SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Adriano Aparecido Soares da Rocha

Subespaços Invariantes em Álgebras Satisfazendo a Identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$

Belém
ICEN - UFPA
Fevereiro 2008

ADRIANO APARECIDO SOARES DA ROCHA

Subespaços Invariantes em Álgebras Satisfazendo a Identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$

Dissertação apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

Belém
ICEN - UFPA
Fevereiro 2008

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ADRIANO APARECIDO SOARES DA ROCHA

Subespaços Invariantes em Álgebras Satisfazendo a Identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$

Dissertação apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva (orientador)
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Henrique Guzzo Junior
Instituto de Matemática e Estatística, USP

DATA DA AVALIAÇÃO: ____ /____ /_____

SITUAÇÃO: ________________________

Aos meus pais, pela renúncia de cada dia em meu favor.

AGRADECIMENTOS

Ao soberano Deus, por renovar-me a fé nEle e a quem devo o que tenho e o que sou;

Ao prof. Dr. Juaci Picanço, pela paciência com que me levou a pensar e compreender assuntos de dificuldades relevantes e pela presença constante durante todo o tempo de graduação e pos-graduação;

À Caroline, por sua compreensão e respeito por meu trabalho, e por sua dedicação como esposa;

Aos que oraram e continuam orando por mim;

Aos colegas de pos-graduação que nos momentos de descontração me fizeram dar bons sorrisos, tornando assim mais leves as tarefas diárias.

"Tudo quanto te vier à mão para fazer, faze-o conforme as tuas forças, porque na sepultura, para onde tu vais, não há obra, nem indústria, nem ciência, nem sabedoria alguma."

Eclesiastes 9:10

ABSTRACT

In this work, we will study the invariance of some subspaces obtained through of the a Peirce decomposition in the algebras: train of rank 3, Bernstein and in the that satisfying the identity $x^3 = \lambda(x)x^2$, where λ is a linear form defined in A. Our main goal is to study the last class of algebras, which is divided into two cases. If $\lambda(A^2) \neq 0$, then A has a decomposition $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ relative to a idempotente e. If $\lambda(A^2) = 0$, then A has one decomposition $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ relative to a nilpotent z. We prove that for some vector subspaces, obtained from the decomposition of A, their dimensions are independent of the element used to decompose A. Also we establish necessary and sufficient conditions for the invariance of these subspaces.

Key words : Bernstein algebras, algebras train, invariant subspaces, invariant polynomial

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos a invariância de alguns subespaços obtidos através de uma decomposição de Peirce nas álgebras: train de posto 3, Bernstein e nas que satisfazem a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, onde λ é um forma linear definida em A. Nosso principal objetivo é estudar a última classe de álgebras, que é dividida em dois casos. Se $\lambda(A^2) \neq 0$, então A tem uma decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ relativa ao idempotente e. Se $\lambda(A^2) = 0$, então A tem uma decomposição $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ relativa ao nilpotente z. Mostraremos que alguns subespaços vetoriais, obtidos destas decomposições de A, tem dimensões independentes do elemento usado para a decomposição de A. Nós estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para a invariância destes subespaços.

Palavras chaves: álgebras Bernstein, train álgebras, subespaços invariantes, polinômio invariante

Sumário

Introdução

Neste trabalho será estudado a invariância dimensional e a invariância de certos subespaços em relação a decomposição de Peirce em álgebras comutativas e não necessariamente associativas.

No capítulo 1 estudaremos a invariância nas train álgebras de posto 3, nestas álgebras todo o subespaço que possui uma expressão polinomial em termos de U_e e V_e tem dimensão invariante e, podemos encontrar uma condição necessária e suficiente de fácil verificação para um tal subespaço ser invariante. No capítulo 2 estudaremos a invariância de subespaços nas álgebras de Bernstein, para todas as álgebras de Bernstein não é possível encontrar os mesmos resultados encontrados para train álgebras de posto 3, mas na subclasse das álgebras de Bernstein que satisfaz as condições $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$ conseguimos os mesmos resultados.

Nos capítulos 3 e 4 estudaremos a invariância de subespaços nas álgebras que satisfazem a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, onde λ é apenas um funcional linear. Estas álgebras são uma generalização das train álgebras de posto 3 quando a constante $\gamma = 0$ na identidade $x^3 = (1 + \gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x^2)x$. Nestas álgebras é possível encontrar os mesmos resultados encontrados nas train álgebras de posto 3.

Capítulo 0

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos que serão utilizados nos capítulos posteriores. Conceitos como os de álgebra, caracter e de álgebras báricas.

0.1 Álgebra

Começaremos nosso estudo definindo o conceito de álgebra, pois a compreensão desta estrutura matemática será de fundamental importância para o nosso estudo.

Definição 0.1. Seja K um corpo. Uma *álgebra* sobre o corpo K é um espaço vetorial A sobre K com uma operação adicional, dita *multiplicação*, indicada por $\cdot$, que associa a cada par de elementos x, y em A, um elemento $x \cdot y$ em A dito o *produto* de x por y, de maneira tal que:

$$\begin{aligned}
&\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)\\
&x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\\
&(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z
\end{aligned}$$

para todo escalar α em K e para todo x, y e z em A.

Se a propriedade associativa $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ é satisfeita para todo x, y, z de A diz-se, então, que a álgebra é *associativa*. Do mesmo modo, dizemos que A é uma álgebra *comutativa*, se o produto satisfaz também a propriedade comutativa, ou seja, $x \cdot y = y \cdot x$, para todo x, y de A.

Usaremos a notação $\operatorname{car}(K)$ para representar a característica do corpo K. Neste trabalho consideraremos sempre A uma álgebra comutativa e não necessariamente associativa sobre um corpo K, com $\operatorname{car}(K) \neq 2$ e A de dimensão finita.

A próxima definição será muito utilizada nos capítulo 1 e 2, onde estudaremos as train álgebras de posto 3 e as álgebras de Bernstein respectivamente.

Definição 0.2. Seja A uma álgebra sobre um corpo K e $\omega : A \longrightarrow K$ uma função não nula. Então, ω é um *caracter* sobre A se ω é um homomorfismo de álgebras, isto é, ω é caracter se:

$$\begin{aligned} \omega(x+y) &= \omega(x)+\omega(y) \\ \omega(\alpha x) &= \alpha\omega(x) \\ \omega(xy) &= \omega(x)\omega(y) \end{aligned}$$

para todo x, y em A e todo α em K.

0.2 Álgebras báricas

Uma *álgebra bárica* é um par ordenado (A, ω), onde A é uma álgebra sobre o corpo K e ω é um caracter de A.

A próxima proposição mostra que uma álgebra bárica (A, ω), pode ser sempre decomposta em somas diretas de dois subespaços.

Proposição 0.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica então A pode ser decomposta como $A = Kx \oplus N$ onde Kx é o subespaço gerado por x, $x \notin N := \ker(\omega)$.*

Demonstração.

Primeiro mostraremos que $A = Kx + N$, para isso tomemos um y arbitrário em A e verifiquemos que y está em $Kx+N$, a outra inclusão é evidente, $y = \dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}x + \left(y - \dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right)$, então claramente $\dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}x \in Kx$, verificamos que $\left(y - \dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right)$ esta em N. De fato, $\omega\left(y - \dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right) = \omega(y) - \dfrac{\omega(y)}{\omega(x)}\omega(x) = 0$.

Verificaremos agora que $Kx \cap N = \{0\}$, para isso tomaremos um a arbitrário em $Kx \cap N$ e concluiremos que $a = 0$. Seja $a \in Kx \cap N$, então $a = \beta x$ para algum β em K, portanto $\omega(a) = \omega(\beta x) = \beta\omega(x) = 0$ e $\omega(x) \neq 0$ (pois x não está em N), então $\beta = 0$, logo $a = 0$, o que implica dizer que $Kx \cap N = \{0\}$. ■

Esta proposição será muito utilizada nos capítulos posteriores quando estudaremos a decomposição de Peirce.

Definição 0.3. Seja A uma álgebra sobre um corpo K. Dizemos que I é um *ideal bilateral* de A, se I é um subespaço de A e para todo x em A e i em I, temos $x \cdot i \in I$ e $i \cdot x \in I$, tal que $\cdot$ é a operação produto definida sobre A.

As *potências principais* de um elemento $x \in A$ definidas recursivamente por $x^1 = x$ e $x^{n+1} = xx^n$, para todo inteiro positivo n. Em geral, temos $x^m x^n \neq x^{m+n}$

Se X é um subconjunto de A, a notação $\langle X \rangle$ indica o subespaço de A gerado por X usaremos também a notação $\dim X$ para representar a dimensão do subespaço X. Sejam U e V dois subespaços de A, definimos o subespaço UV por

$$UV = \langle uv\,;\;\; u \in U \;\; e \;\; v \in V \rangle\,.$$

Algumas vezes utilizaremos as seguintes observações:

Observação 0.1. *Se* $\mathcal{U}$ *é um conjunto de geradores do subespaço* U *e* $\mathcal{V}$ *é um conjunto de geradores do subespaço* V*, então* $UV = \langle uv\,;\; u \in \mathcal{U} \;\, e \;\, v \in \mathcal{V}\rangle$.

Observação 0.2. *Se* U, V *e* W *são subespaços de uma álgebra* A*, então* $U(V+W) = UV + UW$.

Demonstração.

Sejam $u,\, u_1,\, u_2 \in U$, $v \in V$ e $w \in W$ temos que $u(v+w) = uv+uw \in UV+UW$, portanto $U(V+W) \subseteq UV+UW$. Por outro lado, $u_1v + u_2w = u_1(v+0) + u_2(0+w) \in U(V+W)$, assim $UV+UW \subseteq U(V+W)$. ∎

O lema seguinte será usado nas demonstrações de algumas proposições nos capítulos posteriores

Lema 0.1. *Seja* V *um subespaço de uma álgebra* A*. Se* A *é comutativa então:*

(a) $V^2 = \langle v^2\,;\; v \in V\rangle$;

(b) $V + V^2 = \langle v + v^2\,;\; v \in V\rangle$

Demonstração.

Sejam $v,\, v_1,\, v_2 \in V$. A parte (a) segue da identidade $v_1v_2 = \dfrac{1}{2}((v_1+v_2)^2 - v_1^2 - v_2^2)$ e a parte (b) é conseqüência de (a) e das identidades $v^2 = \dfrac{1}{2}(v+v^2) + \dfrac{1}{2}(-v+(-v)^2)$ e $v = (v+v^2) - v^2$ ∎

Outro fato que também usaremos é o bem conhecido resultado, enunciado no teorema abaixo:

Teorema 0.1. *Sejam* W *e* U *subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Então tem-se que*

$$\frac{W}{W \cap U} \cong \frac{W+U}{U}.$$

Capítulo 1

Train álgebras de posto 3

Neste capítulo estudaremos a invariância de subespaços nas train álgebras de posto 3, que são álgebras báricas (A, ω) sobre o corpo K satisfazendo a equação $x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0$ com $\gamma \in K$.

Seja (A, ω) uma álgebra bárica de dimensão finita sobre um corpo K, com $\mathrm{car}(K) \neq 2$. Dizemos que (A, ω) é uma *train álgebra de posto* n, se

$$x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0$$

para todo $x \in A$, em que n é um inteiro positivo fixo. Os escalares $\gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1}$ satisfazem $1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1}$=0. De fato, se $x \in A$ é tal que $\omega(x) \neq 0$ então

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x) \\ &= \omega(x)^n(1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $\omega(x)^n \neq 0$ segue que $1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1} = 0$.

Um polinômio da forma

$$p(a) = a^n + \gamma_1\omega(a)a^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega(a)^{n-1}a$$

cujos coeficientes satisfazem $1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1} = 0$ é chamado de *train polinômio de grau* n. Em uma train álgebra existe um único train polinômio $p(a)$ de menor grau que satisfaz $p(x) = 0$ para todo $x \in A$. O grau deste polinômio é chamado de posto de A. Uma train álgebra de posto n satisfaz $x^n = 0$ para todo $x \in N := \ker(\omega)$. De onde segue a seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Em uma train álgebra de posto n existe apenas um caracter.*

Demonstração.

Sejam (A, ω) uma train álgebra e ω' outro caracter de A. Para qualquer $x \in N$ temos

$$x^n + \gamma_1\omega'(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega'(x)^{n-1}x = 0.$$

Como $x^n = 0$, segue que $\gamma_1\omega'(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega'(x)^{n-1}x = 0$, então temos

$$\begin{aligned} 0 &= \omega'\big(\gamma_1\omega'(x)x^{n-1} + \ldots + \gamma_{n-1}\omega'(x)^{n-1}x\big) \\ &= \omega'(x)^n\big(\gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1}\big) \\ &= -\omega'(x)^n. \end{aligned}$$

Portanto $\omega'(x) = 0$, então $x \in \ker(\omega')$. Assim $N \subseteq \ker(\omega')$. Como ω é caracter então existe $x_0 \in A$ tal que para todo $x \in A$, $x = \alpha x_0 + n$ com $\alpha \in K$ e $n \in N$. Assim, $\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha\omega'(x_0)$, portanto

$$\alpha\omega'(x_0)\frac{\omega(x_0)}{\omega(x_0)} = \frac{\alpha\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}\omega(x_0).$$

Fazendo $\beta = \dfrac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$ na última igualdade temos

$$\begin{aligned} \omega'(x) = \alpha\omega'(x_0) &= \alpha\beta\omega(x_0) \\ &= \alpha\beta\omega(x_0) + 0 \\ &= \alpha\beta\omega(x_0) + \omega(n) \\ &= \beta\omega(\alpha x_0 + n) \\ &= \beta\omega(x). \end{aligned}$$

Temos também que $\beta\omega(x_0)^2 = \beta\omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = \Big(\beta\omega(x_0)\Big)^2 = \beta^2\omega(x_0)^2$, decorre daí que $(\beta^2 - \beta)\omega(x_0)^2 = 0$. Como $x_0 \notin N$ temos que $\omega(x_0)^2 \neq 0$, logo $\beta^2 - \beta = 0$, implica que $\beta = 0$ ou $\beta = 1$, como β não pode ser igual a zero, pois ω' é um caracter de A, segue que $\beta = 1$, e portanto $\omega = \omega'$. ■

As train álgebras de posto 3 satisfazem uma identidade da forma

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2x = 0 \tag{1.1}$$

com γ em K.

Seja (A, ω) uma álgebra train de posto 3, temos que

$$x^3 = 0 \tag{1.2}$$

para todo $x \in N$. A primeira e a segunda linearização de (1.2) são respectivamente:

$$x_1^2x_2 + 2x_1(x_1x_2) = 0 \tag{1.3}$$
$$x_1(x_2x_3) + x_2(x_1x_3) + x_3(x_1x_2) = 0 \tag{1.4}$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2, x_3 \in N$. A primeira e a segunda linearização de (1.1) são respectivamente:

$$x^2y + 2x(xy) - (1+\gamma)\Big(\omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy\Big) + \gamma\Big(2\omega(x)\omega(y)x + \omega(x)^2y\Big) = 0 \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}(xy)z + (xz)y + (yz)x - (1+\gamma)\Big(\omega(x)yz + \omega(y)xz + \omega(z)xy\Big) &+ \\ \gamma\Big(\omega(x)\omega(y)z + \omega(y)\omega(z)x + \omega(x)\omega(z)y\Big) &= 0, \qquad (1.6)\end{aligned}$$

para todo x, y, $z \in A$.

Fazendo $x = y = e$ e $z = e^2$ em (1.6), com $e \in A$ tal que $\omega(e) = 1$, temos $2e^4 + (e^2)^2 = (1+\gamma)(2e^3 + 2e^2) - \gamma(e^2 + 2e)$. Por (1.1) segue que $e^3 = (1+\gamma)e^2 - \gamma e$, portanto $e^4 = (1+\gamma)e^3 - \gamma e^2$. Daí segue que

$$\begin{aligned}(e^2)^2 &= (1+\gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e) - 2e^4 \\ &= (1+\gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e) - 2(1+\gamma)e^3 + 2\gamma e^2 \\ &= (1+\gamma)(2e^3 + e^2 - 2e^3) + \gamma(-e^2 - 2e + 2e^2) \\ &= (1+2\gamma)e^2 - 2\gamma e.\end{aligned}$$

Verifica-se por indução finita que potências simples bem como as *potências plenas*, definidas recursivamente por $e^{[1]} = e$ e $e^{[k]} = e^{[k-1]}e^{[k-1]}$, $\forall\ k \geqslant 2$, pertencem ao subespaço gerado por e e e^2

Proposição 1.2. *Seja A uma train álgebra de posto 3, com $\gamma \neq \dfrac{1}{2}$. O conjunto dos idempotentes não nulos nessa álgebra é dado por*

$$\mathrm{Id}_1(A) = \left\{\frac{1}{1-2\gamma}(d^2 - 2\gamma d)\,;\ d \in A \ \text{ e } \ \omega(d) = 1\right\}. \qquad (1.7)$$

Demonstração.

Vimos que um elemento idempotente na álgebra A deve ter a forma $ae^2 + be$, sendo e um elemento de A tal que $\omega(e) = 1$ e a, $b \in K$. Assim temos que calcular a e b para que $(ae^2 + be)^2 = ae^2 + be$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a^2(e^2)^2 + b^2e^2 + 2abe^3 = ae^2 + be$. Como $(e^2)^2 = (1+2\gamma)e^2 - 2\gamma e$ e $e^3 = (1+\gamma)e^2 - \gamma e$, então temos $\Big(a^2(1+2\gamma) + b^2 + 2ab(1+\gamma)\Big)e^2 - (2a^2\gamma + 2ab\gamma)e = ae^2 + be$. Isso ocorre se, e somente se $a^2(1+2\gamma) + b^2 + 2ab(1+\gamma) = a$ e $2a^2\gamma + 2ab\gamma = -b$. Daí segue que

$$a = \frac{1}{1-2\gamma} \text{ e } b = \frac{-2\gamma}{1-2\gamma}.$$

Logo, o idempotente tem a forma

$$\frac{1}{1-2\gamma}(e^2 - 2\gamma e),$$

com $\gamma \neq \frac{1}{2}$. ■

A proposição anterior pode ser encontrada em [3].

Doravante, por simplificação, denotaremos $\theta = \frac{1}{1-2\gamma}$ e usaremos sempre a condição $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Tomando $x = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $y \in N$ em (1.5), temos

$$ey + 2e(ey) - 2(1+\gamma)ey + \gamma y = 0. \tag{1.8}$$

Fazendo $x = y \in N$ e $y = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ em (1.5) segue que

$$ey^2 + 2y(ey) = (1+\gamma)y^2. \tag{1.9}$$

Sejam e um idempotente de peso 1 em A e $y \in N$, definimos $L_e : N \longrightarrow N$ pela regra $L_e(y) = ey$. Assim podemos escrever a identidade (1.8) da seguinte forma, $L_e(y)+2eL_e(y)-2(1+\gamma)L_e(y)+\gamma y = 0$. Portanto

$$2L_e^2(y) - (1+2\gamma)L_e(y) + \gamma y = 0. \tag{1.10}$$

Segue que o polinômio $p(x) = 2x^2-(1+2\gamma)x-\gamma = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\gamma) \in K[X]$ é um anulador de L_e, pois $p(L_e) = 2L_e^2 - (1+2\gamma)L_e + \gamma I_N$, onde I_N representa a função identidade em N, e assim $p(L_e)$ calculado em y é igual a zero para todo $y \in N$. Temos também que $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$ não é um anulador de L_e, pois se fosse teríamos que $L_e(y) - \frac{1}{2}y = 0$, para todo $y \in N$, ou seja, $ey = \frac{1}{2}y$, para todo $y \in N$. Decorre da relação (1.9) que $\frac{1}{2}y^2 + y^2 = (1+\gamma)y^2 = 0$, assim $\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)y^2 = 0$, para todo $y \in N$. e daí segue que $\gamma = \frac{1}{2}$, o que não pode ocorrer. Portanto, $p_1(x) = x - \frac{1}{2}$ não é um anulador de L_e. Analogamente , vemos que se $p_2(x) = x - \gamma$ fosse um anulador L_e, pela relação (1.9) teríamos que $\gamma y^2 + 2\gamma y^2 = y^2 + \gamma y^2$, para todo $y \in N$. Novamente isso implicaria $\gamma = \frac{1}{2}$, o que não pode ocorrer. Portanto $p_2(x) = x - \gamma$ não é um anulador de L_e. Segue que , o polinômio minimal de L_e é $m(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-\gamma)$. Agora, usando o conhecido Teorema da decomposição primária, obtemos que $N = \ker\left(L_e - \frac{1}{2}I_N\right) \oplus \ker(L_e - \gamma I_N)$. Definimos $U_e = \ker\left(L_e - \frac{1}{2}I_N\right)$ e $V_e = \ker(L_e - \gamma I_N)$. Portanto temos que

$$U_e = \left\{u \in N\,;\ eu = \frac{1}{2}u\right\} \tag{1.11}$$

$$V_e = \{v \in N\,;\ ev = \gamma v\}. \tag{1.12}$$

Pela Proposição 0.1, para todo $e \in \mathrm{Id}_1(A)$, temos a decomposição $A = Ke \oplus N$. Portanto, $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$. Essa decomposição é chamada decomposição de Peirce relativa ao idempotente e.

Proposição 1.3. *Seja (A, ω) uma train álgebra de posto 3, com decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$. Então os subespaços U_e e V_e verificam as seguintes relações:*

$$U_eV_e \subseteq U_e, \qquad U_e^2 \subseteq V_e \qquad \text{e} \qquad V_e^2 = 0 \tag{1.13}$$

Demonstração.

Linearizando (1.8) temos

$$e(y_1y_2) + y_1(ey_2) + y_2(ey_1) = (1+\gamma)y_1y_2. \tag{1.14}$$

Sejam u_1, $u_2 \in N$ com u_1, $u_2 \in U_e$, usando (1.14) e as definições de U_e e V_e temos $e(u_1u_2) + \frac{1}{2}u_1u_2 + \frac{1}{2}u_1u_2 = (1+\gamma)u_1u_2$, logo $e(u_1u_2) + u_1u_2 = u_1u_2 + \gamma u_1u_2$. Segue-se que $e(u_1u_2) = \gamma u_1u_2$ e $u_1u_2 \in V_e$. Portanto, $U_e^2 \subseteq V_e$. A seguir, tomamos $u \in U_e$ e $v \in V_e$ em (1.14). Temos, $e(uv) + \gamma uv + \frac{1}{2}uv = (1+\gamma)uv$, logo $e(uv) = \frac{1}{2}uv$. Ou seja, $uv \in U_e$. Portanto $U_eV_e \subseteq U_e$. Finalmente, supondo $v_1v_2 \in V_e$ em (1.14) temos $e(v_1v_2) + \gamma v_1v_2 + \gamma v_1v_2 = (1+\gamma)v_1v_2$, de modo que $e(v_1v_2) = (1-\gamma)v_1v_2$. Escrevendo $v_1v_2 = u + v$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, vem $e(u+v) = (1-\gamma)(u+v)$. Logo, $\left(\frac{1}{2}u - \gamma u\right) + (v - 2\gamma v) = 0$. Devido ao fato $N = U_e \oplus V_e$ temos $\left(\frac{1}{2}u - \gamma u\right) = 0$ e $(v - 2\gamma v) = 0$. Como estamos supondo $\gamma \neq \frac{1}{2}$ devemos ter $u = v = 0$. Segue-se que $v_1v_2 = u + v = 0$. Portanto, $V_e^2 = 0$. ■

Na próxima proposição veremos algumas identidades envolvendo os elementos de U_e e V_e

Proposição 1.4. *Seja A uma train álgebra de posto 3, com decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, então temos as seguintes identidades*

$$u^3 = v^3 = 0 \tag{1.15}$$
$$v^2 = u^2v = 0 \tag{1.16}$$
$$u(uv) = v(vu) = 0 \tag{1.17}$$
$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \tag{1.18}$$
$$u_1^2(u_1u_2) = u_1^2(u_1v) = 0 \tag{1.19}$$
$$(uv)^2 = 0 \tag{1.20}$$

quaisquer que sejam u, u_1, $u_2 \in U_e$ e v, v_1, $v_2 \in V_e$.

Demonstração.

Sejam $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Fazendo sucessivamente $x = u$ e $y = v$ em (1.2) obtemos (1.15). A identidade (1.16) decorre diretamente do fato $U_e^2 \subseteq V_e$ e $V_e^2 = 0$. Linearizando $v^2 = 0$, obtemos $v_1v_2 = 0$. quaisquer que sejam $v_1,\ v_2 \in V_e$. Pela proposição anterior temos $u^2 \in V_e$. Fazendo $v_1 = u^2$ e $v_2 = v$, podemos ver que $u^2v = 0$. Isso conclui (1.16). Considerando $x_1 = u$ e $x_2 = v$ em (1.3) obtemos $u^2v + 2u(uv) = 0$. Em vista de (1.16), concluímos $u(uv) = 0$. Tomando agora $x_1 = v$ e $x_2 = u$ em (1.3) temos que $v^2u + 2v(vu) = 0$. Novamente devido a (1.16) chegamos a $v(uv) = 0$. Portanto, (1.17) é válida. A relação (1.18) decorre diretamente de (1.3), tomando $x_1 = u_1$ e $x_2 = u_2$. Notando que $u_1^2,\ u_1u_2 \in V_e$ e lembrando (1.16) vemos que $u_1^2(u_1u_2) = 0$. Tomemos $v = v_1 + v_2$, com $v_1,\ v_2 \in V_e$, na relação $v(vu) = 0$, obtida em (1.17), obtemos $v_1(uv_2) + v_2(uv_1) = 0$. Agora usemos essa relação em $u_1^2(u_1v)$ para escrever $u_1^2(u_1v) = -v(u_1u_1^2) = 0$, pois $u_1^3 = 0$. Isso conclui a demonstração de (1.19). Finalmente, para demonstrar (1.20), tomemos $x = u + v$ e $y = uv$ em (1.3) a fim de obter $u^2(uv) + v^2(uv) + 2(uv)^2 + 2(u+v)\Big(u(uv) + v(uv)\Big) = 0$. Essa igualdade se reduz a $(uv)^2 = 0$ devido as relações (1.16), (1.17), e (1.19). ∎

Através da linearização das identidades da proposição anterior obtemos as identidades da próxima proposição.

Proposição 1.5. *Em uma train álgebra A de posto 3, com decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ são válidas as identidades*

$$
\begin{aligned}
u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) &= 0 = v_1(v_2v_3) + v_2(v_1v_3) + v_3(v_1v_2) && (1.21)\\
v_1v_2 &= (u_1u_2)v = 0 && (1.22)\\
u_1(u_2v) + u_2(u_1v) &= v_1(uv_2) + v_2(uv_1) = 0 && (1.23)\\
(uv_1)(uv_2) &= (u_1v)(u_2v) = 0 && (1.24)
\end{aligned}
$$

quaisquer que sejam $u,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \in U_e$ e $v,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in V_e$.

Demonstração.

Sejam $u,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \in U_e$ e $v,\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in V_e$. As igualdades em (1.21) são a segunda linearização das identidades obtidas em (1.15). Linearizando as identidades (1.16), obtemos (1.22). As igualdades em (1.23) decorrem da linearização das relações em (1.17). Por último, obtemos (1.24) a partir das linearizações em u e v da relação (1.20). ∎

A próxima proposição caracteriza o conjunto dos elementos idempotentes de peso 1 em uma train álgebra de posto 3.

Proposição 1.6. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma train álgebra de posto 3. O conjunto dos elementos idempotentes de peso um nessa álgebra é dado por*

$$\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + \theta u^2\ ;\ u \in U_e\} \tag{1.25}$$

com $\theta = \dfrac{1}{1-2\gamma}$, $\gamma \neq \dfrac{1}{2}$.

Demonstração.

Temos que $(e+u+\theta u^2)^2 = e^2+u^2+\theta^2(u^2)^2+2eu+2\theta u^3$, pelas definições de U_e e V_e, e usando (1.2) e (1.15) temos $(e+u+\theta u^2)^2 = e+u+(1+2\gamma\theta)u^2 = e+u+\theta u^2$, pois, $1+\dfrac{2\gamma}{1-2\gamma} = \dfrac{1}{1-2\gamma}$. Segue que a inclusão $\{e+u+\theta u^2\,;\ u\in U_e\}\subseteq \mathrm{Id}_1(A)$ é verdadeira. Por outro lado seja $x\in \mathrm{Id}_1(A)$, x pode ser escrito forma $x=e+u+v$, com $u\in U_e$ e $v\in V_e$. Ora, $x=x^2$, logo $e+u+v=(e+u+v)^2$, daí segue que $e+u+v = e+u^2+v^2+2eu+2ev+2uv$. Novamente, usando as definições de U_e e V_e e a proposição anterior temos $e+u+v = e+(u+2uv)+(u^2+2\gamma v)$, com $u+2uv\in U_e$ e $u^2+2\gamma v\in V_e$. Pela decomposição $A=Ke\oplus U_e\oplus V_e$, temos as igualdades $u=u+2uv$ e $v=u^2+2\gamma v$. Logo $uv=0$ e $v=\theta u^2$, ou seja $x=e+u+\theta u^2$. Portanto, $\mathrm{Id}_1(A)\subseteq\{e+u+\theta u^2\,;\ u\in U_e\}$■

Pela proposição anterior seja $e\in \mathrm{Id}_1(A)$ um idempotente fixo, temos que qualquer outro idempotente não nulo pode ser escrito na forma $f=e+u_0+\theta u_0^2$, para algum $u_0\in U_e$.

Corolário 1.1. *Sejam $e,\ f\in \mathrm{Id}_1(A)$, tais que $f=e+u_0+\theta u_0^2$ com $u_0\in U_e$. As funções lineares $\sigma_{e,u_0}: U_e\longrightarrow U_f$ e $\tau_{e,u_0}: V_e\longrightarrow V_f$ dadas por $\sigma_{e,u_0}(u)=u+2\theta u_0 u$ e $\tau_{e,u_0}(v) = v-2\theta u_0 v$, com $u\in U_e$ e $v\in V_e$, são isomorfismos.*

Demonstração.

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned} 2f(u+2\theta u_0 u) &= 2(e+u_0+\theta u_0^2)(u+2\theta u_0 u) \\ &= 2eu+4\theta e(u_0u)+2u_0u+(4\theta u_0(u_0u)+2\theta u_0^2 u)+4\theta^2u_0^2(u_0u). \end{aligned}$$

Pelas definições de U_e e V_e e usando relações (1.18) e (1.19), temos $2f(u+\theta u_0 u) = u+2(2\theta\gamma+1)(u_0u)$. Como $2\theta\gamma+1=\dfrac{2\gamma}{1-2\gamma}+1=\dfrac{1}{1-2\gamma}=\theta$, concluímos que $2f(u+2\theta u_0u) = u+2\theta u_0 u$. Portanto, $u+2\theta u_0u\in U_f$. Do mesmo modo, vemos que $f(v-2\theta u_0 v)=(e+u_0+\theta u_0^2)(v-2\theta u_0 v) = ev-2\theta e(u_0v)+u_0v-2\theta u_0(u_0v)+\theta u_0^2 v-2\theta^2u_0^2(u_0v)$. Usando as definições de U_e, V_e e as relações (1.16), (1.17) e (1.19), concluímos $f(v-2\theta u_0v)=\gamma v+(-\theta+1)u_0v$. Como $-\theta+1=-\dfrac{1}{1-2\gamma}+1=-\dfrac{2\gamma}{1-2\gamma}$. Temos, $f(v-2\theta u_0v)=\gamma(v-2\theta u_0 v)$. Portanto, $v-2\theta u_0 v\in V_f$. Desse modo σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} estão bem definidas. Dados $u,\ u'\in U_e$, vemos que $\sigma_{e,u_0}(u)=\sigma_{e,u_0}(u')$ implica em $u+2\theta u_0u = u'+2\theta u_0 u'$. Devido a decomposição $N=U_e\oplus V_e$ temos $u=u'$. Do mesmo modo, agora tomando $v,\ v'\in V_e$, temos que $\tau_{e,u_0}(v)=\tau_{e,u_0}(v')$ implica em $v-2\theta u_0 v = v'-2\theta u_0 v'$. Novamente devido a decomposição $N=U_e\oplus V_e$, vemos que $v=v'$. Portanto, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} são injetivas. Considerando $\varphi_{e,u_0}: A\longrightarrow A$, dada por $\varphi_{e,u_0}(\alpha e+u+v)=\alpha f+\sigma_{e,u_0}(u)+\tau_{e,u_0}(v)$, com $u\in U_e$ e $v\in V_e$, vemos que φ_{e,u_0} é injetiva, portanto sobrejetiva. Logo, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} também são sobrejetivas. Portanto, σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0} são isomorfismos. ■

De agora em diante, para não sobrecarregar a linguagem, escreveremos σ, τ e φ no lugar de σ_{e,u_0}, τ_{e,u_0} e φ_{e,u_0}, respectivamente. Porém deve ficar claro que as funções σ, τ e φ dependem do par de idempotentes e e f.

Segue do corolário anterior que dados $e,\ f\in \mathrm{Id}_1(A)$, tais que $f=e+u_0+\theta u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$, temos

$$U_f = \{u + 2\theta u_0 u\,;\ u \in U_e\} \tag{1.26}$$
$$V_f = \{v - 2\theta u_0 v\,;\ v \in V_e\}. \tag{1.27}$$

1.0.1 Invariância de Subespaço

Seja K-álgebra comutativa A, e sejam N e M subespaços de A, os *subespaços monomiais* de A determinados por N e M são definidos da seguinte maneira:

(a) N e M são eles próprios subespaços determinados por N e M;

(b) Se W_1 e W_2 são subespaços determinados por N e M, então W_1W_2 é um subespaço determinado por M e M.

Chamamos de *subespaço polinomial* determinado por N e M, aos subespaços de A que são somas finitas de subespaços monomiais determinados por N e M.

Seja $K[X, Y]$ o conjunto de todos os polinômios nas variáveis comutativas e não necessariamente associativas X, Y. Consideremos o subconjunto $\mathcal{P}$ de $K[X, Y]$, tal que todos os polinômios pertencentes a $\mathcal{P}$ não possuem termos independentes e tem seus coeficientes todos iguais a 1.

Se $p(X, Y) \in \mathcal{P}$, então denotamos por p_e o espaço formado a partir da substituição de X por U_e e Y por V_e. Se $m(X, Y)$ é um monômio, o "grau" de $m(X, Y)$, é denotado por ∂m, e o grau do polinômio $p(X, Y)$ é denotado da mesma forma por ∂p.

Definição 1.1. Se $p(U_e, V_e) = p(U_f, V_f)$ para dois elementos distintos $e, f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ dizemos que $p(X, Y)$ é *invariante quanto à mudança do idempotente* ou simplesmente $p(X, Y)$ *é invariante*. Se $\dim p(U_e, V_e) = \dim p(U_f, V_f)$ para quaisquer $e, f \in \mathrm{Ip}_1(A)$, então dizemos que o polinômio $p(X, Y)$ tem *dimensão invariante quanto à mudança do idempotente*, ou simplesmente $p(X, Y)$ tem *dimensão invariante*.

. De agora em diante escreveremos p para denotar $p(X, Y)$, e consideraremos sempre que os polinômios pertencem a $\mathcal{P}$.

Observemos que os isomorfismos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : V_e \longrightarrow V_f$ garantem a invariância de dimensão de U_e e V_e.

Para estudar a invariância de Polinômio em A, definiremos o operador $\xi : U_e \longrightarrow U_e$, dado por $\xi(u) = u - 2\theta^2 u_0^2 u$, com u, $u_0 \in U_e$. Se $\xi(u) = 0$ segue que $u = 2\theta^2 u_0^2 u$. Multiplicando ambos os membros dessa equação por u_0, temos $u_0 u = 2\theta^2 u_0(u_0^2 u)$. Segue das relações (1.23) e (1.15) que $u_0 u = 2\theta^2 u_0(u_0^2 u) = 2\theta^2 u(u_0^3) = 0$. Agora, pela relação (1.18) temos $2\theta^2 u_0^2 u = -4\theta^2 u_0(u_0 u)$. Portanto, se $u - 2\theta^2 u_0^2 u = 0$, então $u = 2\theta^2 u_0^2 u = -4\theta^2 u_0(u_0 u) = 0$. Segue-se que o operador linear $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é injetor e conseqüentemente sobrejetor. Portanto, $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é um automorfismo.

Proposição 1.7. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma train álgebra de posto 3. Consideremos os isomorfismos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$, $\tau : V_e \longrightarrow V_f$, dados por $\sigma(u) = u + 2\theta u_0 u$, $\tau(v) = v - 2\theta u_0 v$ e o automorfismo $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ dado por $\xi(u) = u - 2\theta^2 u_0^2 u$, com u, $u_0 \in U_e$ e $v \in V_e$. As* *igualdades*

(*a*) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(u_1u_2)$

(*b*) $\sigma(u)\tau(v) = \sigma(\xi(u)v)$

(*c*) $\tau(v_1)\tau(v_2) = \sigma(v_1v_2)$

(*d*) $\xi(\xi(u)v) = uv$

são verdadeiras quaisquer que sejam u, u_1, $u_2 \in U_e$ *e* v, v_1, $v_2 \in V_e$.

Demonstração.

Sejam u, u_1, $u_2 \in U_e$ e v, v_1, $v_2 \in V_e$. Para mostrar que (a) é verdadeira, calculemos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = (u_1+2\theta u_0u_1)(u_2+2\theta u_0u_2) = u_1u_2+2\theta u_1(u_0u_2)+2\theta u_2(u_0u_1)+4\theta^2(u_0u_1)(u_0u_2)$. De (1.21) segue que $2\theta u_1(u_0u_2) + 2\theta u_2(u_0u_1) = -2\theta u_0(u_1u_2)$. Notando que u_0u_1, $u_0u_2 \in V_e^2$ e usando o fato de $V_e^2 = 0$, temos $(u_0u_1)(u_0u_2) = 0$. Agora, podemos ver que $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = u_1u_2 - 2\theta u_0(u_1u_2) = \tau(u_1u_2)$. Para mostrar a parte (b), calculemos $\sigma(u)\tau(v) = (u + 2\theta u_0u)(v - 2\theta u_0v) = uv - 2\theta u(u_0v) + 2\theta v(u_0u) - 4\theta^2(u_0u)(u_0v)$. Usando (1.23), podemos escrever $(u_0u)(u_0v) = -v\Big(u_0(u_0u)\Big)$. Por (1.18), chegamos a $(u_0u)(u_0v) = -v\Big(u_0(u_0u)\Big) = \dfrac{1}{2}v(u_0^2u)$. Usando novamente (1.23), segue que $(u_0u)(u_0v) = -v\Big(u_0(u_0u)\Big) = \dfrac{1}{2}v(u_0^2u) = -\dfrac{1}{2}u_0^2(uv)$. Portanto, $-4\theta^2(u_0u)(u_0v) = 2\theta^2u_0^2(uv)$. Usando esse resultado e as relações (1.23) e (1.22) obtemos $\sigma(u)\tau(v) = uv + 2\theta u_0(uv) + 2\theta^2u_0^2(uv)$. Por outro lado, $\sigma(\xi(u)v) = \sigma((u - 2\theta^2u_0^2u)v) = \sigma(uv - 2\theta^2v(u_0^2u)) = uv - 2\theta^2v(u_0^2u) + 2\theta u_0(uv) - 4\theta^3u_0\Big((u_0^2u)v\Big) = uv + 2\theta u_0(uv) + 2\theta^2u_0^2(uv)$, pois, por (1.23) e (1.18) temos $u_0\Big(v(u_0^2u)\Big) = -(u_0^2u)(u_0v)$ o que, por sua vez, nos permite escrever $u_0\Big(v(u_0^2u)\Big) = 2\Big(u_0(u_0u)\Big)(u_0v) = 0$, usando (1.24). Além disso $\sigma(v_1v_2) = 0$, pois $v_1v_2 \in V_e^2 = 0$. Portanto, vale (c). Para a última parte, calculamos $\xi(\xi(u)v) = \xi((u - 2\theta^2u_0^2u)v) = \xi(uv - 2\theta^2v(u_0^2u)) = uv - 2\theta^2v(u_0^2u) - 2\theta^2u_0^2(uv) + 4\theta^4u_0^2\Big(v(u_0^2u)\Big) = uv + 2\theta^2u_0(uv) - 2\theta^2u_0^2(uv) = uv$, pois, de (1.23) e (1.17), temos $u_0^2\Big(v(u_0^2u)\Big) = -v\Big(u_0^2(u_0^2u)\Big) = 0$. Portanto, a relação (d) é verdadeira. ■

Segue da proposição acima o seguinte corolário:

Corolário 1.2. *Seja* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ *uma train álgebra de posto 3. Se* X, X_1, $X_2 \subseteq U_e$ *e* W, W_1, $W_2 \subseteq V_e$ *são subespaços de* A, *então*

(*a*) $(XW_1)W_2 = (XW_2)W_1$

(*b*) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(X_1X_2)$

(*c*) $\sigma(X)\sigma(W) = \sigma(\xi(X)W)$

(d) $\tau(W_1)\tau(W_2) = \sigma(W_1W_2)$

Demonstração.

A parte (a) segue imediatamente (1.23) aplicada aos geradores daqueles subespaços. De modo análogo, aplicando a proposição anterior aos geradores dos subespaços dados demonstramos os ítens seguintes. ∎

Proposição 1.8. *Seja A uma train álgebra de posto 3. Para todo polinômio p temos* $V_e p_e \subseteq p_e$.

Demonstração.

É suficiente demonstrar a proposição para monômios. Se m é um monômio de grau 1, então $V_e m_e \subseteq m_e$, pois $V_e m_e = V_e U_e \subseteq U_e$ ou $V_e m_e = V_e V_e = 0 \subseteq V_e$. Suponhamos que a proposição seja válida para todo monômio de grau menor do que k, $k \geqslant 2$. Seja m, um monômio de grau k. Há três possibilidades para m_e: $m_e = \mu_e \nu_e$, $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$ ou $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, com μ_e, μ_{1_e}, $\mu_{2_e} \subseteq U_e$ e ν_e, ν_{1_e}, $\nu_{2_e} \subseteq V_e$, onde μ, μ_1, μ_2, ν, ν_1, ν_2 são monômios de grau menor do que k. Desse ponto em diante vamos supor $u \in \mu_e$, $u_1 \in \mu_{1_e}$, $u_2 \in \mu_{2_e}$ $v_1 \in \nu_{1_e}$, $v_2 \in \nu_{2_e}$, $v \in \nu_e$ e $v' \in V_e$. Se $v'(uv)$ é um gerador de $V_e(\mu_e\nu_e)$, então, devido a (1.23), temos $v'(uv) = -v(uv') \in \nu_e(V_e\mu_e) \subseteq \mu_e\nu_e = m_e$. Supondo que $v'(u_1u_2)$ é um gerador de $V_e(\mu_{1_e}\mu_{2_e})$, a relação (1.22) nos dá $V_e(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = 0 \subseteq m_e$. Por último supondo que $v'(v_1v_2)$ seja um gerador de $V_e(\nu_{1_e}\nu_{2_e})$ segue novamente de (1.22) que $V_e(\nu_{1_e}\nu_{2_e}) = 0 \subseteq \nu_{1_e}\nu_{2_e}$. ∎

Corolário 1.3. *Seja A uma train álgebra de posto 3. Para todo o polinômio g tal que* $g_e \subseteq U_e$, *temos* $\xi(g_e) = g_e$

Demonstração.

Seja $u \in g_e$ e observamos que $\xi(u) = u - 2\theta^2 u_0^2 u \in g_e + V_e g_e \subseteq g_e$. Além disso, como $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é um isomorfismo, então temos a igualdade $\xi(g_e) = g_e$. ∎

O próximo teorema nos dá condições necessárias e suficientes para a invariância de um polinômio em uma train álgebra de posto 3.

Teorema 1.1. *Sejam A uma train álgebra de posto 3,* $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$ *e* $u_0 \in U_e$, *tal que* $f = e + u_0 + \theta u_0^2$. *Consideremos também os isomorfismos* $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ *e* $\tau : V_e \longrightarrow V_f$, *dados respectivamente por* $\sigma(u) = u + 2\theta u_0 u$ *e* $\tau(v) = v - 2\theta u_0 u$, *com* $u \in U_e$ *e* $v \in V_e$. *Então*

1. *Se* $\varphi : A \longrightarrow A$, *dada por* $\varphi(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$ *é a transformação de Peirce associada aos idempotentes* $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$, *então todo polinômio p em A satisfaz* $\varphi(p_e) = p_f$. *Portanto, todo polinômio em A tem dimensão invariante.*

2. *São equivalentes:*

   (a) *p é invariante;*

   (b) $U_e p_e \subseteq p_e$;

   (c) p_e *é um ideal de A.*

Demonstração.

É suficiente demonstrar a primeira parte para monômios. Usaremos indução sobre o grau do monômio. Sejam $e,\ f \in \mathrm{Id}_1(A)$, como no enunciado. Se m é um monômio de grau 1, então $m_e = U_e$ ou $m_e = V_e$. Em qualquer dos casos $\varphi(m_e) = m_f$, pois

$$\varphi(U_e) = \sigma(U_e) = U_f$$

$$\varphi(V_e) = \tau(V_e) = V_f.$$

Suponhamos que a afirmação (1) seja válida para todo monômio de grau menor do que k, $k \geq 2$. Seja m um monômio de grau k. Há três possibilidades para m_e: $m_e = \mu_e\nu_e$, $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$ ou $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, com $\mu_e,\ \mu_{1_e},\ \mu_{2_e} \subseteq U_e$ e $\nu_e,\ \nu_{1_e},\ \nu_{2_e} \subseteq V_e$ onde os respectivos monômios destes subespaços possuem grau menor do que k. Se $m_e = \mu_e\nu_e$, então $m_f = \mu_f\nu_f = \sigma(\mu_e)\tau(\nu_e) = \sigma(\xi(\mu_e)\nu_e) = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \varphi(m_e)$. Caso tenhamos $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$, então $m_f = \mu_{1_f}\mu_{2_f} = \sigma(\mu_{1_e})\sigma(\mu_{2_e}) = \tau(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = \tau(m_e) = \varphi(m_e)$. Finalmente, se $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, então $m_e = 0$, pois $V_e^2 = 0$, logo $m_f = \varphi(m_e)$. Para a segunda parte consideraremos o polinômio $p = g + h$, onde g e h são polinômios tais que $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Da primeira parte, temos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(v)\,;\ x \in g_e\,,\ v \in h_e\}$. Portanto, $p_f = \{(x + 2\theta u_0 x) + (v - 2\theta u_0 v)\,;\ x \in g_e\,,\ v \in h_e\}$. Segue-se que

$$p_f = \{(x - 2\theta u_0 v) + (v + 2\theta u_0 x)\,;\ x \in g_e,\ \ v \in h_e\}. \tag{1.28}$$

Suponhamos agora que p seja invariante, ou seja, $p_e = p_f$ quaisquer que sejam os idempotentes $e,\ f \in \mathrm{Id}_1(A)$. De (1.28) vemos que existem $x' \in g_e$ e $v' \in h_e$ tais que $x - 2\theta u_0 v = x'$ e $v + 2\theta u_0 x = v'$. Logo, $u_0 v = \dfrac{1}{2\theta}(x - x')$ e $u_0 x = \dfrac{1}{2\theta}(v' - v)$. Ou seja, $U_e h_e \subseteq g_e$ e $U_e g_e \subseteq h_e$. Portanto, $U_e p_e \subseteq p_e$. Reciprocamente, suponhamos que $U_e p_e \subseteq p_e$. reescrevendo (1.28), temos

$$p_f = \{(x + v) + 2\theta u_0(x - v)\,;\ x \in g_e\,,\ v \in h_e\}$$

Segue-se que $p_f \subseteq p_e + U_e p_e \subseteq p_e$. Portanto, p_e é invariante. Por fim, supondo $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, temos $ep_e \subseteq p_e$, pois seja $x \in p_e$, então $x = u' + y'$ com $u' \in g_e$ e $y' \in h_e$, então temos $ex = e(u' + y') = \dfrac{1}{2}u' + \gamma y' \in g_e \oplus h_e = p_e$. Como $V_e p_e \subseteq p_e$, p_e será um ideal se, e somente se $U_e p_e \subseteq p_e$. ■

Veremos adiante na Proposição 2.3, que uma álgebra comutativa e não necessariamente associativa que satisfaz a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$ para todo $x \in A$, onde ω é um caracter de A é uma álgebra de Bernstein Jordan.

As álgebras de Bernstein-Jordan são casos particulares das álgebras Train de posto 3. Desse modo o estudo da invariância de polinômio nas álgebras de Bernstein-Jordan já foi feito nessa seção, bastando para isso considerar $\gamma = 0$.

Capítulo 2

Álgebras de Bernstein

Uma álgebra bárica (A, ω) sobre um corpo K é chamada de *álgebra de Bernstein* se, A é comutativa e

$$(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2 \tag{2.1}$$

para todo $x \in A$.

Para todo $x \in N := \ker(\omega)$ temos

$$(x^2)^2 = 0. \tag{2.2}$$

Linearizando a última identidade obtemos

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \tag{2.3}$$
$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \tag{2.4}$$
$$(x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_1x_4)(x_2x_3) = 0, \tag{2.5}$$

para todo x_1, x_2, x_3, $x_4 \in N$.

Proposição 2.1. *Em uma álgebra de Bernstein existe apenas um caracter*

Demonstração.

Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e ω' outro caracter de A. Para qualquer $n \in N = \ker(\omega)$ temos $(n^2)^2 = \omega(n)^2n^2 = 0n^2 = 0$. Temos também que $\omega'(n)^4 = (\omega'(n)^2)^2 = \omega'((n^2)^2) = \omega'(0) = 0$, portanto $n \in \ker(\omega')$, como ω é caracter então existe $x_0 \in A$ tal que para todo $x \in A$, $x = \alpha x_0 + n$ com $\alpha \in K$ e $n \in \ker(\omega)$. Assim, $\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha\omega'(x_0)$, portanto

$$\alpha\omega'(x_0)\frac{\omega(x_0)}{\omega(x_0)} = \frac{\alpha\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}\omega(x_0).$$

Fazendo $\beta = \dfrac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$ na última igualdade temos

$$\begin{aligned}\omega'(x) = \alpha\omega'(x_0) &= \alpha\beta\omega(x_0) \\ &= \alpha\beta\omega(x_0) + 0 \\ &= \alpha\beta\omega(x_0) + \omega(n) \\ &= \beta\omega(\alpha x_0 + n) \\ &= \beta\omega(x).\end{aligned}$$

Temos também que: $\beta\omega(x_0)^2 = \beta\omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = \Big(\beta\omega(x_0)\Big)^2 = \beta^2\omega(x_0)^2$ decorre daí que $(\beta^2 - \beta)\omega(x_0)^2 = 0$

Como $x_0 \notin \ker(\omega)$ temos que $\omega(x_0)^2 \neq 0$, logo $\beta^2 - \beta = 0$, implica que $\beta = 0$ ou $\beta = 1$, como β não pode ser igual a zero, pois ω' é um caracter de A, segue que $\beta = 1$, e portanto $\omega = \omega'$ ■

Em função da proposição anterior passaremos a denotar uma álgebra de Bernstein (A, ω) por A

Lema 2.1. *Seja K um corpo que tem característica diferente de 2 e possui mais de 3 elementos. Então, para uma álgebra de Bernstein A sobre esse corpo, tem-se*

$$2x^2(xy) = \omega(x)^2 xy + \omega(x)\omega(y)x^2 \tag{2.6}$$

para todo x, $y \in A$

Demonstração.

Já que A é uma álgebra de Bernstein temos que $(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2$, para todo $x \in A$. Sejam x, $y \in A$ e $\alpha \in K$ então $\alpha x + y \in A$, substituindo x por $\alpha x + y$ em (2.1) temos

$$\begin{aligned}((\alpha x + y)^2)^2 &= \omega(\alpha x + y)^2(\alpha x + y)^2 \\ (\alpha^2x^2 + 2\alpha xy + y^2)^2 &= \omega(\alpha^2x^2 + 2\alpha xy + y^2)(\alpha^2x^2 + 2\alpha xy + y^2),\end{aligned}$$

daí segue que

$\alpha^4(x^2)^2 + 4\alpha^3x^2(xy) + 4\alpha^2(xy)^2 + 2\alpha^2x^2y^2 + 4\alpha(xy)y^2 + (y^2)^2 = \alpha^4\omega(x^2)x^2 + 2\alpha^3\omega(x^2)xy + \alpha^2\omega(x)^2y^2 + 2\alpha^3\omega(x)\omega(y)x^2 + 4\alpha^2\omega(x)\omega(y)xy + 2\omega(x)\omega(y)y^2 + \alpha^2\omega(y)^2x^2 + 2\alpha\omega(y)^2xy + \omega(y)^2y^2$.

Aplicando novamente (1.1)

$\alpha^3\Big(4x^2(xy) - 2\omega(x)^2xy - 2\omega(x)\omega(y)x^2\Big) + \alpha^2\Big(4(xy)^2 + 2x^2y^2 - \omega(x)^2y^2 - 4\omega(x)\omega(y)xy - \omega(y)^2x^2\Big) + \alpha\Big(4(xy)y^2 - 2\omega(x)\omega(y)y^2 - 2\omega(y)^2xy\Big) = 0.$

Fazendo $\alpha = -\alpha$ e somando os dois temos

$\alpha^3(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha(2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2(xy)) = 0.$

Como $car(K) \neq 2$ e tem mais de 3 elementos, então $1 \neq -1$ e existe $\beta \in K$ com $\beta \notin \{0, 1, -1\}$ fazendo $\alpha = \beta$ temos $\beta^3(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + \beta(2(xy)y^2 -$

$\omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2xy) = 0$, multiplicando a última identidade por $\dfrac{1}{\beta}$ obtemos

$$\beta^2(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2(xy)y^2 - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2xy) = 0. \qquad (2.7)$$

Fazendo $\alpha = 1$ temos

$$(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2(xy)y^2 - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2xy) = 0 \qquad (2.8)$$

Fazendo (2.7) $-$ (2.8) temos

$$(\beta^2 - 1)(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) = 0.$$

Como $\beta^2 \notin \{0, 1, -1\}$ então $\beta^2 - 1 \neq 0$, logo,

$$2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2 = 0,$$

segue daí que

$$2x^2(xy) = \omega(x)^2xy + \omega(x)\omega(y)x^2 = 0$$

■

Seja ω um caracter de uma álgebra satisfazendo (2.1) então existe $x_0 \in A$ tal que $\omega(x_0) \neq 0$, logo tomando $e = \dfrac{1}{\omega(x_0^2)}x_0^2 \in A$, temos que $e^2 = e$ e além disso $\omega(e) = 1$, portanto toda álgebra de Bernstein possui idempotentes de peso 1. O próximo lema descreve o conjunto dos idempotentes de peso 1, em uma álgebra de Bernstein

Lema 2.2. *Numa álgebra de Bernstein (A, ω), o conjunto $\mathrm{Id}_1(A)$ dos idempotentes não nulos é dado por $\mathrm{Id}_1(A) = X := \{x^2;\, x \in A \text{ e } \omega(x) = 1\}$.*

Demonstração.

Observamos inicialmente, que todo idempotente não-nulo em uma álgebra de Bernstein tem peso 1. De fato, se $x^2 = x \neq 0$, então $x = x^2 = (x^2)^2 = \omega(x^2)x^2 = \omega(x)x$, ou seja, resulta que $\omega(x) = 1$. Assim, $\mathrm{Id}_1(A) \subseteq X$. Por outro lado seja $y \in X$, então $y = x^2$ tal que $\omega(x) = 1$, segue de (2.1) que $y^2 = (x^2)^2 = \omega(x^2)x^2 = \omega(x)\omega(x)x^2 = x^2 = y$, assim $X \subseteq \mathrm{Id}_1(A)$ ■

Vimos que se (A, ω) é uma álgebra bárica e $e \in A$ é um idempotente de peso 1, então todo elemento $x \in A$ se decompõe da forma $x = \omega(x)e + y$, tal que $y \in N$. Tal resultado será observado na seguinte proposição.

Proposição 2.2. *Sejam (A, ω) uma álgebra bárica sobre um corpo K e e um idempotente não-nulo de peso 1. Se K tem pelo menos quatro elementos, então (A, ω) é de Bernstein se, e somente se, todo $y \in N$ verifica as identidades abaixo:*

$$\begin{aligned} 2e(2ey) &= 2ey; && (2.9)\\ 2ey^2 + (2ey)^2 &= y^2; && (2.10)\\ (2ey)y^2 &= 0; && (2.11)\\ (y^2)^2 &= 0. && (2.12) \end{aligned}$$

Demonstração.

Suponhamos que (A,ω) é álgebra de Bernstein. Dado $y \in N$, temos que $(y^2)^2 = \omega(x)^2y^2 = 0$, o que verifica o item(2.12). Em (2.6) fazendo $x = e$ e $y \in N$

$$\begin{aligned} 2e^2(ey) &= \omega(e)^2ey + \omega(e)\omega(y)e^2 \\ 2e(ey) &= ey \end{aligned}$$

multiplicando a última identidade por 2 obtemos (2.9). Fazendo em (2.6) $x = y \in N$ e $y = e$

$$\begin{aligned} 2y^2(ye) &= \omega(y)^2ye + \omega(y)\omega(e)y^2 \\ 2y^2(ye) &= 0 \\ (2ey)y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Em (2.6) fazendo $x = e + y$ e $y = e$ e usando (2.9) temos que

$$\begin{aligned} 2(e+y)^2((e+y)e) &= \omega(e+y)^2((e+y)e) + \omega(e+y)\omega(e)(e+y)^2 \\ 2(e^2+2ey+y^2)(e+ey) &= e + ey + e + 2ey + y^2 \\ (2e+4ey+2y^2)(e+ey) &= 2e + 3ey + y^2 \\ 2e + 4e(ey) + 2ey^2 + 2e(ey) + 4(ey)^2 + 2(ey)y^2 &= 2e + 3ey + y^2 \\ 2ey^2 + 4(ey)^2 &= y^2 \\ 2ey^2 + (2ey)^2 &= y^2 \end{aligned}$$

Fica assim provado (2.10).

Reciprocamente, suponhamos que (A,ω) é uma álgebra bárica, e é um idempotente não nulo de peso 1 e que (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) são satisfeitas para todo $y \in N$. Seja $x = \omega(x)e + y \in A$, com $y \in N$ e $\omega(x) \in K$. Então,

$$\begin{aligned} (x^2)^2 &= \Big((\omega(x)e+y)^2\Big)^2 \\ &= \Big(\omega(x)^2e + 2\omega(x)ey + y^2\Big)^2 \\ &= \omega(x)^4e + 4\omega(x)^2(ey)^2 + (y^2)^2 + 4\omega(x)^3e(ey) + 4\omega(x)(ey)y^2 + 2\omega(x)^2ey^2 \\ &= \omega(x)^4e + \omega(x)^2\Big(2ey^2 + (2ey)^2\Big) + \omega(x)^3 2e(2ey) \\ &= \omega(x)^2\Big(\omega(x)^2e + \omega(x)2e(2ey) + y^2\Big) \\ &= \omega(x)^2\Big(\omega(x)^2e + \omega(x)2ey + y^2\Big) \\ &= \omega(x)^2\Big(\omega(x)e + y\Big)^2 \\ &= \omega(x)^2x^2 \\ &= \omega(x^2)x^2 \end{aligned}$$

Portanto, (A,ω) é álgebra de Bernstein. ∎

Como N é um ideal, podemos definir um operador $L_{2e} : N \longrightarrow N$ por $L_{2e}(y) = 2ey$, para cada $y \in N$. A identidade $2e(2ey) = 2ey$ nos garante que esse operador é uma projeção pois temos.

$$L_{2e}^2(y) = L_{2e}(L_{2e}(y)) = L_{2e}(2ey) = 2e(2ey) = 2ey = L_{2e}(y)$$

Logo, denotando U_e e V_e a imagem e o núcleo de L_{2e}, respectivamente, temos a seguinte decomposição:

$$N = U_e \oplus V_e.$$

De fato, seja $y \in N$. Escrevamos

$$y = L_{2e}(y) + (y - L_{2e}(y))$$

Ora, $L_{2e}(y)$ está na imagem U_e de L_{2e} e como

$$\begin{aligned} L_{2e}(y - L_{2e}(y)) &= L_{2e}(y) - L_{2e}^2(y) \\ &= L_{2e}(y) - L_{2e}(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vemos que $y - L_{2e}(y)$ está no núcleo V_e de L_{2e}. Assim $N = U_e + V_e$. Além disso, U_e e V_e são disjuntos. De fato, suponhamos que y esteja na intersecção $U_e \cap V_e$. Então $y = L_{2e}(z)$ para algum $z \in N$. Logo $L_{2e}(y) = L_{2e}(L_{2e}(z)) = L_{2e}^2(z) = L_{2e}(z) = y$. Como $y \in V_e$, $L_{2e}(y) = 0$, logo $y = 0$. Portanto $N = U_e \oplus V_e$

Observemos que, para todo $y \in N$, $L_{2e}(y) = y$ se e somente se $y \in U_e$. Com efeito, se $L_{2e}(y) = 2ey = y$, então fica claro que $y \in U_e$. Por outro lado, se $y \in U_e$, temos que $y = L_{2e}(x) = 2ex$, para algum $x \in N$. Assim, $L_{2e}(y) = L_{2e}^2(x) = L_{2e}(x) = 2ex = y$.

Portanto temos

$$\begin{aligned} U_e &= \left\{ u \in N \, ; \; eu = \frac{1}{2}u \right\} \\ V_e &= \{ v \in N \, ; \; ev = 0 \} \end{aligned}$$

Lema 2.3. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Então, com as notações acima, temos as seguintes inclusões:*

$$U_e^2 \subseteq V_e; \;\; V_e^2 \subseteq U_e \;\; e \;\; U_e V_e \subseteq U_e$$

Demonstração.

Por hipótese, valem as identidades (2.9), (2.10), (2.11), (2.12). Em particular, temos $L_{2e}(y^2) + L_{2e}(y)^2 = y^2$, para todo $y \in N$. Linearizando essa equação, obtemos

$$L_{2e}(y_1 y_2) + L_{2e}(y_1) L_{2e}(y_2) = y_1 y_2, \tag{2.13}$$

onde y_1, $y_2 \in N$. Como $L_{2e}(y) = y$ se e somente se $y \in U_e$, e $L_{2e}(y) = 0$ se, e somente se, $y \in V_e$, tomando $y_1, y_2 \in U_e$ e substituindo na equação (2.13), resulta $y_1y_2 = L_{2e}(y_1y_2) + L_{2e}(y_1)L_{2e}(y_2) = L_{2e}(y_1y_2) + y_1y_2$. Logo, $L_{2e}(y_1y_2) = 0$, ou seja, $U_e^2 \subseteq V_e$. Além disso, se $y_2 \in V_e$, a equação (2.13) fica $L_{2e}(y_1y_2) = y_1y_2$, para qualquer $y_1 \in N$. Assim, $NV_e \subseteq U_e$. Em particular, para $N = V_e$, temos $V_e^2 \subseteq U_e$ e para $N = U_e$, $U_eV_e \subseteq U_e$. ■

Aplicando a decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a $x \in A$, podemos estabelecer o seguinte teorema de estrutura:

Teorema 2.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica com idempotente não-nulo e.*

(*a*) *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, decompondo cada $x \in A$ da forma $x = \omega(x)e + u + v$ com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, tem-se:*

$$x^2 = \omega(x)^2e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2 \tag{2.14}$$

onde $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$. Além disso, valem as seguintes identidades, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$:

$$u^3 = 0; \qquad u(uv) = 0; \qquad uv^2 = 0 \tag{2.15}$$

$$(u^2)^2 = 0; \qquad (uv)^2 = 0 \tag{2.16}$$

(*b*) *Reciprocamente, se $A = Ke \oplus U \oplus V$ é soma direta de subespaços com a multiplicação satisfazendo* (2.14) *e as identidades* (2.15) *e* (2.16) *então (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com $U = U_e$ e $V = V_e$.*

Demonstração.

(*a*) Seja (A, ω) álgebra de Bernstein. Como A admite a decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, podemos escrever para todo $x \in A$, $x = \omega(x)e + u + v$, com $u \in Ue$ e $v \in V_e$. Lembrando que $2eu = L_{2e}(u) = u$ e $2ev = L_{2e}(v) = 0$, para $u \in U_e$ e $v \in V_e$, temos $x^2 = (\omega(x)e + u + v)^2 = \omega(x)^2e^2 + u^2 + v^2 + 2\omega(x)eu + 2\omega(x)ev + 2uv = \omega(x)^2e + (\omega(x)u + 2uv + v^2) + u^2$. Pelo lema anterior, segue que $\omega(x)u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$. Prova-se assim, (2.14).

Cada $y \in N$ se decompõe da forma $y = su + tv$, onde $s, t \in K$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Desse modo, $2ey = L_{2e}(y) = sL_{2e}(u) + tL_{2e}(v) = su$. Substituindo $y = su + tv$ na identidade (2.11), obtemos:

$$0 = (2ey)y^2 = su(su + tv)^2 = s^3u^3 + 2s^2tu(uv) + st^2uv^2$$

para todo $s, t \in K$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Fazendo $s = 1$ e $t = 0$, temos $u^3 = 0$. Para $s = -1$ e $t = 1$, resulta:

$$-u^3 + 2u(uv) - uv^2 = 0 \tag{2.17}$$

Para $s = t = 1$,

$$u^3 + 2u(uv) + uv^2 = 0 \tag{2.18}$$

Finalmente, para $s = 1$ e $t = -1$, temos

$$u^3 - 2u(uv) + uv^2 = 0 \tag{2.19}$$

Da soma de (2.17) e (2.18), resulta $u(uv) = 0$. Somando (2.18) e (2.19), obtemos $uv^2 = 0$. Assim, valem as identidades em (2.15). Substituindo y, desta vez, em (2.12), resulta que $(y^2)^2 = 0$ se, e somente se, $(u^2)^2 = (uv)^2 = u^2v^2 = (v^2)^2 = u^2(uv) = (uv)v^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= (y^2)^2 = ((su+tv)^2)^2 \\ &= (s^2u^2 + 2st(uv) + t^2v^2)^2 \\ &= s^4(u^2)^2 + 4s^2t^2(uv)^2 + 2s^2t^2u^2v^2 + t^4(v^2)^2 + 4s^3tu^2(uv) + 4st^3(uv)v^2 \end{aligned}$$

para todo $u \in U_e$ e $v \in v_e$. Por hipótese, a identidade $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$ é satisfeita para todo $x \in A$; em particular, $(u^2)^2 = (v^2)^2 = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Fazendo $s = -1$ e $t = 1$, resulta

$$4(uv)^2 + 2u^2v^2 - 4u^2(uv) - 4(uv)v^2 = 0 \tag{2.20}$$

Para $s = t = 1$, temos

$$4(uv)^2 + 2u^2v^2 + 4u^2(uv) + 4(uv)v^2 = 0 \tag{2.21}$$

Somando (2.20) e (2.21), obtemos $2(uv)^2 + u^2v^2 = 0$. Do lema anterior, temos que $(uv)^2 \in V_e$ e $u^2v^2 \in U_e$. Como $U_e \cap V_e = \{0\}$, pois $N = \ker(\omega) = U_e \oplus V_e$, concluímos que $(uv)^2 = u^2v^2 = 0$. Subtraindo (2.20) de (2.21), resulta $u^2(uv) + 4(uv)v^2 = 0$. Pelo lema anterior e pelo fato de $U_e \cap V_e = \{0\}$, concluímos que $u^2(uv) = (uv)v^2 = 0$. Em particular, valem as identidades em (2.16).

(b) Como $A = Ke \oplus N = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ por hipótese, podemos decompor cada $y \in N$ na forma $y = u + v$, onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Usando (2.14) para $x = e + u + v$, temos $x^2 = e^2 + u^2 + v^2 + 2eu + 2ev + 2uv = e + u + 2uv + v^2 + u^2$. Assim, $2e(u+v) = u$. O operador $L_{2e} : N \to N$, definido por $L_{2e}(y) = 2ey$ é uma projeção com $\text{Im}(L_{2e}) = U_e$ e $\ker(L_{2e}) = V_e$. De fato, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$, temos $L_{2e}(y) = L_{2e}(u+v) = 2e(u+v) = u$. Para todo $u \in U_e$, substituímos $x = e + u$ em (2.14) e obtemos $(e+u)^2 = e + u + u^2$, de onde segue que $2eu = u$. Assim, $L_{2e}^2(y) = L_{2e}(L_{2e}(y)) = L_{2e}(u) = 2eu = u$. Portanto, $L_{2e}^2(y) = L_{2e}(y)$, para todo $y \in N$, ou seja, L_{2e} é uma projeção. É de fácil verificação que $Im(L_{2e}) = U_e$ e $\ker(L_{2e}) = V_e$. Temos, assim, a identidade (2.9) verificada. Novamente, por (2.14) temos $y^2 = (u+v)^2 = 2uv + v^2 + u^2$, com $2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$, o que implica $U_eV_e + V_e^2 \subseteq U_e$ e $U_e^2 \subseteq V_e$. Desse modo,

$$\begin{aligned} 2ey^2 + (2ey)^2 &= L_{2e}(y^2) + (L_{2e}(y))^2 \\ &= L_{2e}(u^2 + 2uv + v^2) + u^2 \\ &= L_{2e}(u^2) + L_{2e}(2uv + v^2) + u^2 \\ &= 2uv + v^2 + u^2 \\ &= y^2 \end{aligned}$$

Portanto, vale (2.10). Na parte (a), mostramos que (2.11) é equivalente a (2.15). Resta então, provar que para todo $y = u + v \in N$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$, vale $(y^2)^2 = (u^2 + 2uv + v^2)^2 = (u^2)^2 + 4(uv)^2 + (v^2)^2 + 4u^2(uv) + 2u^2v^2 + 4(uv)v^2 = 0$. Por hipótese, temos $(uv)^2 = (u^2)^2 = 0$. Logo, é suficiente mostrar que:

$$(v^2)^2 = u^2(uv) = u^2v^2 = (uv)v^2 = 0 \tag{2.22}$$

para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$.

Façamos uma linearização da identidade $u^3 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 = u(uu) \\ &= u_1(uu) + u(u_1u) + u(uu_1) \\ &= u_1u^2 + 2u(u_1u) \end{aligned}$$

Fazendo $u = u_2$ e linearizando novamente, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= u^3 \\ &= u_1(u_2u_3 + u_3u_2) + 2\big(u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2)\big) \\ &= 2u_1(u_2u_3) + 2u_2(u_1u_3) + 2u_3(u_1u_2) \\ &= u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) \qquad (2.23) \end{aligned}$$

para todo $u_1, u_2, u_3 \in U$. Tomando $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = uv$, obtemos $2u\big(u(uv)\big) + (uv)u^2 = 0$, o que implica $(uv)u^2 = 0$, pois, por hipótese, $u(uv) = 0$. Da mesma forma, tomando $u_1 = u_2 = u$ e $u_3 = v^2$, resulta $2u(uv^2) + u^2v^2 = 0$, o que implica $u^2v^2 = 0$, pois, desta vez, $uv^2 = 0$. Finalmente, da identidade $uv^2 = 0$ e observando que U_eV_e e V_e^2 estão contidos em U_e, concluímos que $(uv)v^2 = (v^2)^2 = 0$.

Provamos assim que as condições (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) são satisfeitas para todo $y \in N$. Pelo que já foi visto, isso equivale a (A, ω) ser álgebra de Bernstein. ■

Além de (2.22) e (2.23), temos outras identidades obtidas através da linearização das identidades em (2.15) e (2.16):

Corolário 2.1. *Em uma álgebra de Bernstein valem as seguintes identidades:*

$$u(v_1v_2) = 0; \qquad u(u^2v) = 0; \qquad (2.24)$$

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0; \qquad u^2(u^2v) = 0; \qquad (2.25)$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0; \qquad u_1^2(u_1u_2) = 0; \qquad u_1^2(u_2v) + 2(u_1u_2)(u_1v) = 0; \qquad (2.26)$$

$$(u_1v)(u_2v) = 0 = (uv_1)(uv_2); \qquad (u_1u_2)v^2 = u^2(v_1v_2) = 0, \qquad (2.27)$$

para todo $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $v, v_1, v_2 \in V_e$.

Demonstração.

Linearizando $uv^2 = 0$, resulta $u(v_1v) = 0$. Fazendo $v = v_2$ e $v_1 = u^2$ obtém-se (2.24), observando que $u^2 \in V_e$, para todo $u \in U_e$. A primeira identidade em (2.25) vem de (2.23), fazendo $u_1 = u_3$. Assim, lembrando que $u(u^2v) = 0$, obtemos $u^2(u^2v) = -2u(u(u^2v)) = 0$, o que verifica a segunda identidade de (2.24). Linearizando $u(uv) = 0$, obtemos $u_1(uv) + u(u_1v) = 0$. Fazendo $u = u_2$, obtemos a primeira identidade de (2.26). Ao linearizarmos $(u^2)^2 = 0$, resulta $u_1^2(u_1u) = 0$, que nos dá a segunda identidade de (2.26) tomando-se $u = u_2$. A terceira identidade de (2.26) pode ser obtida através da linearização de $u^2(uv) = 0$, conforme segue: $u^2(uv) = 0$ isto implica que $(uu)(uv) = 0$, daí segue que $(u_1u)(uv) + (uu_1)(uv) + u^2(u_1v) = u^2(u_1v) + 2(uu_1)(uv) = 0$. Agora, basta tomar $u = u_1$ e $u_1 = u_2$.

Linearizando $(uv)^2 = 0$, temos: $(uv)(uv) = 0$ então $(u_1v)(uv) + (uv)(u_1v) = 0 = (u_1v)(uv)$. Fazendo $u = u_2$, obtemos $(u_1v)(u_2v) = 0$. Da mesma forma, podemos escrever $(uv)(uv) = 0$ segue que $(uv_1)(uv) + (uv)(uv_1) = 0 = (uv_1)(uv)$. Fazendo $v = v_2$, obtemos $(uv_1)(uv_2) = (u_1v)(u_2v) = 0$, que é a primeira identidade de (2.27). Finalmente, uma linearização de $u^2v^2 = 0$ é dada por $(uu)(vv) = (uu)v^2 = 0$, então $(u_1u)v^2 = 0$. Fazendo $u = u_2$, obtemos $(u_1u_2)v^2 = 0$. De forma análoga, podemos obter $u^2(v_1v_2) = (u_1u_2)v^2 = 0$, que é a segunda identidade de (2.27). ■

Corolário 2.2. *Se A é uma álgebra de Bernstein e $e \in \mathrm{Id}_1(A)$. Então o conjunto dos idempotentes de peso 1 é dado por* $\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + u^2\, ;\ u \in U_e\}$.

Demonstração.

Vamos mostrar inicialmente que para todo $u \in U_e$, $e + u + u^2 \in \mathrm{Id}_1(A)$. Lembrando que para todo $u \in U_e$, tem-se $2eu = L_{2e}(u) = u$, $2eu^2 = L_{2e}(u^2) = 0$, $u^3 = 0$ e $(u^2)^2 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(e + u + u^2)^2 &= e^2 + u^2 + (u^2)^2 + 2eu + 2eu^2 + 2uu^2 \\ &= e + u + u^2\end{aligned}$$

ou seja, $e + u + u^2$ é idempotente de peso 1. Portanto $\{e + u + u^2\, ;\ u \in U_e\} \subseteq \mathrm{Id}_1(A)$. Agora, se x é um idempotente de peso 1, temos $x = e + u + v$ e $x^2 = x$, com $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Por (2.14), temos $x^2 = x = e + u + v = e + (u + 2uv + v^2) + u^2$, com $u + 2uv + v^2 \in U_e$ e $u^2 \in V_e$, de onde resulta $v = u^2$. Logo, para todo $x \in \mathrm{Id}_1(A)$, x é da forma $x = e + u + u^2$, para algum $u \in U_e$. Portanto, $\mathrm{Id}_1(A) \subseteq \{e + u + u^2\, ;\ u \in U_e\}$ ■

Corolário 2.3. *Sejam $e, f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$ com $u_0 \in U_e$, temos que as aplicações $\sigma_{e,u_0} : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau_{e,u_0} : V_e \longrightarrow V_f$ dadas por $\sigma_{e,u_0}(u) = u + 2u_0u$, para todo $u \in U_e$ e $\tau_{e,u_0}(v) = v - 2u_0v - 2u_0^2v$, para todo $v \in V_e$ são isomorfismos de espaços vetoriais.*

Demonstração.

Vamos mostrar inicialmente que para todo $u_0, u \in U_e$ e que, $u + 2u_0u \in U_f$. Lembrando que $x \in U_f$ se, e somente se, $L_{2f}(x) = 2fx = x$ e que $U_e^2 \subseteq V_e$, $ev = 0$ para todo $v \in V_e$ e usando (2.25) e (2.26) obtemos

$$\begin{aligned}2f(u + 2u_0u) &= 2(e + u_0 + u_0^2)(u + 2u_0u) \\ &= 2eu + 4e(u_0u) + 2u_0u + 4u_0(u_0u) + 2u_0^2u + 4u_0^2(u_0u) \\ &= u + 2u_0u\end{aligned}$$

isso mostra que $\mathrm{Im}(\sigma_{e,u_0}) \subseteq U_f$, além disso se $u_1 = u_2$ temos que $\sigma_{e,u_0}(u_1) = \sigma_{e,u_0}(u_2)$ mostrando assim que σ_{e,u_0} esta bem definida, mostremos agora que σ_{e,u_0} é uma transformação linear, tomemos u_1, $u_2 \in U_e$ e $\alpha \in K$

$$\begin{aligned}\sigma_{e,u_0}(\alpha u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + u_2 + 2u_0(\alpha u_1 + u_2) \\ &= \alpha u_1 + 2\alpha u_0u_1 + u_2 + 2u_0u_2 \\ &= \alpha(u_1 + 2u_0u_1) + u_2 + 2u_0u_2 \\ &= \alpha\sigma_{e,u_0}(u_1) + \sigma_{e,u_0}(u_2)\end{aligned}$$

mostremos agora que σ_{e,u_0} é um monomorfismo, $\sigma_{e,u_0}(u) = 0$, então $u + 2u_0u = 0 \Rightarrow u = -2u_0u$, tal que $u \in U_e$ e $-2u_0u \in V_e$, ou seja, $u \in U_e \cap V_e$. Mas $U_e \cap V_e = 0$, logo $u = 0$, temos também que σ_{e,u_0} é um epimorfismo, de fato, seja $y \in U_f \subset N$ então existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $y = u + v$. Por definição

$$\begin{aligned}
(u+v) &= 2(e+u_0+u_0^2)(u+v) \\
&= 2eu + 2ev + 2u_0u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v \\
&= u + 2u_0u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v.
\end{aligned}$$

Pela decomposição de Peirce temos, $2u_0v + 2uu_0^2 + 2u_0^2v = 0$ e $v = 2uu_0$. Logo, $\sigma_{e,u_0}(u) = u + v = y$. Sabemos que $x \in V_f$ se, e somente se, $L_{2f}(x) = 2fx = 0$ se, e somente se, $fx = 0$ mostremos que τ_{e,u_0} esta bem definida

$$\begin{aligned}
f(v - 2u_0v - 2u_0^2v) &= (e+u_0+u_0^2)(v - 2u_0v - 2u_0^2v) \\
&= ev - 2e(u_0v) - 2e(u_0^2v) + u_0v - 2u_0(u_0v) - 2u_0(u_0^2v) + u_0^2v \\
&- 2u_0^2(u_0v) - 2u_0^2(u_0^2v) = 0
\end{aligned}$$

isto mostra que $\mathrm{Im}(\tau_{e,u_0}) \subseteq V_f$, além disso se $v_1 = v_2$ temos que $\tau_{e,u_0}(v_1) = \tau_{e,u_0}(v_2)$, assim τ_{e,u_0} esta bem definida. A função τ_{e,u_0} é uma transformação linear. De fato, sejam $v_1,\ v_2 \in V_e$ e $\alpha \in K$

$$\begin{aligned}
\tau_{e,u_0}(\alpha v_1 + v_2) &= \alpha v_1 + v_2 - 2u_0(\alpha v_1 + v_2) - 2u_0^2(\alpha v_1 + v_2) \\
&= \alpha v_1 - 2\alpha u_0v_1 - 2\alpha u_0^2v_1 + v_2 - 2u_0v_2 - 2u_0^2v_2 \\
&= \alpha(v_1 - 2u_0v_1 - 2u_0^2v_1) + v_2 - 2u_0v_2 - 2u_0^2v_2 \\
&= \alpha\tau_{e,u_0}(v_1) + \tau_{e,u_0}(v_2).
\end{aligned}$$

Vejamos que τ_{e,u_0} é um monomorfismo, se $\tau_{e,u_0}(v) = 0$, então $v - 2u_0v_1 - 2u_0^2v = 0$, pela decomposição de Peirce temos que $v = 0$. Mostremos τ_{e,u_0} é um epimorfismo, sejam $u \in U_e$ e $v \in V_e$, seja $y = u + v \in V_f$ então

$$\begin{aligned}
0 &= 2(e+u_0+u_0^2)(u+v) \\
&= 2eu + 2ev + 2u_0u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v \\
&= (u + 2u_0v + 2u_0^2v + 2u_0^2u) + 2u_0u.
\end{aligned}$$

Temos que $(u + 2u_0v + 2u_0^2v + 2u_0^2u) \in U_e$ e $u_0u \in V_e$, como $N = U_e \oplus V_e$ então $u + 2u_0v + 2u_0^2v + 2u_0^2u = 0$ e $2u_0u = 0$ por (2.25) segue que $u_0^2u = -2u_0(u_0u) = 0$, assim $u = -2u_0v - 2u_0^2v$, logo $\tau_{e,u_0}(v) = v - 2u_0v - 2u_0^2v = v + u = y$. ■

Como no capítulo anterior de agora em diante, para não sobrecarregar a linguagem, escreveremos σ e τ no lugar de σ_{e,u_0} e τ_{e,u_0}, respectivamente. Porém deve ficar claro que as funções σ e τ dependem do par de idempotentes e e f.

Por esse último corolário, resulta que as dimensões de U_e e V_e independem da escolha do idempotente não nulo e; assim, o par $(1 + \dim U_e, \dim V_e)$ é um invariante para álgebras de Bernstein de dimensão finita e é denominado o *tipo* da álgebra (A, ω). A decomposição

$$A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$$

é denominada *decomposição de Peirce* da álgebra (A, ω) relativa ao idempotente e. Observamos que a decomposição depende do idempotente escolhido, apesar da dimensão de suas componentes serem invariantes.

2.0.2 Álgebras de Bernstein-Jordan

Uma álgebra comutativa é chamada *álgebra de Jordan* quando quaisquer elementos $x,\ y \in A$ satisfaz

$$x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Uma álgebra de Bernstein que que também é de Jordan é chamada *álgebra de Bernstein-Jordan.* O resultado seguinte é a Proposição 3.1 de [3].

Proposição 2.3. *Em uma álgebra de Bernstein A são equivalentes as seguintes condições:*

(a) A é uma álgebra de Jordan;

(b) $V_e^2 = 0$ para todo $e \in \mathrm{Id}_1(A)$;

(c) $V_e^2 = 0$, para algum $e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$;

(d) Todo elemento $x \in A$ satisfaz $x^3 = \omega(x)x^2$.

Demonstração.

$(a) \Rightarrow (b)$ Seja A uma álgebra de Jordan, então $x^2(yx) = (x^2y)x$, para isto consideremos $x = e + v$ e $y = e$ na equação anterior com $e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $v \in V_e$ e lembremos que $e^2 = e$, $ev = 0$, $eu = \dfrac{1}{2}u$, $U_e^2 \subseteq V_e$, $V_e^2 \subseteq U_e$ e $U_eV_e \subseteq U_e$

$$\begin{aligned}
(e+v)^2\big(e(e+v)\big) &= \big((e+v)^2e\big)(e+v)\\
(e^2+2ev+v^2)(e^2+ev) &= \big((e^2+2ev+v^2)e\big)(e+v)\\
(e+v^2)e &= \big((e+v^2)e\big)(e+v)\\
e^2+ev^2 &= (e^2+ev^2)(e+v)\\
e+ev^2 &= (e+ev^2)(e+v)\\
e+ev^2 &= e^2+ev+e(ev^2)+v(ev^2)\\
ev^2 &= e(ev^2)+v(ev^2)
\end{aligned}$$

como $v^2 \in U_e$ temos que $\dfrac{1}{2}v^2 = \dfrac{1}{4}v^2 + \dfrac{1}{2}v^3$, como $v^3 = 0$ segue que $v^2 = 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como vale para todo $e \in \mathrm{Id}_1(A)$ então vale para um idempotente particular

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma decomposição de Peirce de A relativa a um idempotente e. Para cada $u \in U_e$, e consideremos o idempotente $f = e + u + u^2$

Por hipótese $V_f^2 = 0$. Lembrando que para todo v em V_e temos

$$\begin{array}{rcl} \tau : V_e & \longrightarrow & V_f \\ v & \longmapsto & (v - 2uv - 2u^2v) \end{array}$$

Como $\tau(V_e) = V_f$ então $\tau^2(V_e) = V_f^2 = 0$. Logo, lembrando que $(uv)^2 = 0$ por (2.16) e que $u^2v \in V_e^2 = 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \tau^2(v) = (v - 2uv - 2u^2v)^2 \\ &= (v - 2uv)^2 - 2(v - 2uv)2u^2v + (2u^2v)^2 \\ &= v^2 - 4v(uv) + 4(uv)^2 - 4v(u^2v) + 8(uv)(u^2v) + 4(u^2v)(u^2v) \\ &= -4v(uv) \\ &= (uv)v. \end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (d)$ Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce relativa ao idempotente e, para a qual $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$ para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$, lembrando que todo $x \in A$ pode ser escrito na forma $x = \omega(x)e + u + v$ e que $(uv)u = 0$, onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Assim,

$$\begin{aligned} x^3 &= (\omega(x)e + u + v)^3 = (\omega(x)e + u + v)^2(\omega(x)e + u + v) \\ &= \Big(\omega(x)^2e^2 + 2\omega(x)e(u + v) + (u + v)^2\Big)(\omega(x)e + u + v) \\ &= \Big(\omega(x)^2e + \omega(x)u + u^2 + 2uv\Big)(\omega(x)e + u + v) \\ &= \omega(x)^3e + \omega(x)^2eu + \omega(x)^2eu + \omega(x)u^2 + \omega(x)uv + \omega(x)uv + 2(uv)u + 2(uv)v \\ &= \omega(x)\Big(\omega(x)^2e + 2\omega(x)eu + u^2 + 2uv\Big) \\ &= \omega(x)x^2 \end{aligned}$$

$(d) \Rightarrow (a)$ Linearizando $x^3 = \omega(x)x^2$ temos

$$2(yx)x + x^2y = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)(yx).$$

Substituindo y por xy na equação anterior obtemos

$$2x(x(xy)) + x^2(xy) = \omega(x)\omega(y)x^2 + 2\omega(x)x(xy).$$

Multiplicando a penúltima equação por x obtemos

$$2x(yx)x + x(x^2y) = \omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(yx).$$

Subtraindo esta última equação da anterior temos

$$x(x^2y) - x^2(xy) = \omega(y)x^3 - \omega(x)\omega(y)x^2.$$

Como $x^3 = \omega(x)x^2$

$$\begin{aligned} x(x^2y) - x^2(xy) &= \omega(y)\omega(x)x^2 - \omega(x)\omega(y)x^2 \\ x(x^2y) - x^2(xy) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $x(x^2y) = x^2(xy)$ ou $x^2(yx) = (x^2y)x$. ∎

Corolário 2.4. *Em uma álgebra de Bernstein-Jordan valem as seguintes identidades*

$$\begin{aligned}(v_1v_2) &= 0\\ (uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 &= 0\end{aligned}$$

para $e \in \mathrm{Id}_1(A)$, $u \in U_e$, v_1, $v_2 \in V_e$.

Demonstração.

Linearizando $v^2 = 0$ obtemos a primeira identidade e linearizando $(uv)v = 0$ obtemos a segunda identidade

2.0.3 Invariância de subespaços

Nosso objetivo é estudar a invariância de subespaços em álgebras de Bernstein quanto à mudança do idempotente, analisar alguns subespaços invariantes, para isso consideraremos como no Capítulo 1 que o polinômio $p \in \mathcal{P}$.

Proposição 2.4. *Sejam* X_1, X_2, $X_3 \subseteq U_e$ *e* $W \subseteq V_e$, *subespaços de uma álgebra de Bernstein* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$. *Então*

(*a*) $X_1^2X_2 \subseteq X_1(X_1X_2)$;

(*b*) $X_1(X_2X_3) \subseteq X_2(X_3X_1) + X_3(X_1X_2)$;

(*c*) $X_1(X_2W) = X_2(X_1W)$.

Demonstração.

Segue da parte (a) do Lema 0.1 e da Observação 0.1 que $X_1^2X_2$ é gerado por elementos da forma $x_1^2x_2$, com $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Agora, pela identidade (2.25) $x_1^2x_2 \in X_1(X_1X_2)$. Assim, $X_1^2X_2 \subseteq X_1(X_1X_2)$ isto mostra (a). Segue da Observação 0.1 que $X_1(X_2X_3)$ é gerado por elementos da forma $x_1(x_2x_3)$, onde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$, linearizando $u^3 = 0$ obtemos que

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0 \tag{2.28}$$

e usando esta última identidade temos que $x_1(x_2x_3) = -x_2(x_3x_1) - x_3(x_1x_2) \in X_2(X_3X_1) + X_3(X_1X_2)$, portanto $X_1(X_2X_3) \subseteq X_2(X_3X_1) + X_3(X_1X_2)$, isto mostra ($b$). Temos que $X_1(X_2W)$ é gerado por elementos da forma $x_1(x_2w)$, com $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $w \in W$ por (2.26) $x_1(x_2w) = -x_2(x_1w) \in X_2(X_1W)$, assim $X_1(X_2W) \subseteq X_2(X_1W)$, de maneira análoga mostra-se que $X_2(X_1W) \subseteq X_1(X_2W)$, segue daí que $X_1(X_2W) = X_2(X_1W)$. ■

Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ uma família de subespaços de A, sabemos que a intersecção e a união destes subespaços formam novos subespaços de A, a proposição a seguir nos dá a união e a intersecção das famílias $\{U_f\}_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)}$ e $\{V_f\}_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)}$ de subespaços de A.

Proposição 2.5. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. Então*

(*a*) $\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f = U_e \cap ann\, U_e$;

(*b*) $\displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f = V_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$;

(*c*) $\displaystyle\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f = U_e \oplus U_e^2$;

(*d*) $\displaystyle\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f = (U_eV_e + U_e^2V_e) \oplus V_e$.

Demonstração.

Mostremos (a). Seja $e \in \mathrm{Ip}_1(A)$ fixo. Se $z \in \displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$, então para cada $u_0 \in U_e$ existe $u \in U_e$ tal que $z = u + 2u_0u$. De onde segue que $z = u$ e $u_0u = 0$, pois $u_0u \in V_e$, concluímos que $z \in U_e \cap ann\, U_e$. Assim,

$$\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f \subseteq U_e \cap ann\, U_e.$$

Por outro lado, se $u \in U_e \cap ann\, U_e$, então para todo $u_0 \in U_e$ temos $u = u + 2u_0u \in U_f$. Logo, $u \in \displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$. Assim,

$$U_e \cap ann\, U_e \subseteq \bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f.$$

Mostremos agora (b). Se $w \in \displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f$, então para cada $u_0 \in U_e$, existe $v \in V_e$ tal que $w = v - 2(u_0 + u_0^2)v$. De onde segue que $w = v$ e $(u_0 + u_0^2)v = 0$, pois $(u_0 + u_0^2)v \in U_e$. Agora, usando a parte (b) do Lema 0.1, concluímos que $w \in V_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$. Assim,

$$\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f \subseteq V_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2).$$

Por outro lado, se $v \in V_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$, então para todo $u_0 \in U_e$ temos $v = v - 2(u_0 + u_0^2)v \in V_f$. Logo, $v \in \displaystyle\bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f$. Assim,

$$V_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2) \subseteq \bigcap_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f,$$

o que conclui a demonstração da parte (b). Mostremos agora (c). Como $U_f = \{u + 2u_0u\, ;\ u \in U_e\}$, para todo $u_0 \in U_e$, temos que

$$\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f = \sum_{u_0\in U_e} \langle u + 2u_0u\, ;\ u \in U_e\rangle\,.$$

Segue daí que $\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f \subseteq U_e \oplus U_e^2$. Por outro lado, é evidente que $U_e \subseteq \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$ e, segue de

$$u_0u = \frac{1}{2}(u + 2u_0u) - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sigma(u) - \frac{1}{2}u \in U_f + U_e \subseteq \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$$

que $U_e^2 \subseteq \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$. Para mostrar (d), observamos que

$$\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f = \sum_{u_0\in U_e} \left\langle v - 2u_0v - 2u_0^2v\,;\ v \in V_e \right\rangle .$$

Portanto, $\sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f \subseteq (U_eV_e + U_e^2V_e) \oplus V_e$. Por outro lado, temos que $V_e \subseteq \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f$. Agora segue das Observações 0.1 e 0.2 e do Lema 0.1 que

$$U_eV_e + U_e^2V_e = (U_e + U_e^2)V_e = \left\langle (u_0 + u_0^2)v\,;\ u_0 \in U_e \ e\ v \in V_e \right\rangle \subseteq \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f,$$

pois $(u_0 + u_0^2)v = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}(v - 2(u_0 + u_0^2)v) = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\tau(v) \in V_e + V_f$. ■

Esta proposição é um caso particular de um caso mais geral que veremos na Proposição 2.15. Esta proposição foi apresentada agora apenas para um melhor descrição dos subespaços $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$, que definiremos a seguir.

Seja A uma álgebra de Bernstein e $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$. Definimos os subespaços $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ da seguinte forma

$$\widetilde{U} = \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f \tag{2.29}$$

$$\widetilde{V} = \sum_{f\in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f. \tag{2.30}$$

Pela proposição anterior temos que

$$\widetilde{U} = U_e \oplus U_e^2 \tag{2.31}$$

$$\widetilde{V} = (U_eV_e + U_e^2V_e) \oplus V_e. \tag{2.32}$$

Pela definição de $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$, temos que eles não dependem da escolha de um particular idempotente. Segue que $U_e \oplus U_e^2$ e $(U_eV_e + U_e^2V_e) \oplus V_e$ não dependem do idempotente, logo estes subespaços são invariantes.

Temos também que $N = U_e \oplus V_e$ e $P = (U_eV_e + V_e^2) \oplus V_e$ são subespaços invariantes. De fato, N é o núcleo de ω, assim N não depende da escolha de um idempotente particular, ou seja, $A = Ke \oplus N$ com $N = U_e \oplus V_e$ e $A = Kf \oplus N$ com $N = U_f \oplus V_f$, para mostrar que $N_e = N_f$ basta mostrar que $N_f \subseteq N_e$

$$\begin{aligned} N_f &= \langle \sigma(u) + \tau(v) \, ; \; u \in U_e \, e \, v \in V_e \rangle \\ &= \left\langle u + 2u_0 u + v - 2u_0 v - 2u_0^2 v \, ; \; u, \, u_0 \in U_e \, e \, v \in V_e \right\rangle \\ &= \left\langle (u - 2u_0 v - 2u_0^2 v) + (v + 2u_0 u) \, ; \; u, \, u_0 \in U_e \, e \, v \in V_e \right\rangle \\ &\subseteq U_e \oplus V_e = N_e. \end{aligned}$$

Para mostrar que P é invariante é suficiente mostrar que $P_f \subseteq P_e$, para qualquer par de idempotentes de peso 1 de A. Sejam $e, \, f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$,

$$\begin{aligned} P_f &= \left\langle (\sigma(u)\tau(v) + \tau(v_1)^2) \oplus \tau(v_3) \, ; \; u \in U_e, \;\; v, \, v_1, \, v_2 \in V_e \right\rangle \\ &\subseteq (U_e V_e + V_e^2) \oplus V_e \\ &= P_e. \end{aligned}$$

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, definimos o conjunto $L = \{u \in U_e \, ; \; uU_e = 0\}$. Segue da Proposição 2.4 que

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f = U_e \cap ann \, U_e = L.$$

L é um ideal de A, pois $0 \in L$, para todo $\alpha \in K$, $u_1, \, u_2 \in L$ e $u \in U_e$ temos $(\alpha u_1 + u_2)u = \alpha u_1 u + u_2 u = \alpha 0 + 0 = 0$, portanto L é um subespaço de A, temos também que para cada $x = \omega(x) + u' + v \in A$ e $u_1 \in L$ que

$$\begin{aligned} xu_1 &= \omega(x)eu_1 + u'u_1 + vu_1 \\ &= \frac{1}{2}\omega(x)u_1 + vu_1, \end{aligned}$$

e além disso

$$\begin{aligned} (xu_1)u &= \frac{1}{2}\omega(x)u_1 u + (vu_1)u \\ &= -u_1(uv) = 0, \;\; \text{para todo} \, u \in U_e. \end{aligned}$$

Portanto $xu_1 \in L$, como A é comutativa também vale $u_1 x \in L$.

Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein, e consideremos o caracter $\overline{\omega} : A/L \longrightarrow K$ definido por $\overline{\omega}(\overline{x}) = \omega(x)$ a álgebra $(A/L, \overline{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $\overline{A} = K\overline{e} \oplus \overline{U}_{\overline{e}} \oplus \overline{V}_{\overline{e}}$ onde $\overline{U}_{\overline{e}} = U_e/L$ e $\overline{V}_{\overline{e}} = (V_e \oplus L)/L$. Temos que $\overline{v}^2 \in L$ pois temos que $v^2 \in U_e$ e além disso $uv^2 = 0$ para qualquer $u \in U_e$, segue que $\overline{v}^2 = \overline{0}$, então $(\overline{A}, \overline{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan pela Proposição 2.3.

No lema posterior usaremos U e V para denotar U_e e V_e respectivamente, pois as afirmações deste lema são verdadeiras para todo $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$. Sempre que não houver confusão quanto ao idempotente usado usaremos estas notações.

Lema 2.4. *Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Então temos:*

(a) $U^{2n} \subseteq V$ *e* $U^{2n+1} \subseteq U$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

(b) $V^m \subseteq L$ $m = 2, 3, 4, \ldots$

(c) $U^n L = 0$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

Demonstração.
(a) Demonstraremos usando a indução em n. Para $n = 1$ temos temos $U^2 \subseteq V$ e $U^3 \subseteq U$. Se (a) vale para n então

$$U^{2(n+1)} = U^{2n+2} = (U^{2n}U)U \subseteq (VU)U \subseteq V.$$

$$U^{2(n+1)+1} = U^{2n+2+1} = (U^{2n+1}U)U \subseteq U^3 \subseteq U.$$

(b) Sabemos que $V^2 \subseteq U$ e $UV^2 = 0$ por (2.15). Portanto, $V^2 \subseteq L$. Como L é ideal, temos que $V^m \subseteq L$ para todo inteiro positivo $m \geq 2$
(c) Se n é ímpar então, usando a parte (a) e da definição de L segue que

$$U^n L \subseteq UL = 0$$

Se $n \geq 2$ é par então, segue de (a) e da Proposição 2.3 que

$$U^n L = (U^{n-1}U)L \subseteq U^2 L \subseteq U(UL) = 0$$

. ■

Corolário 2.5. *Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein. Então temos:*

(a) $V^m \subseteq U$ $m = 2, 3, 4, \ldots$

(b) $U^n V^m = 0$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $m = 2, 3, 4, \ldots$

Demonstração.
(a) Segue da condição (b) do Lema 2.4 que $V^m \subseteq L$, mais pela definição de L temos que $L = U \cap ann(U)$, então $V^m \subseteq L \subseteq U$.
(b) Usando a condição (b) do Lema 2.4 temos que $U^n V^m \subseteq U^n L = 0$, aplicando a condição (c) do Lema 2.4. ■

Usando o Lema 2.3 temos que cada monômio não nulo m em uma álgebra de Bernstein satisfaz uma das duas possibilidades: m_e está contido em U_e ou m_e está contido em V_e. Portanto, dado um polinômio p, existem dois polinômios g e h onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$ tal que $p_e = g_e \oplus h_e$.

Se m é um monômio com grau de $m \geqslant 2$ então existem monômios m_1 e m_2 com $\partial m_1, \partial m_2 < \partial m$ tal que $m = m_1 m_2$. Pelo Lema 2.3, concluímos que se $m_e \subseteq V_e$ então $m_{1_e}, m_{2_e} \subseteq U_e$. Agora, se $m_e \subseteq U_e$ existem duas possibilidades: $m_{1_e} \subseteq U_e$ e $m_{2_e} \subseteq V_e$, ou $m_{1_e}, m_{2_e} \subseteq V_e$.

Seja $p = \sum_{i=1}^{n} m_i$ um polinômio, onde m_i são monômios, defini-se a *ordem* de p como sendo $o(p) = min\{\partial m_i\,;\ i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Usaremos esta definição e as observações acima para demonstrar a proposição seguinte.

Proposição 2.6. *Sejam A uma álgebra de Bernstein e p um polinômio tal que $p_e \subseteq V_e$. Se $o(p) \geqslant 2$ então existe um polinômio q onde $q_e \subseteq U_e$ que satisfaz a seguinte identidade $p_e = U_e q_e$.*

Demonstração.

Demonstraremos inicialmente a proposição para $p = m$, onde m é um monômio com $\partial m \geqslant 2$. Logo, existem monômios μ_1, μ_2 com μ_{1_e}, $\mu_{2_e} \subseteq U_e$ tal que $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$. Mostraremos, usando indução em $\partial\mu_1$, que existe um monômio μ com $\mu_e \subseteq U_e$ tal que $m_e = U_e\mu_e$. Se $\partial\mu_1 = 1$, então $m_e = U_e\mu_{2_e}$. Usaremos a seguinte hipótese de indução: se $m_e = n_e q_e$ com n_e, $q_e \subseteq U_e$ e $\partial n \leq k$. então existe um monômio μ com $\mu_e \subseteq U_e$ tal que $m_e = U_e\mu_e$. Suponhamos agora que $\partial\mu_1 = k+1$. Se $\mu_{1_e} \subseteq V_e^2$, então $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e} \subseteq V_e^2 U_e = 0$. Se $\mu_{1_e} \subseteq U_e V_e$, então existem monômios μ_1', ν com $\mu_{1_e}' \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$. tais que $\mu_{1_e} = \mu_{1_e}'\nu_e$ e $\partial\mu_1' \leq k$. Portanto, $m_e = (\mu_{1_e}'\nu_e)\mu_{2_e} = \mu_{1_e}'(\mu_{2_e}\nu_e)$, esta última igualdade segue da parte (c) da Proposição 2.3. Como $\mu_{2_e}\nu_e \subseteq U_e$, pela hipótese de indução, existe $\mu_e \subseteq U_e$ tal que $m_e = U_e\mu_e$. Agora, suponhamos que $p = \sum_{i=1}^{k} m_i$ seja um polinômio tal que p_e está contido em V_e, onde m_i são monômios com $\partial m_i \geqslant 2$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ e cada $m_{i_e} \subseteq V_e$. Logo, existem monômios μ_i com $\mu_{i_e} \subseteq U_e$ tal que $m_{i_e} = U_e\mu_{i_e}$. Assim, escrevendo $q = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, temos $p_e = U_e q_e$ com $q_e \subseteq U_e$. ∎

A seguir faremos um breve comentário de como se construir subespaços invariantes a partir de subespaços invariantes já existentes.

Seja $A = Ke \oplus U \oplus V$ uma decomposição Peirce de uma álgebra de Bernstein. Mostramos que os seguintes Polinômio são invariantes

$$
\begin{aligned}
N &= U \oplus V && (2.33)\\
P &= (UV + V^2) \oplus V && (2.34)\\
\widetilde{U} &= U \oplus U^2 && (2.35)\\
\widetilde{V} &= (UV + U^2V) \oplus V. && (2.36)
\end{aligned}
$$

Usando polinômios invariantes conhecidos, podemos construir outros polinômios invariantes da seguinte maneira: seja $G(Y_1, \ldots, Y_k) \in \mathcal{P}$ e sejam $Y_1, \ldots, Y_k$ variáveis comutativas e não necessariamente associativas, consideremos $p_1, \ldots, p_k$, polinômios invariantes de uma álgebra de Bernstein qualquer. Então $q = G(p_1, \ldots, p_k)$ é um Polinômio invariante. Realmente se $p_{i_e} = p_{i_f}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$, para $q_e = G(p_{1_e}, \ldots, p_{ke}) = G(p_{1_f}, \ldots, p_{k_f}) = q_f$. Este é um bom método para se construir subespaços invariantes a partir de subespaços invariantes já conhecidos.

2.0.4 Invariância em álgebras de Bernstein satisfazendo $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$

Nesta seção estudaremos as álgebras de Bernstein que satisfazem a seguinte condição

$$\begin{cases} U^2V = 0 \\ (uv)v = 0, \text{ para quaisquer } u \in U \text{ e } v \in V. \end{cases} \tag{2.37}$$

Veremos nesta seção que as duas condições juntas em (2.37) não dependem do idempotente escolhido. Portanto (2.37) determina uma subclasse das álgebras de Bernstein, além disso concluiremos que todos os Polinômio nesta subclasse possuem dimensão invariante.

As álgebras tratadas nesta seção satisfazem as identidades do Corolário 2.4, ou seja, satisfazem as condições.

$$(uv)v = 0 \tag{2.38}$$

$$(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = 0 \tag{2.39}$$

Proposição 2.7. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce da álgebra de Bernstein A relativa ao idempotente e e $u_0 \in U_e$. A aplicação $\psi : U_e \longrightarrow U_e$ definida por $\psi(u) = u - 2u_0^2 u$ é um automorfismo de espaço vetorial.*

Demonstração.

Primeiro mostraremos que ψ é um operador linear, para cada u_1, $u_2 \in U_e$ e para cada $\alpha \in K$ temos

$$\begin{aligned} \psi(\alpha u_1 + u_2) &= (\alpha u_1 + u_2) - 2u_0^2(\alpha u_1 + u_2) \\ &= \alpha u_1 + u_2 - 2\alpha u_0^2 u_1 - 2u_0^2 u_2 \\ &= \alpha(u_1 - 2u_0^2 u_1) + u_2 - 2u_0^2 u_2 \\ &= \alpha\psi(u_1) + \psi(u_2). \end{aligned}$$

Para mostrar que ψ é bijetora basta mostrar que ψ é injetora, pois U_e tem dimensão finita. Seja $u \in U_e$ tal que $\psi(u) = 0$, então $u - 2u_0^2 u = 0$, segue que $u = 2u_0^2 u$, multiplicando esta última igualdade por u_0^2 temos $uu_0^2 = 2(uu_0^2)u_0^2$, usando (2.25) obtemos que $uu_0^2 = -4u_0(u_0(uu_0^2))$, aplicando (2.26) temos $uu_0^2 = 4u_0(uu_0^3)) = 0$, pois $u_0^3 = 0$ por (2.15), fica provado assim que $u = 0 = \ker(\psi)$, logo ψ e injetora, e pelo comentário acima segue que ψ é bijetora. ∎

Proposição 2.8. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, se existir um idempotente e tal que $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$, então*

(a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(u_1u_2)$;

(b) $\sigma(u)\tau(v) = \sigma(\psi(u)v)$;

(c) $\tau(v_1)\tau(v_2) = \sigma(v_1v_2) = v_1v_2$;

(d) $\psi(\psi(u)v) = uv$.

Demonstração.

Usando as identidades (2.4) e (2.28) concluímos que (a) é verdadeira para qualquer álgebra de Bernstein:

$$\begin{aligned}
\sigma(u_1)\sigma(u_2) &= (u_1 + 2u_0u_1)(u_2 + 2u_0u_2)\\
&= u_1u_2 + 2u_0(u_1u_2) + 2(u_0u_1)u_2 + 4(u_0u_1)(u_0u_2)\\
&= u_1u_2 - 2u_0(u_1u_2) - 2u_0^2(u_1u_2)\\
&= \tau(u_1u_2).
\end{aligned}$$

Para mostrar (b) calculemos primeiro

$$\begin{aligned}
\sigma(u)\tau(v) &= (u + 2u_0u)(v - 2u_0v - 2u_0^2v)\\
&= uv - 2u(u_0v) + 2(u_0u)v - 4(u_0u)(u_0v),
\end{aligned}$$

usando (2.4), (2.26) e $U_e^2V_e = 0$ implicam que $\sigma(u)\tau(v) = uv + 2u_0(uv) + 2u_0^2(uv)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sigma(\psi(u)v) &= \sigma\Big(uv - 2(u_0^2u)v\Big)\\
&= uv - 2(u_0^2u)v + 2u_0(uv) - 4u_0\Big((u_0^2u)v\Big).
\end{aligned}$$

Mas

$$u_0\Big((u_0^2u)v\Big) = 0 \tag{2.40}$$

em qualquer álgebra de Bernstein. De fato, usando (2.25), (2.26) e (2.27) temos

$$\begin{aligned}
u_0\Big((u_0^2u)v\Big) &= -(u_0^2u)(u_0v)\\
&= 2\Big(u_0(u_0u)\Big)(u_0v)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

usando (2.39) obtemos (b). Mostremos agora (c). Segue da hipótese que

$$\begin{aligned}
\tau(v_1)\tau(v_2) &= (v_1 - 2u_0v_1)(v_2 - 2u_0v_2)\\
&= v_1v_2 - 2v_1(u_0v_2) - 2(u_0v_1)v_2 + 4(u_0v_1)(u_0v_2).
\end{aligned}$$

Portanto, (2.27) e (2.39) implicam em $\tau(v_1)\tau(v_2) = v_1v_2$. Usando (2.24) temos $u_0(v_1v_2) = 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\tau(v_1)\tau(v_2) &= v_1v_2 + 2u_0(v_1v_2) \\
&= \sigma(v_1v_2)
\end{aligned}
$$

Finalmente, segue de (2.39) que

$$
\begin{aligned}
\psi(\psi(u)v) &= \psi\Big(uv - 2(u_0^2u)v\Big) \\
&= uv + 4u_0^2\Big((u_0^2u)v\Big).
\end{aligned}
$$

Agora, de (2.39) e (2.40) obtemos $u_0^2\Big((u_0^2u)v\Big) = -2u_0\Big(u_0\Big((u_0^2u)v\Big)\Big) = 0$. Assim, $\psi(\psi(u)v) = uv$. ■

Corolário 2.6. *Em uma álgebra de Bernstein A. as condições seguintes são equivalentes:*

(a) Existe um idempotente e de A, tal que $U_e^2V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para todo $u \in U_e$ e $v \in V_e$;

(b) Para todo idempotente e de A, tem-se $U_e^2V_e = 0$, e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$.

Demonstração.

Mostremos primeiro que (a) implica (b). Seja $f = e+u_0+u_0^2 \in \mathrm{Ip}_1(A)$ com $u_0 \in U_e$. Como σ e τ são isomorfismos de espaços vetoriais. $U_f^2V_f = \langle(\sigma(u_1)\sigma(u_2))\tau(v)\,;\ u_1,\ u_2 \in U_e,\ v \in V_e\rangle$. Mas $(\sigma(u_1)\sigma(u_2))\tau(v) = \tau(u_1u_2)\tau(v) = (u_1u_2)v = 0$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\big(\sigma(u)\tau(v)\big)\tau(v) &= \sigma\Big(\psi(u)v\Big)\tau(v) \\
&= \sigma\Big(\psi(\psi(u)v)v\Big) \\
&= \sigma((uv)v) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Que (b) implica (a) é evidente. ■

Corolário 2.7. *Sejam X, X_1, $X_2 \subseteq U$ e W, W_1, $W_2 \subseteq V$ subespaços de uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.33). *Então*

(a) $\big(XW_1\big)W_2 = \big(XW_2\big)W_1$;

(b) $\sigma\big(X_1\big)\sigma\big(X_2\big) = \tau\big(X_1X_2\big)$;

(c) $\sigma\big(X\big)\tau\big(W\big) = \sigma\big(\psi(X)W\big)$;

(d) $\tau\big(W_1\big)\tau\big(W_2\big) = \sigma\big(W_1W_2\big)$.

Demonstração.

A parte (a) pode ser obtida aplicando a identidade (2.39) nos geradores de X, W_1 e W_2. Usando a Proposição 2.7 obtemos (b), (c) e (d). ∎

Lema 2.5. *Seja e um idempotente de peso 1 de uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$. Se m é um monômio com $\partial m \geqslant 3$ e $m_e \subseteq V_e^2$ então $m_e = 0$.*

Demonstração.

Tomemos $m_e \subseteq V_e^2$ tal que $\partial m \geqslant 3$, então $m_e \subseteq U_e^2 V_e$. Realmente, escrevamos $m = \nu_1 \nu_2$, onde ν_1 e ν_2 são monômios tais que ν_{1_e}, $\nu_{2_e} \subseteq V_e$ com $\partial \nu_1 \geqslant 2$. Portanto, existem monômios μ_1 e μ_2 com μ_{1_e}, $\mu_{2_e} \subseteq U_e$ tal que $\nu_{1_e} = \mu_{1_e} \mu_{2_e}$. Portanto, $m_e = (\mu_{1_e} \mu_{2_e}) \nu_{2_e} \subseteq U^2 V = 0$. ∎

Proposição 2.9. *Seja A uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.37). *Então para todo polinômio p tem-se $U_e(U_e p_e) \subseteq p_e$.*

Demonstração.

Basta demonstrar a proposição para um monômio m. Para isso usaremos indução no grau de m, se $\partial m = 1$ então $m_e = U_e$ ou $m_e = V_e$. Daí segue

$$\begin{aligned} U_e(U_e U_e) &= U_e^3 \subseteq U_e \\ U_e(U_e V_e) &\subseteq U_e^2 \subseteq V_e. \end{aligned}$$

Suponhamos que a proposição seja verdadeira para todo monômio de grau menor ou igual a um inteiro positivo k. Seja m um monômio com $\partial m = k + 1$. Existem duas possibilidades: $m_e \subseteq U_e$ ou $m_e \subseteq V_e$. Observemos que $\partial m \geqslant 2$. Portanto, pelo Lema 2.5, se $m_e \subseteq U_e$ então $m_e = V_e^2$ ou $m_e = \mu_e \nu_e$, com $\mu_e \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$, onde μ e ν são monômios com $\partial \mu$, $\partial \nu \leqslant k$. usando $U_e V_e^2 = 0$ segue que

$$U_e(U_e V_e^2) = 0 \subseteq V_e^2$$

Usando (b) e (c) da Proposição 2.4 obtemos

$$U_e\Big(U_e(\mu_e \nu_e)\Big) = U_e\Big(\mu_e(U_e \nu_e)\Big) \subseteq \mu\Big((U_e \nu_e) U_e\Big) + (U_e \nu_e)(U_e \mu_e).$$

Segue da parte (a) do Corolário 2.7 e da hipótese de indução que

$$U_e\Big(U_e(\mu_e \nu_e)\Big) \subseteq \mu_e\Big(U_e(U_e \nu_e)\Big) + \Big(U_e(U_e \mu_e)\Big)\nu_e \subseteq \mu_e \nu_e.$$

Agora, se m é um monômio tal que $m_e \subseteq V_e$ então, pela Proposição 2.6, existe um monômio μ com $\mu'_e \subseteq U_e$ tal que $m_e = U_e \mu'_e$ e $\partial \mu' \leqslant k$.

Novamente, pela hipótese de indução,

$$U_e\Big(U_e(U_e \mu'_e)\Big) \subseteq U_e \mu'_e.$$

Portanto, para qualquer um dos casos, temos $U_e(U_e m_e) \subseteq m_e$. ∎

Corolário 2.8. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.37). *Então $U_e^2 p_e \subseteq p_e$ para qualquer polinômio p.*

Demonstração.

Seja p um polinômio, então existem polinômios g e h tal que $p_e = g_e \oplus h_e$ com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, usando a parte (a) da Proposição 2.3 temos

$$U_e^2 p_e = U_e^2 g_e + U_e^2 h_e \subseteq U_e(U_e g_e) + U_e^2 V_e$$

Usando a Proposição 2.9 nesta última identidade temos

$$U_e^2 p_e \subseteq U_e(U_e g_e) \subseteq g_e \subseteq p_e,$$

pois $U_e^2 V_e = 0$. ■

O corolário anterior nos garante que qualquer subespaço p_e de uma álgebra de Bernstein satisfazendo (2.37) absorve produto por U_e^2. Usaremos este corolário para mostrar o Lema a seguir.

Lema 2.6. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra Bernstein que satisfazem* (2.37). *Então $\psi(g_e) = g_e$, para todo polinômio g tal que $g_e \subseteq U_e$.*

Demonstração.

Pelo fato de ψ ser um automorfismo de espaço vetorial, é suficiente mostrar que $\psi(g_e) \subseteq g_e$. Seja $x \in g_e$. Como $u_0^2 \in U_e^2$, usando o Corolário 2.8, temos $\psi(x) = x - 2u_0^2 x \in g_e + U_e^2 g_e = g_e$. ■

Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $u_0 \in U_e$. A transformação de Peirce associada a e e a u_0 é a função linear definida por $\varphi(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$, onde $f = e + u_0 + u_0^2$. Assim, as transformações de Peirce são automorfismos de espaço vetorial. A demonstração do fato das transformações de Peirce serem automorfismos é totalmente análoga a que faremos no capítulo 4 na Proposição 4.8.

Teorema 2.2. *Todo polinômio em uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.37) *tem dimensão invariante.*

Demonstração.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = Kf \oplus U_f \oplus V_f$ duas decomposições de Peirce de A relativa aos idempotentes e e $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$ e seja $\varphi : A \longrightarrow A$ a transformação de Peirce associada a e e u_0. Provaremos que

$$\varphi(p(U_e, V_e)) \;=\; p(U_f, V_f). \tag{2.41}$$

Inicialmente Mostraremos que (2.41) vale para um monômio m, fazendo indução no grau k de m. Se $k = 1$ então $m_e = U_e$ ou $m_e = V_e$. Temos que $\varphi(U_e) = \sigma(U_e) = U_f$ e, analogamente, $\varphi(V_e) = \tau(V_e) = V_f$. Suponhamos agora que (2.41) vale para todo monômio de grau menor ou igual a k. Seja m um monômio com $\partial m = k + 1$. Portanto, pelo Lema

2.5, e pelas observações feitas anteriormente temos três possibilidades: $m = \mu\nu$, $m = Y^2$ ou $m = \mu_1\mu_2$, onde μ_e, μ_{1_e}, $\mu_{2_e} \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$ e os monômios μ, μ_1, μ_2 e ν tem grau menor que k. Se $m = \mu\nu$ então segue da hipótese de indução que

$$m_f = \mu_f\nu_f = \varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e) = \sigma(\mu_e)\tau(\nu_e).$$

Portanto, pelo Corolário 2.7, $m_f = \sigma\Big(\psi(\mu_e)\nu_e\Big)$ e, usando o Lema 2.6, obtemos

$$m_f = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \varphi(m_e).$$

Se $m = Y^2$ temos

$$m_f = V_fV_f = \tau(V_e)\tau(V_e) = \sigma(V_e^2) = \varphi(V_e^2) = \varphi(m_e).$$

Se $m = \mu_1\mu_2$ temos

$$m_f = \mu_{1_f}\mu_{2_f} = \tau(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = \varphi(m_e).$$

Agora, seja p um Polinômio. Logo, existem monômios $m_1, \ldots, m_k$ tais que $p = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Assim, escrevendo $m_i(U_e, V_e) = m_{i_e}$ e $m_i(U_f, V_f) = m_{i_f}$, temos que

$$\varphi(p_e) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(m_{i_e}) = \sum_{i=1}^{k} m_{i_f} = p_f.$$

Como φ é um isomorfismo, $\dim p_e = \dim p_f$. Portanto, p tem dimensão invariante. ■

O teorema anterior é o principal resultado desta seção, nos capítulos 3 e 4 encontraremos teoremas parecidos tanto no enunciado quanto em sua demonstração.

Corolário 2.9. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.37)*. Se g e h são polinômios tal que $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, então*

$$\begin{aligned} \sigma(g_e) &= g_f \\ \tau(h_e) &= h_f \end{aligned}$$

para quaisquer e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$.

Demonstração.

Usando o Teorema anterior temos $\varphi(g_e) = \sigma(g_e) = g_f$ de maneira análoga verifica-se a segunda identidade ■

Teorema 2.3. *Seja p um polinômio em uma álgebra de Bernstein que satisfaz* (2.37)*. Então p é invariante se, e somente se, $U_ep_e \subseteq p_e$.*

Demonstração.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma decomposição de Peirce de A e seja $p = g + h$ um polinômio com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Para qualquer $u \in U_e$, seja $f = e + u + u^2$. Usando o Corolário 2.9, obtemos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(w)\,;\ x \in g_e,\ w \in h_e\}$. Portanto.

$$p_f = \{(x - 2uw) + (w + 2ux)\,;\ x \in g_e,\ w \in h_e\}. \tag{2.42}$$

Suponhamos que p seja invariante. Logo, $p_f = p_e$ para quaisquer idempotentes e, f. Em particular, $p_f \subseteq p_e$. Portanto, segue de (2.42) que dados $x \in g_e$ e $w \in h_e$, existem $x' \in g_e$ e $w' \in h_e$ tais que $x - 2uw = x'$ e $w + 2ux = w'$. Assim,

$$\begin{aligned} uw &= \frac{1}{2}(x - x') \\ ux &= \frac{1}{2}(w' - w). \end{aligned}$$

Logo, $U_e g_e \subseteq h_e$ e $U_e h_e \subseteq g_e$. De onde segue que $U_e p_e \subseteq p_e$.

Reciprocamente, suponhamos que $U_e p_e \subseteq p_e$. Podemos reescrever (2.42) como segue

$$p_f = \{x + w + 2u(x - w)\,;\ x \in g_e,\ w \in h_e\},$$

de onde segue que

$$p_f \subseteq p_e + U_e p_e. \tag{2.43}$$

Agora, usando a hipótese, concluímos que $p_f \subseteq p_e$. Como esta inclusão vale para qualquer par de idempotentes, segue-se que $p_e = p_f$. Assim, p_e é invariante. ∎

Nos capítulos 3 e 4 mostraremos um resultado semelhante ao do Teorema anterior.

Corolário 2.10. *Para todo polinômio $p \in \mathcal{P}$ o polinômio $p + Xp$ é invariante em uma álgebra de Bernstein satisfazendo* (2.37). *Além disso, se p é um polinômio invariante em A então existe $q \in \mathcal{P}$ tal que $p_e = q_e + U_e q_e$.*

Demonstração.

Se p é um polinômio qualquer em $\mathcal{P}$ então, usando a Proposição 2.9, temos

$$U_e(p_e + Up_e) = U_e p_e + U_e(U_e p_e) \subseteq U_e p_e + p_e,$$

Portanto $p + Xp$ é invariante. Por outro lado, se p é invariante então, pelo Teorema 2.3 temos que $p_e = p_e + U_e p_e$, neste caso $q = p$. ∎

Observemos que toda álgebra de Bernstein-Jordan está contida na subclasse das álgebras de Bernstein que satisfaz (2.37). De fato seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein-Jordan, então $U^2V \subseteq V^2$, mais pela Proposição 2.3 temos que $V^2 = 0$ e $(uv)v = 0$ para todo $u \in U$ e $v \in V$. Mas nem toda álgebra de Bernstein que satisfaz a condição (2.37) é de Bernstein-Jordan. Por exemplo, a álgebra de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ onde $U = \langle u \rangle$ e $V = \langle v \rangle$, com a tábua de multiplicação dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $v^2 = u$ e os outros produtos nulos. Temos que $U^2V = 0$, pois $U^2 = 0$ e, para quaisquer $u \in U$ e $v \in V$, temos que $(uv)v = 0$, visto que $UV = 0$. Entretanto, A não é de Bernstein-Jordan, uma vez que $V^2 \neq 0$.

2.0.5 Invariância em álgebras de Bernstein

Nesta seção estudaremos a invariância de polinômios em uma álgebra de Bernstein qualquer, com o objetivo de encontrar condições necessárias e suficientes para a invariância de um polinômio.

Proposição 2.10. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e h um polinômio tal que h_e está contido em V_e. Então h tem dimensão invariante.*

Demonstração.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein A relativa ao idempotente e. Consideremos a decomposição de Peirce $\overline{A} = K\overline{e} \oplus \overline{U}_{\overline{e}} \oplus \overline{V}_{\overline{e}}$ da álgebra de Bernstein $\overline{A} = A/L$ associada ao idempotente $\overline{e} = e + L$. Para todo polinômio h onde $h_e \subseteq V_e$ temos $h(\overline{U_e}, \overline{V_e}) \subseteq \overline{V_e}$ e $h(\overline{U_e}, \overline{V_e}) = (h(U_e, V_e) \oplus L)/L$. Portanto, $\dim h(U_e, V_e) = \dim h(\overline{U_e}, \overline{V_e})$, pois usando o Teorema 0.1 vemos que $h(U_e, V_e) \cong h(\overline{U_e}, \overline{V_e})$. Agora, $h(\overline{U_e}, \overline{V_e})$ tem dimensão invariante, pois $\overline{A}$ é de Bernstein-Jordan. Logo, $h(U_e, V_e)$ também tem dimensão invariante. ∎

Corolário 2.11. *Sejam $p = g + h$ um polinômio e A uma algebra de Bernstein, onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Então p tem dimensão invariante se, e somente se, g tem dimensão invariante*

Demonstração.

Se $\dim p_e = k$, para um inteiro positivo k fixo, como a $\dim h_e = r$ para um inteiro positivo r fixo, pois h tem dimensão invariante pela proposição anterior, então temos que a $\dim g_e = \max\{k - r, r - k\}$, logo g também tem dimensão invariante. Reciprocamente é evidente que se g tem dimensão invariante então p também terá dimensão invariante. ∎

Proposição 2.11. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e h um polinômio tal que h_e está contido em V_e, então $\tau(h_e) = h_f$, para quaisquer e, $f \in \mathrm{Id}_1(A)$*

Demonstração.

Seja A uma álgebra de Bernstein e sejam e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ com $f = e + u + u^2$, onde $u \in U_e$. Consideremos a álgebra quociente $\overline{A} = A/L$. Usaremos a notação $\overline{x} = x + L$, para qualquer $x \in A$. Sejam as decomposições de Peirce $\overline{A} = K\overline{e} \oplus \overline{U}_{\overline{e}} \oplus \overline{V}_{\overline{e}} = \overline{A} = K\overline{f} \oplus \overline{U}_{\overline{f}} \oplus \overline{V}_{\overline{f}}$ de $\overline{A}$ associadas aos idempotentes $\overline{e}$ e $\overline{f}$. Seja $\pi : A \to \overline{A}$ a projeção $\pi(x) = \overline{x}$. Segue da definição de subespaços polinomiais que

$$p(\overline{U}_{\overline{e}}, \overline{V}_{\overline{e}}) = \pi(p(U_e, V_e))$$

para qualquer polinômio p. Temos que $\overline{f} = \overline{e + u + u^2} = \overline{e} + \overline{u} + \overline{u}^2$. Sejam $\tau : V_e \to V_f$ e $\overline{\tau} : \overline{V}_{\overline{e}} \to \overline{V}_{\overline{f}}$ os isomorfismos de espaços vetoriais definidos no Corolário 2.3, isto é, para todo $v \in V_e$, $\tau(v) = v - 2uv - 2u^2v$ e $\overline{\tau}(\overline{v}) = \overline{v} - 2\overline{uv}$, visto que $u^2v \in L$. Portanto. $\overline{\tau}(\overline{v}) = \overline{\tau(v)}$. Temos que $\overline{\tau} \circ \pi|_{V_e} = \pi|_{V_f} \circ \tau$. De fato, $\overline{\tau}(\pi(v)) = \overline{\tau}(\overline{v}) = \overline{\tau(v)} = \pi(\tau(v))$. Assim,

$$\overline{\tau}(h(\overline{U}_{\overline{e}},\overline{V}_{\overline{e}})) = \overline{\tau}\Big(\pi\big(h(U_e,V_e)\big)\Big) = \pi\Big(\tau\big(h(U_e,V_e)\big)\Big) = \Big(\tau\big(h(U_e,V_e)\big)\oplus L\Big)/L.$$

Por outro lado, sendo $\overline{A}$ Bernstein-Jordan, segue de $\tau(h_e) = h_f$ que

$$\overline{\tau}(h(\overline{U}_{\overline{e}},\overline{V}_{\overline{e}})) = h(\overline{U}_{\overline{f}},\overline{V}_{\overline{f}}) = \Big(h(U_f,V_f)\oplus L\Big)/L$$

Concluímos que

$$\Big(h(U_f,V_f)\oplus L\Big)/L \;\;=\;\; \Big(\tau\big(h(U_e,V_e)\big)\oplus L\Big)/L \tag{2.44}$$

Portanto, se $w \in h(U_f,V_f)$ então $w + L \in \Big(h(U_f,V_f)\oplus L\Big)/L$. Por (2.44), existe $w' \in h(U_e,V_e)$ tal que $w+L = \tau(w')+L$, ou seja, $w-\tau(w') \in L$. Portanto, $w-\tau(w') \in V_f \cap L = 0$. Logo, $w = \tau(w')$. Assim, $h(U_f,V_f) \subseteq \tau(h(U_e,V_e))$. Mas, pelo Proposição 2.10. h tem dimensão invariante. Portanto, $h(U_f,V_f) = \tau(h(U_e,V_e))$. ■

Corolário 2.12. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $p = g + h$ um polinômio. Se p é invariante então $U_e g_e \subseteq h_e$.*

Demonstração.

Se p é um polinômio invariante em uma álgebra de Bernstein A, então p é um polinômio invariante em $\overline{A} = A/L$. Como $\overline{A}$ é de Bernstein-Jordan. segue da parte (b) do Teorema 1.1 que $\overline{U_{\overline{e}}}p(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}}) \subseteq p(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}})$. Logo, $\overline{U_{\overline{e}}}g(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}}) \subseteq h(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}})$. De onde segue que $U_e g(U_e,V_e) \subseteq h(U_e,V_e)$. De fato, se $w \in U_e g(U_e,V_e)$. então $w + L \in \overline{U_{\overline{e}}}g(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}})$. Logo, $w + L \in h(\overline{U_{\overline{e}}},\overline{V_{\overline{e}}})$. Portanto, existe $z \in h(U_e,V_e)$ tal que $w + L = z + L$, ou seja, $w - z \in L$. Logo, $w = z$. ■

Corolário 2.13. *Sejam $A = Ke\oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $p = g+h$ um polinômio invariante com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, então $\sigma(g_e) = g_f$, para quaisquer $e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A)$.*

Demonstração.

Para quaisquer $e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ onde $f = e+u+u^2$, com $u \in U_e$. Pelo fato de $p = g+h$ ser invariante, g tem dimensão invariante. Assim, basta mostrar que $\sigma(g_e) \subseteq g_f$. Seja $x \in g_e$. Logo, $\sigma(x) = x + 2ux \in g_e \oplus U_e g_e$. Usando Proposição 2.12. $g_e \oplus U_e g_e \subseteq g_e \oplus h_e = p_e$. Sendo p invariante, temos $p_e = p_f = g_f \oplus h_f$. Portanto, $\sigma(x) \in g_f \oplus h_f$. De onde segue que $\sigma(x) \in g_f$. ■

Teorema 2.4. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e seja $p = g + h$ um polinômio com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) p é invariante

$$(b)\begin{cases} U_e p_e \subseteq p_e \\ U_e^2 h_e \subseteq g_e \\ \sigma(g_e) = g_f \qquad \textit{para quaisquer } e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A) \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} U_e h_e \subseteq g_e \\ U_e^2 h_e \subseteq g_e \\ \ \ g_f \subseteq p_e \qquad \textit{para quaisquer } e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A) \end{cases}$$

Demonstração.

Provemos que (a) implica (b). Se p é invariante então $p_f \subseteq p_e$, para quaisquer $e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ e $u \in U_e$. Temos também, pelo Corolário 2.13, $\sigma(g_e) = g_f$. Portanto, usando a Proposição 2.11, temos

$$\begin{aligned} p_f &= \sigma(g_e) \oplus \tau(h_e) \\ &= \{\sigma(x) + \tau(w)\,;\ x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \\ &= \{(x - 2u_0 w - 2u_0^2 w)(w + 2u_0 x)\,;\ x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \end{aligned}$$

Segue que,

$$\{(x - 2u_0 w - 2u_0^2 w)(w + 2u_0 x)\,;\ x \in g_e \text{ e } w \in h_e\} \subseteq \{x' + w'\,;\ x' \in g_e \text{ e } w' \in h_e\}$$

Daí segue que

$$\begin{cases} u_0 x = \dfrac{1}{2}(w' - w) \\ (u_0 + u_0^2) w = \dfrac{1}{2}(x - x') \end{cases}$$

Como, $u_0 x$ é um gerador de $U_e g_e$ e, pela parte (b) do Lema 0.1. $(u_0 + u_0^2)w$ é um gerador de $U_e h_e + U_e^2 h_e$, temos que

$$\begin{cases} U_e g_e & \subseteq & h_e \\ U_e h_e & \subseteq & g_e \\ U_e^2 h_e & \subseteq & g_e \end{cases}$$

Segue das duas primeiras inclusões que $U_e p_e \subseteq p_e$.

Provemos que (b) implica (c). Usando o fado de $U_e p_e \subseteq p_e$ segue que $U_e h_e \subseteq g_e$ e $U_e g_e \subseteq h_e$. Dados $e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ temos

$$g_f = \sigma(g_e) \subseteq g_e + U_e g_e \subseteq g_e + h_e = p_e$$

Provemos agora que (c) implica (a). para quaisquer $e,\ f \in \mathrm{Ip}_1(A)$. Pela Proposição 2.11, segue que

$$p_f = g_f + \tau(h_e) \subseteq p_e + h_e + U_e h_e + U_e^2 h_e = p_e$$

Portanto, p é invariante. ■

Corolário 2.14. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein p é um polinômio invariante em A , então $A^2 p_e \subseteq p_e$.*

Demonstração.

Podemos escrever $p = g + h$ onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Pela parte (b) do Teorema 2.4 temos que $U_e p_e$, $U_e^2 h_e \subseteq p_e$. Usando a Proposição 2.4 temos

$$U_e^2 g_e \subseteq U_e(U_e g_e) \subseteq U_e h_e \subseteq p_e$$

Como $A^2 = Ke \oplus U_e \oplus U_e^2$ e $ep_e = g_e$, segue-se que $A^2 p_e \subseteq p_e$. ■

Uma Algebra de Bernstein A é dita *nuclear* se $A^2 = A$, ou equivalentemente se $V_e = U_e^2$.

Corolário 2.15. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus U_e^2$ uma álgebra de Bernstein nuclear e seja p um polinômio invariante em A então p_e é um ideal de A.*

A proposição seguinte é uma generalização da Proposição 2.5 e sua demonstração é análoga.

Proposição 2.12. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e g um polinômio tal que $g_e \subseteq U_e$, e que satisfaça $\sigma(g_e) = g_f$ para quaisquer e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$, consideremos também h um polinômio tal que $h_e \subseteq V_e$, então tem-se*

(a) $\displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f = g_e \cap ann\, U_e$;

(b) $\displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f = h_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$;

(c) $\displaystyle\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f = g_e \oplus U_e g_e$;

(d) $\displaystyle\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f = (U_e h_e + U_e^2 h_e) \oplus h_e$.

Demonstração.

Mostremos (a). Seja $e \in \mathrm{Ip}_1(A)$ fixo. Se $x \in \displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f$ então para cada $u_0 \in U_e$ existe $u \in U_e$ tal que $x = u + 2u_0 u$. De onde segue que $x = u$ e $u_0 u = 0$, concluímos que $x \in U_e \cap ann\, U_e$. Assim,

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f \subseteq g_e \cap ann\, U_e.$$

Por outro lado, se $x \in g_e \cap ann\, U_e$, então para todo $u_0 \in U_e$ temos $x = x + 2u_0 x \in g_f$. Logo, $x \in \displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f$. Assim,

$$g_e \cap ann\, U_e \subseteq \bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f.$$

Mostremos agora (b). Se $w \in \displaystyle\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f$ então para cada $u_0 \in U_e$, segue da Proposição 2.11 que $w \in h_f = \tau(h_e)$, com $f = e + u_0 + u_0^2$. Assim existe $v \in h_e$ tal que $w = v - 2(u_0 + u_0^2)v$. De onde segue que $w = v$ e $(u_0 + u_0^2)v = 0$. Agora, usando a parte (b) do Lema 0.1, concluímos que $w \in h_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$. Assim,

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f \subseteq h_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2).$$

Por outro lado, se $w \in h_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2)$, então para todo $u_0 \in U_e$ temos $w = w - 2(u_0 + u_0^2)w = \tau(w) \in h_f$. Logo, $w \in \bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f$. Assim,

$$h_e \cap ann(U_e \oplus U_e^2) \subseteq \bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f.$$

O que conclui a demonstração da parte (b). Mostremos agora (c). Como $g_f = \{u + 2u_0 u\,;\ u \in g_e\}$, para cada $u_0 \in U_e$, temos que

$$\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f = \sum_{u_0 \in U_e} \langle u + 2u_0 u\,;\ u \in g_e \rangle\,.$$

Segue daí que $\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f \subseteq g_e \oplus U_e g_e$ Por outro lado, é evidente que $g_e \subseteq \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f$ e, segue de

$$u_0 u = \frac{1}{2}(u + 2u_0 u) - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sigma(u) - \frac{1}{2}u \in g_f + g_e \subseteq \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f$$

que $U_e g_e \subseteq \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} U_f$. Para mostrar (d), observamos que

$$\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f = \sum_{u_0 \in U_e} \left\langle v - 2u_0 v - 2u_0^2 v\,;\ v \in h_e \right\rangle.$$

Portanto, $\sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f \subseteq (U_e h_e + U_e^2 h_e) \oplus h_e$. Por outro lado, temos que $h_e \subseteq \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} h_f$. Agora segue das Observações 0.1 e 0.2 e do Lema 0.1 que

$$U_e h_e + U_e^2 h_e = (U_e + U_e^2) h_e = \left\langle (u_0 + u_0^2)v\,;\ u_0 \in U_e \ e \ v \in h_e \right\rangle \subseteq \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} V_f$$

pois $(u_0 + u_0^2)v = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}(v - 2(u_0 + u_0^2)v) = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\tau(v) \in h_e + h_f$. ∎

Corolário 2.16. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, e seja $p = g + h$ um polinômio, onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Se p é invariante então* $\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f = g_e \cap L$.

Demonstração.

Usando a propriedade (a) da proposição anterior temos

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f = g_e \cap ann\, U_e = (g_e \cap U_e) \cap ann\, U_e = g_e \cap (U_e \cap ann\, U_e) = g_e \cap L.$$

■

Para a demonstração dos próximos corolários é bom lembrar que se o monômio $m = X$, então $m_e = U_e$.

Corolário 2.17. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e seja g um polinômio tal que $g_e \subseteq U_e$, Então $\sigma(g_e) = g_f$ para quaisquer e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ se, e somente se, $g + Xg$ é invariante*

Demonstração.

Se $\sigma(g_e) = g_f$ para quaisquer $e, f \in \mathrm{Ip}_1(A)$, então $g_e \oplus U_e g_e = \sum_{f \in \mathrm{Ip}_1(A)} g_f$. Logo, $g + Xg$ é invariante. Por outro lado, se $g + Xg$ é invariante então pelo Teorema 2.4 $\sigma(g_e) = g_f$. ■

Corolário 2.18. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e $g + h$ um polinômio invariante tal que $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$, então o polinômio $g + Xg$ também é invariante.*

Demonstração.

Se $g + h$ é invariante então $\sigma(g_e) = g_f$. Pelo Corolário anterior, $g + Xg$ é invariante. ■

Corolário 2.19. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein e h um polinômio tal que $h_e \subseteq V_e$, então temos que $(Xh + X^2h) + h$ é invariante.*

Demonstração.

decorre imediatamente da parte (d) da Proposição 2.15. ■

Corolário 2.20. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, o conjunto dos polinômios invariantes em A é dado por*

$$\{p + Xp + X^2p\,;\; p = g + h \in \mathcal{P},\, h_e \subseteq V_e,\, g_e \subseteq U_e,\, \sigma(g_e) = g_f,\; e,\; f \in \mathrm{Ip}_1(A)\}$$

Demonstração.

Seja $p = g + h$ um polinômio com $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Temos que $p_e + U_e p_e + U_e^2 p_e = p_e + A^2 p_e$. Assim, se p é invariante então pelo Corolário 2.14, $p_e = p_e + U_e p_e + U_e^2 p_e$ e $\sigma(g_e) = g_f$, para quaisquer e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$. Por outro lado, se $\sigma(g_e) = g_f$ então $g + Xg$ é invariante pelo Corolário 2.17. Temos também que $U_e^2 g_e \subseteq A^2 g_e \cap U_e \subseteq g_e$, usando o Corolário 2.14. Assim,

$$p_e + U_e p_e + U_e^2 p_e = g_e + U_e g_e + h_e + U_e h_e + U_e^2 h_e.$$

Portanto, pelo Corolário 2.19, $p + Xp + X^2p$ é invariante. ■

Capítulo 3

Algebras satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda\left(A^2\right) = 0$

Estudaremos neste capítulo uma generalização das álgebras de Bernstein-Jordan, pois na identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$ consideraremos λ apenas um funcional linear. Estas álgebra são estudadas em [6] e [8].

Na proposição a seguir consideraremos A uma álgebra comutativa, K um corpo de característica diferente de 2 e 3 e λ um funcional linear de A em K.

Proposição 3.1. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *existe um funcional linear $\lambda \neq 0$ tal que para todo $x \in A$ temos:*

$$x^3 = \lambda(x)x^2 \quad e \quad \lambda\left(x^2\right) = 0 \tag{3.1}$$

(ii) *Existe uma decomposição $A = Kz \oplus \ker(\lambda)$, com $z^2 = 0$ e $\lambda(z) = 1$, o $N := \ker(\lambda)$ é um subespaço de A tal que $zN \subseteq N$ e para todo $y \in N$ vale as identidades:*

$$zy = z(zy) \tag{3.2}$$

$$y^2 = zy^2 + 2y(zy) \tag{3.3}$$

$$y^3 = 0 \tag{3.4}$$

(iii) *$A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ com $z^2 = 0$, $zu = 0$, para todo u em U_z, $zv = v$ para todo v em V_z, e*

$$U_z^2 \subseteq V_z, \quad U_zV_z \subseteq U_z, \quad V_z^2 = 0, \tag{3.5}$$

$$u^3 = u(uv) = v(vu) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $u \in U_z$ e $v \in V_z$

Demonstração.

$(i) \to (ii)$ Linearizando(3.1) temos:

$$\begin{aligned} x^3 &= \lambda(x)x^2 \\ x(xy) + x(yx) + yx^2 &= \lambda(x)xy + \lambda(x)yx + \lambda(y)x^2 \\ x^2y + 2x(xy) &= \lambda(y)x^2 + 2\lambda(x)xy, \end{aligned}$$

e da última igualdade obtemos a equação

$$x^2y + 2x(xy) - \lambda(y)x^2 - 2\lambda(x)xy = 0, \tag{3.7}$$

observe que esta equação é verdadeira para todo x, $y \in A$, e que em nenhum momento foi utilizada a condição $\lambda(A^2) = 0$. Substituindo y por x^2 em (3.7), e usando (3.1) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= x^2x^2 + 2x\left(xx^2\right) - \lambda\left(x^2\right)x^2 - 2\lambda(x)xx^2 \\ &= x^2x^2 + 2x\left(x^3\right) - \lambda\left(x^2\right)x^2 - 2\lambda(x)x^3 \\ &= x^2x^2 + 2x\left(\lambda(x)x^2\right) - 2\lambda(x)x^3 \\ &= x^2x^2 + 2\lambda(x)xx^2 - 2\lambda(x)x^3 \\ &= x^2x^2, \end{aligned}$$

e portanto

$$x^2x^2 = 0, \text{ para todo } x \in A. \tag{3.8}$$

Mostraremos agora a existência de um elemento $z \in A$ tal que $z^2 = 0$ e $\lambda(z) = 1$, como $\lambda \neq 0$, existe $x_0 \in A$ tal que $\lambda(x_0) \neq 0$, tomando $c \in A$ tal que $c = \dfrac{1}{\lambda(x_0)}x_0$, então

$$\lambda(c) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda(x_0)}(x_0)\right) = \frac{1}{\lambda(x_0)}\lambda(x_0) = 1,$$

e para $z := c - \dfrac{1}{2}c^2$ temos

$$\lambda(z) = \lambda\left(c - \frac{1}{2}c^2\right) = \lambda(c) - \frac{1}{2}\,\lambda(c^2) = \lambda(c) = 1,$$

pois $\lambda(c^2) = 0$ por (3.1), então $\lambda(z) = 1$ e além disso,

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(c - \frac{1}{2}c^2\right)\left(c - \frac{1}{2}c^2\right) \\ &= c^2 - c^3 + \frac{1}{4}c^2c^2 \\ &= c^2 - \lambda(c)c^2 \\ &= c^2 - c^2 = 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $A = Kz \oplus N$, a demonstração desse fato é análoga a que foi feita na Proposição 0.1. Como $A^2 = \big\langle xy\,;\; x,\, y \in A \big\rangle$, então $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, assim

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = xy, \tag{3.9}$$

aplicando λ em (3.9) e usando (3.1) obtemos $\lambda(xy) = 0$, então $xy \in N$, portanto $A^2 \subseteq N$ e ainda por(3.9), obtemos que $A^2 = \big\langle x^2\,;\; x \in A \big\rangle$, além disso N é um ideal de A, pois para todo y em N e x em A, yx está em $A^2 \subseteq N$, logo $yx \in N$, em particular $zN \subseteq N$. A relação (3.4) decorre diretamente de (3.1), pois $y^3 = \lambda(y)y^2 = 0$ onde $y \in N$. Para mostrar (3.2), basta substituir x por z em (3.7). De fato,

$$\begin{aligned}
0 &= z^2y + 2z(zy) - \lambda(y)z^2 - 2\lambda(z)zy \\
&= 2z(zy) - 2\lambda(z)zy \\
&= z(zy) - \lambda(z)zy \\
&= z(zy) - zy,
\end{aligned}$$

portanto $z(zy) = zy$. Para mostrar (3.3) basta substituir x por y e y por z em (3.7). Seja $y \in N$, então

$$\begin{aligned}
0 &= y^2z + 2y(yz) - \lambda(z)y^2 - 2\lambda(y)yz \\
&= y^2z + 2y(yz) - y^2 - 2\lambda(y)yz \\
&= y^2z + 2y(yz) - y^2,
\end{aligned}$$

de onde obtemos que $y^2 = zy^2 + 2y(zy)$.

$(ii) \rightarrow (iii)$ Para todo $y \in N$ temos que $y = (y - zy) + zy$, e por hipótese $zy \in N$, isso significa que os subespaços $U_z = \big\{u\,;\, u{=}y{-}zy \text{ e } y \in N\big\}$ e $V_z = \big\{v\,;\, v{=}zy \text{ e } y \in N\big\}$, satisfazem a condição $N = U_z + V_z$, $zu = 0$ e $zv = v$, pois

$$zu = z(y - zy) = zy - z(zy) = zy - zy = 0$$

para todo u em U_z e $zv = z(zy) = zy = v$ para todo v em V_z. Mostraremos que $U_z \cap V_z = \{0\}$. Seja $y \in U_z \cap V_z$, assim existe $s, t \in N$ tal que $s - zs = y = zt$, portanto $zt - s + zs = 0$, então $z(zt - s + zs) = 0$, o que implica que $zt = 0 = y$, temos também que

$$U_z = \mathrm{X} := \big\{x \in N\,;\; zx = 0\big\}.$$

De fato, seja $u \in U_z$, $zu = 0$ então $u \in \mathrm{X}$, logo $U_z \subseteq \mathrm{X}$. Por outro lado, seja $x \in X$, então $x = x - zx$, daí segue que $x \in U_z$, logo $\mathrm{X} \subseteq U_z$, portanto $U_z = \mathrm{X}$. Temos também que

$$V_z = \mathrm{Y} := \big\{x \in N\,;\; zx = x\big\},$$

de fato, seja $v \in V_z$, então $zv = v$, assim $v \in \mathrm{Y}$, logo $V_z \subseteq \mathrm{Y}$. Por outro lado, seja $x \in Y$, então $zx = x$, de onde segue $x \in V_z$, logo $\mathrm{Y} \subseteq V_z$, portanto $V_z = \mathrm{Y}$. Substituindo y em (3.3) por $u \in U_z$, temos

$$u^2 = zu^2 + 2u(zu) = zu^2,$$

isto mostra que $U_z^2 \subseteq V_z$, substituindo y por v em (3.3) temos

$$v^2 = zv^2 + 2v(zv) = zv^2 + 2v^2,$$

logo

$$zv^2 = -v^2,$$

como $v^2 \in N$, existe duas possibilidades $zv^2 = v^2 = -v^2$ ou $zv^2 = 0 = -v^2$, e nos dois casos segue que $v^2 = 0$, para todo $v \in V_z$, isto mostra que $V_z^2 = 0$.

Substituindo y por $u + v$ em (3.3) temos que

$$\begin{array}{rcl}
(u+v)^2 & = & z(u+v)^2 + 2(u+v)(z(u+v)) \\
u^2 + 2uv + v^2 & = & zu^2 + 2z(uv) + zv^2 + 2(u+v)v \\
u^2 + 2uv + v^2 & = & zu^2 + 2z(uv) + zv^2 + 2uv + 2v^2 \\
v^2 & = & 2z(uv) + zv^2 + 2v^2 \\
v^2 & = & 2z(uv) - v^2 + 2v^2 \\
v^2 & = & 2z(uv) + v^2 \\
0 & = & 2z(uv) \\
0 & = & z(uv),
\end{array}$$

logo $uv \in U_z$ e $U_zV_z \subseteq U_z$. Substituindo (x, y) por (u, v) em (3.7) temos que

$$\begin{array}{rcl}
u^2v + 2u(uv) - \lambda(v)u^2 - 2\lambda(u)uv & = & 0 \\
u^2v + 2u(uv) & = & 0 \\
2u(uv) & = & 0 \\
u(uv) & = & 0,
\end{array}$$

substituindo (x, y) por (v, u) em (3.7) temos que

$$\begin{array}{rcl}
v^2u + 2v(vu) - \lambda(u)v^2 - 2\lambda(v)vu & = & 0 \\
v^2u + 2v(vu) & = & 0 \\
2v(vu) & = & 0 \\
v(vu) & = & 0.
\end{array}$$

$(iii) \to (i)$ Por hipótese, $A^2 \subseteq U_z + V_z := N$; de fato, usando $\lambda(z) = 1$ e $\lambda(N) := 0$, obtemos um funcional linear $\lambda \neq 0$ verificando $\lambda(x^2) = 0$, para todo x em A, tomando $x = \lambda(x)z + u + v$, $u \in U_z$ e $v \in V_z$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
x^2 & = & (\lambda(x)z + u + v)(\lambda(x)z + u + v) \\
& = & \lambda(x)^2z^2 + \lambda(x)zu + \lambda(x)zv + \lambda(x)zu + u^2 + uv + \lambda(x)zv + uv + v^2 \\
& = & 2uv + 2\lambda(x)v + u^2,
\end{array}$$

além disso

$$\begin{array}{rcl}
\lambda(x^2) & = & \lambda\left(2uv + 2\lambda(x)v + u^2\right) \\
& = & 2\lambda(uv) + 2\lambda(x)\lambda(v) + \lambda\left(u^2\right) \\
& = & 0
\end{array}$$

e calculando x^3 obtemos

$$\begin{aligned}
x^3 &= \big(\lambda(x)z + u + v\big)\big(2uv + 2\lambda(x)v + u^2\big)\\
&= 2\lambda(x)z(uv) + 2\lambda(x)^2 zv + \lambda(x)zu^2 + 2u(uv) + 2\lambda(x)uv + u^3 + 2v(vu) + 2\lambda(x)v^2 + vu^2\\
&= 2\lambda(x)^2 zv + \lambda(x)zu^2 + 2\lambda(x)uv\\
&= \lambda(x)^2 v + \lambda(x)u^2 + 2\lambda(x)uv\\
&= \lambda(x)\big(2uv + 2\lambda(x)v + u^2\big)\\
&= \lambda(x)x^2.
\end{aligned}$$

■

Daqui em diante neste capítulo consideraremos as condições da Proposição 1.2

Corolário 3.1. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Então as afirmações abaixo são equivalentes:*

(i) O funcional linear λ não é único;

(ii) A é uma zero-Álgebra;

(iii) $V_z = \{0\}$.

Demonstração.

$(i) \to (ii)$ Seja $\mu \neq \lambda$ um funcional linear tal que $x^3 = \mu(x)x^2$, para todo x em A; como $\mu \neq \lambda$, e

$x^3 - x^3 = \lambda(x)x^2 - \mu(x)x^2 = [\lambda(x) - \mu(x)]\, x^2 = 0$, então usando a topologia de Zariski temos $x^2 = 0$, logo $xy = 0$ para todo x e y em A, portanto A é uma zero-Álgebra

$(ii) \to (iii)$ Se A é uma zero-Álgebra, para todo v em V_z temos $v = zv = 0$

$(iii) \to (i)$ Se $V_z = \{0\}$ e $x = \xi z + u$ com ξ em K então $x^2 = (\xi z + u)(\xi z + u) = \xi^2 z^2 + \xi zu + \xi zu + u^2 = u^2$ portanto $x^2 = u^2 = 0$ já que $U_z^2 \subseteq V_z = \{0\}$, portanto todo funcional linear μ satisfaz a equação $x^3 = 0 = \mu(x)x^2$. ■

Doravante consideraremos apenas o caso em que λ é única

Corolário 3.2. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Para todo automorfismo T de A temos que $\lambda \circ T = \lambda$*

Demonstração.

Como para todo y em A, existe um único x em A tal que $T(x) = y$ pois T é bijetiva, usando a definição de λ temos que

$$
\begin{aligned}
y^3 &= \lambda(y)\, y^2 \\
T(x)^3 &= \lambda\Big(T(x)\Big) T(x)^2 \\
T\left(x^3\right) &= \lambda \circ T(x)\, T\left(x^2\right) \\
T\left(x^3\right) &= T\Big(\lambda \circ T(x)\, x^2\Big)
\end{aligned}
$$

como a T é injetiva então $x^3 = \lambda \circ T(x)x^2$, e como λ é o único funcional satisfazendo tal condição, temos que $\lambda \circ T = \lambda$. ■

Diremos que $Kz \oplus U_z \oplus V_z$ é a decomposição de Peirce de A em relação ao nilpotente z. E linearizando (3.6) obtemos para todo u, u_1, u_2 em U_z e v, v_1, v_2 em V_z as relações:

$$
\begin{aligned}
u_1^2 u_2 &= -2u_1(u_1u_2), && (3.10)\\
u_1(u_2v) &= -u_2(u_1v) \ \text{ e} && (3.11)\\
v_1(uv_2) &= -v_2(v_1u). && (3.12)
\end{aligned}
$$

Usaremos estas relações para provar o lema a seguir

Lema 3.1. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Sejam u,u_1 em U_z e v, v_1 em V_z então:*

$$
\begin{aligned}
(uv)(uw) &= 0 \ = (uv)(u_1v), && (3.13)\\
u^2(uu_1) &= 0 \ = u(u^2u_1) \ \text{ e} && (3.14)\\
u_1^2(uv) &= -2(u_1u)(u_1v) \ = -v(u_1^2u). && (3.15)
\end{aligned}
$$

Demonstração.

Linearizando $x_1^2x_1^2 = 0$ em x_1 temos

$$(x_3x_1)(x_1x_1) + (x_1x_3)(x_1x_1) + (x_1x_1)(x_3x_1) + (x_1x_1)(x_1x_3) = 0,$$

então $4x_1^2(x_1x_3) = 0$, logo $x_1^2(x_1x_3) = 0$ para todo x_1, x_3 em A, em particular $u^2(uu_1) = 0$, linearizando agora $x_1^2(x_1x_3) = 0$ em x_1, temos $(x_2x_1)(x_1x_3)+(x_1x_2)(x_1x_3)+(x_1x_1)(x_2x_3) = 0$, então

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0, \tag{3.16}$$

linearizando (3.16) em x_1 temos

$$(x_1x_4)(x_2x_3) + (x_4x_1)(x_2x_3) + 2(x_4x_2)(x_1x_3) + 2(x_1x_2)(x_4x_3) = 0,$$

de onde obtemos a equação

$$(x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_1x_4)(x_2x_3) = 0 \tag{3.17}$$

para todo x_1, x_2, x_3 em A, e trocando (x_1, x_2, x_3) por (u, v, v_1) em (3.16) temos que

$$\begin{aligned} u^2(vv_1) + 2(uv)(uv_1) &= 0 \\ 2(uv)(uv_1) &= 0 \\ (uv)(uv_1) &= 0, \end{aligned}$$

trocando (x_1, x_2, x_3) por (v, u, u_1) em (3.16) temos que

$$\begin{aligned} v^2(uu_1) + 2(vu)(vu_1) &= 0 \\ (vu)(vu_1) &= 0 \\ (uv)(u_1v) &= 0, \end{aligned}$$

trocando (x_1, x_2, x_3) por (u_1, u, v) em (3.6), temos que $u_1^2(uv) + 2(u_1u)(u_1v) = 0$, portanto

$$u_1^2(uv) = -2(u_1u)(u_1v),$$

temos também que $u(u^2u_1) = u(u_1u^2) = -u_1(uu^2) = -u_1(u^3) = 0$, usando (3.11). Além disso $u_1^2(uv) = u_1^2(vu) = -v(u_1^2u)$, usando (3.12). ■

Notação $\mathrm{Nip}_1(A) := \{x \in A\,;\ \ \lambda(x) = 1,\, x^2 = 0\}$. A notação é justificada pela existência de $0 \neq x \in A$ tal que $x^2 = 0$ e $\lambda(x) = 0$ $\big($tome $v \in V_z \backslash \{0\}\big)$. O conjunto $\mathrm{Nip}_1(A)$ não é vazio pela Proposição 3.1.

Proposição 3.2. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. O conjunto $\mathrm{Nip}_1(A) = \left\{y = z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\,;\ \ u_0 \in U_z\right\}$, onde os elementos deste conjunto tem índice 2.*

Demonstração.

Seja $Y := \left\{y = z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\,;\ \ u_0 \in U_z\right\}$ e seja $y \in Y$, temos que $\lambda(y) = \lambda\left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right) = \lambda(z) + \lambda(u_0) - \frac{1}{2}\lambda(u_0^2) = \lambda(z) = 1$,

temos também que

$$\begin{aligned} y^2 &= \left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right)\left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right) \\ &= z^2 + zu_0 - \frac{1}{2}zu_0^2 + u_0z + u_0^2 - \frac{1}{2}u_0^3 - \frac{1}{2}u_0^2z - \frac{1}{2}u_0^3 + u_0^2u_0^2 \\ &= u_0^2 - zu_0^2 \\ &= u_0^2 - u_0^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

como $\lambda(y) = 1$ e $y^2 = 0$, temos que $y \in \mathrm{Nip}_1(A)$, logo $Y \subset \mathrm{Nip}_1(A)$. Tomemos agora $x \in \mathrm{Nip}_1(A)$, pelo fato de $x \in A$, então $x = \alpha z + u + v$ com $\lambda(x) = 1$, então $\lambda(\alpha z + u + v) =$

$\alpha\lambda(z) = \alpha = 1$, logo $\alpha = 1$, assim $x = z + u + v$. Temos também que $x^2 = (z + u + v)(z + u + v) = z^2 + zu + zv + uz + u^2 + uv + vz + vu + v^2 = 2uv + 2v + u^2 = 0$, portanto $2v = -u^2 - 2uv$ então $v = -\frac{1}{2}u^2 - uv$, logo $uv = -\frac{1}{2}u^3 - u(uv) = 0$, o que implica que $2v + u^2 = 0$, então $v = -\frac{1}{2}u^2$, de onde obtemos que $x = z + u - \frac{1}{2}u^2$, assim $\mathrm{Nip}_1(A) \subset Y$, isto mostra que $\mathrm{Nip}_1(A) = Y$. ∎

Proposição 3.3. *Se A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Sejam $z, y \in \mathrm{Nip}_1(A)$ tal que $y = z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2$ com $u_0 \in U_z$ e $A = Ky \oplus U_y \oplus V_y$ a decomposição de Peirce de A relativa a y. A partir das relações* (3.10) *e* (3.14) *obtemos que:*

$$\begin{aligned} U_y &= \{u - u_0u\,;\ u \in U_z\} \text{ e} \\ V_y &= \{v + u_0v\,;\ v \in V_z\}\,. \end{aligned}$$

Demonstração.

Sabemos que $U_z = \{u \in N\,;\ zu = 0\}$, então temos que

$U_y = \{x \in N; yx = 0\}$, mostraremos que $U_y = X := \{u - u_0u\,;\ u \in U\}$, seja $x \in X$, então

$$\begin{aligned} yx &= \left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right)(u - u_0u) \\ &= zu + z(-u_0u) + u_0u - u_0(u_0u) - \frac{1}{2}u_0^2u + \frac{1}{2}u_0^2(u_0u) \\ &= -u_0(u_0u) - \frac{1}{2}\big(-2u_0(u_0u)\big) \\ &= -u_0(u_0u) + u_0(u_0u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

portanto $x \in U_y$, então $X \subset U_y$. Tomemos agora $x \in U_y$, então $x = u + v$ e $yx = 0$, então

$$\begin{aligned} yx &= \left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right)(u + v) \\ &= zu + zv + u_0u + u_0v - \frac{1}{2}u_0^2u - \frac{1}{2}u_0^2v \\ &= zv + u_0u + u_0v + u_0(u_0u) \\ &= u_0v + u_0(u_0u) + v + u_0u = 0, \end{aligned}$$

como $u_0v + u_0(u_0u) \in U_z$, $v + u_0u \in V_z$ e $U_z \oplus V_z = N$, então $v + u_0u = 0$, logo $v = -u_0u$, portanto $x = u - u_0u \in X$, logo $U_y \subset X$, assim $U_y = X$.

Mostraremos agora que $V_y = Y := \{v + u_0v\,;\ v \in V\}$, sabemos que $V_y = \{x \in N\,;\ yx = x\}$, seja $x = v + u_0 v \in Y$, então

$$\begin{aligned} yx &= \left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right)(v + u_0 v) \\ &= zv + z(u_0 v) + u_0 v + u_0(u_0 v) - \frac{1}{2}u_0^2 v - \frac{1}{2}u_0^2(u_0 v) \\ &= v + u_0 v - \frac{1}{2}u_0^2 v - \frac{1}{2}u_0^2(u_0 v) \\ &= v + u_0 v + \frac{1}{2}v(u_0^2 u_0) \\ &= v + u_0 v = x \in V_y, \end{aligned}$$

portanto $Y \subset V_y$, seja $x \in V_y$, então $x = u + v$ e

$$\begin{aligned} yx &= \left(z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2\right)(u + v) \\ &= v + u_0 u + u_0 v - \frac{1}{2}u_0^2 u \\ &= v + u_0 u + u_0 v + u_0(u_0 u) \\ &= x = u + v, \end{aligned}$$

portanto $u_0 v + u_0(u_0 u) + v + u_0 u = u + v$, logo $u_0 v + u_0(u_0 u) = u$ e $v + u_0 u = v$, então $u_0 u = 0$, isto implica que $u_0 v = u$, portanto $x = v + u_0 v \in Y$, logo $V_y \subset Y$, portanto $V_y = Y$. ∎

Proposição 3.4. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Consideremos z, $y \in \mathrm{Nip}_1(A)$ tal que $y = z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2$ e seja $A = Ky \oplus U_y \oplus V_y$ a decomposição de Peirce de A relativa a z, então as funções $\sigma_{z,u_0} : U_z \longrightarrow U_y$ e $\tau_{z,u_0} : V_z \longrightarrow V_y$ definidas por*

$$\sigma_{z,u_0}(u) = u - u_0 u$$
$$\tau_{z,u_0}(v) = v + u_0 v$$

são isomorfismos de espaço vetorial sobre o corpo K.

Demonstração.

Sejam u_1, $u_2 \in U_z$ e $\alpha \in K$, então

$$\begin{aligned} \sigma_{z,u_0}(\alpha u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + u_2 - u_0(\alpha u_1 + u_2) \\ &= \alpha u_1 - \alpha u_0 u_1 + u_2 - u_0 u_2 \\ &= \alpha(u_1 - u_0 u_1) + u_2 - u_0 u_2 \\ &= \alpha \sigma_{z,u_0}(u_1) + \sigma_{z,u_0}(u_2), \end{aligned}$$

portanto σ_{z,u_0} é uma transformação linear. Mostraremos agora que σ_{z,u_0} é bijetora, se $\sigma_{z,u_0}(u) = 0$, então $u - u_0 u = 0$, como $U_z \oplus V_z$ com $u \in U_z$ e $u_0 u \in V_z$ então $u = 0$, assim $\ker(\sigma_{z,u_0}) = \{0\}$ mostrando que σ_{z,u_0} é injetora. Seja agora $y' = u - u_0u \in U_y$, então $\sigma_{z,u_0}(u) = u - u_0u = y'$, onde $u \in U_z$. Portanto σ_{z,u_0} é sobrejetora.

Sejam v_1, $v_2 \in V_z$ e $\alpha \in K$, então

$$\begin{aligned}
\tau_{z,u_0}(\alpha v_1 + v_2) &= \alpha v_1 + v_2 + u_0(\alpha v_1 + v_2) \\
&= \alpha v_1 + \alpha u_0 v_1 + v_2 + u_0 v_2 \\
&= \alpha(v_1 + u_0 v_1) + v_2 + u_0 v_2 \\
&= \alpha\tau_{z,u_0}(v_1) + \tau_{z,u_0}(v_2),
\end{aligned}$$

portanto τ_{z,u_0} é uma transformação linear. Mostraremos que τ_{z,u_0} é bijetora, se $\tau_{z,u_0}(v) = 0$, então $v + u_0v = 0$, como $U_z \oplus V_z$, e $u_0v \in U_z$ e $v \in V_z$ então $v = 0$, assim $\ker(\tau_{z,u_0}) = \{0\}$ mostrando que τ_{z,u_0} é injetora. Seja $y' = v + u_0v \in V_y$, então $\tau_{z,u_0}(v) = v + u_0v = y'$. Portanto τ_{z,u_0} é sobrejetora. ∎

De agora em diante, para não sobrecarregar a linguagem, escreveremos σ, τ e φ no lugar de σ_{z,u_0}, τ_{z,u_0} e φ_{z,u_0}, respectivamente. Porém deve ficar claro que as funções σ, τ e φ dependem do par de nilpotentes z e y.

Proposição 3.5. *Seja A uma álgebra que satisfaz a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. A transformação de Peirce $\varphi : A \longrightarrow A$ relativa a z e u_0 é um isomorfismo de espaço vetorial, definida por $\varphi(\alpha z + u + v) = \alpha y + \sigma(u) + \tau(v)$, para todo $\alpha \in K$, $u \in U_z$ e $v \in V_z$. Esta claro que $\varphi|_{U_z} = \sigma$ e $\varphi|_{V_z} = \tau$*

Demonstração.

Mostraremos agora que φ é um isomorfismo de espaço vetorial. Sejam $a_1 = \alpha_1 z + u_1 + v_1$, $a_2 = \alpha_2 z + u_2 + v_2 \in A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in K$ então

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta a_1 + a_2) &= \varphi(\beta(\alpha_1 z + u_1 + v_1) + \alpha_2 z + u_2 + v_2) \\
&= \varphi(\beta\alpha_1 z + \beta u_1 + \beta v_1 + \alpha_2 z + u_2 + v_2) \\
&= \varphi((\beta\alpha_1 + \alpha_2)z + \beta u_1 + u_2 + \beta v_1 + v_2) \\
&= (\beta\alpha_1 + \alpha_2)y + \sigma(\beta u_1 + u_2) + \tau(\beta v_1 + v_2) \\
&= \beta\alpha_1 y + \alpha_2 y + \beta\sigma(u_1) + \sigma(u_2) + \beta\tau(v_1) + \tau(v_2) \\
&= \beta\alpha_1 y + \beta\sigma(u_1) + \beta\tau(v_1) + \alpha_2 y + \sigma(u_2) + \tau(v_2) \\
&= \beta(\alpha_1 y + \sigma(u_1) + \tau(v_1)) + \alpha_2 y + \sigma(u_2) + \tau(v_2) \\
&= \beta\varphi(\alpha_1 z + u_1 + v_1) + \varphi(\alpha_2 z + u_2 + v_2) \\
&= \beta\varphi(a_1) + \varphi(a_2),
\end{aligned}$$

portanto φ é uma transformação linear. Mostraremos agora que φ é bijetora, seja $a = \alpha z + u + v \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$, então $\alpha y + \sigma(u) + \tau(v) = 0$, como $A = Ky \oplus U_y \oplus V_y$ e $\alpha y \in Ky$, $\sigma(u) \in U_y$ e $\tau(v) \in V_y$, segue que $\alpha y = 0$, $\sigma(u) = 0$ e $\tau(v) = 0$, portanto $\alpha = 0$ pois $y \neq 0$, $u = 0$ e $v = 0$ pelo fato de σ e τ serem injetoras, isto mostra que $a = 0$, assim $\ker(\varphi) = \{0\}$, mostrando que φ é injetora. Seja agora $y' = \alpha y + \sigma(u) + \tau(v) \in A = Ky \oplus U_y \oplus V_y$, então $\varphi(\alpha z + u + v) = \alpha y + \sigma(u) + \tau(v) = y'$, mostrando que φ é sobrejetora. ∎

Lema 3.2. *Sejam* $Z_1,\, Z_2,\, Z_3 \subseteq N,\ X,\, X_1,\, X_2 \subseteq U_z$ *e* $W, W_1, W_2 \subseteq V_z$ *subespaços de* $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z,$ *com* $\lambda(A^2) = 0$. *Então*

$(a) Z_1(Z_2Z_3) \subseteq Z_2(Z_3Z_1) + Z_3(Z_1Z_2)$

$(b) X_1(X_2W) = X_2(X_1W)$

$(c) W_1(W_2X) = W_2(W_1X)$

Demonstração.

Linearizando (3.4) obtemos

$$x_1^2x_2 + 2x_1(x_1x_2) = 0, \tag{3.18}$$

linearizando novamente (3.18) obtemos

$$(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 = 0, \tag{3.19}$$

para todo $x_1,\ x_2,\ x_3 \in N,$ com $\lambda(A^2) = 0$. Isso mostra (a), decore imediatamente de (3.11) e (3.12), (b) e (c) respectivamente. ■

3.1 Invariância de Subespaços com $\lambda(A^2) = 0$

Se $p(X, Y)$ é um polinômio não nulo em duas variáveis comutativas e não associativas, que não possui termo independente e todos os seus coeficientes são iguais a um, então denotamos por p_z o espaço formado a partir da substituição de X por U_z e Y por V_z. Se $m(X, Y)$ é um monômio, o "grau" de $m(X, Y)$ é denotado por ∂m, e o grau do polinômio $p(X, Y)$ é denotado da mesma forma por ∂p. Se $p(U_z, V_z) = p(U_y, V_y)$ para dois elementos distintos $z, y \in \mathrm{Nip}_1(A)$ dizemos que $p(X, Y)$ é *invariante quanto à mudança do nilpotente* ou simplesmente $p(X, Y)$ é invariante. Se dim $p(U_z, V_z) =$ dim $p(U_y, V_y)$ para quaisquer $z, y \in \mathrm{Nip}_1(A)$, então dizemos que o polinômio $p(X, Y)$ tem *dimensão invariante quanto à mudança do nilpotente*, ou simplesmente $p(X, Y)$ tem *dimensão invariante*. De agora em diante escreveremos p para denotar $p(X, Y)$. As seguintes propriedades são facilmente provadas:

1) Para cada monômio $m = m(X, Y)$, temos que $m_z \subseteq U_z$ ou $m_z \subseteq V_z$

De fato, Se m é um monômio tal que $\partial m = 1$, então $m = X$ ou $m = Y$, assim $m_z = U_z$ ou $m_z = V_z$. Suponhamos que a propriedade seja válida para todo monômio de grau $\leqslant k$, e seja m um monômio de grau $k + 1$, então $m = \mu\nu$ tal que $\partial\mu,\, \partial\nu \leqslant k$. Onde $\mu_z \subseteq U_z$ ou $\mu_z \subseteq V_z$ e $\nu_z \subseteq U_z$ ou $\nu_z \subseteq V_z$. Analisamos os quatro casos possíveis:

1º caso $\mu_z \subseteq V_z$ e $\nu_z \subseteq U_z$, então $m_z = \mu_z\nu_z \subseteq U_z$

$2^{\underline{o}}$ caso $\mu_z \subseteq V_z$ e $\nu_z \subseteq V_z$, então $m_z = \mu_z \nu_z = \{0\} \subseteq U_z \cap V_z$

$3^{\underline{o}}$ caso $\mu_z \subseteq U_z$ e $\nu_z \subseteq V_z$, então $m_z = \mu_z \nu_z = \subseteq U_z$

$4^{\underline{o}}$ caso $\mu_z \subseteq U_z$ e $\nu_z \subseteq U_z$, então $m_z = \mu_z \nu_z \subseteq V_z$.
Em todos os casos temos que $m_z \subseteq U_z$ ou $m_z \subseteq V_z$

2) Se m é um monômio de grau $k \geqslant 2$ e $m_z \neq 0$. Então existe monômios m' e m'' de grau $< k$ tal que $m = m'm''$. Se $m_z \subseteq U_z$, temos $m'_z \subseteq U_z$ e $m''_z \subseteq V_z$. Mas se $m_z \subseteq V_z$ então $m'_z \subseteq U_z$ e $m''_z \subseteq U_z$

3)Se p é um polinômio então existem polinômios g e h tal que $p_z = g_z \oplus h_z$ onde g_z e h_z são subespaços com $g_z \subseteq U_z$ e $h_z \subseteq V_z$

Proposição 3.6. *Se $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ é uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Então $V_z p_z \subseteq p_z$ para todo polinômio p.*

Demonstração.

Primeiro provaremos a proposição no caso em que o polinômio p satisfaça $p_z \subseteq U_z$. Como $p = \sum_{i=1}^{n} m_i$ onde m_i são monômios com $m_i(U_z, V_z) \subseteq U_z$ $(i = 1, ..., n)$, é suficiente provar que para um monômio $p = m$ com $p_z = m_z \subseteq U_z$ a proposição é verdadeira. Usaremos a indução sobre o grau k de m. Se $k = 1$, então $m = X$ e $V_z U_z \subseteq U_z$ por (3.5). Suponhamos que a proposição seja verdadeira para todo monômio de grau menor ou igual a k, se m é um monômio de grau $k+1$, afirmamos que $m = \mu\nu$ onde μ e ν sao monômios de grau $\leqslant k$ tal que $\mu_z \subseteq U_z$ e $\nu_z \subseteq V_z$. Segue do Lema 3.2 e da hipótese de indução que $V_z m_z = V_z(\mu_z \nu_z) = \nu_z(V_z \mu_z) \subseteq \nu_z \mu_z = m_z$. Agora, seja p um polinômio tal que $p_z = g_z \oplus h_z$, onde g e h são polinômios com $g_z \subseteq U_z$ e $h_z \subseteq V_z$. de (3.5) $V_z h_z \subseteq V_z^2 = 0$. Desse modo $V_z p_z = V_z g_z + V_z h_z \subseteq g_z \subseteq p_z$. ∎

Lema 3.3. *Para todo $u_1, u_2 \in U_z$ e $v_1, v_2 \in V_z$ e para toda transformação de Peirce de $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$, onde A satisfaz a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$, tem-se:*

(a) $\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)$;

(b) $\varphi(v_1 v_2) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)$;

(c) $u = \varphi\left(u + \frac{1}{2}u_0^2 u\right) + \varphi(u_0 u)$;

(d) $v = -\varphi(u_0 v) + \varphi(v)$.

Demonstração.

Observe que $(u_0 u_1)(u_0 u_2) = 0$ por (3.5) e $u_0(u_1 u_2) = -u_1(u_0 u_2) - (u_0 u_1)u_2$ por (3.18).

Usando essas observações e a definição de φ temos que.

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1)\varphi(u_2) &= (u_1 - u_0u_1)(u_2 - u_0u_2)\\
&= u_1u_2 - u_1(u_0u_2) - (u_0u_1)u_2 + (u_0u_1)(u_0u_2)\\
&= u_1u_2 - u_1(u_0u_2) - (u_0u_1)u_2\\
&= u_1u_2 + u_0(u_1u_2)\\
&= \varphi(u_1u_2),
\end{aligned}$$

isso mostra (a). Temos que $v_1v_2 = 0$ por (3.5), $(u_0v_1)(u_0v_2) = 0$ por (3.13) e $v_1(u_0v_2) = -(u_0v_1)v_2$ por (3.12), com estas obervações e com a definição de φ temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(v_1)\varphi(v_2) &= (v_1 + u_0v_1)(v_2 + u_0v_2)\\
&= v_1v_2 + v_1(u_0v_2) + (u_0v_1)v_2 + (u_0v_1)(u_0v_2)\\
&= 0\\
&= \varphi(0)\\
&= \varphi(v_1v_2),
\end{aligned}$$

isso mostra (b).

Para mostrar (c), usaremos que $-u_0(u_0^2u) = 0$ por (3.11) e $\frac{1}{2}u_0^2u = -u_0(u_0u)$ por (3.18).

$$\begin{aligned}
\varphi\left(u + \frac{1}{2}u_0^2u\right) + \varphi(u_0u) &= u - u_0u + \frac{1}{2}\big(u_0^2u - u_0(u_0^2u)\big) + u_0u + u_0(u_0u)\\
&= u + \frac{1}{2}\big(u_0^2u - u_0(u_0^2u)\big) + u_0(u_0u)\\
&= u,
\end{aligned}$$

fica assim provado (c). Para mostrar (d), usaremos que $u_0(u_0v) = 0$ por (3.6).

$$\begin{aligned}
-\varphi(u_0v) + \varphi(v) &= -\big(u_0v - u_0(u_0v)\big) + v + u_0v\\
&= -u_0v + u_0(u_0v) + v + u_0v\\
&= v.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.4. *Seja $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Toda transformação de Peirce φ de A satisfaz $\varphi(m_zn_z) = \varphi(m_z)\varphi(n_z)$, para quaisquer monômios m e n.*

Demonstração.

Se φ é a transformação de Peirce relativa a $z \in \mathrm{Nip}_1(A)$ e $u_0 \in U_z$. Provaremos o lema nos casos (a) $m = \mu_1, n = \mu_2$, (b) $m = \nu_1, n = \nu_2$ e (c) $m = \mu, n = \nu$, onde μ, μ_1, μ_2

são monômios tais que $\mu(U_z, V_z)$, $\mu_1(U_z, V_z)$, $\mu_2(U_z, V_z) \subseteq U_z$ e ν, ν_1, ν_2 são monômios tais que $\nu(U_z, V_z)$, $\nu_1(U_z, V_z)$, $\nu_2(U_z, V_z) \subseteq V_z$. Se u_1, $u_2 \in U_z$ e v_1, $v_2 \in V_z$, então $\varphi(u_1u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2)$ e $\varphi(v_1v_2) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)$, pelo Lema 3.3, isto estabelece a parte (a) e (b). Seja agora $u \in \mu_z$ e $v \in \nu_z$ Usando as identidades (3.5), (3.11) e (3.16) obtemos,

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi(uv) + \frac{1}{2}u_0^2(uv). \tag{3.20}$$

De fato, temos que $(u_0u)v = 0$ por (3.5), $\varphi(uv) = uv - u_0(uv) = uv + u(u_0v)$ por (3.11) e $-(u_0u)(u_0v) = \dfrac{1}{2}u_0^2(uv)$ por (3.16). Usando estas relações temos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(u)\varphi(v) &= (u - u_0u)(v + u_0v) \\
&= uv + u(u_0v) - (u_0u)v - (u_0u)(u_0v) \\
&= \varphi(uv) + \frac{1}{2}u_0^2(uv)
\end{aligned}$$

Mostraremos agora, que se $u \in \mu_z$ e $v \in \nu_z$, então

$$u_0^2(uv) \in \varphi(\mu_z\nu_z) \cap \varphi(\mu_z)\varphi(\nu_z). \tag{3.21}$$

Pela Proposição 3.4, temos que $u_0^2(uv) \in V_z(\mu_z\nu_z) \subseteq \mu_z\nu_z$. Usando (3.4) e (3.11) obtemos a identidade

$$u_0(u_0^2(uv)) = 0$$

, pois $u_0(u_0^2(uv)) + (uv)(u_0^3) = 0 = u_0(u_0^2(uv))$, decorre dessa identidade que

$$u_0^2(uv) = \varphi(u_0^2(uv))$$

, porque $\varphi(u_0^2(uv)) = u_0^2(uv) - u_0(u_0^2(uv)) = u_0^2(uv)$. De onde segue que $u_0^2(u\nu) \in \varphi(\mu_z\nu_z)$. Por outro lado, $u_0^2(uv) = -(u_0^2u)v$ por (3.12), então $u_0^2(uv) = -\varphi(u_0^2u)\varphi(v)$. De fato, visto que $u_0(u_0^2u) = (u_0v)(u_0^2u) = 0$ por (3.11) e (3.17), então

$$\begin{aligned}
u_0^2(uv) = \varphi\big(-(u_0^2u)v\big) &= -(u_0^2u)v - u_0\big((u_0^2u)v\big) \\
&= -(u_0^2u)v + (u_0^2u)(u_0v) \\
&= -(u_0^2u)v,
\end{aligned}$$

temos também que

$$\begin{aligned}
-\varphi(u_0^2u)\varphi(v) &= -(u_0^2u + u_0(u_0^2u))(v + u_0v) \\
&= -(u_0^2u)(v + u_0v) \\
&= -(u_0^2u)v - (u_0^2u)(u_0v) \\
&= -(u_0^2u)v.
\end{aligned}$$

Portanto, usando novamente a proposição (3.4) temos $u_0^2(uv) \in \varphi(V_z\mu_z)\varphi(\nu_z) \subseteq \varphi(\mu_z)\varphi(\nu_z)$. Isto prova (3.21). Segue de (3.20) e (3.21) que $\varphi(\mu_z\nu_z) = \varphi(\mu_z)\varphi(\nu_z)$. ■

Teorema 3.1. *Todo polinômio p tem dimensão invariante em uma álgebra $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$*

Demonstração.

Seja $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z = Ky \oplus U_y \oplus V_y$ duas decomposições de Peirce relativa aos nilpotentes z e $y = z + u_0 - \frac{1}{2}u_0^2$, com $u_0 \in U_z$ e seja $\varphi : A \longrightarrow A$ a transformação de Peirce relativa a z e u_0. Mostraremos que

$$\varphi\big(p(U_z, V_z)\big) = p(U_y, V_y) \tag{3.22}$$

para todo polinômio $p(X, Y)$. Primeiro provaremos no caso $p = m$, onde m é um monômio.Usaremos indução no grau k de m. Se $k = 1$, então $m = X$ ou $m = Y$, temos que $\varphi(U_z) = \sigma(U_z) = U_y$ e $\varphi(V_z) = \tau(V_z) = V_y$.

Suponhamos que o resultado seja válido para todo monômio de grau $\leqslant k$, seja $m(X, Y)$ um monômio de grau $k + 1$, então $m = m'm''$ onde m' e m'' são monômios de grau $\leqslant k$. Segue do Lema 1.4 e da hipótese de indução que

$$\begin{aligned} \varphi\big(m'(U_z, V_z)m''(U_z, V_z)\big) &= \varphi\big(m'(U_z, V_z)\big)\varphi\big(m''(U_z, V_z)\big) \\ &= m'(U_y, V_y)m''(U_y, V_y). \end{aligned}$$

Portanto $\varphi(m(U_z, V_z)) = m(U_y, V_y)$. Agora seja $p = \sum_{i=1}^{n} m_i$ um polinômio, onde $m_i (i = 1, 2, ..., n)$ são monômios então:

$$\begin{aligned} \varphi\big(p\,(U_z, V_z)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi\big(m_i\,(U_z, V_z)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(U_y, V_y) \\ &= p\,(U_y, V_y)\,. \end{aligned}$$

■

Mostramos no Teorema 3.1 que todo polinômio tem dimensão invariante em A, com $\lambda(A^2) = 0$. Queremos saber quais são invariantes, mostraremos na próxima proposição que os polinômios $X + X^2$ e $XY + Y$ são invariantes. Provaremos que os subespaços $U_z \oplus U_z^2$ e $U_zV_z \oplus V_z$ são somas de U_y e V_y respectivamente.

Proposição 3.7. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$ e seja $z \in \mathrm{Nip}_1(A)$. Então:*

(a) $U_z \oplus U_z^2 = \sum U_y$ $\big($soma estendida para todo $y \in \mathrm{Nip}_1(A)\big)$

(b) $U_zV_z \oplus V_z = \sum V_y$ $\big($soma estendida para todo $y \in \mathrm{Nip}_1(A)\big)$

Demonstração.

Provemos que $U_z \oplus U_z^2 \subseteq \sum U_y$, é suficiente mostrar que $U_z^2 \subseteq \sum U_y$. Para cada $u \in U_z$ consideremos $y = z + u - \dfrac{1}{2}u^2$ e φ a transformação de Peirce de A relativa a z e u. Temos $u^2 = u - (u - u^2) = u - \varphi(u) \in U_z + U_y$, então $U_z^2 \subseteq \sum U_y$. Agora, $U_y = \{x - ux; x \in U_z\}$, como $U_y \subseteq U_z \oplus U_z^2$, conseqüentemente $\sum U_y \subseteq U_z \oplus U_z^2$.

Provemos que $V_z \oplus U_zV_z \subseteq \sum V_y$, é suficiente mostrar que $U_zV_z \subseteq \sum V_y$. Para cada $v \in V_z$ consideremos $y = z + u - \frac{1}{2}u^2$ e φ a transformação de Peirce de A relativa a z e u. Temos $uv = -v + (v + uv) = -v + \varphi(v) \in V_z + V_y$, então $U_zV_z \subseteq \sum V_y$. Agora, $V_y = \{x + ux; x \in V_z\}$, como $V_y \subseteq V_z \oplus U_zV_z$, conseqüentemente $\sum V_y \subseteq V_z \oplus U_zV_z$. ∎

Lema 3.5. *Seja $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$, X é um subespaço de U_z, e W é um subespaço de V_z. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $U_zX \subseteq W$ e $U_zW \subseteq X$;

(ii) para cada $u \in U_z$, $x \in X$ e $w \in W$ há $x' \in X$ e $w' \in W$ tal que $ux = w - w'$ e $uw = x' - x$.

Demonstração.

Para mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$ é suficiente tomar $x' = uw + x$ e $w' = -ux + w$. Esta claro que $(ii) \Rightarrow (i)$. ∎

Teorema 3.2. *Seja p um polinômio e A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Então p é invariante se, e somente se, $U_zp_z \subseteq p_z$.*

Demonstração.

Seja $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$ a decomposição de Peirce de A relativa a z e seja g e h polinômios tais que $p_z = g_z \oplus h_z$, com $g_z \subseteq U_z$ e $h_z \subseteq V_z$. Para cada $u \in U_z$ e $y = z + u - \frac{1}{2}u^2$ consideremos a transformação de Peirce φ, relativa a z e u. A invariância de p é equivalente a $\varphi(p_z) = p_y = p_z$.

Mas

$$\begin{aligned}
\varphi(p_z) &= \{\varphi(x + w); x \in g_z \text{ e } w \in h_z\} \\
&= \{\sigma(x) + \tau(w)); x \in g_z \text{ e } w \in h_z\} \\
&= \{x + ux + w + uw; x \in g_z \text{ e } w \in h_z\} \\
&= \{(x + uw) + (w - ux); x \in g_z \text{ e } w \in h_z\}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Portanto para cada $u \in U_z$, $x \in g_z$ e $w \in h_z$ existe $x' \in g_z$ e $w' \in h_z$ tal que $uw = x' - x$ e $ux = w - w'$. Pelo Lema 3.5, $U_z g_z \subseteq h_z$ e $U_z h_z \subseteq g_z$, de onde segue que $U_z p_z \subseteq p_z$. Suponhamos agora que $U_z p_z \subseteq p_z$ então podemos reescrever (3.23) da seguinte forma

$$p_y = \{(x + w) + u(w - x); x \in g_z \text{ e } w \in h_z\},$$

portanto $p_y \subseteq p_z + U_z p_z$ e usando a hipótese segue que $p_y \subseteq p_z$, como esta inclusão vale para quaisquer dois nilpotentes não nulos segue que $p_y = p_z$, portanto p é invariante. ∎

Observação: Segue de (3.21) e do Lema 3.4 que se $U_{z_0} \subseteq p_{z_0}$ para algum $z_0 \in \mathrm{Nip}_1(A)$, então $U_z \subseteq p_z$ para todo $z \in \mathrm{Nip}_1(A)$. Então a condição $U_z \subseteq p_z$ não depende da escolha do nilpotente z.

Corolário 3.3. *Seja p um polinômio e A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Então p é invariante se, e somente se, p_z é um ideal de A.*

Demonstração.

Observemos que $zp_z \subseteq h_z$ e $Vp_z \subseteq p_z$ pela Proposição 3.4. Então, p_z é um ideal se, e somente se, $U_z p_z \subseteq p_z$ e, pelo Teorema 3.2, isto é equivalente a invariância de p. ∎

Lema 3.6. *Seja h um polinômio tal que $h_z \subseteq V_z$, se $\partial h \geqslant 2$, então $h_z = U_z g_z$ onde g é um polinômio tal que $g_z \subseteq U_z$*

Demonstração.

Primeiro provaremos o lema para monômios. Se $h_z = U_z^2$ é suficiente tomar $g_z = U_z$. Então suponhamos que $h = \mu'\mu''$, onde μ' e μ'' são monômios tal que μ'_z e μ''_z estão contidos em U_z. Se $\mu'_z = U_z$ é suficiente tomar $g = \mu''$. Agora, suponhamos que $\partial\mu', \partial\mu'' \geqslant 2$. Então $\mu' = \mu\nu$, onde μ e ν são monômios com $\partial\mu, \partial\nu < \partial\mu'$, $\mu_z \subseteq U_z$ e $\nu_z \subseteq V_z$. Usando Lema 3.2, obtemos que $h_z = (\mu_z\nu_z)\mu''_z = \mu_z(\mu''_z\nu_z)$. Portanto, é suficiente aplicar o processo de indução sobre o $\partial\mu'$. De fato, se $\partial\mu' = 2$ então $\mu'_z = U_z V_z$, logo $h_z = U_z(\mu''_z V_z)$, e nesse caso basta tomar $g_z = \mu''_z V_z$, portanto se o $\partial\mu' = 2$ o lema é verdadeiro. Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo μ' de grau $\leqslant k$, se $\partial\mu' = k+1$, então $h_z = \mu'_z\mu''_z = (\mu_z\nu_z)\mu''_z = \mu_z(\nu_z\mu''_z)$, portanto aplicando a hipótese de indução, temos que o lema é verdadeiro para todo monômio h tal que $h_z \subseteq V_z$. Por outro lado, se h é um polinômio tal que $h_z \subseteq V_z$, então $h = \sum_{i=1}^{n} m_i$, onde m_i é um monômio, tal que $m_{i_z} \subseteq V_z$ para todo $i = 1, ...n$. Portanto

$$\begin{aligned} h_z &= \sum_{i=1}^{n} m_{i_z} \\ &= \sum_{i=1}^{n} U_z g_{i_z} \\ &= U_z \sum_{i=1}^{n} g_{i_z} = U_z g_z, \end{aligned}$$

onde cada g_i é um monômio tal que $g_{i_z} \subseteq U_z$, então $g_z \subseteq U_z$. ∎

Lema 3.7. *Todo polinômio p satisfaz $U_z(U_zp_z) \subseteq p_z$ em uma álgebra A, satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$.*

Demonstração.

Primeiro provaremos o lema para um monômio m usaremos a indução sobre o grau k de m. Se $m = X$, então $U_z(U_zU_z) = U_z^3 \subseteq U_z$ e se $m = Y$, então $U_z(U_zV_z) = U_z^2 \subseteq V_z$. Assumimos que o lema é verdadeiro para os monômios de grau $\leqslant k$. Seja m um monômio de grau $k+1$. Pelo Lema 3.6 temos que $m = \mu\nu$ ou $m = X\mu$ onde μ e ν são monômios de grau $\leqslant k$ tal que $\mu_z \subseteq U_z$ e $\nu_z \subseteq V_z$. Usando indução, a hipótese e o Lema 3.2 temos,

$$\begin{aligned} U_z\Big(U_z(\mu_z\nu_z)\Big) &= U_z\Big(\mu_z(U_z\nu_z)\Big) \\ &\subseteq \mu_z\Big((U_z\nu_z)U_z\Big) + (U_z\nu_z)(U_z\mu_z) \\ &\subseteq \mu_z\nu_z + \Big(U_z(U_z\mu_z)\Big)\nu_z \\ &= \mu_z\nu_z \end{aligned}$$

e também $U_z\Big(U_z(U_z\mu_z)\Big) \subseteq U_z\mu_z$, então temos que $U_z(U_zm_z) \subseteq m_z$. Por outro lado, se p é um polinômio, então $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i$, onde cada m_i é um monômio qualquer, então

$$\begin{aligned} U_z(U_zp_z) &= U_z\left(U_z\left(\sum_{i=1}^{n} m_{i_z}\right)\right) \\ &= U_z\left(\sum_{i=1}^{n} U_zm_{i_z}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} U_z\Big(U_zm_{i_z}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{i_z} = p_z. \end{aligned}$$

■

O seguinte corolário pode caracterizar todos os polinômios invariantes.

Corolário 3.4. *Para todo polinômio $q \in \mathcal{P}$, o polinômio $q+Xq$ é invariante em uma álgebra A satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Além disso, se p é um polinômio invariante em A, então existe $q \in \mathcal{P}$ tal que $p_z = q_z + U_zq_z$.*

Demonstração.

Pelo Lema 3.7, para cada $q \in \mathcal{P}$ temos $U_z(q_z+U_zq_z) \subseteq q_z+U_zq_z$. E se $p \in \mathcal{P}$ é invariante, então $p_z = p_z + U_zp_z$. ■

Notamos também que

Corolário 3.5. *Um monômio m é invariante na álgebra $A = Kz \oplus U_z \oplus V_z$, que satisfaz identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$ se, e somente se, $U_z m_z = 0$.*

Demonstração.

$\Rightarrow$) Suponhamos que m é invariante, então $U_z m_z \subseteq m_z$, Se $m_z \subseteq U_z$ $\Big(m_z \subseteq V_z\Big)$, então temos que:

$$U_z m_z \subseteq m_z \subseteq U_z \quad \Big(U_z m_z \subseteq m_z \subseteq V_z\Big)$$

e

$$U_z m_z \subseteq m_z \subseteq V_z \quad \Big(U_z m_z \subseteq m_z \subseteq U_z\Big)$$

então $m_z \subseteq U_z \cap V_z = 0$, que $0 \subseteq m_z$ é evidente, logo $m_z = 0$.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que $U_z m_z = 0$, então $U_z m_z = 0 \subseteq m_z$, logo m_z é invariante pelo Teorema 3.2. ∎

Capítulo 4

Álgebras Satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) \neq 0$

Olharemos agora uma outra classe de álgebras satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$ como objeto de nosso estudo, estas álgebras são estudadas em [8] . Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre K, onde K é um corpo de característica diferente de 2 e seja λ um funcional linear satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) \neq 0$. A condição $\lambda(A^2) \neq 0$ é equivalente a existência de um idempotente não nulo em A. De fato substituindo y por x^2 na equação (3.7) $\big($que foi obtida da linearização de (3.1)$\big)$ temos que

$$\begin{aligned}
x^2x^2 + 2x(xx^2) - \lambda(x^2)x^2 - 2\lambda(x)xx^2 &= 0\\
(x^2)^2 + 2x(\lambda(x)x^2) - \lambda(x^2)x^2 - 2\lambda(x)x^3 &= 0\\
(x^2)^2 + 2\lambda(x)(xx^2) - \lambda(x^2)x^2 - 2\lambda(x)x^3 &= 0\\
(x^2)^2 &= \lambda(x^2)x^2,
\end{aligned}$$

como $\lambda \neq 0$ e $\lambda(A^2) \neq 0$ existe $x_0 \in A$ tal que $\lambda(x_0^2) \neq 0$, tomando $e = \dfrac{1}{\lambda(x_0^2)}x_0^2$, temos que $\lambda(e) = \dfrac{1}{\lambda(x_0^2)}\lambda(x_0^2) = 1$, e que

$$\begin{aligned}
e^2 &= \left(\frac{1}{\lambda(x_0^2)}x_0^2\right)\left(\frac{1}{\lambda(x_0^2)}x_0^2\right)\\
&= \frac{1}{\lambda(x_0^2)^2}(x_0^2)^2\\
&= \frac{1}{\lambda(x_0^2)^2}\lambda(x_0^2)x_0^2\\
&= \frac{1}{\lambda(x_0^2)}x_0^2\\
&= e.
\end{aligned}$$

Proposição 4.1. *Sejam A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$ e e um idempotente de peso um em A. Então para todo $y \in N := \ker(\lambda)$ temos:*

$$ey = 2e(ey), \tag{4.1}$$

$$y^2 = ey^2 + 2(ey)y \quad \text{e} \tag{4.2}$$

$$y^3 = 0. \tag{4.3}$$

Demonstração.

Substituindo x por e na equação (3.7), temos

$$\begin{aligned} e^2y + 2e(ey) - \lambda(y)e^2 - 2\lambda(e)ey &= 0 \\ ey + 2e(ey) - 2ey &= 0 \\ 2e(ey) &= ey, \end{aligned}$$

isso mostra (4.1). Substituindo (x, y) por (y, e) em (3.7), temos

$$\begin{aligned} y^2e + 2y(ye) - \lambda(e)y^2 - 2\lambda(y)ye &= 0 \\ y^2e + 2y(ye) - y^2 &= 0 \\ y^2e + 2y(ye) &= y^2, \end{aligned}$$

fica assim provado (4.2). Que $y^3 = 0$ para todo $y \in N$ é evidente por (3.1). ■

Em [4] as álgebras que satisfazem as condições da proposição acima, são definidas como álgebras de Bernstein Jordan Fracas (BJF)

Proposição 4.2. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) = 0$, um elemento $x \in A$ está em N se, e somente se, $ex \in N$ onde $e \in \mathrm{Ip}_1(A)$.*

Demonstração.

$\Rightarrow$) Seja $x \in N$ então $ex = 2e(ex)$ pela proposição anterior. Sabemos que $ex = \alpha e + n$, onde $\alpha \in K$ e $n \in N$, pois $A = Ke \oplus N$(demonstração análoga Proposição 0.1). Portanto $ex = 2e(\alpha e + n) = 2\alpha e + 2en$, logo
$\alpha e = n - 2en = e(n - 2en) = en - 2e(en) = 2e(en) - 2e(en) = 0$, logo $ex = n \in N$

$\Leftarrow$) Seja $ex \in N$, então $e(ex) = 2e(e(ex))$, onde $x = \alpha e + n$ com $\alpha \in K$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned} e(e(\alpha e + n)) &= 2e(e(e(\alpha e + n))) \\ e(\alpha e + en) &= 2e(e(\alpha e + en)) \\ \alpha e + e(en) &= 2e(\alpha e + e(en)) \\ \alpha e + e(en) &= 2\alpha e + 2e(e(en)) \\ e(en) - 2e(e(en)) &= 2\alpha e - \alpha e \\ 0 &= \alpha e, \end{aligned}$$

portanto $x = n \in N$. ■

Proposição 4.3. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. N pode ser decomposto como a soma direta de $U_e \oplus V_e$, onde $U_e = \big\{2ey\,;\ \ y \in N\big\}$ e $V_e = \big\{y - 2ey\,;\ \ y \in N\big\}$*

Demonstração.

Seja $y \in N$, então $y = 2ey + (y - 2ey) \in U_e + V_e$, portanto $N \subseteq U_e + V_e$ a outra inclusão é evidente, logo $\ker(\lambda) = U_e + V_e$. Suponhamos agora que $y \in U_e \cap V_e$, então existem s, $t \in N$ tal que $2es = y = t - 2et$, então temos que

$$\begin{aligned} t - 2et - 2es &= 0 \\ et - 2e(et) - 2e(es) &= 0 \\ 2e(et) - 2e(et) - 2e(es) &= 0 \\ -2e(es) &= 0 \\ 4e(es) &= 0 \\ 2es &= 0 = y, \end{aligned}$$

portanto $U_e \cap V_e = \{0\}$, logo $N = U_e \oplus V_e$. ∎

Proposição 4.4. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. Se $e \neq 0$ é um idempotente tal que $\lambda(e) = 1$, então $A = Ke \oplus N = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é a decomposição de Peirce, relativa a e, onde $U_e = \left\{x \in N\,;\ ex = \dfrac{1}{2}x\right\}$ e $V_e = \{x \in N\,;\ ex = 0\}$. Além disso os subespaços U_e e V_e satisfazem:*

$$U_e^2 \subseteq V_e, \qquad U_eV_e \subseteq U_e \quad \text{e} \quad V_e^2 \subseteq Ke$$

Demonstração.

A Demonstração que $A = Ke \oplus N$ é totalmente análoga a da Proposição 0.1, na Proposição 4.3 foi mostrado que $\ker(\lambda) = U_e \oplus V_e$, então $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$.

Demonstraremos agora que $U_e = X := \left\{x \in N\,;\ ex = \dfrac{1}{2}x\right\}$. Seja $x \in U_e$ então $x = 2ey$, onde $y \in N$, logo $ex = 2e(ey) = ey = \dfrac{1}{2}x$, portanto $x \in X$, mostrando que $U_e \subseteq X$. Seja $x \in X$ então $ex = \dfrac{1}{2}x$, onde $x \in N$, logo $x = 2ex$, portanto $x \in U_e$, mostrando que $X \subseteq U_e$. Fica assim provado que $U_e = X$.

Queremos mostrar que $V_e = Y := \{x \in N\,;\ \ ex = 0\}$. Seja $x \in V_e$ então $x = y - 2ey$, onde $y \in N$, logo $ex = ey - 2e(ey) = 2e(ey) - 2e(ey) = 0$, portanto $x \in Y$, mostrando que $V_e \subseteq Y$. Seja $x \in Y$ então $ex = 0$, onde $x \in N$, logo $x = x - 2ex$, portanto $x \in V_e$, mostrando que $Y \subseteq V_e$. Fica assim provado que $V_e = Y$.

Substituindo y por u em (4.2) temos

$$\begin{aligned} u^2 &= u^2e + 2(ue)u \\ &= u^2e + 2\left(\frac{1}{2}u\right)u \\ &= eu^2 + u^2, \end{aligned}$$

segue que $eu^2=0$, sabemos que $u^2=\alpha e+u'+v'$, onde $\alpha e\in Ke,\ u'\in U_e,\ v'\in V_e$, então $eu^2=e\alpha e+eu'+ev'=\alpha e+\dfrac{1}{2}u'=0$ portanto $\alpha e=u'=0$, pois $Ke\oplus U_e$, logo $u^2=v'$ mostrando que $U_e^2\subseteq V_e$. Seja $x\in V_e$, substituindo y por x em (4.2) temos

$$x^2 \;=\; x^2e+2(xe)x=x^2e$$

sabemos que $x^2=\alpha e+u'+v'$, onde $\alpha e\in Ke,\ u'\in U_e,\ v'\in V_e$, portanto $ex^2= e\alpha e+eu'+ev'=\alpha e+\dfrac{1}{2}u'=\alpha e+u'+v'$, então temos que $u'=v'=0$, pois $U_e\oplus V_e$, portanto $x^2=\alpha e$, mostrando que $V_e^2\subseteq Ke$. Substituindo y por $u+v$ em (4.2) temos

$$\begin{aligned}
(u+v)^2 &= (u+v)^2e+2((u+v)e)(u+v)\\
u^2+2uv+v^2 &= u^2e+2(uv)e+v^2e+u(u+v)\\
u^2+2uv+v^2 &= u^2e+2(uv)e+v^2e+u^2+uv\\
2uv &= 2(uv)e+uv\\
uv &= 2(uv)e\\
\frac{1}{2}uv &= (uv)e,
\end{aligned}$$

portanto $e(uv)=\dfrac{1}{2}uv$, temos que $uv=\alpha e+u'+v'$, onde $\alpha e\in Ke,\ u'\in U_e,\ v'\in V_e$, então $e(uv)=e\alpha e+eu'+ev'=\alpha e+\dfrac{1}{2}u'=\dfrac{1}{2}(\alpha e+u'+v')$, logo $\alpha e=v'=0$, pois $Ke\oplus V_e$, segue que $uv=u'$, mostrando que $U_eV_e\subseteq U_e$. ∎

Esta claro que se $x,x_1,x_2,x_3\in N$ então são satisfeitas as relações (3.4), (3.18) e (3.19), pois em nenhum momento foi usado a condição $\lambda(A^2)=0$, para mostrar estas relações. Os elementos $u\in U_e$ e $v\in V_e$ satisfazem

$$u(uv)=0,\qquad u^2v=0 \tag{4.4}$$

De fato substituindo (x,y) por (u,v) em (3.18) temos que $u^2v+2u(uv)=0$, onde $u^2v\in Ke$ e $2u(uv)\in V_e$, como
$A=Ke\oplus U_e\oplus V_e$ então segue que $u^2v=0$ e $u(uv)=0$, linearizando (4.4) em u, para $u_1,u_2\in U_e$ e $v\in V_e$ temos

$$u_1(u_2v)+u_2(u_1v) \;=\; 0 \tag{4.5}$$
$$(u_1u_2)v \;=\; 0 \tag{4.6}$$

De (4.6) temos $U_e^2V_e=0$.

O conjunto dos elementos $x\in A$ tal que $x^2=x$ e $\lambda(x)=1$, é chamado de conjunto dos *elementos idempotentes de peso 1 de A*, e denotaremos por $\mathrm{Id}_1(A)$

Proposição 4.5. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3=\lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2)=0$. O conjunto dos elementos idempotentes $f\in A$ com $\lambda(f)=1$ é $\mathrm{Ip}_1(A)=X:=\{e+u+u^2\,;\ u\in U_e\}$, onde e é um idempotente de peso um fixo.*

Demonstração.

Seja $x \in X$, então $x = e + u + u^2$, temos $\lambda(e + u + u^2) = \lambda(e) = 1$, temos também que

$$\begin{aligned} x^2 &= (e + u + u^2)(e + u + u^2) \\ &= e^2 + eu + eu^2 + ue + u^2 + u^3 + u^2e + u^3 + u^2u^2 \\ &= e + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u + u^2 \\ &= e + u + u^2 \\ &= x, \end{aligned}$$

portanto $x \in \mathrm{Id}_1(A)$, então $X \subseteq \mathrm{Id}_1(A)$. Por outro lado, se $x \in \mathrm{Id}_1(A)$, então $x = e + u + v$ já que $\lambda(x) = 1$, temos também que

$$\begin{aligned} x^2 &= (e + u + v)(e + u + v) \\ &= e^2 + eu + ev + ue + u^2 + uv + ve + vu + v^2 \\ &= e + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u + u^2 + 2uv + v^2 \\ &= e + u + u^2 + 2uv + v^2 \\ &= e + u + v \\ &= x \end{aligned}$$

portanto $u^2 - v + 2uv + v^2 = 0$, onde $u^2 - v \in V_e$, $2uv \in U_e$ e $v^2 \in Ke$, então $v = u^2$, assim $x = e + u + u^2$, então $x \in X$, logo $\mathrm{Id}_1(A) \subseteq X$. ■

Proposição 4.6. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$. Consideremos e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ onde $f = e + u_0 + u_0^2$ para algum $u_0 \in U_e$. Então temos*

$$\begin{aligned} U_f &= \{u + 2u_0u\, ;\ u \in U_e\} \\ V_f &= \{v - 2u_0v\, ;\ v \in V_e\} \end{aligned}$$

Demonstração.

Sabemos que $U_f = \left\{x \in N\, ;\ fx = \dfrac{1}{2}x\right\}$, mostraremos agora que $U_f = X := \{u + 2u_0u\, ;\ u \in U_e\}$. Seja $x \in X$, então $x = u + 2u_0u$ com $u \in U_e$. Observe que por (3.19) $u_0^2u = -2u_0(u_0u)$, usando isto temos

$$\begin{aligned} fx &= (e + u_0 + u_0^2)(u + 2u_0u) \\ &= eu + 2e(u_0u) + u_0u + 2u_0(u_0u) + u_0^2u + 2u_0^2(u_0u) \\ &= \frac{1}{2}u + u_0u \\ &= \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Assim $x \in U_f$, então $X \subseteq U_f$. Tomemos $x \in U_f$, então $x = u + v$, pois $x \in N = U_e \oplus V_e$. Temos também que $fx = \dfrac{1}{2}x$, então temos que

$$
\begin{aligned}
(e+u_0+u_0^2)(u+v) &= \frac{1}{2}(u+v)\\
eu+ev+u_0u+u_0v+u_0^2u+u_0^2v &= \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\\
\frac{1}{2}u+u_0u+u_0v+u_0^2u &= \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\\
u_0u-\frac{1}{2}v+u_0v+u_0^2u &= 0,
\end{aligned}
$$

onde $u_0u-\dfrac{1}{2}v \in V_e$ e $u_0v+u_0^2u \in U_e$, assim $\dfrac{1}{2}v = u_0u$, pois $U_e \oplus V_e$, então $v = 2u_0u$, segue que $x = u + 2u_0u \in X$, logo $U_f \subseteq X$, mostrando assim que $U_f = X$. Sabemos que $V_f = \{x \in N\,;\ fx = 0\}$, mostraremos agora que $V_f = Y := \{v - 2u_0v\,;\ u \in V_e\}$. Seja $x \in Y$, então $x = v - 2u_0v$ com $v \in V_e$. Observe que por (3.19) e (3.4) que $-2u_0^2(uv) = 0$, usando isto temos

$$
\begin{aligned}
fx &= (e+u_0+u_0^2)(v-2u_0v)\\
&= ev - 2e(u_0v) + u_0v + 2u_0(u_0v) + u_0^2v - 2u_0^2(u_0v)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Assim $x \in V_f$, então $Y \subseteq V_f$.

Se $x \in V_f$, então $x = u + v$, pois $x \in N = U_f \oplus V_f$. Temos também que $fx = 0$, então temos que

$$
\begin{aligned}
(e+u_0+u_0^2)(u+v) &= 0\\
eu+ev+u_0u+u_0v+u_0^2u+u_0^2v &= 0\\
\frac{1}{2}u+u_0u+u_0v+u_0^2u &= 0\\
\frac{1}{2}u+u_0v+u_0^2u+u_0u &= 0.
\end{aligned}
$$

Temos que $\frac{1}{2}u+u_0v+u_0^2u \in U_e$ e $u_0u \in V_e$, como $U_e \oplus V_e$ então $\frac{1}{2}u+u_0v+u_0^2u = u_0u = 0$ usando (3.19) e a última igualdade temos que $u_0^2u = 0$, logo $\frac{1}{2}u + u_0v = 0$, então $u = -2u_0v$, segue que $x = v - 2u_0v \in Y$, logo $V_f \subseteq Y$, mostrando assim que $V_f = Y$. ■

Proposição 4.7. *Sejam A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) = 0$, e, $f \in \mathrm{Ip}_1(A)$ e $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$. As funções $\sigma_{e,u_0} : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau_{e,u_0} : V_e \longrightarrow V_f$ definidas por:*

$$\sigma_{e,u_0}(u) = u + 2u_0u \tag{4.7}$$
$$\tau_{e,u_0}(v) = v - 2u_0v \tag{4.8}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais sobre o corpo K.

Demonstração.

Sejam $u_1,\ u_2 \in U_e$ e $\alpha \in K$ então

$$\begin{aligned}
\sigma_{e,u_0}(\alpha u_1 + u_2) &= \alpha u_1 + u_2 + 2u_0(\alpha u_1 + u_2)\\
&= \alpha u_1 + 2\alpha u_0 u_1 + u_2 + 2u_0 u_2\\
&= \alpha(u_1 + 2u_0 u_1) + u_2 + 2u_0 u_2\\
&= \alpha\sigma_{e,u_0}(u_1) + \sigma_{e,u_0}(u_2),
\end{aligned}$$

portanto σ_{e,u_0} é uma transformação linear. Mostraremos agora que σ_{e,u_0} é bijetora, se $\sigma_{e,u_0}(u) = 0$ logo $u + 2u_0 u = 0$, como $U_e \oplus V_e$, $u \in U_e$ e $u_0 u \in V_e$ então $u = 0$, logo $\ker(\sigma_{e,u_0}) = \{0\}$ isso mostra que σ_{e,u_0} é injetora, seja agora $y = u + 2u_0 u \in U_f$, onde $u \in U_e$, então $\sigma_{e,u_0}(u) = u + 2u_0 u = y$ mostrando que σ_{e,u_0} é sobrejetora.

Sejam $v_1,\ v_2 \in V_e$ e $\alpha \in K$ então

$$\begin{aligned}
\tau_{e,u_0}(\alpha v_1 + v_2) &= \alpha v_1 + v_2 - 2u_0(\alpha v_1 + v_2)\\
&= \alpha v_1 - 2\alpha u_0 v_1 + v_2 - 2u_0 v_2\\
&= \alpha(v_1 - 2u_0 v_1) + v_2 - 2u_0 v_2\\
&= \alpha\tau_{e,u_0}(v_1) + \tau_{e,u_0}(v_2)
\end{aligned}$$

portanto τ_{e,u_0} é uma transformação linear. Mostraremos agora que τ_{e,u_0} é bijetora, se $\tau_{e,u_0}(v) = 0$, então $v - 2u_0 v = 0$, como $U_e \oplus V_e$, $-2u_0 v \in U_e$ e $v \in V_e$ então $v = 0$ logo $\ker(\tau_{e,u_0}) = \{0\}$ isso mostra que τ_{e,u_0} é injetora, seja agora $y = v - 2u_0 v \in V_f$, onde $\nu \in V_e$, então $\tau_{e,u_0}(v) = v - 2u_0 v = y$ mostrando que τ_{e,u_0} é sobrejetora. ∎

De agora em diante, para não sobrecarregar a linguagem, escreveremos σ, τ e φ no lugar de σ_{e,u_0}, τ_{e,u_0} e φ_{e,u_0}, respectivamente. Porém deve ficar claro que as funções σ, τ e φ dependem do par de idempotentes e e f.

Proposição 4.8. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. A transformação de Peirce $\varphi : A \longrightarrow A$ relativa a e e u_0 é o isomorfismo de espaço vetorial, definido por $\varphi(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v)$ para todo $\alpha \in K$, $u \in U_e$ e $v \in V_e$.*

Demonstração.

Mostraremos agora que φ é um isomorfismo de espaço vetorial. Sejam $a_1 = \alpha_1 e + u_1 + v_1$, $a_2 = \alpha_2 e + u_2 + v_2 \in A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ e $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in K$, então

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta a_1 + a_2) &= \varphi(\beta(\alpha_1 e + u_1 + v_1) + \alpha_2 e + u_2 + v_2)\\
&= \varphi(\beta\alpha_1 e + \beta u_1 + \beta v_1 + \alpha_2 e + u_2 + v_2)\\
&= \varphi((\beta\alpha_1 + \alpha_2)e + \beta u_1 + u_2 + \beta v_1 + v_2)\\
&= (\beta\alpha_1 + \alpha_2)f + \sigma(\beta u_1 + u_2) + \tau(\beta v_1 + v_2)\\
&= \beta\alpha_1 f + \alpha_2 f + \beta\sigma(u_1) + \sigma(u_2) + \beta\tau(v_1) + \tau(v_2)\\
&= \beta\alpha_1 f + \beta\sigma(u_1) + \beta\tau(v_1) + \alpha_2 f + \sigma(u_2) + \tau(v_2)\\
&= \beta(\alpha_1 f + \sigma(u_1) + \tau(v_1)) + \alpha_2 f + \sigma(u_2) + \tau(v_2)\\
&= \beta\varphi(\alpha_1 e + u_1 + v_1) + \varphi(\alpha_2 e + u_2 + v_2)\\
&= \beta\varphi(a_1) + \varphi(a_2),
\end{aligned}$$

portanto φ é uma transformação linear. Mostraremos agora que φ é bijetora, seja $a = \alpha e+u+v \in A$ tal que $\varphi(a) = 0$ logo $\alpha f+\sigma(u)+\tau(v) = 0$, $\alpha f \in K_f$, $\sigma(u) \in U_f$ e $\tau(v) \in V_f$, como $A = K_f \oplus U_f \oplus V_f$, então $\alpha f = 0$, $\sigma(u) = 0$ e $\tau(v) = 0$, portanto $\alpha = 0$ pois $f \neq 0$, $u = 0$ e $v = 0$, pelo fato de σ e τ serem injetoras, isto mostra que $a = 0$, logo $\ker(\varphi) = \{0\}$, isso mostra que φ é injetora, seja agora $y = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v) \in A = K_f \oplus U_f \oplus V_f$, então $\varphi(\alpha e + u + v) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(v) = y$, mostrando que φ é sobrejetora. ■

Deve ficar claro que $\varphi|_{U_e} = \sigma$ e $\varphi|_{V_e} = \tau$

4.1 Invariância de Subespaços com $\lambda(A^2) \neq 0$

Nesta seção A satisfaz $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) \neq 0$. Como no capítulo anterior, se $p(U_e, V_e) = p(U_f, V_f)$, onde e, $f \in A$ são dois elementos não nulos distintos e idempotentes, dizemos que o polinômio $p(X, Y)$ é *invariante quanto à mudança de idempotente* ou simplesmente $p(X, Y)$ é *invariante*. Se dim $p(U_e, V_e) =$ dim $p(U_f, V_f)$ para todo e, $f \in Ip_1(A)$, dizemos que o polinômio $p(X, Y)$ tem *dimensão invariante.*

Assumiremos nesta seção que $V_e^2 = Ke$; temos que tal condição é invariante. Observemos primeiro que se n é um monômio onde $\partial n \geqslant 3$ e $n_e \subseteq V_e^2$ então $n_e = 0$. De fato, existem monômios ν' e ν'' tal que ν'_e, $\nu''_e \subseteq V_e$ com $\partial\nu' \geqslant 2$ e $n = \nu'\nu''$. Podemos escrever $\nu' = \mu'\mu''$ onde μ' e μ'' são monômios com μ'_e, $\mu''_e \subseteq U_e$. Então $n_e \subseteq U_e^2 V_e = 0$. Deste modo, dado um monômio m com $\partial m \geqslant 2$, para o resto desta seção basta considerar apenas três possibilidades: $m = \mu\nu$, $m = \mu'\mu''$ ou $m = V^2$ onde μ, μ', μ'', ν são monômios de grau $< \partial m$ satisfazendo μ_e, μ'_e, $\mu''_e \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$.

Lema 4.1. *Se $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. Então $U_e^2 p_e \subseteq p_e$ para todo polinômio p.*

Demonstração.

Seja m um monômio. Se $m = X$ ou $m = Y$, então esta claro que $U_e^2 m_e \subseteq m_e$. Se $m = Y^2$ ou $m = \mu'\mu''$ onde μ' e μ'' são monômios tal que μ'_e, $\mu''_e \subseteq U_e$, então $U_e^2 m_e = 0$. Se $m = \mu\nu$ onde μ e ν são monômios tal que $\mu_e \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$, então $U_e^2 m_e$ é gerado por elementos da forma $u_1^2(u_2\nu)$ com $u_1 \in U_e$, $u_2 \in \mu_e$ e $\nu \in \nu_e$. Temos $u_1^2(u_2\nu) = -(u_1^2 u_2)\nu$ por (3.19) e (4.1). Como $u_1^2(u_2\nu) \in (U_e^2\mu_e)\nu_e$. Usando indução sobre o grau de m obtemos que $U_e^2 m_e \subseteq m_e$. Agora suponha que $p = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i$ é um polinômio onde os m_i são monômios $(i = 1, ..., r)$. Então

$$U_e^2 p(U_e, V_e) = \sum_{i=1}^{r} U_e^2 m_i(U_e, V_e) \subseteq \sum_{i=1}^{r} m_i(U_e, V_e) = p(U_e, V_e).$$ ■

Proposição 4.9. *Sejam e e f dois idempotentes de uma álgebra A satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) \neq 0$, onde $f = e + u_0 + u_0^2$ com $u_0 \in U_e$ e seja φ a transformação de Peirce relativa a e e u_0. Então*

(a) $\varphi(\mu'_e\mu''_e) = \varphi(\mu'_e)\varphi(\mu''_e)$

(b) $\varphi(V_e^2) = \varphi(V_e)\varphi(V_e)$

(c) $\varphi(\mu_e\nu_e) = \varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e)$ *onde* $\mu\,\mu', \mu''$ *e* ν *são monômios tal que* μ_e, μ'_e, $\mu''_e \subseteq U_e$ *e* $\nu_e \subseteq V_e$.

Demonstração.

Usando (3.18) temos que $4u(u_0u) = -2u_0u^2$, por (4.6) temos $4(u_0u)(u_0u) = 0$ e para $u \in U_e$, temos que $\varphi(u^2) = \tau(u^2) = u^2 - 2u_0u^2$, por outro lado

$$\begin{aligned}\varphi(u)^2 &= (u+2u_0u)(u+2u_0u)\\ &= u^2 + 2u(u_0u) + 2(u_0u)u + 4(u_0u)(u_0u)\\ &= u^2 + 4u(u_0u)\\ &= u^2 - 2u_0u^2\\ &= \varphi(u^2),\end{aligned}$$

temos também que para todo $u_1 \in \mu'_e$, $u_2 \in \mu''_e$ que $(u_1+u_2)^2 = u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2$, então $u_1u_2 = \frac{1}{2}(u_1+u_2)^2 - \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{2}u_2^2$, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(u_1u_2) &= \frac{1}{2}\varphi((u_1+u_2)^2) - \frac{1}{2}\varphi(u_1^2) - \frac{1}{2}\varphi(u_2^2)\\ &= \frac{1}{2}\varphi(u_1+u_2)^2 - \frac{1}{2}\varphi(u_1)^2 - \frac{1}{2}\varphi(u_2)^2\\ &= \frac{1}{2}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2))^2 - \frac{1}{2}\varphi(u_1)^2 - \frac{1}{2}\varphi(u_2)^2\\ &= \varphi(u_1)\varphi(u_2)\end{aligned}$$

isto mostra a parte (a). Tomemos agora $v \in V_e$, então $v^2 = ke$ pois $V_e^2 = Ke$, usando (3.18) temos $2v(u_0v) = -v^2u_0$, então $-4v(u_0v) = 2v^2u_0 = 2keu_0 = ku_0$, usando (3.19) e (4.4) temos $4(u_0v)(u_0v) = [-4v(u_0v)]u_0 = ku_0^2$, temos também que $\varphi(v^2) = \varphi(ke) = kf = ke + ku_0 + ku_0^2$, e por outro lado,

$$\begin{aligned}\varphi(v)^2 &= (v-2u_0v)(v-2u_0v)\\ &= v^2 - 2v(u_0v) - 2v(u_0v) + 4(u_0v)(u_0v)\\ &= v^2 - 4v(u_0v) + 4(u_0v)(u_0v)\\ &= ke + ku_0 + ku_0^2\\ &= \varphi(v^2)\end{aligned}$$

para todo v_1, $v_2 \in V_e$ de maneira análoga ao que fizemos para mostrar (a) obtemos que $\varphi(v_1v_2) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)$, isso mostra (b).

Agora seja $u \in \mu_e$ e $v \in V_e$. Usando (4.5) temos que $2u_0(uv) = -2u(u_0v)$, por (3.19), (4.4), (4.5) e (4.6) temos que $4(u_0u)(u_0v) = -4(u(u_0v))u = 4(u_0(uv))u_0 = -2u_0^2(uv) =$

$2(u_0^2u)v$, segue que

$$\begin{aligned}\varphi(u)\varphi(v) &= (u+2u_0u)(v-2u_0v)\\ &= uv-2u(u_0v)+2v(u_0u)-4(u_0u)(u_0v)\\ &= uv+2u_0(uv)-2(u_0^2u)v\\ &= \varphi(uv)-2(u_0^2u)v \end{aligned} \tag{4.9}$$

Note que

$$u_0(u_0^2u)=0 \tag{4.10}$$

para todo $u \in U_e$, por (3.4) e (4.5). Segue de (3.19), (4.4) e (4.7) que

$$\begin{aligned}\varphi((u_0^2u)v) &= (u_0^2u)v+2u_0((u_0^2u)v)\\ &= (u_0^2u)v-2u_0(u_0^2(uv))\\ &= (u_0^2u)v,\end{aligned}$$

mas $(u_0^2u)v \in (U_e^2\mu_e)\nu_e \subseteq \mu_e\nu_e$ pelo Lema 4.1. Deste modo $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu_e\nu_e)$. Por outro lado, $\varphi(u_0^2u)\varphi(v) = (u_0^2u)v - 2(u_0^2u)(u_0v)$, por (4.10). Usando (3.19), (4.4), (4.5) e (4.10) temos que $(u_0^2u)(u_0v) = 0$, então $(u_0^2u)v = \varphi(u_0^2u)\varphi(v)$. Como Lema 4.1 implica que $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e)$. Então $(u_0^2u)v \in \varphi(\mu_e\nu_e) \cap \varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e)$, usando esta última identidade e (4.9) temos que $\varphi(\mu_e)\varphi(\nu_e) = \varphi(\mu_e\nu_e)$. ■

O Teorema 4.1 a seguir (e sua prova) é similar ao Teorema 3.1

Teorema 4.1. *Todo polinômio p em uma álgebra A satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$, tem dimensão invariante.*

Demonstração.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = Kf \oplus U_f \oplus V_f$ duas decomposições de Peirce relativas aos idempotentes e e $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$ e seja $\varphi : A \longrightarrow A$ a transformação de Peirce relativa a e e u_0. Mostraremos que

$$\varphi\big(p(U_e, V_e)\big) = p(U_f, V_f) \tag{4.11}$$

para todo polinômio p. Primeiro provaremos no caso $p = m$, onde m é um monômio.Usaremos indução no grau k de m. se $k = 1$, então $m_e = U_e$ ou $m_e = V_e$, temos que $\varphi(U_e) = \sigma(U_e) = U_f$ e $\varphi(V_e) = \tau(V_e) = V_f$.

Suponhamos que o resultado seja válido para todo monômio de grau $\leqslant k$, seja m um monômio de grau $k+1$, então $m = m'm''$ onde m' e m'' são monômios de grau $\leqslant k$. Segue da Proposição 4.9 e da hipótese de indução que

$$\begin{aligned}\varphi\big(m'(U_e,V_e)m''(U_e,V_e)\big) &= \varphi\big(m'(U_e,V_e)\big)\varphi\big(m''(U_e,V_e)\big)\\ &= m'(U_f,V_f)m''(U_f,V_f).\end{aligned}$$

Portanto $\varphi(m(U_e, V_e)) = m(U_f, V_f)$. Agora seja $p = \sum_{i=1}^{n} m_i$ um polinômio, onde $m_i(i = 1, 2, ..., n)$ são monômios então,

$$\begin{aligned} \varphi\big(p\,(U_e, V_e)\big) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi\big(m_i\,(U_e, V_e)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(U_f, V_f) \\ &= p\,(U_f, V_f)\,. \end{aligned}$$

■

Finalmente, apresentamos alguns resultados para a invariância de polinômios. Primeiro, observamos que em qualquer álgebra satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$ com $\lambda(A^2) \neq 0$ tal que $V_e^2 = Ke$ não podemos conseguir um resultado semelhante ao Corolário 3.5. Por exemplo, $X + Y$ é invariante, desde que $U_e \oplus V_e = N$, mas não é um ideal. Para polinômios da forma $p = g + h$ onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$. Mostraremos que p é invariante se, e somente se, $U_e p_e \subseteq p_e$. Para isto precisamos de um lema análogo ao Lema 3.5; este lema é verdadeiro para qualquer álgebra satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$.

Lema 4.2. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. X é um subespaço de U_e, e W é um subespaço de V_e. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $U_eX \subseteq W$ e $U_eW \subseteq X$;

(ii) Para todo $u \in U_e$, $x \in X$ e $w \in W$ existe $x' \in X$ e $w' \in W$ tal que $ux = \frac{1}{2}(w' - w)$ e $uw = \frac{1}{2}(x - x')$.

Demonstração.

Para mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$ é suficiente tomar $x' = x - 2uw$ e $w' = 2ux + w$. Esta claro que $(ii) \Rightarrow (i)$. ■

Teorema 4.2. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$ tal que $V_e^2 = Ke$. Então um polinômio da forma $p = g + h$ onde $g_e \subseteq U_e$ e $h_e \subseteq V_e$ é invariante se, e somente se, $U_e p_e \subseteq p_e$.*

Demonstração.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = K_f \oplus U_f \oplus V_f$ duas decomposições de Peirce quaisquer de A, relativas aos idempotentes de peso um e e f respectivamente. Seja $u \in U_e$ tal que $f = e + u + u^2$. Segue como na prova do
Teorema 2.1 que $p_f = \varphi(p_e)$. Como a invariância de p é equivalente a $p_e = \varphi(p_e) = p_f$ para

toda transformação de Peirce relativa a e e $u \in U_e$. Então

$$\begin{aligned} p_f &= \{\varphi(x+w)\,;\ x \in g_e,\, w \in h_e\} \\ &= \{(x-2uw)+(w+2ux)\,;\ x \in g_e,\, w \in h_e\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Então, para cada $u \in U_e$, $x \in g_e$ e $w \in h_e$, existe $x' \in g_e$ e $w' \in h_e$ tal que $ux = \frac{1}{2}(w'-w)$ e $uw = \frac{1}{2}(x-x')$. Como $U_eg_e \subseteq h_e$ e $U_eh_e \subseteq g_e$, segue que $U_ep_e \subseteq p_e$. Reciprocamente se $U_ep_e \subseteq p_e$, podemos reescrever (4.12) da seguinte forma

$$p_f = \{(x+w)+2u(x-w))\,;\ x \in g_e,\, w \in h_e\}$$

portanto $p_f \subseteq p_e + U_ep_e$, agora usando hipótese temos que $p_f \subseteq p_e$. Como esta inclusão vale para qualquer par de idempotentes, segue-se que $p_e = p_f$. Assim p é invariante. ■

Proposição 4.10. *Seja A uma álgebra satisfazendo a identidade $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$. Se $U_e \neq \{0\}$, então $V^2 \neq \{0\}$ se, e somente se, existe $v \in V_e$ tal que $L_v : U_e \longrightarrow U_e$ definida por $L_v(u) = vu$ é um automorfismo de espaço vetorial. Então $U_eV_e = U_e$*

Demonstração.

Se $V_e^2 \neq 0$ então existe $v \in V_e$ tal que $v^2 = \beta e \neq 0$, onde $\beta \in K$. Como a dimensão de U_e é finita é suficiente provar que o operador linear L_v é injetor, se $L_v(u) = 0$, então $vu = 0$, usando (3.19) temos que $(vu)v = -\frac{1}{2}v^2u$, então $-\frac{1}{2}v^2u = -\frac{1}{2}\beta eu = -\frac{\beta}{4}u = 0$, como $\beta \neq 0$ então $u = 0$. Reciprocamente se L_v é um automorfismo para todo $u \neq 0$ temos que $L_v(u) \neq 0$, então $L_v(uv) \neq 0$ ou $(vu)v = -\frac{1}{2}v^2u \neq 0$, portanto $v.^2 \neq 0$ ■

Lema 4.3. *Se $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra satisfazendo $x^3 = \lambda(x)x^2$, com $\lambda(A^2) \neq 0$ tal que $V_e^2 = Ke$. Então $V_eg_e = g_e$ para todo polinômio g tal que $g_e \subseteq U_e$.*

Demonstração.

É suficiente mostrar o lema para um monômio m tal que $m_e \subseteq U_e$ e, para isto, usaremos a indução sobre o ∂m. Se $\partial m = 1$, então $m = X$. Deste modo $V_eU_e = U_e$ pela Proposição 4.1. Suponha que $\partial m \geqslant 2$. Então $m = \mu\nu$ onde μ e ν são monômios tal que $\mu_e \subseteq U_e$ e $\nu_e \subseteq V_e$ com $\partial\mu$, $\partial\nu < \partial m$. Se $\nu = Y$, e $\partial m = 2$ então $m = XY$ onde $m_e = U_eV_e$, portanto o lema é verdadeiro, suponhamos que a afirmação seja válida para todo m tal que $\partial m \leqslant k$, seja m tal que $\partial m = k+1$, então $V_e(\mu_e\nu_e) = V_e\mu_e = m_e$. Pela hipótese de indução. Suponha agora que $\nu = \mu'\mu''$ onde μ' e μ'' são monômios, μ'_e, $\mu''_e \subseteq U_e$. Temos que $V_e(\mu_e(\mu'_e\mu''_e))$é gerado por elementos da forma $v(u(u_1u_2))$, onde $v \in V_e$, $u \in \mu_e$, $u_1 \in \mu'_e$ e $u_2 \in \mu''_e$. Agora segue de (3.19) e (4.6) que $v(u(u_1u_2)) = -(u_1u_2)(uv)$. Deste modo $V_e(\mu_e\nu_e) = \nu_e(V_e\mu_e) = m_e$ por hipótese de indução novamente. ■

Se p é um polinômio, denotamos por $o(p)$ o grau do monômio de menor grau na expressão $p = \sum_{i=1}^{r} m_i$

Lema 4.4. *Seja* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ *uma álgebra satisfazendo* $x^3 = \lambda(x)x^2$, *com* $\lambda(A^2) \neq 0$ *tal que* $V_e^2 = Ke$, *e* p *um polinômio da forma* $p = g + h$ *onde* $g_e \subseteq U_e$ *e* $h_e \subseteq V_e$. *Se* $U_e p_e \subseteq p_e$ *e* $o(h) \geqslant 2$, *então* p_e *é um ideal.*

Demonstração.

Temos que $ep_e = g_e \subseteq p_e$, e $U_e p_e \subseteq p_e$ por hipótese. Agora $o(h) \geqslant 2$ implica que $h_e \subseteq U_e^2$, então $V_e h_e \subseteq U_e^2 V_e = 0$. Deste modo $V_e p_e = V_e g_e = g_e \subseteq p_e$. ■

Corolário 4.1. *Seja* $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ *uma álgebra satisfazendo* $x^3 = \lambda(x)x^2$, *com* $\lambda(A^2) \neq 0$ *tal que* $V_e^2 = Ke$, *e* p *um polinômio da forma* $p = g + h$, *onde* $g_e \subseteq U_e$ *e* $h_e \subseteq V_e$. *Se* $o(h) \geqslant 2$, *então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) p *é invariante;*

(b) $U_e p_e \subseteq p_e$;

(c) p_e *é um ideal de* A.

Demonstração.

Que $(a) \Leftrightarrow (b)$ foi mostrado no Teorema 4.2. Que $(b) \Rightarrow (c)$ foi mostrado no Lema 4.4, por outro lado se p_e é um ideal, então $U_e p_e \subseteq p_e$, portanto $(c) \Rightarrow (b)$. ■

Considerações Finais

Estudamos a invariância de polinômios nas álgebras báricas comutativas é não necessariamente associativas que satisfazem as identidades

$$x^3 = (1+\gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x)^2 x \tag{4.13}$$
$$(x^2)^2 = \omega(x^2)x^2. \tag{4.14}$$

Vimos que nas álgebras que satisfazem (4.13) todos os polinômios tem dimensão invariante e que um polinômio p é invariante se, e somente se, $U_e p_e \subseteq p_e$. O mesmo resultado não é verdadeiro para todas as algebras que satisfazem (4.14), mas existe uma subclasse que satisfaz a condição $U^2V = 0$ e $(uv)v = 0$, onde se verifica o mesmo resultado.

Estudamos também as álgebras que satisfazem a identidade

$$x^3 = \lambda(x)x^2, \tag{4.15}$$

onde λ é apenas um funcional linear, tal estudo foi dividido em dois casos: $\lambda(A^2) = 0$ e $\lambda(A^2) \neq 0$, no primeiro caso não existe um idempotente não nulo, mas existe pelo menos um nilpotente z de índice 2 tal que $\lambda(z) = 1$, e a decomposição de Peirce é feita em relação a este nilpotente, no segundo caso existe pelo menos um idempotente e não nulo tal que $\lambda(e) = 1$, e a decomposição de Peirce é feita em relação a este idempotente, mas tanto no primeiro caso quanto no segundo temos que todos os polinômios são invariantes e conseguimos uma condição necessária e suficiente para a invariância de polinômios análoga a condição encontrada nas álgebras báricas citadas acima.

Referências Bibliográficas

[1] T. Cortés and F. Montaner. *On the structure of Bernstein algebras. J. London Math. Soc.,* 51(2):41-52, 1995.

[2] R. Costa and J. Picanço. *Invariance of demension of P-subspaces in Bernstein algebras.Comm. in Algebra,* 27(8):4039-4055, 1999.

[3] R. B. Gallardo. *Sobre T-álgebras de posto 3 e questões correlatas. PhD thesis.* Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1995.

[4] A. Labra. C. Mallol. A. Micali and R. Varro. *Sur les algèbres de Bernstein V; les algèbres de Bernstein Jordan faibles, Prodeedings of the Edinburgh Mathematical Society* 35:359-373, 1992.

[5] Y. Ljubich. *Mathematical Structures in Population Genetics, Biomathematics,* Springer 22, 1992.

[6] C.Mallol, and A. Walkhoff. *Sur le algèbres vérifiant* $x^3 = \lambda(x)x^2$. *Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra.* 4(2):169-184, 1996

[7] J. Picanço. *Subespaços Invariantes em Algumas Álgebras Báricas. PhD thesis.* Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1998.

[8] J. Picanço, N. Bezerra, I. Basso and R. Costa. *Invariance of Subspaces in Algebras Satisfying The Identity* $x^3 = \lambda(x)x^2$. *Nova Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra.* 14(1):73-82, 2004

[9] R. D Schafer. *An Introduction to Nonassociative Algebras.* Dover Publications.Inc.,New York, 1966.