m^*}^{m^*} \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto do Lema de Brezis-Lieb [Lema C.1] ou [5]

$$\int hu_n^{q+1} \rightarrow \int hu^{q+1} \quad \text{em } \mathbb{R},$$

de onde segue que

$$\int hu_n^{q+1} - \int hu^{q+1} = o_n(1). \quad (1.64)$$

Agora, notando que

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^m - \lambda \int hu_n^{q+1} - \int u_n^{m^*} \quad (1.65)$$

e

$$I'(u)u = \|u\|^m - \lambda \int hu^{q+1} - \int u^{m^*}. \quad (1.66)$$

Obteremos da subtração de (1.65) e (1.66) que

$$\begin{aligned} I'(u_n)u_n - I'(u)u &= \|u_n\|^m - \|u\|^m - \lambda \left[\int hu_n^{q+1} - \int hu^{q+1} \right] \\ &\quad - \left[|u_n|_{m^*}^{m^*} - |u|_{m^*}^{m^*} \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

logo, usando (1.62), (1.63), (1.64) e o fato de $\{u_n\}$ ser uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , segue-se por (1.67) que

$$\|w_n\|^m = |w_n|_{m^*}^{m^*} + o_n(1). \quad (1.68)$$

Por outro lado,

$$I(u_n) = \frac{1}{m} \|u_n\|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h u_n^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int u_n^{m^*}$$

e

$$I(u) = \frac{1}{m} \|u\|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h u^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int u^{m^*},$$

assim,

$$\begin{aligned} I(u_n) - I(u) &= \frac{1}{m} [\|u_n\|^m - \|u\|^m] - \frac{\lambda}{q+1} \left[\int h u_n^{q+1} - \int h u^{q+1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{m^*} [|u_n|_{m^*}^{m^*} - |u|_{m^*}^{m^*}], \end{aligned}$$

de onde segue novamente por (1.62), (1.63), (1.65) e do fato de $\{u_n\}$ ser uma seqüência $(PS)_c$ para o funcional I , que

$$\frac{1}{m} \|w_n\|^m - \frac{1}{m^*} |w_n|_{m^*}^{m^*} = c - I(u) + o_n(1). \quad (1.69)$$

Relembrando que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{D}^{1,m}$, então a seqüência $\{\|u_n\|\}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e sendo $w_n = u_n - u$, tem-se que $\{\|w_n\|\}$ também é limitada em $\mathbb{R}$. Assim, do Teorema de Bolzano Weierstrass, existe $l \geq 0$ tal que a menos de subsequência

$$\|w_n\|^m \rightarrow l, \quad \text{em } \mathbb{R} \quad (1.70)$$

e assim, concluímos por (1.68) e (1.70) que

$$|w_n|_{m^*}^{m^*} \rightarrow l, \quad \text{em } \mathbb{R}. \quad (1.71)$$

Observando que

$$S = \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u|^m}{\left(\int |u|^{m^*} \right)^{m/m^*}} \mid u \in D^{1,m}, u \neq 0 \right\}$$

segue que

$$\int |\nabla w_n|^m \geq S \left(\int |w_n|^{m^*} \right)^{m/m^*}$$

ou seja,

$$\|w_n\|^m \geq S \left(|w_n|_{m^*}^{m^*} \right)^{m/m^*} \quad (1.72)$$

e deduzimos por (1.70), (1.71) e (1.72) que

$$l \geq S l^{m/m^*}. \quad (1.73)$$

Agora afirmamos que $l = 0$. Realmente, se $l > 0$, então por (1.73)

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{l}{l^{m/m^*}} \\ &\leq l^{\frac{m^*-m}{m^*}} \end{aligned}$$

e observando que

$$\frac{m^* - m}{m^*} = \frac{\frac{Nm}{(N-m)} - m}{\frac{Nm}{(N-m)}} = \frac{\frac{Nm - Nm + m^2}{(N-m)}}{\frac{Nm}{(N-m)}} = \frac{m^2}{Nm} = \frac{m}{N}$$

então,

$$S \leq l^{m/N},$$

logo,

$$l \geq S^{N/m}. \quad (1.74)$$

Assim, por (1.69), (1.70) e (1.71) teremos

$$\frac{1}{m}l - \frac{1}{m^*}l = c - I(u),$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^*} \right) l = c - I(u),$$

ou ainda,

$$\frac{1}{N}l = c - I(u). \quad (1.75)$$

De onde obtemos por (1.74), (1.75) e pelo Lema 1.3 que

$$c \geq \frac{1}{N}S^{N/m} - M\lambda^\theta,$$

contrariando a hipótese. Assim $l = 0$ e concluímos que

$$\|w_n\| \longrightarrow 0 \iff \|u_n - u\| \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Portanto

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,m},$$

concluindo a prova do lema. ■

1.2 Existência da primeira solução via Princípio Variacional de Ekeland

Teorema 1.1. Existe $\lambda_1^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda_1^*)$, existe $u_1 \in \mathcal{D}^{1,m}$ solução fraca do problema (P) com $I(u_1) < 0$.

Demonstração: Desde que o funcional $I : \mathcal{D}^{1,m} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{m} \int |\nabla u|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u^+)^{m^*}$$

é contínuo, temos que I é semicontínuo inferiormente.

Agora mostraremos que o funcional I é limitado inferiormente em uma bola fechada. Realmente, sendo $u^+ \leq |u|$, segue-se que

$$I(u) \geq \frac{1}{m} \|u\|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h |u|^{q+1} - \frac{1}{m^*} |u|_{m^*}^{m^*}. \quad (1.76)$$

Além disso, pela desigualdade de Hölder

$$\int h |u|^{q+1} \leq \left(\int |h|^\theta \right)^{1/\theta} \left\{ \left(\int |u|^{m^*} \right)^{1/m^*} \right\}^{q+1} = |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1}. \quad (1.77)$$

Assim por (1.76) e (1.77), tem-se

$$I(u) \geq \frac{1}{m} \|u\|^m - \frac{\lambda}{q+1} |h|_\theta |u|_{m^*}^{q+1} - \frac{1}{m^*} |u|_{m^*}^{m^*}. \quad (1.78)$$

Da imersão contínua de Sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ obtemos uma constante positiva C_1 tal que

$$|u|_{m^*}^{q+1} \leq C_1^{q+1} \|u\|^{q+1} \quad (1.79)$$

e

$$|u|_{m^*}^{m^*} \leq C_1^{m^*} \|u\|^{m^*}. \quad (1.80)$$

Assim por (1.78), (1.79) e (1.80) conclui-se que

$$I(u) \geq \frac{1}{m} \|u\|^m - \frac{\lambda C_1^{q+1}}{q+1} |h|_\theta \|u\|^{q+1} - \frac{C_2^{m^*}}{m^*} \|u\|^{m^*}. \quad (1.81)$$

Fazendo $C_2 = C_1^{q+1} |h|_\theta$, $C_3 = C_1^{m^*}$ e fixando $\rho = \|u\|$, temos que

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{m} \rho^m - \frac{C_3}{m^*} \rho^{m^*} \right) - \frac{\lambda C_2}{q+1} \rho^{q+1}. \quad (1.82)$$

Considerando $\rho < \left(\frac{m^*}{2C_3m}\right)^{1/m^*-m}$, temos que

$$\left(\frac{1}{m}\rho^m - \frac{C_3}{m^*}\rho^{m^*}\right) > \frac{\rho^m}{2m}$$

de onde obteremos por (1.82) que

$$I(u) \geq \frac{\rho^m}{2m} - \frac{\lambda C_2}{q+1}\rho^{q+1}.$$

Note que $\frac{\rho^m}{2m} - \frac{\lambda C_2}{q+1}\rho^{q+1} > 0$ se, e somente se

$$\lambda < \frac{(q+1)}{2C_2m}\rho^{m-(q+1)}.$$

Logo, podemos escolher $\lambda_1^* = \frac{(q+1)}{4C_2m}\rho^{m-(q+1)}$ e então obteremos

$$I(u) \geq \frac{\rho^m}{4m} = \gamma > 0 \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_1^*) \quad \text{com} \quad \|u\| = \rho.$$

Isso mostra que I é limitado inferiormente em $\partial B_\rho(0)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} -I(u) \leq |I(u)| &= \left| \frac{1}{m}\|u\|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u^+)^{m^*} \right| \\ &\leq \frac{1}{m}\|u\|^m + \frac{\lambda}{q+1} \int h|u|^{q+1} + \frac{1}{m^*}|u|_{m^*}^{m^*}. \end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de sobolev $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$ teremos

$$-I(u) \leq \frac{1}{m}\|u\|^m + \frac{\lambda C_1^{q+1}|h|_\theta}{q+1}\|u\|^{q+1} + \frac{C_1^{m^*}}{m^*}\|u\|^{m^*}.$$

Assim se $\|u\| \leq \rho$, então

$$-I(u) \leq \frac{1}{m}\rho^m + \frac{\lambda C_1^{q+1}|h|_\theta}{q+1}\rho^{q+1} + \frac{C_1^{m^*}}{m^*}\rho^{m^*} = K.$$

e assim

$$I(u) \geq -K,$$

onde $K = K(m, \rho, \lambda, q, m^*, |h|_\theta)$, mostrando que I é limitado inferiormente, para toda $u \in \overline{B_\rho(0)}$. Então, pelo Postulado de Dedekind, existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\gamma_0 = \inf \left\{ I(u) \mid u \in \overline{B_\rho(0)} \right\}.$$

Afirmamos que $\gamma_0 < 0$. De fato, fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi > 0$, mostraremos que existe $t_0 > 0$ tal que

$$I(t_0\varphi) < 0 \quad \text{e} \quad \|t_0\varphi\| \leq \rho.$$

Além disso, decorre da definição do funcional I , que

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{1}{m} \|t\varphi\|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h t^{q+1} \varphi^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int t^{m^*} \varphi^{m^*} \\ &= \frac{t^m}{m} \|\varphi\|^m - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int h \varphi^{q+1} - \frac{t^{m^*}}{m^*} \int \varphi^{m^*} \\ &\leq \frac{t^m}{m} \|\varphi\|^m - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int h \varphi^{q+1}. \end{aligned}$$

Como queremos $I(t\varphi) < 0$ e $\|t\varphi\| \leq \rho$, então basta escolher

$$t_0 < \min \left\{ \left(\frac{m\lambda}{(q+1)\|\varphi\|^m} \int h \varphi^{q+1} \right)^{1/m-(q+1)}, \frac{\rho}{\|\varphi\|} \right\}$$

assim, $I(t_0\varphi) < 0$ e portanto

$$\gamma_0 \leq I(t_0\varphi) < 0.$$

Considere o espaço $X = \overline{B_\rho(0)}$, munido com a métrica $d(u, v) = \|u - v\| \forall u, v \in X$. Note que X é um espaço métrico completo, e o funcional $I : \overline{B_\rho(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente em X . Além disso, sejam $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ e $\lambda = 1 > 0$ dados, desde que γ_0 é o ínfimo, então existe $u \in \overline{B_\rho(0)}$, tal que

$$I(u) \leq \gamma_0 + \frac{1}{n}. \quad (1.83)$$

Assim, pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema B.1) ou [8], para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in \overline{B_\rho(0)}$, tal que

$$(a) \quad I(u_n) \leq I(u)$$

$$(b) \quad d(u_n, u) \leq 1$$

$$(c) \quad I(u_n) < I(w) + \frac{1}{n} d(u_n, w), \forall u_n, w \in \overline{B_\rho(0)} \text{ com } u_n \neq w.$$

Assim de (a) e (1.83), obtemos

$$I(u_n) \leq \gamma_0 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.84)$$

Passando ao limite em (1.84) com $n \rightarrow +\infty$, concluímos que

$$I(u_n) \rightarrow \gamma_0 < 0 \quad (1.85)$$

Agora mostraremos que $u_n \in \text{int}(B_\rho(0))$. De fato, se $u_n \in \partial B_\rho(0)$ então, $\|u_n\| = \rho, \forall n \in \mathbb{N}$ e assim

$$I(u_n) \geq \gamma > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e daí

$$\gamma_0 \geq \gamma > 0,$$

portanto $u_n \in \text{int}(B_\rho(0))$.

Seja agora $\Phi \in \mathcal{D}^{1,m} \setminus \{0\}$ com $\|\Phi\| \leq 1$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado existe $\delta_0 > 0$ dependendo de n , tal que

$$w = u_n + \delta\Phi \in B_\rho(0) \quad \forall \delta \in (0, \delta_0).$$

Assim por (c)

$$I(u_n) < I(u_n + \delta\Phi) + \frac{1}{n} \|\delta\Phi\| \leq I(u_n + \delta\Phi) + \frac{\delta}{n},$$

ou seja

$$-\frac{1}{n} < \frac{I(u_n + \delta\Phi) - I(u_n)}{\delta}$$

logo,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} -\frac{1}{n} \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{I(u_n + \delta\Phi) - I(u_n)}{\delta}$$

e portanto

$$-\frac{1}{n} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{I(u_n + \delta\Phi) - I(u_n)}{\delta} = I'(u_n)\Phi \quad \forall \Phi \in \overline{B_1(0)}. \quad (1.86)$$

Além disso, temos que $-\Phi \in \overline{B_1(0)}$, então

$$-\frac{1}{n} \leq I'(u_n)(-\Phi) \quad \forall \Phi \in \overline{B_1(0)}$$

o que implica

$$-\frac{1}{n} \leq -I'(u_n)(\Phi) \quad \forall \Phi \in \overline{B_\rho(0)}$$

daí,

$$I'(u_n)(\Phi) \leq \frac{1}{n} \quad \forall \Phi \in \overline{B_1(0)}. \quad (1.87)$$

Decorre de (1.86) e (1.87) que

$$|I'(u_n)(\Phi)| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\sup_{\|\Phi\| \leq 1} |I'(u_n)(\Phi)| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

mostrando que

$$\|I'(u_n)\| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de onde concluimos que

$$I'(u_n) \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow +\infty, \quad (1.88)$$

portanto de (1.85) e (1.88), conclui-se que $\{u_n\}$ é uma seqüência $(PS)_{\gamma_0}$.

Agora considere $\lambda_1^* = \left(\frac{1}{MN} S^{N/m} \right)^{1/\theta} > 0$, assim

$$\gamma_0 < 0 < \frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_1^*).$$

Então, do Lema 1.4, existe uma subsequência que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ e uma função $u_1 \in \mathcal{D}^{1,m}$ tal que

$$u_n \longrightarrow u_1 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,m}. \quad (1.89)$$

Assim, por (1.89) e pela continuidade de I e I' , obtemos:

$$I(u_n) \longrightarrow I(u_1) \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \quad (1.90)$$

e

$$I'(u_n) \longrightarrow I'(u_1) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \quad (1.91)$$

De (1.85), (1.87), (1.89) e (1.90) da unicidade do limite, segue-se que

$$I'(u_1) = 0 \quad \text{e} \quad I(u_1) = \gamma_0 < 0.$$

Mostrando que u_1 é ponto crítico do funcional I e portanto solução fraca do problema (P) , o que completa a prova do teorema. ■

Capítulo 2

Existência da segunda solução via Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo mostraremos a existência de uma segunda solução para o problema (P) , para isso usaremos o Teorema do Passo da Montanha em uma versão devido à Willem [18].

Teorema 2.1. Existe $\lambda_2^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 < \lambda < \lambda_2^*$, existe $u_2 \in \mathcal{D}^{1,m}$ solução fraca do problema (P) com $I(u_2) > 0$.

Demonstração: Mostraremos que o funcional I , satisfaz as hipóteses (H_1) e (H_2) do Teorema B.2 [ver Apêndice B]. De fato, por definição $I(0) = 0$ e procedendo de maneira análoga ao que fizemos no Capítulo 1, obtemos números positivos $\delta_1 = \frac{(q+1)}{4C_2m} \rho^{m-(q+1)}$, ρ e α , tais que

$$I(u) \geq \frac{1}{4m} \rho^m = \alpha > 0, \quad \text{com} \quad \|u\| = \rho \quad \forall \lambda \in (0, \delta_1),$$

o que prova (H_1) .

Agora fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, com $\varphi > 0$ temos que

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{1}{m} \int |\nabla t\varphi|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h t^{q+1} \varphi^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int t^{m^*} \varphi^{m^*} \\ &\leq \frac{t^m}{m} \|\varphi\|^m - \frac{t^{m^*}}{m^*} \int |\varphi|^{m^*}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

e observando que $m < m^*$, então passando ao limite em (2.1) com $t \rightarrow +\infty$, tem-se que

$$I(t\varphi) \longrightarrow -\infty.$$

Logo, existe $e = t_0\varphi$, tal que $\|e\| > \rho$ e

$$I(e) < 0,$$

e portanto I satisfaz (H_2) . Então, pelo Teorema do Passo da Montanha [Teorema B.2] ou [2], para cada $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, existe $u_n \in \mathcal{D}^{1,m}$ tal que

$$(i) \quad \gamma_1 - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq \gamma_1 + \frac{2}{n}$$

$$(ii) \quad \|I'(u_n)\| < \frac{2}{n}$$

onde

$$0 < \gamma_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; \mathcal{D}^{1,m}) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Assim passando ao limite em (i) e (ii) com $n \rightarrow +\infty$, obteremos

$$I(u_n) \longrightarrow \gamma_1 \quad \text{e} \quad I'(u_n) \longrightarrow 0. \quad (2.2)$$

Portanto a seqüência $\{u_n\}$ é $(PS)_{\gamma_1}$.

Afirmção 2.1. Existe $\lambda_2^* > 0$ tal que, para a constante M obtida no Lema 1.3, tem-se que

$$0 < \gamma_1 < \frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_2^*).$$

Assumindo essa afirmação por um momento, então pelo Lema 1.4 existe uma subseqüência que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ e uma função $u_2 \in \mathcal{D}^{1,m}$ tal que

$$u_n \rightarrow u_2. \quad (2.3)$$

Agora usando a continuidade de I e I' , segue-se de (2.3) que

$$I(u_n) \rightarrow I(u_2) \quad (2.4)$$

e

$$I'(u_n) \rightarrow I'(u_2). \quad (2.5)$$

Portanto de (2.2), (2.4), (2.5) e da unicidade do limite

$$I'(u_2) = 0 \quad \text{e} \quad I(u_2) = \gamma_1 > 0.$$

Mostrando que u_2 é ponto crítico do funcional I e portanto solução fraca do problema (P) . ■

Prova da Afirmção 2.1: Considere $\varphi \in \mathcal{D}^{1,m}$ a ser fixada posteriormente. Temos que

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^m}{m} \|\varphi\|^m - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int h\varphi^{q+1}.$$

Desde que $q + 1 < m$, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$I(t\varphi) < 0, \quad \forall t \in (0, t_0).$$

Escolhendo agora $\delta_2 = \left(\frac{1}{MN}S^{N/m}\right)^{1/\theta} > 0$, temos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{N}S^{N/m} - M\lambda^\theta \right) > 0 \quad \forall \lambda \in (0, \delta_2).$$

Daí,

$$I(t\varphi) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N}S^{N/m} - M\lambda^\theta \right) \quad \forall t \in (0, t_0).$$

Logo

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} I(t\varphi) < \frac{1}{N}S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \delta_2).$$

Note agora que definindo $g(t) = \frac{t^m}{m} - \frac{t^{m^*}}{m^*}$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0, g(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty$. Assim g tem um ponto de máximo, além disso, $g'(t) = t^{m-1} - t^{m^*-1}$ e $g'(t) = 0$ se, e somente se, $t=1$. Daí

$$g(t) \leq \max_{t \geq 0} g(t) = g(1) = \frac{1}{N} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

Além disso,

$$I(t\varphi) = \frac{t^m}{m} \|\varphi\|^m - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int h\varphi^{q+1} - \frac{t^{m^*}}{m^*} \int \varphi^{m^*}. \quad (2.7)$$

Agora, para $x \in \mathbb{R}^N$, considere a função

$$\varphi(x) = \frac{\left[N \left(\frac{N-m}{m-1} \right)^{m-1} \right]^{(N-m)/m^2}}{\left[1 + |x|^{m/(m-1)} \right]^{\frac{N-m}{m}}}.$$

Então, usando argumentos encontrados em [9] ou [17], temos

$$\|\varphi\|^m = |\varphi|_{m^*}^{m^*} = S^{N/m}. \quad (2.8)$$

Logo, por (2.6), (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \left(\frac{t^m}{m} - \frac{t^{m^*}}{m^*} \right) S^{N/m} - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int h\varphi^{q+1} \\ &\leq \frac{1}{N} S^{N/m} - \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int h\varphi^{q+1} \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Assim escolhendo $\delta_3 = \left(\frac{t_0^{q+1}}{M(q+1)} \int h\varphi^{q+1} \right)^{1/(\theta-1)}$ teremos para todo $t \geq t_0$

$$I(t\varphi) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \right) \quad \forall \lambda \in (0, \delta_3).$$

Portanto,

$$\sup_{t \geq t_0} I(t\varphi) < \frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \delta_3).$$

Considerando $\lambda_2^* = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, obteremos

$$\sup_{t \geq 0} I(t\varphi) < \frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_2^*).$$

Consequentemente, do Lema A.2

$$0 < \gamma_1 < \frac{1}{N} S^{N/m} - M\lambda^\theta \quad \forall \lambda \in (0, \lambda_2^*).$$

O que prova a afirmação.

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis e Resultados Importantes

Neste apêndice provaremos que o funcional I associado ao problema (P) é de classe $C^1(D^{1,m}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$, para isso precisaremos enunciar definições e algumas propriedades sobre funcionais diferenciáveis.

A.1 Funcionais Diferenciáveis

Definição A.1. Considere um funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço normado. O funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in X$, se existir $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{|I(u + \varphi) - I(u) - L(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Observações:

(a) Dizemos que o funcional $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ se a derivada a Fréchet I' é contínua sobre X .

(b) A derivada de Gateaux é dada por

$$I'(u)\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[I(u + t\varphi) - I(u)]}{t}.$$

(c) Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Proposição A.1. Seja X um espaço de Banach e I um funcional definido em X , se I tem derivada de Gateaux contínua em X , então, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Demonstração: Dados $u_0, h \in X$ e I' a derivada de Gateaux de I , defina $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$F(u) = I(u) - \langle I'(u_0), u - u_0 \rangle.$$

Pelo Teorema do Valor Médio

$$\begin{aligned} |F(u) - F(u_0)| &= |I(u) - \langle I'(u_0), u - u_0 \rangle - I(u_0)| \\ &\leq \sup_{0 \leq \theta < 1} \|I'(u_0 + \theta(u - u_0)) - I'(u_0)\| \|u - u_0\|. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Como I tem derivada de Gateaux contínua em X , então, dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$ temos

$$\|I'(u_0 + h) - I'(u_0)\| \leq \epsilon.$$

Segue-se de (A.1) que

$$\begin{aligned} \|I(u_0 + h) - I(u_0) - \langle I'(u_0), h \rangle\| &\leq \sup_{0 \leq \theta < 1} \|I'(u_0 + \theta(h)) - I'(u_0)\| \|h\| \\ &\leq \epsilon \|h\|, \end{aligned}$$

donde segue que I é diferenciável a Fréchet e esta diferencial é contínua. ■

A partir de agora, nosso objetivo é mostrar que o funcional I definido em $D^{1,m}$ por

$$I(u) = \frac{1}{m} \int |\nabla u|^m - \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1} - \frac{1}{m^*} \int (u^+)^{m^*}$$

é de classe $C^1(D^{1,m}, \mathbb{R})$.

Para tal, consideremos os funcionais $J_1, J_2, J_3 : D^{1,m} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidos por

$$J_1(u) = \frac{1}{m} \int |\nabla u|^m, \quad J_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1} \quad \text{e} \quad J_3(u) = \frac{1}{m^*} \int (u^+)^{m^*}.$$

Proposição A.2. O funcional $I(u) = J_1 - J_2 - J_3 \in C^1(D^{1,m}; \mathbb{R})$.

Demonstração: Pela Proposição A.1 é suficiente provar que as derivadas de Gateaux de J_1, J_2 e J_3 existem e são contínuas no dual de $D^{1,m}$. Inicialmente mostraremos que o funcional $I(u) = J_1(u) - J_2(u) - J_3(u)$ está bem definido. De fato,

(i) $J_1(u) = \frac{1}{m} \int |\nabla u|^m = \frac{1}{m} \|u\|^m < +\infty.$

(ii) Considere o funcional $J_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1}.$

Por hipótese $h \in L^\theta$, $\theta = \frac{Nm}{Nm - (q+1)(N-m)}$, $u \in L^{m^*}$ e $m^* = \frac{Nm}{N-m}$, então,

$$\int |(u^+)^{q+1}|^{\frac{m^*}{q+1}} = \int |u^+|^{m^*} \leq \int |u|^{m^*} < +\infty,$$

ou seja

$$(u^+)^{q+1} \in L^{\frac{m^*}{q+1}}.$$

Além disso, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\frac{m^*}{q+1}} = 1$ e assim, pela desigualdade de Hölder, $h(u^+)^{q+1} \in L^1$ e portanto,

$$J_2(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int h(u^+)^{q+1} < +\infty.$$

(iii) Desde que $u \in L^{m^*}$ e $u^+ \leq |u|$, então

$$J_3(u) = \frac{1}{m^*} \int (u^+)^{m^*} \leq \frac{1}{m^*} \int |u|^{m^*} = \frac{1}{m^*} |u|_{m^*}^{m^*} < +\infty.$$

De (i), (ii) e (iii), conclui-se que o funcional I está bem definido.

Afirmção A.1. O funcionário $J_1 \in C^1(D^{1,m}, \mathbb{R})$.

Demonstração: Existência da derivada de Gateaux de J_1 .

Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(s) = \frac{1}{m} |\nabla u + s \nabla v|^m$ com $t, s \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$ e $u, v \in D^{1,m}$. Então, temos que

$$(a) \quad f'(s) = |\nabla u + s \nabla v|^{m-1} t \nabla v = t |\nabla u + s \nabla v|^{m-2} (\nabla u + s \nabla v) \nabla v$$

$$(b) \quad f(1) = \frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m$$

$$(c) \quad f(0) = \frac{1}{m} |\nabla u|^m.$$

Sendo f diferenciável em $(0, 1)$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que,

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda)(1 - 0),$$

ou seja,

$$\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m = t |\nabla u + \lambda t \nabla v|^{m-2} (\nabla u + \lambda t \nabla v) \nabla v.$$

De onde obtemos

$$\frac{\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m}{t} = |\nabla u + \lambda t \nabla v|^{m-2} (\nabla u + \lambda t \nabla v) \nabla v.$$

Note que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m}{t} = |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v,$$

e

$$\left| \frac{\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m}{t} \right| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{m-1} |\nabla v|.$$

Além disso,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{m-1} \in L^{\frac{m}{m-1}}, \quad |\nabla v| \in L^m \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{\frac{m}{m-1}} = 1,$$

assim, da desigualdade de Hölder

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{m-1} |\nabla v| \in L^1.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m}{t} = \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v.$$

Segue que

$$\begin{aligned} J'_1(u) v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_1(u + tv) - J_1(u)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{\frac{1}{m} |\nabla u + t \nabla v|^m - \frac{1}{m} |\nabla u|^m}{t} = \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v. \end{aligned}$$

Mostrando que J_1 é Gateaux Diferenciável com derivada,

$$J'_1(u) v = \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v, \quad \forall v \in D^{1,m}.$$

Continuidade da derivada de Gateaux.

Considere $\{u_n\} \subset D^{1,m}$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $D^{1,m}$. Assim,

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u.$$

Então, pelo Teorema C.7 existe uma subsequência de $\{u_n\}$, que ainda denotaremos por $\{u_n\}$ e uma função $g \in L^m$ tais que

$$\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x), \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|\nabla u_n(x)| \leq g(x), \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Agora seja $v \in D^{1,m}$, assim:

$$\begin{aligned} |(J'_1(u_n)v - J'_1(u)v)| &= \left| \int |\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n \nabla v - \int |\nabla u|^{m-2} \nabla u \nabla v \right| \\ &= \left| \int (|\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{m-2} \nabla u) \nabla v \right| \\ &\leq \int ||\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{m-2} \nabla u| |\nabla v|. \end{aligned}$$

Definamos

$$f_n = ||\nabla u_n|^{m-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{m-2} \nabla u| \leq |\nabla u_n|^{m-1} + |\nabla u|^{m-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$||\nabla u_n|^{m-1} + |\nabla u|^{m-1}|^{\frac{m}{m-1}} \leq 2^{\frac{m}{m-1}} (|\nabla u_n|^m + |\nabla u|^m)$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \int |f_n|^{\frac{m}{m-1}} &\leq \int ||\nabla u_n|^{m-1} + |\nabla u|^{m-1}|^{\frac{m}{m-1}} \\ &\leq \int 2^{\frac{m}{m-1}} (|\nabla u_n|^m + |\nabla u|^m) < \infty \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_n \in L^{\frac{m}{m-1}}.$$

E desde que $|\nabla v| \in L^m$ e $\frac{m-1}{m} + \frac{1}{m} = 1$. Então, da desigualdade de Hölder,

$$\int f_n |\nabla v| \leq |f_n|_{\frac{m}{m-1}} \|v\|,$$

e assim,

$$|(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| \leq |f_n|_{\frac{m}{m-1}} \|v\|.$$

De onde segue que

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |(J'_1(u_n) - J'_1(u))v| \leq |f_n|_{\frac{m}{m-1}}$$

o que implica

$$\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\| \leq |f_n|_{\frac{m}{m-1}}.$$

Agora resta mostrar que $f_n \rightarrow 0$ em $L^{\frac{m}{m-1}}$. De fato, desde que $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ em L^m , então, a menos de subsequência, $\nabla u_n(x) \rightarrow \nabla u(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e existe $g \in L^m$, tal que, $|\nabla u_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

e

$$f_n \leq g(x)^{m-1} + |\nabla u(x)|^{m-1} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Além disso, temos

$$|g(x)^{m-1} + |\nabla u|^{m-1}|^{\frac{m}{m-1}} \leq 2^{\frac{m}{m-1}} \left((g(x)^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} + (|\nabla u|^{m-1})^{\frac{m}{m-1}} \right) = 2^{\frac{m}{m-1}} [g(x)^m + |\nabla u|^m]$$

e desde que

$$2^{\frac{m}{m-1}} [g(x)^m + |\nabla u|^m] \in L^1 \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Então,

$$\int |f_n(x)|^{\frac{m}{m-1}} \leq \int \left| 2^{\frac{m}{m-1}} [g(x)^m + |\nabla u|^m] \right| < \infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x)|^{\frac{m}{m-1}} = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)|^{\frac{m}{m-1}} = 0$$

ou seja,

$$|f_n|_{\frac{m}{m-1}} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Logo,

$$\|J'_1(u_n) - J'_1(u)\| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto,

$$J'_1(u_n) \longrightarrow J'_1(u),$$

mostrando que a derivada de Gateaux J'_1 é contínua no dual de $\mathcal{D}^{1,m}$, assim, pela Proposição A.1, $J_1 \in C^1(D^{1,m}, \mathbb{R})$, o que conclui a prova da afirmação. ■

Afirmção A.2. $J_2 \in C^1(D^{1,m}; \mathbb{R})$.

Demonstração: Existência da Derivada de Gateaux de J_2 .

Dada $u, v \in D^{1,m}$, então $u, v \in L^{m^*}$, além disso, sem perder a generalidade, podemos supor que $u \geq 0$, assim $u^+ = u$. Considere $t, s \in \mathbb{R}$, tal que $0 < |t| < 1$, e a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(s) = \frac{\lambda}{q+1} h(u + stv)^{q+1}.$$

Então:

$$(a) \quad f'(s) = \lambda h(u + stv)^q tv$$

$$(b) \quad f(1) = \frac{\lambda}{q+1} h(u + tv)^{q+1}$$

$$(b) \quad f(0) = \frac{\lambda}{q+1} hu^{q+1}.$$

Do Teorema do Valor Médio, existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\alpha)$$

ou seja,

$$\frac{\lambda}{q+1} h(u + th)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1} hu^{q+1} = \lambda h(u + \alpha tv)^q tv.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\lambda}{q+1} h(u + th)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1} hu^{q+1} \right]}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda h(u + \alpha tv)^q v \\ &= \lambda hu^q v. \end{aligned}$$

Note que

$$|\lambda h(u + \alpha tv)^q v| \leq |\lambda h(u + v)^q v| = \lambda |h| |u + v|^q |v|.$$

Além disso, $h \in L^\theta$, $|u + v|^q \in L^{m^*/q}$, $|v| \in L^{m^*}$ e $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{m^*} + \frac{q}{m^*} = \frac{1}{\theta} + \frac{q+1}{m^*} = 1$. Logo, da desigualdade de Hölder,

$$|h|, |u + v|^q |v| \in L^1.$$

E portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_2(u + tv) - J_2(u)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{\frac{\lambda}{q+1} h(u + th)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1} hu^{q+1}}{t} \\ &= \lambda \int hu^q v, \end{aligned}$$

ou seja, J_2 é Gateaux Diferenciável com derivada,

$$J'_2(u)v = \lambda \int hu^q v \quad \forall v \in D^{1,m}.$$

Continuidade da derivada de Gateaux.

É suficiente provar que $J'_2(u)$ é contínua no dual de $\mathcal{D}^{1,m}$. De fato, seja $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$, tal que,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,m},$$

assim, pela definição de $\mathcal{D}^{1,m}$, tem-se que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^{m^*}$$

e portanto pelo Teorema C.7, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e existe $g \in L^{m^*}$ tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e assim, para $h \in L^\theta$ e $v \in \mathcal{D}^{1,m}$ obtemos

$$h(x)u_n^q(x)v(x) \longrightarrow h(x)u^q(x)v(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|h(x)u_n^q(x)v(x)| \leq |h(x)| |g(x)|^q |v(x)| \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Além disso, $|g|^q \in L^{\frac{m^*}{q}}$ e $\frac{1}{\theta} + \frac{q}{m^*} + \frac{1}{m^*} = 1$, logo, da desigualdade de Hölder, $|h| |g|^q |v| \in L^1$. E portanto, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int h u_n^q v \longrightarrow \int h u^q v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \int h u_n^q v - \int h u^q v \right| < \frac{\epsilon}{\lambda} \quad \forall n \geq n_0. \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))v| &\leq \lambda \left| \int h u_n^q v - \int h u^q v \right| \\ &< \lambda \frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{v \in \mathcal{D}^{1,m}} |(J'_2(u_n) - J'_2(u))v| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\|J'_2(u_n) - J'_2(u)\|_{(\mathcal{D}^{1,m})'} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

mostrando que $J'_2(u)$ é contínua no dual de $\mathcal{D}^{1,m}$. Logo, pela Proposição A.1, o funcional $J'_2(u) \in C^1(\mathcal{D}^{1,m}, \mathbb{R})$, provando a afirmação. $\blacksquare$

Afirmação A.3. $J_3 \in C^1(\mathcal{D}^{1,m}; \mathbb{R})$.

Demonstração: Existência da derivada de Gateaux de J_3 .

Novamente sem perder a generalidade podemos supor $u \geq 0$, ou seja $u^+ = u$. Assim considere $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$, e função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall u, v \in \mathcal{D}^{1,m}$, f está definida por

$$f(s) = \frac{1}{m^*}(u + stv)^{m^*}.$$

Então,

(a) $f'(s) = (u + stv)^{m^*-1}tv$

(b) $f(0) = \frac{1}{m^*}u^{m^*}$

(c) $f(1) = \frac{1}{m^*}(u + tv)^{m^*}.$

Do Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(\lambda)(1 - 0),$$

ou seja,

$$\frac{\frac{1}{m^*}(u + tv)^{m^*} - \frac{1}{m^*}u^{m^*}}{t} = (u + stv)^{m^*-1}v.$$

Assim passando ao limite na expressão acima com $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m^*}(u + tv)^{m^*} - \frac{1}{m^*}u^{m^*}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} (u + stv)^{m^*-1}v \\ &= u^{m^*-1}v. \end{aligned}$$

Observe que

$$|(u + stv)^{m^*-1}v| = |(u + stv)^{m^*-1}| |v| \leq (|u| + |v|)^{m^*-1} |v|.$$

Além disso, $|v| \in L^{m^*}$, $(|u| + |v|)^{m^*-1} \in L^{m^*/m^*-1}$ e $\frac{1}{m^*} + \frac{1}{m^*/m^*-1} = 1$, assim, da desigualdade de Hölder

$$(|u| + |v|)^{m^*-1} |v| \in L^1,$$

e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{\frac{1}{m^*}(u + tv)^{m^*} - \frac{1}{m^*}u^{m^*}}{t} = \int u^{m^*-1}v.$$

Note que o primeiro membro da igualdade acima é justamente a derivada de Gateaux de J_3 . Portanto

$$J'_3(u)v = \int u^{m^*-1}v \quad \forall v \in \mathcal{D}^{1,m}.$$

Continuidade da derivada de Gateaux de J_3

Mostraremos que $J'_3(u)$ é contínua no dual de $\mathcal{D}^{1,m}$. De fato, seja $\{u_n\} \subset \mathcal{D}^{1,m}$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$, assim $u_n \rightarrow u$ em L^{m^*} , então pelo Teorema D.7 ver [apêndice D] existe uma função $g \in L^{m^*}$ tal que, a menos de subsequência,

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad (\text{A.3})$$

e

$$|u_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \quad (\text{A.4})$$

Decorre de (A.3) e (A.4) que

$$u_n^{m^*-1}(x) \rightarrow u^{m^*-1}(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n^{m^*-1}(x)| \leq |g(x)|^{m^*-1} \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Assim se $v \in \mathcal{D}^{1,m}$, tem-se que

$$u_n^{m^*-1}(x)v(x) \rightarrow u^{m^*-1}(x)v(x) \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n^{m^*-1}(x)v(x)| \leq |g(x)|^{m^*-1} |v(x)| \quad q.t.p \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Observe que $|v| \in L^{m^*}$, $|g|^{m^*-1} \in L^{m^*/m^*-1}$ e $\frac{1}{m^*} + \frac{1}{m^*/m^*-1} = 1$, assim, da desigualdade de Hölder $|g|^{m^*-1} |v| \in L^1$ e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int u_n^{m^*-1}v \rightarrow \int u^{m^*-1}v \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Portanto dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \int u_n^{m^*-1}v - \int u^{m^*-1}v \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))v| &= |J'_3(u_n)v - J'_3(u)v| \\ &= \left| \int u_n^{m^*-1}v - \int u^{m^*-1}v \right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{v \in \mathcal{D}^{1,m}} |(J'_3(u_n) - J'_3(u))v| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

e portanto

$$\|J'_3(u_n) - J'_3(u)\|_{(\mathcal{D}^{1,m})'} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

mostrando que $J'_3(u)$ é contínua no dual de $\mathcal{D}^{1,m}$. Assim, pela Proposição A.1, o funcional $J_3 \in C^1(\mathcal{D}^{1,m}, \mathbb{R})$ o que encerra a demonstração da Proposição A.2. ■

Lema A.1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^N$. Então

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq C_p |x - y|^p \quad \text{se } p \geq 2$$

ou,

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \frac{C_p |x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} \quad \text{se } 1 < p < 2.$$

Demonstração: Por homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Além disso, escolhendo uma base conveniente no $\mathbb{R}^N$ podemos assumir

$$x = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad , \quad y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

(i) Caso $1 < p < 2$. Note que a desigualdade é equivalente a

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right\} \frac{(1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} \geq (p-1)(1 - y_1) \quad \text{se } 0 \leq y_1 \leq 1,$$

ou,

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p-1)(1 - y_1) \quad \text{se } y_1 \leq 0,$$

então,

$$(p-1) \left\{ (1 - y_1)^2 + y_2^2 \right\} \frac{(1 + y_1 + y_2)^{(2-p)/2}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq p-1.$$

(ii) Caso $p \geq 2$. A desigualdade é equivalente a

$$\frac{[1 - y_1(y_1^2 + y_2^2)^{(p-2)/2}](1 - y_1) + y_2^2(y_1^2 + y_2^2)^{(p-2)/2}}{((1 - y_1)^2 + y_2^2)^{p/2}} \geq C.$$

Denotando $t = |y|/|x|$ e $s = \langle x, y \rangle / (|x||y|)$ então, temos que mostrar que a função

$$f(t, s) = \frac{1 - (t^{p-1} + t)s + t^p}{(1 - 2ts + t^2)^{p/2}}$$

é limitada inferiormente. Um cálculo direto mostra que fixando t , $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ se

$$1 - (t^{p-1} + t)s + t^p = \frac{t^{p-2} + 1}{p}(1 - 2ts + t^2),$$

temos,

$$f(t, s) = \frac{t^{p-2} + 1}{p(1 - 2ts + t^2)^{(p-2/2)}} \geq \frac{1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{t^{p-2} + 1}{(t + 1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p},$$

o que conclui a prova do lema. ■

Lema A.2. *Se c é o nível do Passo da Montanha do funcional I , então*

$$c \leq \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,m} \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} I(tu) = c^*.$$

Demonstração: Fixe $u \in \mathcal{D}^{1,m} \setminus \{0\}$ e considere a função $\Theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Theta(t) = I(tu)$. Assim, existe $t \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno e $\alpha > 0$, tal que $\Theta(t) = I(tu) \geq \alpha > 0$, Teorema 2.1 [ver capítulo 2]. Além disso, $\Theta(t) \rightarrow -\infty$, quando $t \rightarrow +\infty$. Logo, existe $t_u > 0$, tal que $\Theta(t_u) = \max_{t \geq 0} \Theta(t) = \max_{t \geq 0} I(tu)$. Seja $\tilde{t} > 0$ e $\bar{u} \in \mathcal{D}^{1,m} \setminus \{0\}$ verificando $I(\tilde{t}\bar{u}) < 0$. Considere

$$\bar{\gamma}(t) = (\tilde{t}\bar{u})t.$$

Temos $\bar{\gamma}(0) = 0$ e $I(\bar{\gamma}(1)) < 0$ e assim $\bar{\gamma} \in \Gamma$. Além disso,

$$\max_{t \in [0,1]} I(\bar{\gamma}(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} I(\bar{\gamma}(t)) \leq \sup_{t \geq 0} I(tu)$$

e portanto,

$$c \leq c^*.$$

e o Lema está provado. ■

Apêndice B

Princípio Variacional de Ekeland e Teorema do Passo da Montanha

Neste apêndice, enunciaremos e demonstraremos o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha, esses resultados foram usados para obter soluções do problema (P) no Capítulo 1 e no Capítulo 2, respectivamente.

Teorema B.1. (Princípio Variacional de Ekeland) Sejam X um espaço métrico completo e $\Phi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Sejam $\epsilon > 0, \lambda > 0$ dados e seja $u \in X$ tal que

$$\Phi(u) \leq \inf_X \Phi + \epsilon.$$

Então existe $v_\epsilon \in X$ tal que

(a) $\Phi(v_\epsilon) \leq \Phi(u)$

(b) $d(u, v_\epsilon) \leq \frac{1}{\lambda}$

(c) Para cada $w \neq v_\epsilon \in X, \Phi(v_\epsilon) < \Phi(w) + \epsilon\lambda d(v_\epsilon, w)$.

Demonstração: Na demonstração vamos considerar $\lambda = 1$. Para o caso geral é suficiente considerar a métrica λd , visto que se d é uma métrica, então λd também será. Considere a relação em X definida da seguinte forma:

$$w \prec v \iff \Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v).$$

Agora provaremos que $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X , ou seja, $\prec$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. De fato;

(i) $\prec$ é reflexiva.

Seja $w \in X$, então,

$$\Phi(w) \leq \Phi(w) - \epsilon d(w, w) \implies \Phi(w) = \Phi(w) \iff w \prec w.$$

Provando que $\prec$ é reflexiva.

(ii) $\prec$ é anti-simétrica.

Sejam $w, v \in X$, tais que $w \prec v$ e $v \prec w$, então

$$\Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v)$$

e

$$\Phi(v) \leq \Phi(w) - \epsilon d(v, w).$$

Segue das duas expressões anteriores que

$$2\epsilon d(v, w) \leq 0 \implies d(v, w) = 0 \iff w = v.$$

Provando que $\prec$ é anti-simétrica.

(iii) $\prec$ é transitiva.

Sejam w, v e $u \in X$ tais que $w \prec v$ e $v \prec u$, então

$$\Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v)$$

e

$$\Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u).$$

De onde concluímos que

$$\Phi(w) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u) - \epsilon d(w, v),$$

o que implica

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\leq \Phi(u) - \epsilon d(w, u) + \epsilon d(w, v) - \epsilon d(w, v) \\ &\leq \Phi(u) - \epsilon d(w, u) \iff w \prec u. \end{aligned}$$

O que prova que $\prec$ é transitiva. Portanto de (i), (ii) e (iii) conclui-se que $\prec$ é uma relação de ordem parcial em X .

Definamos agora uma seqüência (A_n) de subconjuntos de X como se segue; comecemos com

$$u_0 = u.$$

E seja:

$A_0 = \{w \in X : w \prec u_0\}$, com $u_1 \in A_0$ tal que

$$\Phi(u_1) \leq \inf_{A_0} \Phi + \frac{1}{1}.$$

$A_1 = \{w \in X : w \prec u_1\}$, com $u_2 \in A_1$ tal que

$$\Phi(u_2) \leq \inf_{A_1} \Phi + \frac{1}{2}.$$

$A_2 = \{w \in X : w \prec u_2\}$, com $u_3 \in A_2$ tal que

$$\Phi(u_3) \leq \inf_{A_2} \Phi + \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo assim, teremos indutivamente

$A_n = \{w \in X : w \prec u_n\}$, com $u_{n+1} \in A_n$ tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \Phi + \frac{1}{n+1}.$$

Afirmamos que $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato.

Seja w um elemento arbitrário em A_{n+1} , então, $w \prec u_{n+1}$ e desde que $u_{n+1} \in A_n$ segue que $u_{n+1} \prec u_n$ e por transitividade concluímos que $w \prec u_n$ e assim $w \in A_n$. O que prova a afirmação.

Agora provaremos que A_n é fechado.

Seja $\{w_k\} \subset A_n$ tal que $w_k \longrightarrow w \in X$. Segue que

$$w_k \prec u_n \iff \Phi(w_k) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w_k, u_n).$$

Como Φ é semicontínua inferiormente, então,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \Phi(w_k) = \Phi(w).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} [\Phi(u_n) - \epsilon d(w_k, u_n)] \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \Phi(u_n) - \liminf_{k \rightarrow +\infty} \epsilon d(w_k, u_n) \\ &\leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w, u_n). \end{aligned}$$

Esta última desigualdade nos mostra que

$$w \prec u_n \iff w \in A_n.$$

Portanto A_n é fechado.

Notando que $\text{diam} A_n = \sup_{w,v \in A_n} d(w,v)$, vamos mostrar que $\text{diam} A_n \longrightarrow 0$.

Seja $w \in A_{n+1}$ então, $w \prec u_{n+1} \prec u_n$ e portanto,

$$\epsilon d(w, u_{n+1}) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w)$$

e desde que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \Phi + \frac{1}{n+1}$$

e

$$-\Phi(w) \leq -\inf_{A_n} \Phi,$$

então,

$$\epsilon d(w, u_{n+1}) \leq \inf_{A_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{A_n} \Phi = \frac{1}{n+1},$$

ou seja,

$$d(w, u_{n+1}) \leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}.$$

Agora sejam $w, v \in A_{n+1}$, então,

$$d(w, v) \leq d(w, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)},$$

segue que

$$\sup_{w,v \in A_{n+1}} d(w, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)}$$

e daí

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{w,v \in A_{n+1}} d(w, v) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\epsilon(n+1)}.$$

De onde concluímos que

$$\text{diam} A_{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Afirmamos que o único ponto de intersecção dos A_n satisfaz (a), (b) e (c). Realmente. Seja $\bigcap_n A_n = \{v_\epsilon\}$. Assim, $v_\epsilon \in A_0$, logo pela definição de A_0 , tem-se que

$$v_\epsilon \prec u_0 = u \iff \Phi(v_\epsilon) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v_\epsilon, u)$$

e portanto

$$\Phi(v_\epsilon) \leq \Phi(u),$$

provando (a). Por outro lado,

$$\begin{aligned} d(u, v_\epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon}(\Phi(u) - \Phi(v_\epsilon)) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon}(\inf_X \Phi + \epsilon - \inf_X \Phi) = 1, \end{aligned}$$

provando (b).

Além disso, se $w \neq u_\epsilon$, tem-se que w não se relaciona com u_ϵ , pois caso contrário, teríamos $w \in \bigcap_n A_n$. Logo

$$\Phi(w) > \Phi(v_\epsilon) - \epsilon d(v_\epsilon, w),$$

provando (c). ■

Agora, afim de demonstrar o Teorema do Passo da Montanha, enunciaremos e demonstraremos o Lema de Deformação.

Lema B.1. (Lema de Deformação) Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, com

$$(\forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])) : \|I'(u)\| \geq 2\epsilon.$$

Então existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

$$(i) \quad \eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$

$$(ii) \quad \eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon},$$

onde,

$$I^d := I^{-1}([-\infty, d]).$$

Demonstração: Definamos

$$A := I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$

$$B := I^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]),$$

$$\psi := \text{dist}(u, X \setminus A)(\text{dist}(u, X \setminus A) + \text{dist}(u, B))^{-1},$$

de forma que ψ é contínua e localmente Lipschitziana, $\psi = 1$ em B e $\psi = 0$ em $X \setminus A$. Definamos também a função contínua e localmente Lipschitziana campo vetorial

$$\begin{aligned} f(u) &:= -\psi(u)\|\nabla I(u)\|^{-2} \nabla I(u), \quad u \in A, \\ &:= 0, \quad u \in X \setminus A. \end{aligned}$$

Note que $\|f(u)\| \leq (2\epsilon)^{-1}$ em X . Além disso, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sigma(t, u) &= f(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) &= u,\end{aligned}$$

possui uma única solução definida em $\mathbb{R}$. Além disso, σ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. Considere a função η definida em X por $\eta(u) := \sigma(2\epsilon, u)$ dessa forma η satisfaz **(i)**. Desde que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I(\sigma(t, u)) &= (\nabla I(\sigma(t, u)), \frac{d}{dt}\sigma(t, u)) \\ &= (\nabla I(\sigma(t, u)), f(\sigma(t, u))) \\ &= -\psi(\sigma(t, u))\end{aligned}\tag{B.1}$$

e portanto $I(\sigma(t, u))$ é não-crescente. Seja $u \in I^{c+\epsilon}$. Se existe $t \in [0, 2\epsilon]$ tal que $I(\sigma(t, u)) < c - \epsilon$, então $I(\sigma(2\epsilon, u)) < c - \epsilon$ e **(ii)** é satisfeita. Se

$$\sigma(t, u) \in I^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]), \quad \forall t \in [0, 2\epsilon],$$

obtemos de (B.1),

$$\begin{aligned}I(\sigma(2\epsilon, u)) &= I(u) + \int_0^{2\epsilon} \frac{d}{dt}I(\sigma(t, u))dt \\ &= I(u) - \int_0^{2\epsilon} \psi(\sigma(t, u))dt \\ &\leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon,\end{aligned}$$

e **(ii)** também é satisfeita. ■

Teorema B.2. (Teorema do Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponha que:

(H_1) Existem $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha > 0$ para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = \rho$.

(H_2) Existe $e \in X$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

$$(a) \quad c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$$

$$(b) \quad \|I'(u)\| < 2\epsilon,$$

onde,

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{[0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Afirmamos que c está bem definido. Realmente, pois desde que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C([0, 1], X)$, segue que $I(\gamma(t))$ é uma função contínua, e como o conjunto $[0, 1]$ é compacto, logo $I(\gamma(t))$ admite máximo em $[0, 1]$.

Afirmção B.1. $\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq b, \forall \gamma \in \Gamma$, onde $b := \inf_{\|u\|=\rho} I(u)$.

De fato, seja $\gamma \in \Gamma$ e defina $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\varphi(t) = \|\gamma(t)\|, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Segue da continuidade da norma e da continuidade de γ que φ é contínua. Além disso, se $\|e\| > \rho$, temos que

$$\varphi(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$\varphi(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho,$$

ou seja,

$$\varphi(0) < \rho < \varphi(1).$$

Assim, pelo Teorema de Darboux, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho,$$

logo,

$$I(\gamma(t_0)) \geq b := \inf_{\|\gamma(t_0)\|=\rho} I(\gamma(t_0)) > I(0) \geq I(e).$$

Portanto

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq b, \forall \gamma \in \Gamma,$$

o que prova a afirmação.

Agora, definindo $H = \left\{ \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) : \gamma \in \Gamma \right\}$, então pela afirmação anterior, H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim, pelo Postulado de Dedekind, H possui ínfimo em $\mathbb{R}$, ou seja, $\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$ está bem definido. Além disso, temos que b é uma cota inferior para H e desde que $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$, então, concluímos que

$$b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

Suponha por contradição que para algum $\epsilon > 0$ a condição (a) e (b) não ocorra, ou seja, que ocorra

$$(c) \quad c - 2\epsilon > I(u) > c + 2\epsilon \quad \forall u \in X$$

$$(d) \quad \|I'(u)\| \geq 2\epsilon \quad \forall u \in X$$

Então, do Lema de deformação, existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

$$(i) \quad \eta(u) = u \text{ se } u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$$

$$(ii) \quad \eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}.$$

Segue da definição de c que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon.$$

Considere $\widehat{\varphi}(t) = \eta(\gamma(t))$. Sendo $\eta \in C(X, X)$ e $\gamma \in C([0, 1], X)$, segue que $\widehat{\varphi} \in C([0, 1], X)$. Uma vez que $0, e \in X$, então:

$$I(e) > c + 2\epsilon$$

logo, $I(e) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, e assim $e \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$.

Da mesma forma

$$I(0) < c - 2\epsilon,$$

ou seja $I(0) \notin [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]$, assim concluímos que $0 \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$. Consequentemente por (i), obtemos

$$\widehat{\varphi}(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\widehat{\varphi}(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e,$$

de onde concluímos que $\widehat{\varphi} \in \Gamma$, assim,

$$I(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica

$$\gamma(t) \in I^{c+\epsilon} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Agora segue de (ii) que,

$$\widehat{\varphi}(t) = \eta(1, \gamma(t)) \in I^{c-\epsilon} \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja

$$I(\widehat{\varphi}(t)) \leq c - \epsilon \quad \forall t \in [0, 1],$$

logo

$$\max_{t \in [0,1]} I(\widehat{\varphi}(t)) \leq c - \epsilon,$$

e desde que, $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$, temos que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\widehat{\varphi}(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $\widehat{\varphi} \in \Gamma$. Então,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. Provando assim o teorema. ■

Apêndice C

Resultados Básicos

Neste apêndice, enunciaremos alguns dos teoremas utilizados nas demonstrações feitas no decorrer deste trabalho.

Teorema C.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que convergem em quase toda parte para uma função mensurável f . Se existir uma função integrável g tal que

$$|f_n| \leq g, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração: ver [3]

Teorema C.2. (*Desigualdade de Hölder*) Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$fg \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder é a seguinte. Sejam $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_k \in L^p(\Omega)$$

e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \cdot \dots \cdot \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^s(\Omega)$ para todo $p \leq s \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$\|f\|_{L^s(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Demonstração: ver [4]

Teorema C.3. (*Cr terio de Compacidade*) Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \rightarrow Y$   compacto se, e somente se, toda seqüência limitada $(x_n) \subset X$ tem a propriedade que a seqüência $(T(x_n)) \subset Y$ possui uma subseqüência convergente.

Demonstr  o: ver [15]

Teorema C.4. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \rightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n) \subset X$ verifica

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em} \quad X,$$

então,

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \quad \text{em} \quad Y.$$

Demonstr  o: ver [15]

Teorema C.5. Sejam (x_n) uma seqüência fracamente convergente em um espaço normado X , isto  , existe $x \in X$ tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X . Então,

- (1) O limite fraco x de (x_n)    nico;
- (2) Toda subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ converge fraco para x
- (3) A seqüência (x_n)   limitada.

Demonstr  o: ver [4]

Teorema C.6. Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n)   uma seqüência limitada em X , então existem uma subseqüência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{em} \quad X.$$

Demonstr  o: ver [4]

Teorema C.7. Sejam f_n uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que

$$f_n \rightarrow f \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Então, a menos de subseqüência,

- (1) $f_n(x) \rightarrow f$ q.t.p em Ω ;
- (2) $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω , onde $g \in L^p(\Omega)$

Demonstr  o: ver [4]

Teorema C.8. (Princípio de Concentração e Compacidade de Lions) Seja $\{u_n\} \subset D^{1,m}$ uma seqüência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,m}$. Suponha que

$$\nu_n = |u_n|^{m^*} \longrightarrow \nu$$

e

$$\mu_n = |\nabla u_n|^m \longrightarrow \mu$$

no sentido das medidas de Radon, onde ν e μ são medidas limitadas e não negativas sobre $\mathbb{R}^N$. Então:

i) Existe um conjunto J no máximo enumerável, duas famílias $(\nu_j)_{j \in J}$ e $(\mu_j)_{j \in J}$ de números não-negativos e uma família de pontos do $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\nu = |u|^{m^*} + \sum_{j \in J} \nu_j \delta_{x_j},$$

onde δ_{x_j} é a medida Dirac de massa 1 concentrada em $x_j \in \mathbb{R}^N$.

ii) $\mu \geq |\nabla u|^m + \sum_{j \in J} \mu_j \delta_{x_j}$ tal que $S\nu_j^{m/m^*} \leq \mu_j$, para todo $j \in J$, onde S é a melhor constante de Sobolev na imersão $\mathcal{D}^{1,m} \hookrightarrow L^{m^*}$. Em particular $\sum_{j \in J} \nu_j^{m/m^*} < +\infty$.

Demonstração: ver [14]

Teorema C.9. $D^{1,m} = \left\{ u \in L^{m^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^m(\mathbb{R}^N); i = 1, 2, \dots, N. \right\}$ é um espaço de Banach reflexivo.

Demonstração ver [4]

Teorema C.10. (Brézis-Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se

(i) u_n é limitada em $L^p(\Omega)$,

(ii) $u_n \longrightarrow u$ q.t.p em Ω , então

$$|u_n|_{L^p(\Omega)}^p = |u|_{L^p(\Omega)}^p + |u_n - u|_{L^p(\Omega)}^p + o_n(1).$$

Demonstração: ver [18]

Lema C.1. (Brézis-Lieb) Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$. Suponha que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p em Ω e exista $C > 0$, tal que

$$\int |f_n|^p \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int f_n \varphi \longrightarrow \int f \varphi, \forall \varphi \in L^q(\Omega)$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: ver [14]

Teorema C.11. (Desigualdade de Young) Sejam A e B números não-negativos satisfazendo $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3]

Teorema C.12. (Teorema do Valor Médio, de Lagrange) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f for derivável em (a, b) , então existe $\lambda \in (a, b)$, tal que

$$f'(\lambda) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Ver [10]

Teorema C.13. (Teorema de Darboux) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em todos os pontos $x \in [a, b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $\lambda \in (a, b)$ tal que $f'(\lambda) = d$.

Demonstração: Ver [10]

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, C.O., Multiple positive Solutions for equations involving critical Sobolev exponent in $\mathbb{R}^N$. Electronic Journal of Differential Equations, v. 1997, n. 13, p. 01-10.
- [2] Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P., Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.
- [3] Bartle, R. G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.
- [4] Brezis, H., Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones, versión española. Juan Ramón Esteban, 1983.
- [5] Brezis, H., & Lieb, E., A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals, Proc. Amer. Math. Soc. 88(1983), 486-490.
- [6] Cao, Dao-Min, Gong-Bao Li & Zhou, Huari-Song, Multiple Solution for Non-homogeneous Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponent, Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 124A(1994), 1177-1191.
- [7] Chabrowski, J., On Multiple Solutions for the Non-homogeneous p-Laplacian with a Critical Sobolev Exponent, Differential and Integral Equations, 8(1995) 705-716.
- [8] Ekeland, I., On the Variational Principle, J. Math. Anal. Appl. 47(1974) 324-353.
- [9] Egnell, H., Existence and Nonexistence Results for m-Laplacian Equations Involving Critical Sobolev Exponents, Arch. Rational Mech. Anal. 104(1988), 57-77.
- [10] Lima, E. L., 1929- Curso de análise, v.1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976- v. ilustr. (Projeto Euclides).
- [11] Garcia Azorero, J., & Peral Alonzo, I., Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent or with a Nonsymmetric Term, Trans. Am. Math. Soc, 323(2)(1991), 887-895.
- [12] Gonçalves, J.V., & Alves, C.O., Existence of Positive Solutions for m-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$ Involving Critical Exponents, Preprint (1996) (To appear in Nonlinear Analysis TMA).
- [13] Jianfu, Y., & Xiping, Z., On the Existence of Nontrivial Solutions of a Quasilinear Elliptic Boundary Value Problem with Unbounded Domain, Acta Math. Sci. 7(1987)341-359.
- [14] Kavian, O., Introduction à théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Université de Nancy, (1993).
- [15] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, 1989. Mech. Anal., 46, 82-95(1981).

- [16] Noussair, E. S., Swanson, C. A., & Jianfu, Y., Quasilinear Elliptic Problems with Critical Exponents, *Nonlinear Anal.* 3(1993), 3, 285-301.
- [17] Talenti, G., Best Constant in Sobolev Inequality, *Ann. Math.* 110(1976) 353-372.
- [18] Willem, M., Minimax theorems, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, 1996.