SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elizabeth Rego Sabino

O método variacional dual para uma classe de sistemas hamiltonianos

Belém
ICEN - UFPA
Março 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elizabeth Rego Sabino

O método variacional dual para uma classe de sistemas hamiltonianos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof.Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Área de Concentração: Equações diferenciais.

Belém
ICEN - UFPA
Março 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elizabeth Rego Sabino

O método variacional dual para uma classe de sistemas hamiltonianos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 14 de Março de 2008.

Conceito:______________

Banca Examinadora

____

Prof.° Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Orientador
Faculdade de Matemática - UFPA

____

Prof.° Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho
Departamento de Matemática -UFCG

____

Prof.° Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes
Faculdade de Matemática - UFPA

Dedicatória

À minha família

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por tudo que me proporciona.

Aos meus Pais, por tudo que me ensinaram. Aos meus irmãos em especial a Elifaleth, por me amarem.

Ao Professor Giovany, pela orientação, incentivo, disponibilidade, compreensão, amizade e sobretudo pelo exemplo de profissional sério e competente.

Aos professores Mauro Santos, Marcus Pinto, Paulo Marques e Júlio Sobreira pela dedicação ao exporem as disciplinas base do mestrado.

Aos meus colegas de turma da UFPa-Campus de Abaetetuba e aos colegas de turma do mestrado pela amizade e incentivo.

Aos amigos que fiz em Belém, em especial ao Leandro Santos Ribeiro que com paciência me ensinou e me ajudou a digitar este trabalho.

Ao meu querido amigo Raimundo Mangabeira pelos conselhos e companhia incessante nas horas de estudo e à sua família.

Resumo

Nesta dissertação vamos mostrar um resultado de existência e regularidade de soluções positivas do sistema

$$\begin{cases} -\Delta u + u =\mid v \mid^{p-1} v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v + v =\mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A técnica usada será o método variacional dual.

Abstract

The main object of this work is to investigate the existence and regularity of positive solutions of the system

$$\begin{cases} -\Delta u + u = | v |^{p-1} v \text{ in } \Omega, \\ -\Delta v + v = | u |^{q-1} u \text{ in } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

We will use the variational dual method.

Conteúdo

Introdução

Considere o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$(1)\begin{cases} -\Delta u + u = f(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v + v = g(x,u,v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Diz-se que o sistema (1) é do tipo gradiente se existir uma função $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f \; e \; \frac{\partial F}{\partial v} = g.$$

Diz-se que o sistema (1) é do tipo hamiltoniano se existir uma função $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial v} = f \; e \; \frac{\partial H}{\partial u} = g.$$

Nesta dissertação vamos estudar a seguinte classe de sistemas hamiltonianos:

$$(S)\begin{cases} -\Delta u + u = \mid v \mid^{p-1} v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v + v = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \;\text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Por analogia com o caso escalar, o caso subcrítico ocorre quando $1 \leq p < 2^* - 1$ e $1 \leq q < 2^* - 1$, o caso crítico ocorre quando $p = 2^* - 1$, $q = 2^* - 1$ e o caso supercrítico ocorre quando $p > 2^* - 1$e $q > 2^* - 1$, onde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$.

Quando $p = 1$, o sistema (S) pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + u = v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v + v = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, teremos

$$\begin{cases} -\Delta(-\Delta u + u) + (-\Delta u + u) = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que é equivalente a

$$(2) \begin{cases} \Delta^2 u - 2\Delta u + u = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dizemos que o problema (2) tem condição de fronteira de Navier, enquanto o problema

$$(3) \begin{cases} \Delta^2 u - 2\Delta u + u = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = \nabla u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem condição de fronteira de Dirichlet.

Voltando ao sistema (S), vamos mostrar a existência e a regularidade de soluções positivas considerando a seguinte hipótese sobre p e q:

$$(1) \qquad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}$$

com $p, q > 1$.

Um sistema com a condição (1) é conhecido na literatura como um problema com crescimento abaixo da hipérbole crítica.

Geometricamente temos a condição (1).

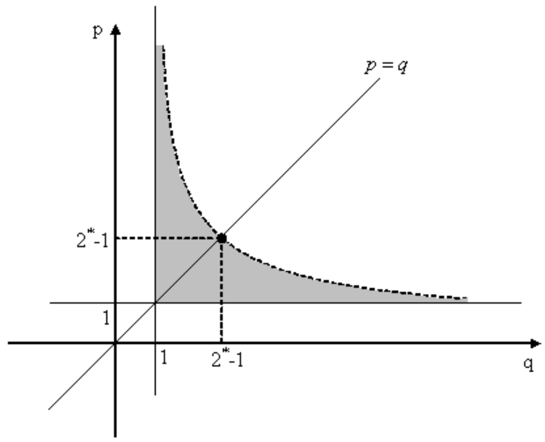

Figura 1: Hipérbole crítica

A condição (1) nos possibilita uma maior flexibilidade na escolha de p e q, ou seja, à medida que p cresce, q diminui, havendo portanto, uma compensação. Observe que o parâmetro p pode assumir um valor superior ao expoente crítico de sobolev desde que, $1 < q \leq 2^* - 1$ do mesmo modo temos a situação oposta.

Note que quando $p = q$ temos que $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{2}{p+1} > \dfrac{N-2}{N}$, o que equivale a $p + 1 < \dfrac{2N}{N-2}$ ou ainda $1 < p < 2^* - 1$.

O caso mais simples de um sistema elíptico hamiltoniano apareceu com Clément Ph, de Figueiredo D.G e Mitidieri E. [7], e Hulshof J. e Van Der Vorst [11], onde eles provam a existência e a unicidade de solução positiva, via argumento topológico, para o sistema sujeito às condições de fronteira de Dirichlet dado abaixo.

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = f(v) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v = g(u) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em 1994, de Figueiredo e Felmer [8], provaram um teorema de regularidade para as soluções do sistema $(*)$.

Em 1998, de Figueiredo e Yang [9], mostraram a existência de soluções radiais para o sistema $(*)$.

Em 1999, Bartsch e de Figueiredo [4], obtiveram soluções não radiais para o sistema

$(*)$.

Em 2000, de Figueiredo publicou um excelente artigo nos Anais da Academia Brasileira de Ciências [10], onde o mesmo discute diversas classes de sistemas, usando métodos varacionais e topológicos.

Dentre os artigos pulblicados no ano de 2003, sobre sistemas hamiltonianos, vamos destacar o artigo de Ávila e Yang [2] onde eles mostraram existência de solução para o sistema (S) com a condição de fronteira de Neumann. Em verdade, este artigo serviu de inspiração para fazermos o segundo capítulo desta dissertação.

A técnica que empregaremos para encontrar soluções para o sistema (S) é o método variacional dual. A motivação para o uso desta técnica é que o funcional associado naturalmente ao sistema (S) é fortemente indefinido. Isto siginifica que o espaço onde o funcional está definido é decomposto em soma direta de dois subespaços de dimensão infinita, com a propriedade que o funcional é positivo definido em um e negativo definido no outro. Por isso, algumas vezes, usa-se Teorema de Linking para se obter pontos críticos desse funcional. Mas os valores críticos obtidos pelos Teoremas de Linking, em geral, não são fáceis de controlar. Para contornar essa dificuldade, modifica-se o sistema original, para que se possa usar o Teorema do Passo da Montanha, onde o controle sobre os valores críticos é mais fácil. O método é finalizado, mostrando-se que de uma solução do sistema modificado obtemos uma solução do problema original.

O principal resultado nesta dissertação é o seguinte:

Teorema: Se $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} > \dfrac{N-2}{N}$, $p, q > 1$, então o sistema (S) tem pelo menos uma solução $w = (w_1, w_2)$ com $w_i > 0$ em Ω e $w_i \in W^{2,s}(\Omega)$ para $s > 2,\ i = 1, 2$.

O objetivo principal deste trabalho é descrever o método de tal maneira que ele possa ser aplicado também em problemas com condições de fronteira de Neumann considerando-se pequenas adaptações.

Para facilitar a leitura deste trabalho, ele será organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, que chamaremos O Método, faremos todos os passos que caracteriza o método variacional dual. Além disso, supondo que o sistema modificado possui soluções, mostraremos a positividade e a regularidade dessas soluções e, apartir dessas soluções, obteremos as soluções do problema original.

No capítulo 2, que denominaremos de Existência de solução, demonstraremos o Lema de Deformação, o Teorema do Passo da Montanha e o usaremos para obter uma solução do problema modificado.

Para finalizar, enunciaremos no apêndice A alguns resultados básicos usados neste trabalho, indicando as referências onde os mesmos poderão ser encontrados.

Notações

$\blacksquare$: fim de uma demonstração,

$B_r(x)$: bola aberta de centro x e raio r,

$\rightarrow$: convergência forte,

$\rightharpoonup$: convergência fraca,

$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,

$\int_\Omega f$: denota $\int_\Omega f(x)dx$,

$|f|_s = \left(\int_\Omega |f(x)|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$, $0 < s < \infty$,

$|.|_{L^{\frac{p+1}{p}}} = |.|_{\frac{p+1}{p}}$

$|.|_{L^{\frac{q+1}{q}}} = |.|_{\frac{q+1}{q}}$

$|.|_{L^{p+1}} = |.|_{p+1}$

$|.|_{L^{q+1}} = |.|_{q+1}$

$|.|_{L^{q+1}\times L^{p+1}} = |.|_{q+1} + |.|_{p+1}$

$I^c = \{x \in Dom(I) : I(x) \leq c, c \in \mathbb{R}\}$

$|w_i|^2_{s(\Omega\setminus B_\delta(0))} = \left(\int_{\Omega\setminus B_\delta(0)} |w_i|^s\right)^{\frac{2}{s}}$

Capítulo 1

O Método

Como foi dito na introdução, estudaremos a seguinte classe de sistemas:

$$(S)\begin{cases} -\Delta u + u = \mid v \mid^{p-1} v \,\text{em}\, \Omega, \\ -\Delta v + v = \mid u \mid^{q-1} u \,\text{em}\, \Omega, \\ u = v = 0 \,\text{sobre}\, \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p, q > 1$ e $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} > \dfrac{N-2}{N}$.

Nos Lemas 1.1, 1.2 e 1.3 abaixo, mostraremos alguns resultados sobre imersões contínuas e compactas que serão cruciais para podermos usar o método variacional dual.

Lema 1.1 *A imersão $W^{2,t}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é contínua nos seguintes casos:*

a) $\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{N} \leq 0$, *para* $s \in [t, +\infty)$.

b) $\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{N} > 0$, *para* $s \in [t, t^*]$; $\dfrac{1}{t^*} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{N}$.

Demonstração: Vamos demontrar o item a). Note que $\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{N} \leq 0$ implica $2t \geq N$.

Usando o Teorema A.2 (ver apêndice A), e considerando $m = 2$, $r = t$ e $s = q$, temos que se $2t = N$, então $W^{2,t}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$ com $t \leq s < +\infty$.

Agora se $2t > N$, então $W^{2,t}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ onde $k < 2 - \dfrac{N}{t} \leq k+1$.

Mas, $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$, com $t \leq s < +\infty$. Logo, $W^{2,t}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$, com $t \leq s < +\infty$.

Vamos mostrar agora o item b).

Observe que $\frac{1}{t} - \frac{2}{N} > 0$ implica $2t < N$. Novamente usando o Teorema A.2 (ver apêndice A) e fazendo as considerações acima, teremos $W^{2,t}(\Omega) \overset{cont}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$, com $t \leq s \leq \frac{Nt}{N-2t} = t^*$. ■

Lema 1.2 *A imersão $W^{2,t}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ é compacta nos seguintes casos:*

a) $\frac{1}{t} - \frac{2}{N} \leq 0$, *para* $s \in [t, +\infty)$.

b) $\frac{1}{t} - \frac{2}{N} > 0$, *para* $s \in [t, t^*)$; $\frac{1}{t^*} = \frac{1}{t} - \frac{2}{N}$.

Demonstração:

Usando o Teorema A.3 (ver apêndice A) e raciocinando como acima, teremos o resultado desejado. ■

Lema 1.3 *Se* $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}$ *então as seguintes imersões são compactas:*

a) $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^{q+1}(\Omega)$

b) $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^{p+1}(\Omega)$

Demonstração:

Vamos começar demonstrando o item a). Note que $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}$ é equivalente a

$\frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N} - \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{q+1} > \frac{p+1-1}{p+1} - \frac{2}{N} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{q+1} > \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{q+1} > \frac{1}{\frac{p+1}{p}} - \frac{2}{N} = \frac{1}{t^*}. \tag{1.1}$$

Vamos considerar os seguintes casos: se $\frac{1}{\frac{p+1}{p}} - \frac{2}{N} \leq 0$, então pelo lema 1.2, temos, $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^{q+1}(\Omega)$, com $q+1 \in [1, +\infty)$.

Agora se $\dfrac{1}{\frac{p+1}{p}} - \dfrac{2}{N} > 0$, novamente do lema 1.2 teremos, $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^s(\Omega)$ para $s \in [t, t^*)$, com $t = \dfrac{p+1}{p}$ e $\dfrac{1}{t^*} = \dfrac{p}{p+1} - \dfrac{2}{N}$. Isto é, para que $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^{q+1}(\Omega)$, devemos ter $t \leq (q+1) < t^*$.

Note que, de (1.1), temos $\dfrac{1}{q+1} > \dfrac{1}{t^*} \Longrightarrow t^* > q+1$.

Vamos mostrar agora que $q+1 \geq t = \dfrac{p+1}{p}$. De fato, note que $\dfrac{p+1}{p} = 1 + \dfrac{1}{p} \leq 2$ e que $q+1 \geq 2 \geq \dfrac{p+1}{p}$, concluimos, $q+1 \geq \dfrac{p+1}{p}$. ■

Vamos trabalhar um pouco com o sistema (S), isto é, primeiramente faremos uma mudança de variável adequada, logo após definiremos dois operadores lineares e contínuos e em seguida vamos definir um funcional associado naturalmente ao sistema modificado.

Considere a seguinte mudança de variável: $w_2 = |v|^{p-1}v = \dfrac{|v|^p}{|v|}v$. Assim, $|w_2| = |v|^p$, ou ainda, $|v| = |w_2|^{\frac{1}{p}}$. Além disso, temos $v = w_2|v|^{1-p}$ e daí, $v = w_2|w_2|^{\frac{1}{p}-1}$.

Da mesma forma, considerando $w_1 = |u|^{q-1}u$, obtemos $u = w_1|w_1|^{\frac{1}{q}-1}$.

Note que o sistema (S) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = w_2 \,\text{em}\, \Omega, \\ -\Delta v + v = w_1 \,\text{em}\, \Omega, \\ u = v = 0 \,\text{sobre}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que do Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (Teorema A.1), temos que ficam bem definidos os operadores.

$$\begin{array}{rcl} T_1 := (-\Delta + I)^{-1} : L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) & \longrightarrow & W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \\ T_2 := (-\Delta + I)^{-1} : L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) & \longrightarrow & W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \end{array}$$

onde $T_1 w_2 = u$ se e somente se u é a única solução da equação

$$(4) \begin{cases} -\Delta u + u = w_2 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre}\, \partial\Omega \end{cases}$$

e $T_2 w_1 = v$ se e somente se v é a única solução da equação

$$(5) \begin{cases} -\Delta v + v = w_1 \text{ em } \Omega, \\ v = 0 \text{ sobre}\, \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainda do Teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg, temos que

$$u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \text{ e } v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

e existe $C > 0$ tal que

$$|u|_{2,\frac{p+1}{p}} \leq C|w_2|_{\frac{p+1}{p}} \ e \ |v|_{2,\frac{q+1}{q}} \leq C|w_1|_{\frac{q+1}{q}},$$

ou seja,

$$|T_1 w_2|_{2,\frac{p+1}{p}} \leq C|w_2|_{\frac{p+1}{p}} \ e \ |T_2 w_1|_{2,\frac{q+1}{q}} \leq C|w_1|_{\frac{q+1}{q}}.$$

De onde se conclui que os operadores T_1 e T_2 são lineares e contínuos.

Considerando as imersões compactas obtidas no Lema 1.3 segue-se que os operadores

$$\begin{aligned} T_1 : L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) &\longrightarrow L^{q+1}(\Omega) \\ T_2 : L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) &\longrightarrow L^{p+1}(\Omega) \end{aligned}$$

são compactos.

Vamos expor aqui algumas definições importantes que foram usadas no decorrer desta dissertação.

Definimos $X = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \times L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e o operador $T : X \longrightarrow L^{q+1}(\Omega) \times L^{p+1}(\Omega)$ dado por $T = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}$ ou seja, se $w = (w_1, w_2) \in X$, então

$$Tw = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 w_2 \\ T_2 w_1 \end{pmatrix},$$

isto é, $Tw = (T_1 w_2, T_2 w_1)$.

No espaço vetorial $X = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \times L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ definimos a seguinte norma $|w|_X = \sqrt{| \ w_1 \ |^2_{\frac{q+1}{q}} + | \ w_2 \ |^2_{\frac{p+1}{p}}}$, onde $w = (w_1, w_2)$.

No espaço vetorial $L^{q+1}(\Omega) \times L^{p+1}(\Omega)$ definimos a seguinte norma $|Tw|_{L^{q+1} \times L^{p+1}} = |T_1 w_2|_{q+1} + |T_2 w_1|_{p+1}$, onde $w = (w_1, w_2)$.

Dizemos que $w_n \to w$ em X, onde $w = (w_1, w_2)$ se e somente $w_{1n} \to w_1$ em $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ e $w_{2n} \to w_2$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

No que segue, usaremos as seguintes notações: Se $\eta, w \in X$, com $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ e $w = (w_1, w_2)$, então $< \eta, Tw >= \eta_1 T_1 w_2 + \eta_2 T_2 w_1$.

O lema abaixo será importante para definirmos um funcional associado ao problema modificado.

Lema 1.4 *Para $\eta\, e\, w \in X$, temos* $\int_\Omega < \eta, Tw >= \int_\Omega < w, T\eta >$, *ou seja,* $\int_\Omega (\eta_1 T_1 w_2 + \eta_2 T_2 w_1) = \int_\Omega (w_1 T_1 \eta_2 + w_2 T_2 \eta_1)$.

Demonstração: Considere as seguintes equações:

$$(6) \quad \begin{array}{l} -\Delta(T_1\eta_2) + T_1\eta_2 = \eta_2 \\ -\Delta(T_2\eta_1) + T_2\eta_1 = \eta_1 \\ -\Delta(T_2 w_1) + T_2 w_1 = w_1 \\ -\Delta(T_1 w_2) + T_1 w_2 = w_2. \end{array}$$

Consequentemente usando as funções testes $T_2w_1, T_1w_2, T_1\eta_2\, e\, T_2\eta_1$ na primeira, segunda, terceira e quarta equações, respectivamente de (6), obtemos

$$\int_\Omega \nabla(T_1\eta_2)\nabla(T_2w_1) + \int_\Omega T_1\eta_2 T_2 w_1 = \int_\Omega \eta_2 T_2 w_1, \tag{1.2}$$

$$\int_\Omega \nabla(T_1w_2)\nabla(T_2\eta_1) + \int_\Omega T_2\eta_1 T_1 w_2 = \int_\Omega \eta_1 T_1 w_2, \tag{1.3}$$

$$\int_\Omega \nabla(T_2w_1)\nabla(T_1\eta_2) + \int_\Omega T_2 w_1 T_1 \eta_2 = \int_\Omega w_1 T_1 \eta_2 \tag{1.4}$$

e

$$\int_\Omega \nabla(T_1w_2)\nabla(T_2\eta_1) + \int_\Omega T_1 w_2 T_2 \eta_1 = \int_\Omega w_2 T_2 \eta_1. \tag{1.5}$$

Somando ordenadamente (1.2) e (1.3) e depois (1.4) e (1.5), encontramos

$$\int_\Omega (\nabla(T_2w_1)\nabla(T_1\eta_2) + \nabla(T_1w_2)\nabla(T_2\eta_1)) + \int_\Omega (T_1\eta_2T_2w_1 + T_2\eta_1T_1w_2) = \int_\Omega (\eta_2T_2w_1 + \eta_1T_1w_2)$$

e

$$\int_\Omega (\nabla(T_2w_1)\nabla(T_1\eta_2) + \nabla(T_1w_2)\nabla(T_2\eta_1)) + \int_\Omega (T_2w_1T_1\eta_2 + T_1w_2T_2\eta_1) = \int_\Omega (w_1T_1\eta_2 + w_2T_2\eta_1).$$

Igualando as equações acima, teremos

$$\int_\Omega (\eta_2 T_2 w_1 + \eta_1 T_1 w_2) = \int_\Omega (w_1 T_1 \eta_2 + w_2 T_2 \eta_1)$$

e o lema está demonstrado. ■

Usando o lema acima vamos provar a seguinte proposição.

Proposição 1.1 *O funcional*

$$\begin{aligned} G: \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto G(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega < w, Tw > \end{aligned}$$

é diferenciável com $G'(w)h = \displaystyle\int_\Omega < h, Tw >$.

Demonstração: Mostraremos primeiramente que G é Gateaux- Diferenciável, isto é, que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{G(w+th)-G(w)}{t}$ existe.

De fato,

$$G(w+th) - G(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega < (w+th), T(w+th) > -\frac{1}{2}\int_\Omega < w, Tw > .$$

Como $w = (w_1, w_2)$ e $h = (h_1, h_2)$, temos:

$$\begin{aligned} G(w+th) - G(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega < ((w_1,w_2)+(th_1,th_2)), T((w_1,w_2)+(th_1,th_2)) > \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega < (w_1,w_2), T(w_1,w_2) > . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} G(w+th) - G(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega < (w_1+th_1, w_2+th_2), T(w_1+th_1, w_2+th_2) > \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega < (w_1,w_2), T(w_1,w_2) > . \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} G(w+th) - G(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega ((w_1+th_1)T_1(w_2+th_2) + (w_2+th_2)T_2(w_1+th_1)) \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega (w_1T_1w_2 + w_2T_2w_1) \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} G(w+th) - G(w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (w_1T_1w_2 + w_1T_1(th_2) + (th_1)T_1w_2 + (th_1)T_1(th_2)) \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (w_2T_2w_1 + w_2T_2(th_1) + (th_2)T_2w_1 + (th_2)T_2(th_1)) \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega (w_1T_1w_2 + w_2T_2w_1). \end{aligned}$$

Agora usando o fato de T_1 e T_2 serem operadores lineares, temos

$$\begin{aligned}G(w+th)-G(w) &= \frac{1}{2}t\int_\Omega (w_1T_1h_2+w_2T_2h_1)+\frac{1}{2}t\int_\Omega (h_1T_1w_2+h_2T_2w_1)\\ &+ \frac{1}{2}t^2\int_\Omega (h_1T_1h_2+h_2T_2h_1).\end{aligned}$$

Portanto, usando o lema 1.4, obtemos

$$G(w+th)-G(w) = t\int_\Omega < w, Th > +\frac{1}{2}t^2\int_\Omega < h, Th > .$$

Agora dividindo ambos os membros por t.

$$\frac{G(w+th)-G(w)}{t} = \int_\Omega < w, Th > +\frac{1}{2}t\int_\Omega < h, Th > .$$

E assim, passando ao limite de $t \to 0$, temos

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(w+th)-G(w)}{t} = \int_\Omega < w, Th > .$$

Logo, $\displaystyle\int_\Omega < w, Th >$ é candidata a ser a derivada de G no sentido de Fréchet. Basta verificarmos se $\displaystyle\lim_{|h|_X\to 0}\frac{|G(w+h)-G(w)-\int_\Omega < w, Th > |}{|h|_X}=0.$

Vamos calcular $G(w+h)$.

Temos da definição que

$$G(w+h) = \frac{1}{2}\int_\Omega < (w+h), T(w+h) > .$$

Como $w=(w_1,w_2)$ e $h=(h_1,h_2)$, temos:

$$G(w+h) = \frac{1}{2}\int_\Omega < ((w_1,w_2)+(h_1,h_2)), T((w_1,w_2)+(h_1,h_2)) > .$$

Agora,

$$G(w+h) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((w_1+h_1)T_1(w_2+h_2)+(w_2+h_2)T_2(w_1+h_1)).$$

E assim,

$$\begin{aligned} G(w+h) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (w_1T_1w_2 + w_1T_1h_2 + h_1T_1w_2 + h_1T_1h_2) \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega (w_2T_2w_1 + w_2T_2h_1 + h_2T_2w_1 + h_2T_2h_1) \end{aligned}$$

segue-se que,

$$\begin{aligned} G(w+h) &= \frac{1}{2}\int_\Omega < (w_1,w_2),(T_1w_2,T_2w_1) > + \frac{1}{2}\int_\Omega < (w_1,w_2),(T_1h_2,T_2h_1) > \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega < (h_1,h_2),(T_1w_2,T_2w_1) > + \frac{1}{2}\int_\Omega < (h_1,h_2),(T_1h_2,T_2h_1) > . \end{aligned}$$

Então, usando novamente o lema 1.4, obtemos

$$G(w+h) = G(w) + \frac{1}{2}\int_\Omega < w, Th > + \frac{1}{2}\int_\Omega < w, Th > + \frac{1}{2}\int_\Omega < h, Th > .$$

E portanto,

$$G(w+h) = G(w) + \int_\Omega < w, Th > + \frac{1}{2}\int_\Omega < h, Th > .$$

Agora observe que,

$$\frac{|G(w+h) - G(w) - \int_\Omega < w, Th > |}{|h|_X} = \frac{|\frac{1}{2}\int_\Omega < h, Th > |}{|h|_X}.$$

E assim, temos

$$\frac{|G(w+h) - G(w) - \int_\Omega < w, Th > |}{|h|_X} \leq \frac{\frac{1}{2}\int_\Omega |(h_1T_1h_2 + h_2T_2h_1)|}{|h|_X}. \tag{1.6}$$

Note agora que da desigualdade de Holder com os expoentes $\frac{q+1}{q}$ e $q+1$, $\frac{p+1}{p}$ e $p+1$, temos

$$\int_\Omega |h_1T_1h_2 + h_2T_2h_1| \leq |h_1|_{\frac{q+1}{q}} |T_1h_2|_{q+1} + |h_2|_{\frac{p+1}{p}} |T_2h_1|_{p+1}.$$

Da desigualdade elementar $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, encontramos

$$\int_\Omega |h_1 T_1 h_2 + h_2 T_2 h_1| \leq \frac{1}{2}|h_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + \frac{1}{2}|T_1 h_2|^2_{q+1} + \frac{1}{2}|h_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}|T_2 h_1|^2_{p+1}.$$

Usando o fato de T_1 e T_2 serem operadores lineares e contínuos, segue-se que

$$\int_\Omega |h_1 T_1 h_2 + h_2 T_2 h_1| \leq \frac{1}{2}|h_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + \frac{1}{2}C_1|h_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}|h_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}C_2|h_1|^2_{\frac{q+1}{q}}.$$

Daí, existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_\Omega |h_1 T_1 h_2 + h_2 T_2 h_1| \quad \leq \quad \lambda(|h_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + |h_2|^2_{\frac{p+1}{p}}) = \lambda|h|^2_X. \tag{1.7}$$

Substituindo (1.7) em (1.6), temos

$$\frac{|G(w+h) - G(w) - \int_\Omega < w, Th > |}{|h|_X} \quad \leq \quad \frac{\frac{1}{2}\lambda|h|^2_X}{|h|_X}.$$

E daí,

$$\frac{|G(w+h) - G(w) - \int_\Omega < w, Th > |}{|h|_X} \leq C|h|_X.$$

E fazendo $|h|_X \to 0$, teremos

$$\lim_{|h|_X \to 0} \frac{|G(w+h) - G(w) - \int_\Omega < w, T_h > |}{|h|_X} = 0.$$

Portanto, G é diferenciável. ∎

Considere agora o seguinte funcional

$$\begin{aligned} \psi : \ & X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & w \longmapsto \psi(w) \end{aligned}$$

onde,
$\psi(w) = \dfrac{q}{q+1}\displaystyle\int_\Omega |\, w_1 \,|^{\frac{q+1}{q}} + \dfrac{p}{p+1}\displaystyle\int_\Omega |\, w_2 \,|^{\frac{p+1}{p}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega < w, Tw > .$

Lema 1.5 *O funcional ψ é de classe C^1 e*

$$\psi'(w)\eta = \int_\Omega |\, w_1 \,|^{\frac{1}{q}-1} w_1\eta_1 + \int_\Omega |\, w_2 \,|^{\frac{1}{p}-1} w_2\eta_2 - \int_\Omega < \eta, Tw > .$$

Demonstração: Denotaremos $\psi(w) = \dfrac{q}{q+1} I(w) + \dfrac{p}{p+1} J(w) - G(w)$, onde $I(w) = \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}}$, $J(w) = \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}}$ e $G(w) = \dfrac{1}{2}\int_\Omega < w, Tw >$.

Note que $G(w)$ é diferenciável no sentido de Gateaux do resultado anterior, vamos mostrar que G' é contínua.

Seja (w_n) uma sequência convergindo para w em X.

Daí,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;=\; |G'(w_n)\eta - G'(w)\eta|.$$

Assim,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;=\; |\int_\Omega < \eta, Tw_n > - \int_\Omega < \eta, Tw > |.$$

Ou seja,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;=\; |\int_\Omega (\eta_1 T_1 w_{2n} + \eta_2 T_2 w_{1n} - \eta_1 T_1 w_2 - \eta_2 T_2 w_1)|.$$

Logo,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;\le\; \int_\Omega |\eta_1 T_1 w_{2n} - \eta_1 T_1 w_2| + \int_\Omega |\eta_2 T_2 w_{1n} - \eta_2 T_2 w_1|.$$

Isto é,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;\le\; \int_\Omega |\eta_1||T_1(w_{2n} - w_2)| + \int_\Omega |\eta_2||T_2(w_{1n} - w_1)|.$$

Da desigualdade de Holder com os expoentes $\dfrac{q+1}{q}$ e $q+1$, $\dfrac{p+1}{p}$ e $p+1$, temos

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;\le\; |\eta_1|_{\frac{q+1}{q}} |T_1(w_{2n} - w_2)|_{q+1} + |\eta_2|_{\frac{p+1}{p}} |T_2(w_{1n} - w_1)|_{p+1}.$$

Note que para $|\eta|_X \le 1$, temos que $|\eta_1|_{\frac{q+1}{q}} \le 1$ e $|\eta_2|_{\frac{p+1}{p}} \le 1$ e daí,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;\le\; |T_1(w_{2n} - w_2)|_{q+1} + |T_2(w_{1n} - w_1)|_{p+1}.$$

E assim,

$$|[G'(w_n) - G'(w)]\eta| \;\le\; |T(w_n - w)|_{L^{q+1}\times L^{p+1}}.$$

Agora da continuidade de T, e passando ao limite temos

$$G'(w_n) \to G'(w).$$

Assim, $G \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Mostraremos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Temos que,

$$\begin{aligned} I: \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto I(w) = \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} \end{aligned}$$

onde $X = L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \times L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$.

Vamos mostrar que I possui derivada no sentido de Gateaux, isto é, que $\lim_{t \to 0} \dfrac{I(w + t\eta) - I(w)}{t}$ existe.

Assim,

$$\frac{I(w + t\eta) - I(w)}{t} = \frac{\int_\Omega |w_1 + t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}} - \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t}$$

ou seja,

$$\frac{I(w + t\eta) - I(w)}{t} = \frac{\int_\Omega (|w_1 + t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}} - |w_1|^{\frac{q+1}{q}})}{t}.$$

Do teorema do valor médio,

$$\frac{|w_1 + t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}} - |w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t} = \frac{q+1}{q} |w_1 + \lambda t\eta_1|^{\frac{q+1}{q} - 2} (w_1 + \lambda t\eta_1)\eta_1, \lambda \in (0, 1).$$

Assim,

$$\frac{|w_1 + t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}} - |w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t} = \frac{q+1}{q} |w_1 + \lambda t\eta_1|^{\frac{1-q}{q}} (w_1 + \lambda t\eta_1)\eta_1, \lambda \in (0, 1). \tag{1.8}$$

Portanto,

$$\lim_{t \to 0} \frac{|w_1 + t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}} - |w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t} = \frac{q+1}{q} |w_1|^{\frac{1}{q} - 1} w_1 \eta_1.$$

Agora usando a desigualdade triangular em (1.8), temos

$$\left|\frac{|w_1+t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}}-|w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t}\right| \;\leq\; \frac{q+1}{q}(|w_1|+|\lambda t\eta_1|)^{\frac{1}{q}-1}|w_1+\lambda t\eta_1||\eta_1|.$$

De onde segue,

$$\left|\frac{|w_1+t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}}-|w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t}\right| \;\leq\; \frac{q+1}{q}(|w_1|+|\lambda||t||\eta_1|)^{\frac{1}{q}}|\eta_1|.$$

Agora usando o fato de que, $|\lambda|<1$ e $|t|<1$, obtemos,

$$\frac{\left||w_1+t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}}-|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right|}{|t|} \;\leq\; \frac{q+1}{q}(|w_1|+|\eta_1|)^{\frac{1}{q}}|\eta_1|.$$

Vamos mostrar que $(|w_1|+|\eta_1|)^{\frac{1}{q}}|\eta_1| \in L^1(\Omega)$.

Temos que $w_1,\eta_1 \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ daí, $w_1+\eta_1 \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ o que implica, $(|w_1|+|\eta_1|)^{\frac{1}{q}} \in L^{q+1}(\Omega)$.

Agora usando a desigualdade de Holder com expoentes $q+1$ e $\dfrac{q+1}{q}$, temos $(|w_1|+|\eta_1|)^{\frac{1}{q}}|\eta_1| \in L^1(\Omega)$.

Daí, $\left|\dfrac{|w_1+t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}}-|w_1|^{\frac{q+1}{q}}}{t}\right| \leq \frac{q+1}{q}(|w_1|+|\eta_1|)^{\frac{1}{q}}|\eta_1| \in L^1(\Omega)$.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.5- apendice A) em (1.8), temos

$$\int_\Omega \frac{q+1}{q}|w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1 \;=\; \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\left(|w_1+t\eta_1|^{\frac{q+1}{q}}-|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)}{t}.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \frac{q+1}{q}|w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1 \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{I(w+t\eta)-I(w)}{t}.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(w+t\eta)-I(w)}{t}$$

existe.

Assim, $\displaystyle\int_\Omega \frac{q+1}{q}|w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1$ é candidata a ser derivada no sentido de Fréchet. Portanto, é suficiente mostrar que I' seja contínuo.

Seja $(w_n) = (w_{1n}, w_{2n})$ uma sequência em X tal que $w_n \to w = (w_1, w_2)$. Assim, $w_{1n} \to w_1$ *em* $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.

Vamos mostrar que

$$\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} \to \int_\Omega |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1 \text{ em } \mathbb{R}$$

De fato, do Teorema A.6 (ver apêndice A) passando a subsequência, temos que $w_{1n}(x) \to w_1(x)$ q.s. em Ω e que existe $h \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ tal que $|w_{1n}(x)| \leq h(x)$ q.s. em Ω.

Portanto,

$$|w_{1n}(x)|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n}(x) \to |w_1(x)|^{\frac{1}{q}-1}w_1(x)$$

q.s. em Ω e $\left||w_{1n}(x)|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n}(x)\right| \leq h^{\frac{1}{q}}(x) \in L^{q+1}(\Omega)$ e, portanto $h \in L^1(\Omega)$.

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver apêndice A),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} = \int_\Omega |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1.$$

Agora note que,

$$|(I'(w_n) - I'(w))\eta| \;=\; |I'(w_n)\eta - I'(w)\eta|.$$

Assim,

$$|(I'(w_n) - I'(w))\eta| \;=\; \left|\frac{q+1}{q}\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n}\eta_1 - \frac{q+1}{q}\int_\Omega |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1\right|.$$

E daí,

$$|(I'(w_n) - I'(w))\eta| \;\leq\; \frac{q+1}{q}\int_\Omega \left||w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} - |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\right||\eta_1|.$$

Da desigualdade de Holder para os expoentes $q+1$ e $\dfrac{q+1}{q}$, temos

$$|(I'(w_n) - I'(w))\eta| \;\leq\; \frac{q+1}{q}\left||w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} - |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\right|_{q+1}|\eta_1|_{\frac{q+1}{q}}.$$

Para $|\eta_1|_{\frac{q+1}{q}} \leq 1$, temos

$$|(I'(w_n) - I'(w))\eta| \leq \frac{q+1}{q}||w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} - |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1|_{q+1}.$$

Portanto,

$$|I'(w_n) - I'(w)|_{X'} \leq \frac{q+1}{q}||w_{1n}|^{\frac{1}{q}-1}w_{1n} - |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1|_{q+1}.$$

Passando ao limite na expressão acima, obtemos

$$|I'(w_n) - I'(w)|_{X'} \rightarrow 0.$$

Consequentemente,

$$I \in C^1(X, \mathbb{R}).$$

De modo análogo, mostra-se que $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. ■

No que segue vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 1.6 *Pontos criticos $w = (w_1, w_2)$ de ψ geram soluções do sistema (S).*

Demonstração:

Temos que $\psi'(w) = 0$ e daí, $\psi'(w)\eta = 0$, $\forall \eta \in X$. Em particular para $\eta = (\eta_1, 0)$, com $\eta_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1 + \int_\Omega |w_2|^{\frac{1}{p}-1}w_2\eta_2 - \int_\Omega (\eta_1 T_1 w_2 + \eta_2 T_2 w_1) = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1\eta_1 - \int_\Omega \eta_1 T_1 w_2 = 0, \ \forall \eta_1 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim,

$$\int_\Omega (|w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1 - T_1 w_2)\eta_1 = 0, \ \forall \eta_1 \in C_0^\infty(\Omega).$$

Agora usando o Lema de Du Bois Raymond, temos

$$|w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1 - T_1 w_2 = 0 \Rightarrow |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1 = T_1 w_2, \text{ q.s. em } \Omega. \tag{1.9}$$

Para $\eta = (0, \eta_2)$ com $\eta_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, seguindo o mesmo raciocínio, temos

$$|w_2|^{\frac{1}{p}-1}w_2 - T_2w_1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; |w_2|^{\frac{1}{p}-1}w_2 = T_2w_1, \text{ q.s. em } \Omega. \tag{1.10}$$

Pelas equações (4) e (5), e por (1.9) e (1.10), temos

$u = |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1$ e $v = |w_2|^{\frac{1}{p}-1}w_2$.

Logo,

$$T_1w_2 = u \iff T_1w_2 = w_1|w_1|^{\frac{1}{q}-1}$$

e

$$T_2w_1 = v \iff T_2w_1 = w_2|w_2|^{\frac{1}{p}-1}.$$

Portanto,

$|u| = |w_1|^{\frac{1}{q}}$ implica que $|w_1| = |u|^q$.

Assim, $u = |w_1|^{\frac{1}{q}-1}w_1$, daí, $u = |u|^{q(\frac{1}{q}-1)}w_1$ isto é, $u = |u|^{1-q}w_1$.

Daí, $w_1 = u|u|^{q-1}$.

Usando o mesmo raciocínio, $w_2 = v|v|^{p-1}$.

Logo,

$$(S)\begin{cases} -\Delta u + u = \mid v \mid^{p-1} v \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v + v = \mid u \mid^{q-1} u \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\blacksquare$

Lema 1.7 *Se $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ são soluções do problema (S) então, $u, v \in W^{2,s}(\Omega)$ para $s > 2$.*

Demonstração:

Usando o item a) do Teorema A.2 com $m = 2$ e $r = \frac{p+1}{p}$ e $q = p_1$, desde que

$$u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega), \text{ temos que } u \in L^{p_1}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{\frac{p+1}{p}} - \frac{2}{N}, \tag{1.11}$$

isto é,

$$u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \Rightarrow u \in L^{p_1}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p_1} = \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N}.$$

Raciocinando da mesma forma, temos

$$v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \Rightarrow v \in L^{q_1}(\Omega), \quad com \quad \frac{1}{q_1} = \frac{q}{q+1} - \frac{2}{N}.$$

Afirmamos que $\frac{q_1}{p} > 1$ e $\frac{p_1}{q} > 1$.

De fato, observe que

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N}.$$

Vamos verificar o caso $n = 2$

$$\frac{1}{p_1} \;=\; \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N} = \frac{p}{p+1} + 1 - \frac{2}{N} - 1.$$

Assim, usando a hipótese (1), temos

$$\frac{1}{p_1} \;<\; \frac{p}{p+1} - 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}.$$

Logo,

$$\frac{1}{p_1} \;<\; \frac{p+1}{p+1} - 1 + \frac{1}{q+1} = \frac{1}{q+1}.$$

Portanto,

$$p_1 \;>\; q+1.$$

Raciocinando de maneira semelhante, encontramos

$$\frac{1}{p+1} \;>\; \frac{1}{q_1}$$

e daí,

$$\frac{p}{p+1} - \frac{2}{N} \;>\; \frac{p}{q_1} - \frac{2}{N}.$$

Usando (1.11) e (1.12), encontramos

$$\frac{1}{p_1} \;>\; \frac{1}{p_2}$$

de onde concluimos

$$p_2 \;>\; p_1.$$

Da mesma forma, trocando p por q, temos que $q_1 > p+1$ e isso implica $q_2 > q_1$.

Considerando a afirmação acima e usando o Teorema de Agmon-Douglis- Nirenberg (Teorema A.1 no apêndice) encontramos

$$u \in W^{2,\frac{q_1}{p}}(\Omega) \text{ o que implica que } u \in L^{p_2}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p_2} = \frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} \tag{1.12}$$

e

$$v \in W^{2,\frac{p_1}{q}}(\Omega) \text{ implicando que } v \in L^{q_2}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{q_2} = \frac{q}{p_1} - \frac{2}{N}.$$

Novamente, considerando $\frac{q_2}{p} > 1$ e $\frac{p_2}{q} > 1$, usando o mesmo raciocínio

$$u \in W^{2,\frac{q_2}{p}}(\Omega) \text{ implicando que } u \in L^{p_3}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p_3} = \frac{p}{q_2} - \frac{2}{N}$$

e

$$v \in W^{2,\frac{p_2}{q}}(\Omega) \text{ implicando que } v \in L^{q_3}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{q_3} = \frac{q}{p_2} - \frac{2}{N}.$$

E assim,

$$u \in W^{2,\frac{q_3}{p}}(\Omega) \text{ implicando que } u \in L^{p_4}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{p_4} = \frac{p}{q_3} - \frac{2}{N}$$

e

$$v \in W^{2,\frac{p_3}{q}}(\Omega) \text{ implicando que } v \in L^{q_4}(\Omega), \quad \text{com} \quad \frac{1}{q_4} = \frac{q}{p_3} - \frac{2}{N}.$$

Note que $q_3 > q_2$ e $p_3 > p_2$.

Repetindo o argumento anterior vamos encontrar

$$u \in W^{2,\frac{q_{n+1}}{p}}(\Omega) \quad e \quad v \in W^{2,\frac{p_{n+1}}{q}}(\Omega),$$

com

$$\frac{1}{p_{n+1}} = \frac{p}{q_n} - \frac{2}{N} \quad e \quad \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{q}{p_n} - \frac{2}{N}. \tag{1.13}$$

Afirmamos que $p_{n+1} > p_n > q+1$ e $q_{n+1} > q_n > p+1$.

Por indução, teremos para o caso $n = k$ que as seguintes desigualdades são verdadeiras, isto é:

$$p_k > p_{k-1}$$

e

$$q_k > q_{k-1}.$$

E também,

$$p_{k-1} > q+1$$

e

$$q_{k-1} > p+1.$$

Assim,

$$\frac{1}{q_{k-1}} > \frac{1}{q_k}$$

e daí,

$$\frac{p}{q_{k-1}} - \frac{2}{N} > \frac{p}{q_k} - \frac{2}{N}$$

ou seja

$$\frac{1}{p_k} > \frac{1}{p_{k+1}},$$

de onde concluimos que

$$p_{k+1} > p_k.$$

Raciocinando da mesma maneira

$$\frac{1}{p_{k-1}} > \frac{1}{p_k}$$

implicará que

$$q_{k+1} > q_k.$$

Afirmamos também que $p_n \to +\infty$ e $q_n \to +\infty$.

De fato, suponha, por contradição, que $p_n \to l_1$. Então por (1.13), temos $q_n \to l_2$, onde

$$\frac{1}{l_1} = \frac{p}{l_2} - \frac{2}{N} \tag{1.14}$$

e

$$\frac{1}{l_2} = \frac{q}{l_1} - \frac{2}{N}. \tag{1.15}$$

Multiplicando (1.14) por q e (1.15) por p, teremos

$$\frac{q}{l_1} = \frac{pq}{l_2} - \frac{2q}{N} \tag{1.16}$$

e

$$\frac{p}{l_2} = \frac{pq}{l_1} - \frac{2p}{N}. \tag{1.17}$$

Substituindo (1.17) em (1.14), teremos

$$\frac{1}{l_1} = \frac{pq}{l_1} - \frac{2p}{N} - \frac{2}{N}.$$

Substituindo (1.16) em (1.15), teremos

$$\frac{1}{l_2} = \frac{pq}{l_2} - \frac{2q}{N} - \frac{2}{N}.$$

Daí,

$$\frac{1}{l_1} - \frac{pq}{l_1} = -\frac{2p}{N} - \frac{2}{N}$$

ou seja,

$$\frac{1}{l_1}(pq-1) = \frac{2}{N}(p+1).$$

E da mesma forma,

$$\frac{1}{l_2}(pq-1) = \frac{2}{N}(q+1).$$

Logo,

$$l_1 = \frac{N(pq-1)}{2(p+1)} \quad e \quad l_2 = \frac{N(pq-1)}{2(q+1)}.$$

Afirmamos agora que $l_1 < q+1$ e $l_2 < p+1$.

Note que, por hipótese,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \quad > \quad \frac{N-2}{N}.$$

Assim,

$$\frac{p+q+2}{(p+1)(q+1)} \quad > \quad 1 - \frac{2}{N}.$$

Isto é,

$$p+q+2 \quad > \quad (p+1)(q+1) - \frac{2}{N}(p+1)(q+1),$$

ou ainda,

$$p+q+2-(p+1)(q+1) \quad > \quad -\frac{2}{N}(p+1)(q+1).$$

Então,

$$1-pq \quad > \quad -\frac{2}{N}(p+1)(q+1)$$

que equivale,

$$\frac{2}{N}(p+1)(q+1) \quad > \quad pq-1.$$

Ou seja,

$$(p+1)(q+1) \quad > \quad \frac{N(pq-1)}{2}.$$

Observe que,

$q+1 > \dfrac{N(pq-1)}{2(p+1)} = l_1$ implica que $q+1 > l_1$ e

$p+1 > \dfrac{N(pq-1)}{2(q+1)} = l_2$ equivale a $p+1 > l_2$.

Agora, temos que $p_n \to l_1$ e $p_n > q+1$ e note que (p_n) é uma sequência crescente e convergente, logo converge para o supremo e assim, $l_1 \geq q+1$. Da mesma forma $q_n \to l_2$ e $q_n > p+1$, logo, $l_2 \geq p+1$.

Mas isto é um absurdo. Logo, $p_n \to +\infty$ e $q_n \to +\infty$.

Consequentemente, após um número finito de passos, por (1.13), obtemos
$\dfrac{1}{p_{n+1}} < 0$ ou $\dfrac{p}{q_n} - \dfrac{2}{N} < 0$ e
$\dfrac{1}{q_{n+1}} < 0$ ou $\dfrac{q}{p_n} - \dfrac{2}{N} < 0$.
Usando o Teorema A.2c)(ver apêndice A) mostramos que

$$\begin{array}{rcl} W^{2,\frac{q_n}{p}}(\Omega) & \overset{cont}{\hookrightarrow} & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ W^{2,\frac{p_n}{q}}(\Omega) & \overset{cont}{\hookrightarrow} & C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \end{array}$$

tal que $1 < 2 - \dfrac{Nq}{p_n} \leq 2$ e α um número real satisfazendo $0 < \alpha \leq 1 - \dfrac{Nq}{p_n} = \alpha_0$ se $\alpha_0 < 1$ e $0 < \alpha < 1$ se $\alpha_0 = 1$ e a regularidade desejada é encontrada. $\blacksquare$

Capítulo 2

Existência de Solução

Para mostrar que o funcional ψ possui ponto crítico, vamos usar o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz [1] cuja demonstração faremos abaixo. Mas antes precisaremos do Lema de Deformação.

Definição 2.1 *Seja X um espaço de Banach, um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X, R)$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, que verifica*

$$\|V(u)\| \leq \alpha \|\phi^{'}(u)\| \tag{2.1}$$

e

$$\langle \phi^{'}(u), V(u) \rangle \geq \beta \|\phi^{'}(u)\|^2, \tag{2.2}$$

onde $0 < \beta < \alpha$ e $Y = \{u \in X; \phi'(u) \neq 0\}$.

Definição 2.2 *Seja X um espaço de Banach, $S \subset X$ e $\alpha > 0$. Designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por*

$$S_\alpha = \{u \in X; d(u, S) \leq \alpha\},$$

onde $d(u, S) = \inf\{\|u - v\|; v \in S\}$.

Lema 2.1 *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $4\beta > \alpha$ e $\varepsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \forall\ u \in \phi^{-1}([c - 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)] \cap S_{2\delta}. \tag{2.3}$$

Então, existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se:

(i) $\eta(0,u)=u$;

(ii) $\eta(t,u)=u$ *se* $u\notin\phi^{-1}([c-2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1),c+2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)])\cap S_{2\delta}$;

(iii) $\eta(1,\phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)}\cap S)\subset\phi^{c-\epsilon}\cap S_{\delta}$;

(iv) $\eta(1,.):X\longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Sejam

$$A=\phi^{-1}([c-2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1),c+2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)])\cap S_{2\delta},$$

$$B=\phi^{-1}([c-\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1),c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)])\cap S_{\delta}$$

e

$$Y=\{u\in X;\phi^{'}(u)\neq 0\}.$$

Assim, note que $B\subset A\subset Y$. Considere $V:Y\longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e uma função localmente Lipschitziana $\rho:X\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u)=\frac{d(u,X\backslash A)}{d(u,X\backslash A)+d(u,B)},$$

de onde segue que $0\leq\rho\leq 1$, $\rho(u)=1$ se $u\in B$ e $\rho(u)=0$ se $u\in X\backslash A$. Considere ainda a seguinte aplicação localmente Lipschitziana $f:X\longrightarrow X$ definida por

$$f(u)=\begin{cases}-\rho(u)\dfrac{V(u)}{\|V(u)\|}, & se\ u\in A\\ 0, & se\ u\notin A.\end{cases}$$

Sendo $\|f(u)\|\leq 1$, para todo $u\in X$, segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases}\dot{w} &= f(w(t))\\ w(0) &= u\end{cases}$$

tem para cada $u\in X$ uma única w solução definida para todo $t\in\mathbb{R}$. Seja $\eta:[0,1]\times X\longrightarrow X$ definida por

$$\eta(t,u)=w(\delta t,u).$$

Então,

(i) $\eta(0,u) = w(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)]) \cap S_{2\delta}$.

De fato, considerando $w_1(t) = u$, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\dot{w}_1(t) = 0 = f(w_1(t)) = f(u), se\ u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} \dot{w}_1 & = & f(w_1(t)),\ \ se\ u \notin A. \\ w_1(0) & = & u. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de Picard (Teorema A.8), se $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u,\ \text{ para todo } \mathbb{R},$$

portanto

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u,\ \text{ para todo } t \in [0,1];$$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

De fato, note que para todo $t \geq 0$ e $u \in S$

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau,$$

o que implica

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))\|d\tau \leq \int_0^t d\tau = t.$$

De modo que, sendo $S_\delta = \{v \in X; d(v,S) \leq \delta\}$, onde $d(v,S) = inf\{\|v-u\|; u \in S\}$, obtemos para todo $t \in [0,\delta]$

$$\|w(t,u) - u\| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t,u),S) \leq \delta,\ \text{ para todo } u \in S,$$

o que implica

$$w(t,u) \in S_\delta,\ \text{ para todo } u \in S,$$

ou seja,

$$w(t,S) \subset S_\delta,\ \text{ para todo } t \in [0,\delta].$$

Logo,

$$\eta(t,S) \subset S_\delta, \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{2.4}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))\dot{w}(t,u)$$

e do problema de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))f(w(t,u)).$$

Da definição de f, tem-se $\dfrac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ se $w(t,u) \notin A$ e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi^{'}(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}.$$

Assim, de (2.2),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\beta\rho(w(t,u))\frac{\|\phi^{'}(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}, \tag{2.5}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \bigcap S$, note que:

a) Se $\phi(w(\widehat{t},u)) < c-\epsilon$, para algum $\widehat{t} \in [0,\delta)$, então

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\widehat{t},u)) < c-\epsilon.$$

Portanto, de (2.4),

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

b)Observe que para todo $t \in [0,\delta]$, temos

$$\phi(w(t,u)) \leq \phi(w(0,u)) = \phi(u) \leq c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1).$$

Consequentemente,

$$\phi(w(t,u)) \leq c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1).$$

Dessa forma, supondo que

$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}([c-\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1), c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)]) \cap S_\delta, \text{ para todo } t \in [0,\delta],$$

usando (2.1), (2.5) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))dt,$$

de onde segue

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\delta \|\phi'(w(t,u))\|dt,$$

logo

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta \leq c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1) - \frac{\beta}{\alpha}4\epsilon,$$

mostrando que

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c-\epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b)

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta, \text{ se } u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S;$$

(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que η é contínua e que possui inversa contínua.

Assim, considere as seguintes funções

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto g(u) = w(\delta t, u) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u). \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)),$$

de onde segue

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando propriedades de fluxo, obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

ou seja,

$$(g \circ h)(u) = u.$$

De modo análogo, temos

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Logo, temos que $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$ possui inversa dada por $\eta^{-1}(t, u) = w(-\delta t, u)$. Note ainda que $\eta(t, .)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Da mesma forma, temos que $\eta^{-1}(., u)$ também é contínua, donde concluímos que $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. ■

Definição 2.3 *Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Diremos que $(x_n) \subset X$ é uma sequência $(PS)_c$(Palais -Smale) para J, se $J(x_n) \to c$ e $J'(x_n) \to 0$.*

Definição 2.4 *Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que o funcional J satisfaz a condição (PS), se toda sequência $(PS)_c$ de J, possuir uma subsequência convergente qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.*

Lema 2.2 (Lema de Deformação) *Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que ϕ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ, então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se:*

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(iii)$\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$;

(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ *é um homeomorfismo.*

Demonstração: Devem existir constantes $\theta, \gamma > 0$, tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $\|\phi^{'}(u)\| \geq \gamma$, pois , caso contrário, existe uma sequência (u_n) com

$$\phi(u_n) \to c \;\; \text{e} \;\; \phi^{'}(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \;\; n \to +\infty. \tag{2.6}$$

Por hipótese, temos que ϕ satisfaz a condição (PS), logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em X. Sendo $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \tag{2.7}$$

e

$$\phi^{'}(u_{n_k}) \to \phi^{'}(u). \tag{2.8}$$

De (2.6), (2.7) e (2.8), tem-se

$$\phi(u) = c \;\; \text{e} \;\; \phi^{'}(u) = 0,$$

donde concluímos que c é um valor crítico de ϕ, contrariando a hipótese, logo mostramos que existem constantes $\theta, \gamma > 0$, tais que, se $u \in \phi^{-1}([c-2\theta, c+2\theta])$, temos $||\phi'(u)|| \geq \gamma$.

Assim, considerando $S = X$, $\epsilon \in (0, \theta]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\gamma}$, ou seja, $\gamma = \frac{4\epsilon}{\delta}$, pelo Lema 2.1, segue o resultado. ∎

Teorema 2.1 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional tal que*

(i) $I(0) = 0$ *e* $I(u) \geq \alpha > 0$*, para todo* $u \in X$ *com* $\|u\| = \rho$.

(ii) *Existe* $e \in X$ *tal que* $I(e) < 0$*, onde* $\|e\| > \rho$.

(iii) I *satisfaz a condição Palais- Smale.*

Então, existe $u \in X$ *tal que* $I'(u) = 0$ *e* $I(u) = c$*, onde* $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$, $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X); \gamma(0) = 0 \text{ } e \text{ } I(\gamma(1)) < 0\}$.

Demonstração: Seja $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$. Afirmamos que c está bem definido. De fato, pois sendo $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $I \circ \gamma$ é uma função contínua e sendo [0,1] um conjunto compacto, temos que $I \circ \gamma$ possui máximo em [0,1].

Afirmamos que $\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha, \forall \gamma \in \Gamma$

De fato, seja $\gamma \in \Gamma$ e defina

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h(t) = \|\gamma(t)\|. \end{aligned}$$

Observe que h é uma composição de funções contínuas, logo h é contínua. Além disso, sendo $e \in X \setminus \overline{B}_\rho$, temos que

$$h(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$$

e

$$h(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > \rho,$$

ou seja, $h(0) < \rho < h(1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = \rho$, de onde segue pela condição (i) que $I(\gamma(t_0)) \geq \alpha$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha, \ \ \forall \gamma \in \Gamma. \tag{2.9}$$

Definindo $H = \left\{\max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)); \gamma \in \Gamma\right\}$, segue da Afirmação acima, que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim, pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$ está bem definido.

De (2.9) temos que α é uma cota inferior para H, conseqüentemente pela definição de c, segue que $c \geq \alpha$. Suponha, por contradição, que c não é um valor crítico. Então, pelo **Lema de Deformação 2.2**, temos que dado $0 < \epsilon < \dfrac{c-\alpha}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(a) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ e $t \in [0,1]$;

(b) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \tag{2.10}$$

Considere $\widetilde{h}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Sendo $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $\gamma \in C([0,1], X)$, segue que $\widetilde{h} \in C([0,1], X)$. Uma vez que, $I(e) < \alpha < c - 2\epsilon$, tem-se $I(e) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, o que implica $e \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Da mesma forma, sendo $I(0) = 0 < \alpha < c - 2\epsilon$, tem-se $I(0) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, ou seja, $0 \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Assim, de (a),

$$\widetilde{h}(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\widetilde{h}(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde concluímos, que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Por (2.10), obtemos

$$I(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica $\gamma(t) \in I^{c+\epsilon}$ $\forall t \in [0,1]$. De (b),

$$\widetilde{h}(t) = \eta(1, \gamma(t)) \in I^{c-\epsilon} \ \ \forall t \in [0,1],$$

ou seja, $I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$ $\forall t \in [0,1]$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$$

e sendo, $c = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para I, finalizando assim a demonstração do Teorema . ■

Quando o funcional I satisfaz as condições i) e ii) do Teorema 2.1, diz-se que I verifica a geometria do Passo da Montanha.

Teorema 2.2 *Se* $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} > \dfrac{N-2}{N}$, $p, q > 1$, *então o sistema* (S) *tem pelo menos uma solução* $w = (w_1, w_2)$ *com* $w_i > 0$ *em* Ω *e* $w_i \in W^{2,s}(\Omega)$ *para* $s > 2$, $i = 1, 2$.

Para provar este teorema, mostraremos que o funcional ψ satisfaz os itens i), ii) e iii) do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.3 *Existe $\rho > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\psi(w) \geq \alpha$, para todo $w \in X$ tal que $|w|_X = \rho$.*

Demonstração:

Temos que $\psi(w) = \dfrac{q}{q+1}\displaystyle\int_\Omega \mid w_1 \mid^{\frac{q+1}{q}} + \dfrac{p}{p+1}\int_\Omega \mid w_2 \mid^{\frac{p+1}{p}} - \dfrac{1}{2}\int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1)$.

Note agora que da desigualdade de Holder com os expoentes $\dfrac{q+1}{q}$ e $q+1$, $\dfrac{p+1}{p}$ e $p+1$, temos

$$\int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1) \leq |w_1|_{\frac{q+1}{q}} |T_1 w_2|_{q+1} + |w_2|_{\frac{p+1}{p}} |T_2 w_1|_{p+1}.$$

Da desigualdade elementar $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, encontramos

$$\int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1) \leq \frac{1}{2}|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + \frac{1}{2}|T_1 w_2|^2_{q+1} + \frac{1}{2}|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}|T_2 w_1|^2_{p+1}.$$

Usando o fato de T_1 e T_2 serem operadores lineares e contínuos, segue-se que

$$\int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1) \leq \frac{1}{2}|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + \frac{1}{2}C_1|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}} + \frac{1}{2}C_2|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}}.$$

Daí, existe $\beta > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1) \quad \leq \quad \frac{\beta}{2}(|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + |w_2|^2_{\frac{p+1}{p}}). \tag{2.11}$$

Assim, substituindo (2.11) no funcional acima temos

$$\psi(w) \quad \geq \quad \frac{q}{q+1}\int_\Omega \mid w_1 \mid^{\frac{q+1}{q}} + \frac{p}{p+1}\int_\Omega \mid w_2 \mid^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\beta}{2}(|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + |w_2|^2_{\frac{p+1}{p}}). \tag{2.12}$$

Agora considere $c_\delta = min\left\{\frac{p}{p+1}\delta^{\frac{1}{p}-1}, \frac{q}{q+1}\delta^{\frac{1}{q}-1}\right\}$.

Desde que

$$c_\delta \quad \leq \quad \frac{p}{p+1}\delta^{\frac{1}{p}-1}$$

temos que

$$c_\delta|s|^2 \quad \leq \quad \frac{p}{p+1}\delta^{\frac{1}{p}-1}|s|^2. \tag{2.13}$$

Além disso, para $|s| \leq \delta$, segue-se que $\frac{1}{\delta^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{1}{|s|^{1-\frac{1}{p}}}$ ou seja,

$$\delta^{\frac{1}{p}-1} \leq |s|^{\frac{1}{p}-1}.$$

Assim de (2.13), temos

$$c_\delta |s|^2 \quad \leq \quad \frac{p}{p+1}|s|^{\frac{p+1}{p}}, \;\; \forall \; |s| \leq \delta. \tag{2.14}$$

Trocando p por q encontramos também

$$c_\delta |s|^2 \quad \leq \quad \frac{q}{q+1}|s|^{\frac{q+1}{q}}, \;\; \forall \; |s| \leq \delta. \tag{2.15}$$

Portanto, de (2.14) e (2.15)

$$\begin{aligned} \psi(w) \;\; &\geq \;\; c_\delta \int_{\Omega_0} |w_2|^2 + \frac{p}{p+1}\int_{\Omega\backslash\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + c_\delta \int_{\Omega_0} |w_1|^2 + \\ &+ \;\; \frac{q}{q+1}\int_{\Omega\backslash\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}} - \frac{\beta}{2}(|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + |w_2|^2_{\frac{p+1}{p}}). \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \psi(w) \;\; &\geq \;\; c_\delta \int_{\Omega_0} |w_2|^2 + \frac{p}{p+1}\int_{\Omega\backslash\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + c_\delta \int_{\Omega_0} |w_1|^2 + \\ &+ \;\; \frac{q}{q+1}\int_{\Omega\backslash\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}} - \frac{\beta}{2}\left(\int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} - \frac{\beta}{2}\left(\int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que, para todo $\Omega_0 \subset \Omega$, temos da desigualdade de Holder com os expoentes $\dfrac{2p}{p+1}$ e $\dfrac{2p}{p-1}$ que

$$\int_{\Omega_0} 1|w_2|^{\frac{p+1}{p}} \quad \leq \quad \left(\int_{\Omega_0} 1^{\frac{2p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_{\Omega_0} \left(|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{2p}}, \;\; \forall \Omega_0 \subset \Omega$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} \quad \leq \quad |\Omega_0|^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^2\right)^{\frac{p+1}{2p}}, \;\; \forall \Omega_0 \subset \Omega.$$

Daí,

$$|\Omega_0|^{\frac{-(p-1)}{p+1}} \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \quad \leq \quad \int_{\Omega_0} |w_2|^2, \;\; \forall \Omega_0 \subset \Omega. \tag{2.17}$$

Raciocinando da mesma forma e trocando p por q encontramos

$$|\Omega_0|^{\frac{-(q-1)}{q+1}} \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \leq \int_{\Omega_0} |w_1|^2, \ \forall \Omega_0 \subset \Omega. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.16), encontramos

$$\begin{aligned} \psi(w) \geq & \ c_\delta k_1 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + \frac{p}{p+1}\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + c_\delta k_2 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + \\ + & \ \frac{q}{q+1}\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}} - \frac{\beta}{2}\left(\int_{\Omega} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} - \frac{\beta}{2}\left(\int_{\Omega} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} &= \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \\ &\leq 2^{\frac{2p}{p+1}}\left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + 2^{\frac{2p}{p+1}}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Novamente, raciocinando como acima e trocando p por q, obtemos

$$\left(\int_{\Omega} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \leq 2^{\frac{2q}{q+1}}\left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + 2^{\frac{2q}{q+1}}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}}. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.20) e (2.21) em (2.19), encontramos

$$\begin{aligned} \psi(w) \geq & \ c_\delta k_1 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + \frac{p}{p+1}\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + \\ + & \ c_\delta k_2 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + \frac{q}{q+1}\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}} - \\ - & \ \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}\left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} - \\ - & \ \frac{\beta}{2}2^{\frac{2q}{q+1}}\left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2q}{q+1}}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Note que para δ suficientemente pequeno temos

$$c_\delta k_1 - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}} \geq k_3 > 0$$

e daí,

$$c_\delta k_1 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}\left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \geq k_3 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}. \tag{2.23}$$

Raciocinando da mesma forma trocando p por q, encontramos

$$c_\delta k_2 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} - \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2q}{q+1}} \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \geq k_4 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}}. \quad (2.24)$$

Substituindo (2.23) e (2.24) em (2.22), encontramos

$$\begin{aligned} \psi(w) &\geq k_3 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + \frac{p}{p+1} \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}} + \\ &+ k_4 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + \frac{q}{q+1} \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}} - \\ &- \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}} \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} - \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2q}{q+1}} \left(\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \psi(w) &\geq k_3 \left(\int_{\Omega_0} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + \frac{p}{p+1} |w_2|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p}(\Omega\setminus\Omega_0)} + \\ &+ k_4 \left(\int_{\Omega_0} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + \frac{q}{q+1} |w_1|^{\frac{q+1}{q}}_{\frac{q+1}{q}(\Omega\setminus\Omega_0)} - \\ &- \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}} |w_2|^2_{\frac{p+1}{p}(\Omega\setminus\Omega_0)} - \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2q}{q+1}} |w_1|^2_{\frac{q+1}{q}(\Omega\setminus\Omega_0)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Note que

$$\frac{p}{p+1} x^{\frac{p+1}{p}} - \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}} x^2 \geq k_5 x^2,$$

se e somente se,

$$\frac{p}{p+1} x^{\frac{p+1}{p}} \geq \left(k_5 + \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}}\right) x^2,$$

se e somente se,

$$\frac{p}{p+1} \left(k_5 + \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}}\right)^{-1} \geq x^{\frac{p-1}{p}},$$

se e somente se,

$$x \leq \left[\frac{p}{p+1} \left(k_5 + \frac{\beta}{2} 2^{\frac{2p}{p+1}}\right)^{-1}\right]^{\frac{p}{p-1}}.$$

Daí, para $x = |w_2|_{\frac{p+1}{p}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p}{p+1}\left(k_5 + \dfrac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}\right)^{-1}\right]^{\frac{p}{p-1}}$, temos que

$$\frac{p}{p+1}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}_{\frac{p+1}{p}(\Omega\backslash\Omega_0)} - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}(\Omega\backslash\Omega_0)} \ \geq \ k_5|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}(\Omega\backslash\Omega_0)}. \tag{2.27}$$

Raciocinando da mesma forma e trocando p por q, encontramos

$$\frac{q}{q+1}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}_{\frac{q+1}{q}(\Omega\backslash\Omega_0)} - \frac{\beta}{2}2^{\frac{2q}{q+1}}|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}(\Omega\backslash\Omega_0)} \ \geq \ k_6|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}(\Omega\backslash\Omega_0)}. \tag{2.28}$$

Substituindo (2.27) e (2.28) em (2.26), encontramos

$$\begin{aligned} \psi(w) \ &\geq \ k_3\left(\int_{\Omega_0}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + k_5|w_2|^2_{\frac{p+1}{p}(\Omega\backslash\Omega_0)} + \\ &+ \ k_4\left(\int_{\Omega_0}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + k_6|w_1|^2_{\frac{q+1}{q}(\Omega\backslash\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Considerando $k_7 = min\{k_3, k_5\}$ e $k_8 = min\{k_4, k_6\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(w) \ &\geq \ k_7\left[\left(\int_{\Omega_0}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + \left(\int_{\Omega\backslash\Omega_0}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}}\right] + \\ &+ \ k_8\left[\left(\int_{\Omega_0}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}} + \left(\int_{\Omega\backslash\Omega_0}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}}\right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Aplicando o mesmo raciocínio em (2.29) usados para obter (2.20) e (2.21) encontramos

$$\begin{aligned} \psi(w) \ &\geq \ k_9\left[\int_{\Omega_0}|w_2|^{\frac{p+1}{p}} + \int_{\Omega\backslash\Omega_0}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right]^{\frac{2p}{p+1}} + \\ &+ \ k_{10}\left[\int_{\Omega_0}|w_1|^{\frac{q+1}{q}} + \int_{\Omega\backslash\Omega_0}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right]^{\frac{2q}{q+1}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\psi(w) \ \geq \ k_9\left(\int_{\Omega}|w_2|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{2p}{p+1}} + k_{10}\left(\int_{\Omega}|w_1|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{2q}{q+1}}$$

ou ainda,

$$\psi(w) \ \geq \ k_{11}|w|^2_X.$$

Considerando $|w|_X = \rho$ com

$$\rho = min\left(\frac{1}{2}\left[\frac{p}{p+1}\left(k_5 + \frac{\beta}{2}2^{\frac{2p}{p+1}}\right)^{-1}\right]^{\frac{p}{p-1}}, \frac{1}{2}\left[\frac{q}{q+1}\left(k_6 + \frac{\beta}{2}2^{\frac{2q}{q+1}}\right)^{-1}\right]^{\frac{q}{q-1}}, \delta\right)$$

temos

$$\psi(w) \;\; \geq \;\; k_{11}\rho^2 := \alpha > 0$$

para todo $|w|_X = \rho$ e o lema está demonstrado. ■

Lema 2.4 *Existe $t > 0$ e $\overline{w} \in X$ tal que $\psi(t\overline{w}) \leq 0$.*

Demonstração:

Considere $\overline{w} = (\varphi_1, \varphi_2) \in X$ fixado onde $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ com $\varphi_i > 0$ em Ω e tal que $\displaystyle\int_\Omega (\varphi_1 T_1 \varphi_2 + \varphi_2 T_2 \varphi_1) > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(t\overline{w}) &= \frac{q}{q+1}\int_\Omega |t|^{\frac{q+1}{q}}|\varphi_1|^{\frac{q+1}{q}} + \frac{p}{p+1}\int_\Omega |t|^{\frac{p+1}{p}}|\varphi_2|^{\frac{p+1}{p}} + \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(t^2(\varphi_1 T_1 \varphi_2) + t^2(\varphi_2 T_2 \varphi_1)\Big) \end{aligned}$$

pois T_1 e T_2 são lineares. Daí,

$$\begin{aligned} \psi(t\overline{w}) &= \frac{q}{q+1}|t|^{\frac{q+1}{q}}\int_\Omega |\varphi_1|^{\frac{q+1}{q}} + \frac{p}{p+1}|t|^{\frac{p+1}{p}}\int_\Omega |\varphi_2|^{\frac{p+1}{p}} + \\ &- \frac{t^2}{2}\int_\Omega (\varphi_1 T_1 \varphi_2 + \varphi_2 T_2 \varphi_1). \end{aligned}$$

Desde que, $\displaystyle\int_\Omega (\varphi_1 T_1 \varphi_2 + \varphi_2 T_2 \varphi_1) > 0$ e fazendo $t \to +\infty$, temos $\psi(t\overline{w}) \to -\infty$ e o resultado segue, já que $\dfrac{q+1}{q}, \dfrac{p+1}{p} < 2$. ■

Lema 2.5 *O funcional $\psi(w)$ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração:

Seja $(w_n) = (w_{1n}, w_{2n}) \subset X$ uma sequência $(PS)_c$ de ψ, isto é, $\psi(w_n) \to c$ e $\psi'(w_n) \to 0$ em X'. Vamos mostrar que $(w_n) = (w_{1n}, w_{2n})$ possui uma subsequência convergente em X.

Note que desde que $(\psi(w_n))$ é convergente, segue-se que existe $k_1 > 0$ tal que

$$\psi(w_n) \leq |\psi(w_n)| \leq k_1, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Além disso,

$$-\psi'(w_n)w_n \leq |\psi'(w_n)w_n| \leq ||\psi'(w_n)||_{X'}|w_n|_X,$$

onde X' é o dual topológico de X.

Desde que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\psi'(w_n)|| = 0$, segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$-\psi'(w_n)w_n \leq |w_n|_X. \tag{2.31}$$

Por (2.30), temos que

$$\frac{p}{p+1}\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{q}{q+1}\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (w_{1n}T_1w_{2n} + w_{2n}T_2w_{1n}) + k_1 \tag{2.32}$$

e por (2.31) segue-se que

$$-\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} - \int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} \leq |w_n|_X - \int_\Omega (w_{1n}T_1w_{2n} + w_{2n}T_2w_{1n}), \ \forall n \geq n_0,$$

ou ainda

$$\int_\Omega (w_{1n}T_1w_{2n} + w_{2n}T_2w_{1n}) \leq |w_n|_X + \int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}}. \tag{2.33}$$

Combinando (2.32) e (2.33) e passando a uma subsequência, que ainda chamaremos de $(w_n) = (w_{1n}, w_{2n})$ temos

$$\begin{aligned}\frac{p}{p+1}\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{q}{q+1}\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} &\leq \frac{1}{2}|w_n|_X + \frac{1}{2}\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \\ &+ \frac{1}{2}\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} + k_1 \ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{p}{p+1} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \left(\frac{q}{q+1} - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} \leq \frac{1}{2}|w_n|_X + k_1 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou ainda

$$\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\int_\Omega |w_{2n}|^{\frac{p+1}{p}} + \left(\frac{q-1}{q+1}\right)\int_\Omega |w_{1n}|^{\frac{q+1}{q}} \leq |w_n|_X + k_1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considerando $k_2 = min\left\{\dfrac{(p-1)}{p+1}, \dfrac{(q-1)}{q+1}\right\}$, temos

$$k_2\left[|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}}\right] \leq |w_n|_X + k_1, \tag{2.34}$$

onde $k_2 > 0$.

Suponha, por contradição, que a menos de subsequência, $|w_n| \to \infty$. Assim, $|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}, |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}} \to \infty$ e daí para n suficientemente grande,

$$|w_n|_X = \sqrt{|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^2 + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^2} \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}. \tag{2.35}$$

Portanto, de (2.34) e (2.35), obtemos

$$k_2\left[|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}}\right] \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}} + k_1. \tag{2.36}$$

Considerando $s = min\left\{\dfrac{p+1}{p}, \dfrac{q+1}{q}\right\}$, temos que $s > 1$ e para n suficientemente grande

$$|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^s + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^s \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^{\frac{q+1}{q}}. \tag{2.37}$$

Combinando (2.36) e (2.37), encontramos

$$k_2\left[|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^s + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^s\right] \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}} + k_1. \tag{2.38}$$

Recorde novamente que para todo $a, b \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}(a+b)^s \leq [2max\{a,b\}]^s &= 2^s max\{a^s, b^s\}\\ &\leq 2^s(a^s + b^s),\ \forall s \geq 1.\end{aligned}$$

Portanto, usando a fórmula para $a = |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}$ e $b = |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}$, encontramos

$$\frac{1}{2^s}\left(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}\right)^s \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}^s + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}^s. \tag{2.39}$$

Substituindo (2.39) em (2.38) encontramos

$$\frac{k_2}{2^s}\left(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}\right)^s \leq |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}} + k_1. \tag{2.40}$$

Dividindo ambos os membros em (2.40) por $\left(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}\right)^s$ temos

$$\frac{k_2}{2^s} \leq \frac{1}{\left(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}\right)^{s-1}} + \frac{k_1}{\left(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}\right)^s}.$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$ e desde que $s > 1$ temos $\frac{k_2}{2^s} \leq 0$, o que é um absurdo. Logo, $(|w_n|_X)$ é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$.

Considerando a sequência $z_n = Tw_n = (T_1 w_{2n}, T_2 w_{1n})$, desde que T_1 e T_2 são operadores lineares e contínuos, temos

$$\begin{aligned} |z_n|_{L^{q+1}\times L^{p+1}} &= |(T_1 w_{2n}, T_2 w_{1n})|_{L^{q+1}\times L^{p+1}} \\ &= |T_1 w_{2n}|_{q+1} + |T_2 w_{1n}|_{p+1} \\ &\leq C_1 |w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}} + C_2 |w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Desde que a sequência $(w_n) \subset X$ é limitada, segue-se que as sequências $(|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}})$ e $(|w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}})$ são limitadas em $\mathbb{R}$ e, portanto, por (2.41), (z_n) é uma sequência limitada em $L^{q+1}(\Omega) \times L^{p+1}(\Omega)$.

Da relação $Tw_n = z_n$, temos que

$$\begin{aligned} -\triangle z_{1n} + z_{1n} &= w_{2n} \in L^{\frac{p+1}{p}} \\ -\triangle z_{2n} + z_{2n} &= w_{1n} \in L^{\frac{q+1}{q}}. \end{aligned}$$

Do teorema de Agmon- Douglis - Nirenberg (Teorema A.1)

$$\begin{aligned} z_{1n} &\in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \\ z_{2n} &\in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \cap W_0^{1,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \end{aligned}$$

além disso, $|z_{1n}|_{W^{2,\frac{p+1}{p}}} \leq c|w_{2n}|_{\frac{p+1}{p}}$ e $|z_{2n}|_{W^{2,\frac{q+1}{q}}} \leq c|w_{1n}|_{\frac{q+1}{q}}$.

Portanto, (z_{1n}) é limitada em $W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e (z_{2n}) é limitada em $W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega)$.

Da reflexividade desses espaços, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} z_{1n} &\rightharpoonup z_1 \text{ em } W^{2,\frac{p+1}{p}}(\Omega) \\ z_{2n} &\rightharpoonup z_2 \text{ em } W^{2,\frac{q+1}{q}}(\Omega) \end{aligned}$$

e das imersões compactas de Sobolev, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} z_{1n} &\rightarrow z_1 \text{ em } L^{\alpha}(\Omega) \\ z_{2n} &\rightarrow z_2 \text{ em } L^{\beta}(\Omega) \end{aligned}$$

com $1 \leq \alpha, \beta < 2^*$, ou ainda, a menos de subsequência,

$$z_n = (z_{1n}, z_{2n}) \;\rightarrow\; z = (z_1, z_2) \text{ em } L^{\alpha}(\Omega) \times L^{\beta}(\Omega)$$

com $1 \leq \alpha, \beta < 2^*$.

Além disso,

$$z_{1n}(x) \;\rightarrow\; z_1(x) \text{ q.s. em } \Omega$$

e existe $g \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que

$$|z_{1n}(x)| \;\leq\; g(x) \text{ q.s. em } \Omega.$$

Daí,

$$\left||z_{1n}(x)|^{q-1} z_{1n}(x)\right|^{\frac{q+1}{q}} \;\rightarrow\; \left||z_1(x)|^{q-1} z_1(x)\right|^{\frac{q+1}{q}} \text{ q.s. em } \Omega$$

e

$$\left||z_{1n}(x)|^{q-1} z_{1n}(x)\right|^{\frac{q+1}{q}} \;\leq\; g^{q+1}(x) \text{ q.s. em } \Omega \text{ com } g^{q+1} \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver apêndice A), teremos:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} \left||z_{1n}|^{q-1} z_{1n}\right|^{\frac{q+1}{q}} \;=\; \int_{\Omega} \left||z_1|^{q-1} z_1\right|^{\frac{q+1}{q}}. \tag{2.42}$$

Pelo mesmo raciocínio,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} \left||z_{2n}|^{p-1} z_{2n}\right|^{\frac{p+1}{p}} \;=\; \int_{\Omega} \left||z_2|^{p-1} z_2\right|^{\frac{p+1}{p}}. \tag{2.43}$$

Note que

$$-\triangle z_{1n} + z_{1n} = |z_{2n}|^{p-1} z_{2n} \;=\; w_{2n} \text{ é limitada em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$$

e

$$-\triangle z_{2n} + z_{2n} = |z_{1n}|^{q-1} z_{1n} \;=\; w_{1n} \text{ é limitada em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega).$$

Passando a subsequência,

$$\begin{array}{rcl} w_{1n} & \rightharpoonup & w_1 \text{ em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega) \text{ e} \\ w_{2n} & \rightharpoonup & w_2 \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega). \end{array}$$

Da compacidade dos operadores T_1 e T_2, a menos de subsequência

$$\begin{array}{rcl} T_1 w_{2n} = z_{1n} & \rightarrow & z_1 \text{ em } L^{q+1}(\Omega) \\ T_2 w_{1n} = z_{2n} & \rightarrow & z_2 \text{ em } L^{p+1}(\Omega). \end{array}$$

Portanto, $Tw = (T_1 w_2, T_2 w_1) = (z_1, z_2)$, onde $w = (w_1, w_2)$.

Assim,

$$\begin{array}{rcl} |w_n - w|_X^2 & = & |(w_{1n}, w_{2n}) - (w_1, w_2)|_X^2 \\ & = & |(w_{1n} - w_1, w_{2n} - w_2)|_X^2. \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} |w_n - w|_X^2 & = & |w_{1n} - w_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + |w_{2n} - w_2|^2_{\frac{p+1}{p}} \\ & = & ||z_{1n}|^{q-1} z_{1n} - |z_1|^{q-1} z_1|^2_{\frac{q+1}{q}} + ||z_{2n}|^{p-1} z_{2n} - |z_2|^{p-1} z_2|^2_{\frac{p+1}{p}}. \end{array}$$

Passando ao limite de $n \to +\infty$, e usando (2.42) e (2.43) teremos $|w_n - w|_X \to 0$. ■

Para obter soluções positivas para o problema (S), precisamos demonstrar a seguinte caracterização do nível minimax do Teorema do Passo da Montanha:

$c = \inf\limits_{w \in X \setminus \{(0,0)\}} \sup\limits_{t \geq 0} \psi(tw).$

Teorema 2.3 Se c é o nível do Passo da Montanha do funcional ψ, então

$$c = \inf_{u \in X \setminus \{(0,0)\}} \sup_{t \geq 0} \psi(tw).$$

Demonstração: Considere

$$c_\epsilon = \inf_{u \in X \setminus \{(0,0)\}} \sup_{t \geq 0} \psi(tw)$$

e defina a função $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(t) = \psi(tw)$ para algum $w \in X \backslash \{(0,0)\}$ fixado. Temos do Lema 2.3 que existe $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $\phi(t) = \psi(tw) \geq \alpha > 0$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Além disso, do Lema 2.4, $\phi(t) = \psi(tw) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Daí existe $t_w \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(t_w) = \max_{t \geq 0} \phi(t) = \max_{t \geq 0} \psi(tw).$$

Assim, $\phi'(t_w) = 0$ se, somente se,

$$t_w^{\frac{1}{q}} \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + t_w^{\frac{1}{p}} \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}} - t_w \int_\Omega < w, Tw >= 0.$$

Assim,

$$t_w^{\frac{1}{q}-1} \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + t_w^{\frac{1}{p}-1} \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}} = \int_\Omega < w, Tw > .$$

Suponha que exista $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(t_{1w}) = \max_{t \geq 0} \phi(t) = \max_{t \geq 0} \psi(tw).$$

Logo, $\phi'(t_{1w}) = 0$ se, somente se,

$$t_{1w}^{\frac{1}{q}-1} \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + t_{1w}^{\frac{1}{p}-1} \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}} = \int_\Omega < w, Tw > .$$

Sendo assim,

$$t_w^{\frac{1}{q}-1} \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + t_w^{\frac{1}{p}-1} \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}} = t_{1w}^{\frac{1}{q}-1} \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + t_{1w}^{\frac{1}{p}-1} \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}}.$$

E portanto,

$$\left(t_w^{\frac{1}{q}-1} - t_{1w}^{\frac{1}{q}-1}\right) \int_\Omega |w_1|^{\frac{q+1}{q}} + \left(t_w^{\frac{1}{p}-1} - t_{1w}^{\frac{1}{p}-1}\right) \int_\Omega |w_2|^{\frac{p+1}{p}} = 0.$$

Daí, t_w é único.

Note que

$$c_\epsilon = \inf_{z \in M} \psi(z),$$

onde $M = \{z = t_w w : w \in X \backslash \{(0,0)\}\}$. De fato, $z \in M$, então $z \neq (0,0)$ e desde que $\phi'(t_w) = 0$ temos que

$$\int_\Omega |z_1|^{\frac{q+1}{q}} + \int_\Omega |z_2|^{\frac{p+1}{p}} \quad = \quad \int_\Omega < w, Tw >,$$

onde $z = (z_1, z_2)$.

Assim,

$$\phi(z) = \max_{t \geq 0} \phi(t) = \max_{t \geq 0} \psi(tw) \geq c_\epsilon.$$

Logo,

$$\inf_{z \in M} \psi(z) \geq c_\epsilon.$$

Por outro lado, para $w \neq (0,0)$ fixado

$$\inf_{z \in M} \psi(z) \leq \psi(t_w w) = \max_{t \geq 0} \psi(tw).$$

Daí,

$$\inf_{z \in M} \psi(z) \leq c_\epsilon,$$

donde concluimos que

$$\inf_{z \in M} \psi(z) = c_\epsilon.$$

Provaremos primeiramente que

$$c \leq c_\epsilon.$$

Desde que $\psi(t\bar{w}) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, seja $\tilde{t} > 0$ verificando $\psi(\tilde{t}\bar{w}) < 0$.

Considere

$$\bar{\gamma}(t) = (\tilde{t}\bar{w})t.$$

Temos $\bar{\gamma}(0) = 0$ e $\psi(\bar{\gamma}(1)) < 0$ e assim $\bar{\gamma} \in \Gamma$. Além disso,

$$\sup_{t \in [0,1]} \psi(\bar{\gamma}(t)) \leq \sup_{t \geq 0} \psi(tw)$$

e portanto,

$$c \leq c_\epsilon.$$

Finalmente, provaremos que

$$c \geq c_\epsilon.$$

Dado $\gamma \in \Gamma$, temos que $\gamma(0) = 0$ e $\psi(\gamma(1)) < 0$. Assim, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$\psi(\gamma(t_\gamma)) = \max_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Desde que $\gamma(t_\gamma) \in X$, segue-se que $\gamma(t_\gamma) \in M$ e

$$c_\epsilon = \inf_{v\in M} \psi(v) \leq \psi(\gamma(t_\gamma)) = \sup_{t\in[0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Portanto,

$$c \geq c_\epsilon,$$

e o teorema esta provado. ■

Para terminarmos a demontração do Teorema, resta-nos mostrar que as soluções de (S) são positivas.

Lema 2.6 *Se $w = (w_1, w_2) \in X$ é solução de (S), então w_1 e w_2 são soluções positivas do problema (S).*

Demonstração: Seja $w = (w_1, w_2) \in X$ um ponto crítico do funcional ψ. Daí,
$\psi(w) = \dfrac{q}{q+1}\displaystyle\int_\Omega \mid w_1 \mid^{\frac{q+1}{q}} + \dfrac{p}{p+1}\displaystyle\int_\Omega \mid w_2 \mid^{\frac{p+1}{p}} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega < w, Tw >= c,$ onde

$$c = \inf_{w\in X\setminus\{(0,0)\}} \sup_{t\geq 0} \psi(tw).$$

Vamos mostrar que $w^+ = (w_1^+, w_2^+) = (0,0)$ ou $w^- = (w_1^-, w_2^-) = (0,0)$, onde $w_i^\pm = max\{\pm w_i, 0\}$.

Observe que escrevendo $w_1 = w_1^+ - w_1^-$ e $w_2 = w_2^+ - w_2^-$, segue da linearidade de T a seguinte igualdade

$$\int_\Omega < w, Tw > = \int_\Omega < w^+, Tw^+ > + \int_\Omega < w^-, Tw^- > . \tag{2.44}$$

De fato,

$$\int_\Omega < w, Tw > = \int_\Omega < (w_1, w_2), T(w_1, w_2) > .$$

Assim,

$$\int_\Omega < w, Tw > = \int_\Omega < (w_1, w_2), (T_1 w_2, T_2 w_1) > .$$

De onde segue,

$$\int_\Omega < w, Tw > \;=\; \int_\Omega (w_1 T_1 w_2 + w_2 T_2 w_1).$$

Tomando $w^+ = (w_1^+, w_2^+)$ e $w^- = (w_1^-, w_2^-)$, temos

$$\int_\Omega < w, Tw > \;=\; \int_\Omega ((w_1^+ - w_1^-) T_1 (w_2^+ - w_2^-) + (w_2^+ - w_2^-) T_2 (w_1^+ - w_1^-)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega < w, Tw > \;&=\; \int_\Omega (w_1^+ T_1 w_2^+ - w_1^+ T_1 w_2^-) - \int_\Omega (w_1^- T_1 w_2^+ - w_1^- T_1 w_2^-) + \\ &+\; \int_\Omega (w_2^+ T_2 w_1^+ - w_2^+ T_2 w_1^-) - \int_\Omega (w_2^- T_2 w_1^+ - w_2^- T_2 w_1^-),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\int_\Omega < w, Tw > \;&=\; \int_\Omega w_1^+ T_1 w_2^+ + \int_\Omega w_1^- T_1 w_2^- + \int_\Omega w_2^+ T_2 w_1^+ + \int_\Omega w_2^- T_2 w_1^- \\ &-\; \int_\Omega \left[w_1^+ T_1 w_2^- + w_2^+ T_2 w_1^- \right] - \int_\Omega \left[w_1^- T_1 w_2^+ + w_2^- T_2 w_1^+ \right].\end{aligned}$$

Do Lema 1.4, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_\Omega < w, Tw > \;&=\; \int_\Omega w_1^+ T_1 w_2^+ + \int_\Omega w_1^- T_1 w_2^- + \int_\Omega w_2^+ T_2 w_1^+ + \int_\Omega w_2^- T_2 w_1^- \\ &-\; 2 \int_\Omega \left[w_1^+ T_1 w_2^- + w_2^+ T_2 w_1^- \right].\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega < w, Tw > \;=\; \int_\Omega < w^+, Tw^+ > + \int_\Omega < w^-, Tw^- > -2 \int_\Omega < w^+, Tw^- > .$$

Desde que w é um ponto crítico do funcional ψ, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega < w, Tw > \;&=\; \int_\Omega < w^+, Tw^+ > + \int_\Omega < w^-, Tw^- > -2 \int_\Omega |w_1^+|^{\frac{1}{q}-1} w_1^+ w_1^- \\ &-\; 2 \int_\Omega |w_2^+|^{\frac{1}{p}-1} w_2^+ w_2^-\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega < w, Tw > \;=\; \int_\Omega < w^+, Tw^+ > + \int_\Omega < w^-, Tw^- > .$$

A igualdade (2.44) implica que

$$\psi(w) \;=\; \max_{t\geq 0}\psi(tw) \geq \psi(tw) = \psi(tw^+) + \psi(tw^-),\ \forall t \geq 0.$$

Isto é,

$$\psi(w) \;\geq\; \psi(tw^+) + \psi(tw^-),\ \forall t \geq 0. \tag{2.45}$$

Suponha por contradição que $w^+ \neq 0$ e $w^- \neq 0$, logo, $w^+ = (w_1^+, w_2^+) \neq (0,0)$ e $w^- = (w_1^-, w_2^-) \neq (0,0)$. Daí, $\int_\Omega < w^+, Tw^+ >> 0$ e $\int_\Omega < w^-, Tw^- >> 0$, pois $w^+ \neq 0 \Rightarrow w_1^+ \neq 0$ *e* $w_2^+ \neq 0$, pois se pelo menos uma fosse identicamente nula, teríamos

$$\int_\Omega < w^+, Tw^+ >= 0.$$

Assim,

$$\psi(tw^+) \;=\; \frac{p}{p+1}\int_\Omega |\ tw_2^+ \ |^{\frac{p+1}{p}} + \frac{q}{q+1}\int_\Omega |\ tw_1^+ \ |^{\frac{q+1}{q}} - \frac{1}{2}\int_\Omega < (T(tw^+), tw^+) > .$$

e portanto,

$$\psi(tw^+) \;=\; \frac{p}{p+1}|t|^{\frac{p+1}{p}}\int_\Omega |w_2^+|^{\frac{p+1}{p}} + \frac{q}{q+1}|t|^{\frac{q+1}{q}}\int_\Omega |tw_1^+|^{\frac{q+1}{q}}.$$

Sendo assim, $\psi(tw^+) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

O que é uma contradição, pois, $c = \psi(w) \geq \psi(tw^+) + \psi(tw^-)$.

Da mesma forma se $\int_\Omega < w^-, Tw^- >= 0$, teríamos, $\psi(tw^-) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

Agora fixe $t_0^\pm$ números reais satisfazendo,

$$\begin{aligned}\psi(t_0^+ w^+) &= \max_{t\geq 0}\psi(tw^+)\ e\\ \psi(t_0^- w^-) &= \max_{t\geq 0}\psi(tw^-).\end{aligned}$$

Usando a caracterização do nível c do passo da montanha, temos:

$$\psi(t_0^+ w^+) \;\geq\; c = \inf_{w\in X\setminus\{(0,0)\}}\sup_{t\geq 0}\psi(tw) \tag{2.46}$$

e

$$\psi(t_0^- w^-) \;\geq\; c = \inf_{w\in X\setminus\{(0,0)\}}\sup_{t\geq 0}\psi(tw). \tag{2.47}$$

Substituindo t_0^+ em (2.44) e usando (2.45) e (2.46), temos

$$\psi(w) \geq \psi(t_0^+ w^+) + \psi(t_0^+ w^-)$$

E assim, $c = \psi(w) \geq \psi(t_0^+ w^+) + \psi(t_0^+ w^-) \geq c + \psi(t_0^+ w^-)$.

Logo, $\psi(t_0^+ w^-) \leq 0$ implica que $t_0^+ > t_0^-$.

Agora substituindo, t_0^- em (2.44) e usando (2.45) e (2.47), temos

$$\psi(w) \geq \psi(t_0^- w^+) + \psi(t_0^- w^-).$$

Assim, $c = \psi(w) \geq \psi(t_0^- w^+) + \psi(t_0^- w^-) \geq c + \psi(t_0^- w^+)$.

Logo, $\psi(t_0^- w^+) \leq 0$ implica que $t_0^- > t_0^+$.

O que é um absurdo.

Portanto, $w^+ = 0$ ou $w^- = 0$. Assim, sempre podemos considerar $w^- = 0$, sem perda de generalidades, pois caso contrário $\widehat{w} = (-w_1, -w_2)$ que verifica $\widehat{w}^+ \neq 0$, com $\psi'(\widehat{w}) = 0$ e $\psi(\widehat{w}) = c$. ∎

Apêndice A

Resultados Básicos

Teorema A.1 *(Teorema de Agmon- Douglis - Nirenberg)(ver [5], pg 197) Seja Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitado. Seja $1 < r < \infty$. Então para cada $f \in L^r(\Omega)$ existe uma única $u \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ solução da equação,*

$$-\Delta u + u = f \text{ em } \Omega.$$

Além disso, existe uma constante C independente de f e u tal que $||u||_{W^{2,r}} \leq C|f|_r$.

Teorema A.2 *(ver [15], pg 75) Seja Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^N$,$(N \geq 2)$ Ω de classe C^m, e $1 \leq r < \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

a)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{nr}{n-mr} = r*$ *se* $mr < n$;

b)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *se* $mr = n$;

c)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, $mr > N$ *onde* k *é um inteiro tal que* $k < m - \frac{n}{r} \leq k+1$ *e* λ *um real satisfazendo* $0 < \lambda \leq m - k - \frac{n}{r} = \lambda_0$ *se* $\lambda_0 < 1$ *e* $0 < \lambda < 1$ *se* $\lambda_0 = 1$.

Teorema A.3 *(ver [15], pg 84) Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, Ω de classe C^m, e $1 \leq r \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

a)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \dfrac{nr}{n-mr}$ *se* $mp < n$;

b)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *se* $mr = n$;

c)$W^{m,r}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $k < m - \frac{n}{r} \leq k+1$ *se* $mr > n$ *onde* k *é um inteiro não negativo.*

Proposição A.1 *(ver [5], pg 90) Sejam* E *,*F *e* G *três espaços de Banach. Se* $T : E \to F$ *é um operador linear contínuo e* $S : F \to G$ *é um operador compacto, então* $S \circ T$ *é um operador compacto.*

Teorema A.4 *(Desigualdade de Holder)(ver [3], pg 56) Sejam* $f \in L_p$ *e* $g \in L_q$ *com* $p > 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então* $fg \in L_1$ *e* $|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q$*.*

Teorema A.5 *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue)(ver [3], pg 44) Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que converge quase sempre (q.s) para uma função* f *mensurável de valor real. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.6 *(ver [5], pg 58) Sejam* (f_n) *uma sequência em* L_p *e* $f \in L_p$*, tais que* $|f_n - f|_p \to 0$*. Então, existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que* $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.s em* Ω *e* $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$*, para todo* k *e q.s em* Ω *com* $h \in L_p$*.*

Definição A.1 *(ver [16], pg 07) Seja* X *um espaço normado e* $J : X \to \mathbb{R}$ *um funcional. Dizemos que* J *é Gateaux diferenciável em* u *quando,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u+th) - J(u)}{t} \text{ existe }.$$

Definição A.2 *(ver [16], pg 07) Seja* X *um espaço normado e* $J : X \to \mathbb{R}$ *um funcional. Dizemos que* J *é Frechet diferenciável em* $u \in X$ *se existir* $L : X \to \mathbb{R}$ *um funcional linear tal que*

$$\frac{J(u+h) - J(u) - L(h)}{\|h\|} \to 0.$$

Proposição A.2 *(ver [16], pg 08) Se a diferencial de* J *no sentido de Gateaux é contínua em* U*, então* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$*.*

Teorema A.7 *(Teorema do valor Médio)(ver [6], pg 66) Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no aberto* U *se o segmento de reta* $[a, a+h]$ *estiver contido em* U*, então existe* $0 < c < 1$*, tal que*

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a+ch).$$

Lema A.1 *(Lema de Du Bois Raymond')(ver [5], pg 61) Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\int_\Omega fu = 0, \forall\ u \in C_0^\infty(\Omega)$. *Então,* $f = 0$, *q.s. em* Ω.

Teorema A.8 *(Teorema de Picard)(ver [14], pg 200) Seja um aberto* $U \subset \mathbb{R} \times E$, *onde* E *é um espaço de Banach e* $f : U \to E$ *uma aplicação contínua, cumprindo a condição de Lipschitz* $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|$, *onde a constante* c *não depende dos pontos* (t,x) *e* (t,y) *em* U. *Então para cada* $(t_0, x_0) \in U$, *existe um intervalo aberto* I *contendo* t_0 *e uma única função diferenciável* $\varphi : I \to E$ *tal que* $\varphi(t_0) = x_0$ *e, para todo* $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Bibliografia

[1] Ambrosetti A. e Rabinowitz P.. *Dual variational Methods in Critical Point Theory and Applications. J. Functional Analysis,Vol. 14(1973)349-381..*

[2] Ávila I. Yang J., *On the existence and shape of least energy solutions for some elliptic systems. J. Differential Equations 191 (2003) 348-376.*

[3] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley, 1995.*

[4] Bartsch T. e de Figueiredo D.G., *Infinitely many solutions of nonlinear elliptic systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, (The Herbert Amann Anniversary Volume) 35 (1999) 51-68.*

[5] Brézis, Haim, *Analyse Fonctionelle . 2ª ed. Masson, 1987.*

[6] Cipolatti R., *Cálculo Avançado I. Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2002.*

[7] Clément Ph, de Figueiredo D.G e Mitidieri E., *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems. Comm Part Diff Eq 17 (1992) 923-940.*

[8] de Figueiredo D.G e Felmer P.L., *On Superquadratic Elliptic Systems. Trans Amer Math Soc 343 (1994) 119-123.*

[9] de Figueiredo D.G e Yang J., *Decay, Symmetry and Existence of positive solutions of semilinear elliptic Systems. Nonl Anal, TMA. 33 (1998) 211-234.*

[10] de Figueiredo D.G., *Nonlinear Elliptic Systems. An. Acad. Bras. Ciênc., Vol. 72, nº 4 (2000) 453-469.*

[11] HULSHOF J. E VAN DER VORST , *Differential Systems with Strongly Indefinite Variational Struture. J Fctl Anal 114 (1993) 32-58.*

[12] KOLMOGOROV A., *Elementos de la Teoria de Funciones y de Analisis Funcional. Moscu, Mir 1972.*

[13] KREYSZIG ERWIN, *Introductory functional Analysis with applications. Wiley, 1978.*

[14] LIMA, E. L., *Espaços Métricos. Projeto Euclides, CNPq-IMPA 1977.*

[15] MEDEIROS L., *Espaços de Sobolev. Rio de Janeiro, IM-UFRJ 2000.*

[16] WILLEM MICHEL *Lectures on Critical Point Theory. Trabalho de Matemática 199, UnB, Brasília, 1993.*