



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Deiziane Mendes Wanzeler

DECAIMENTO EXPONENCIAL E ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÃO
DO SISTEMA TERMOELÁSTICO NÃO DISSIPATIVO

Orientador: Prof. Dr. Mauro De Lima Santos

Belém-PA
2008

Deiziane Mendes Wanzeler

**DECAIMENTO EXPONENCIAL E ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÃO
DO SISTEMA TERMOELÁSTICO NÃO DISSIPATIVO**

Dissertação apresentada ao corpo docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
e Estatística - UFPA, como requisito par-
cial para a obtenção do grau de Mestre em
Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-PA

2008

Deiziane Mendes Wanzeler

DECAIMENTO EXPONENCIAL E ANÁLISE NUMÉRICA DE SOLUÇÃO DO SISTEMA TERMOELÁSTICO NÃO DISSIPATIVO

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 06 junho de 2008

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA
Orientador

Prof. Dr. João Marcelo Brazão Protázio
Universidade Federal do Pará, UFPA-DCR
Examinador

Prof. Dr. Valcir João Da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará, UFPA-PPGME
Examinador

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto
Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ
Examinador

Agradecimentos

★ Agradeço a Deus, Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e força para chegar ao final deste trabalho;

★ Agradeço a minha mãe pela força e encorajamento para seguir em frente e a toda família;

★ Agradeço em especial a minha avó, que sempre me deu força e bons exemplos para seguir em frente;

★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro De Lima Santos, pela orientação, disponibilidade e atenção dispensados na elaboração deste trabalho;

★ Aos professores do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística;

★ Ao Prof. Dr. Valcir, pela orientação, paciência e tranquilidade num momento decisivo do desenvolvimento deste trabalho;

★ Aos meus amigos do coração: Carla, Ana Paula, Silvia, Renato, sem esquecer a mais nova integrante Paula Cristina;

★ À todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

Ao futuro: Weverson Wanzeler

Resumo

Neste trabalho vamos mostrar a existência e regularidade de soluções, o decaimento exponencial e a solução numérica do seguinte sistema termoelástico hiperbólico definido em um domínio não cilíndrico ($\hat{Q}$) com convenientes hipóteses sobre k e γ :

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \beta\theta_x &= 0 & \text{em } \hat{Q}, \\ \theta_t - k * \theta_{xx} - \eta\theta_{xx} + \mu u_{xt} &= 0 & \text{em } \hat{Q}. \end{aligned}$$

Com as condições de fronteira

$$u(0, t) = u(\gamma(t), t) = 0; \quad k * \theta(0, t) = k * \theta(\gamma(t), t) = 0 \quad (0 < t < T).$$

e as condições iniciais

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{em }]0, \gamma(0)[.$$

A existência será desenvolvida usando o Método de Galerkin no problema aproximado definido em um domínio cilíndrico (Q). A unicidade é desenvolvida usando o Método da Energia. O decaimento exponencial do sistema tem uma série de dificuldades, uma delas é que não podemos trabalhar diretamente com o sistema, daí a necessidade de se obter um sistema aproximado, vamos mostrar que a energia associada a este sistema é limitada. A solução numérica do problema se faz aplicando o Método dos Elementos Finitos em combinação com o método das diferenças finitas.

Abstract

In this paper we study the hyperbolic thermoelastic system in a domain with moving boundary, which obtained when instead of the Fourier's Law for the heat flux relation, we follow the linearized model proposed by Coleman and Gurtin [21] about the memory theory of heat conduction. We show existence and uniqueness and exponential decay rate of global regular solutions. The numeric analysis of solution was also considered.

SUMÁRIO

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Espaços De Bannach	4
1.1.1 O Espaço Dual	4
1.2 Os Espaços $L^P(\Omega)$	5
1.3 Outros Resultados	7
1.4 Teoria das Distribuições Escalares	7
1.4.1 Espaços das funções Testes	7
1.4.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	8
1.4.3 Distribuições Escalares	10
1.4.4 Convergência e Derivada Distribucional	12
1.5 Espaços de Sobolev	13
1.5.1 O espaço $H^m(\Omega)$	13
2 Existência e Unicidade de Solução Global	18
2.1 Estimativa a Priori I	23
2.2 Estimativa a Priori II	25
3 Decaimento Exponencial	29
4 Análise Numérica Da Solução	40
4.1 Aproximação Por Elementos Finitos	40
4.1.1 Aproximação Via Galerkin	40
4.2 Método Das Diferenças Finitas	44
4.3 Sistema Desacoplado	47
4.4 Discretização Da Energia Do Sistema	48
4.5 Resultados Numéricos	48
BIBLIOGRAFIA	52

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência e regularidade de soluções globais do sistema termoelástico hiperbólico em um domínio não-cilíndrico. Na Teoria clássica Linear de termoelasticidade, a Lei de Fourier é usada para descrever a condução de calor num corpo. Esta Teoria tem duas deficiências principais. Primeira, não é possível descrever tal conduta para efeitos de memória que podem prevalecer em alguns materiais, particularmente a baixas temperaturas. Segunda, a parte parabólica correspondente ao sistema prediz um resultado irreal; que uma perturbação térmica em um ponto é instantaneamente sentida em todo o corpo. Estas observações levam a acreditar que para materiais com memória, a Lei de Fourier não é um bom modelo e temos que olhar outra Lei constitutiva mais geral. Sendo assim, seguiremos neste trabalho o modelo linearizado introduzido por Coleman e Gurtin [21]. Nosso objetivo é estudar a existência, unicidade de solução, comportamento assintótico e a análise numérica da solução do seguinte sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \beta\theta_x &= 0 & \text{em } \hat{Q} \\ \theta_t - k * \theta_{xx} - \eta\theta_{xx} + \mu u_{xt} &= 0 & \text{em } \hat{Q} \end{aligned}$$

onde $\hat{Q}$ é um domínio não-cilíndrico.

Faremos uma breve descrição de alguns resultados importantes. Quando $k = 0$ e $\eta = 1$, temos o pioneiro trabalho de Dafermos [1]. Ele mostrou que a solução do sistema termoelástico linear se estabiliza sem taxa de decaimento. Posteriormente significativos progressos sobre o aspecto linear e não linear do sistema termoelástico foram obtidos; Veja [2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,14,15,16], onde os autores obtêm a existência, unicidade e estabilidade exponencial de solução. Relacionado ao objetivo deste trabalho, no caso $\eta = 0$, temos o trabalho de Fatori e Rivera [10] que mostra a

estabilidade exponencial do sistema termoelástico linear com memória em domínio fixo. Em um domínio com fronteira móvel o problema (2.1)-(2.2) e (2.4)-(2.5) não foi considerado na literatura. Sendo assim estudaremos tal problema.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No primeiro capítulo fizemos uma introdução preliminar de alguns resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. No segundo, temos a existência e unicidade de solução global. No terceiro, o estudo do comportamento assintótico e no quarto temos a análise numérica da solução do sistema.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Espaços De Bannach

Um espaço normado E é dito um Espaço de Bannach, se o mesmo é completo, isto é, se toda seqüência de Cauchy converge em E .

1.1.1 O Espaço Dual

Definição 1.1.1. Denotamos por E' o conjunto das funções $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é :

$E' = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é linear e contínua}\}$. O conjunto E' é chamado o dual de E .

Proposição 1.1.1. Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, ela é limitada.

Demonstração :

Pela continuidade de f teremos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$$

Isso significa que para cada $y \in E$, $\frac{\delta}{\|y\|}y$ satisfaz a condição: $\|\frac{\delta}{\|y\|}y\| \leq \delta$, logo,

$\left|f\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right| < \epsilon \Rightarrow |f(y)| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|$, assim concluímos que f é limitada.

Reciprocamente, suponhamos que f seja limitada, vamos mostrar que f deve ser contínua. Da limitação de f existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se :

$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Então, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ e sabendo que f é limitada, então segue a sua continuidade.

1.2 Os Espaços $L^P(\Omega)$

Vejamos alguns resultados importantes para o que se segue.

Definição 1.2.1. *Seja $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, definimos:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Considerando agora $p = \infty$, tem-se:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists c \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Definimos também as normas : $\| \cdot \|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, para $p = \infty$, dadas respectivamente por:

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{c : f(x) \leq c \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Lema 1.2.1. *(A Desigualdade De Young) Se $1 < p < \infty$ e a, b são números reais não negativos então:*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

a igualdade só ocorre quando $a^p = b^q$.

Demonstração: Se $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda \Rightarrow \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ e se $\lambda - 1 < 0$ temos que:

1) $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1$

2) $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$

Logo, para $t \neq 1$, temos $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, onde $(1 - \lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$.

Se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por $\frac{a^p}{b^q}$. Por outro lado, se $b = 0$, o Lema é imediato.

Lema 1.2.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 < p < \infty$. Então $f, g \in L^1(\Omega)$ e :*

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração:

Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem de modo imediato. Com $1 < p < \infty$ segue que

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q,$$

por Young.

Assim, temos

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q$$

temos que $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

Substituindo f por λf , $\lambda > 0$ segue que

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima, para $\lambda \in (0, \infty)$ temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{q/p}$ e o resultado segue.

Teorema 1.2.1. (Da Convergência Dominada De Lebesgue) Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X . Suponha que:

- 1) $(f_n)_n$ converge quase sempre para uma função real, mensurável, f .
- 2) Existe uma função integrável g , tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então, $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

Demonstração : ver [17]

Definição 1.2.2. Seja H um Espaço de Hilbert. Chama-se base hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que:

- 1) $(\omega_n) = 1 \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0, \forall n, m \neq n$;
- 2) O espaço gerado pela (ω_n) é denso em H .

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.2.1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência

em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência de (u_k) , ainda denotada por (u_k) , tal que:

- 1) $u_k(x) \rightarrow u(x)$, quase sempre em Ω ;
- 2) $|u_k(x)| \leq h(x)$, quase sempre em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: ver [17]

1.3 Outros Resultados

Definição 1.3.1. (Convergência Fraca) Sejam E um espaço de Bannach e $(u_v)_{v \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então $u_v \rightarrow u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_v \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall \varphi \in E'$.

Proposição 1.3.1. Seja E um Espaço de Bannach e x_n uma sucessão em E . Se verifica:

- 1) $[x_n \rightarrow x \text{ em } \sigma(E, E')][\langle f, X_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E']$.
- 2) Se $x_n \rightarrow x$ fortemente, então $x_n \rightarrow x$ fracamente para $\sigma(E, E')$.
- 3) Se $x_n \rightarrow x$ fracamente para $\sigma(E, E')$ e se $f_n \rightarrow f$ fortemente em E' , então $\langle f_n, X_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: ver [17]

1.4 Teoria das Distribuições Escalares

1.4.1 Espaços das funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Denotamos suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $\text{supp}(\varphi)$. Simbolicamente, temos que:

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição acima concluímos que o $\text{supp}(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual (φ) se anula e valem as seguintes relações:

- 1) $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$,
- 2) $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$,
- 3) $\text{supp}(\lambda\varphi) = \text{supp}(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto contido em Ω que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω . Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Observação 1.4.1. Por um multi-índice, entendemos, uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

1.4.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ juntamente com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $D(\Omega)$ e é denominado espaço de funções testes.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, o espaço das funções reais $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω . O espaço $L^p(\Omega)$ é um Espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o Espaço de Bannach de todas as funções reais essencialmente limitadas com a norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.4.2. Sendo Ω limitado, obtemos $D(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, para todo p , tal que $1 \leq p < \infty$ com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in D(\Omega)$ temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $D(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0$$

Para a demonstração de que a imersão anterior é densa veja [18].

1.4.3 Distribuições Escalares

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $D(\Omega)$, isto é, uma função $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in D(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $D(\Omega)$, então

$$T(\varphi_v) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Considere no espaço vetorial das distribuições escalares a seguinte noção de convergência:

A sucessão $(T_v)_{v \in \mathbb{N}}$ converge para T quando a sucessão $(\langle T_v, \varphi \rangle)_{v \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.

O espaço das distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.4.1. Temos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \iff \int_K |u(x)| dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável

u'' e usando o Lema Du Bois Raymond temos que T_u é univocamente determinada por u no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $D'(\Omega)$.

Denotamos por $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a restrição de u a qualquer compacto k de $\mathbb{R}$ é integrável a Lebesgue em k . Seja $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Denomina-se convolução de u com φ à função $u * \varphi$ definida em $\mathbb{R}$ por:

$$(u * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x - y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} u(y) \varphi(x - y) dy.$$

Segue-se que $u * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e se u possui suporte compacto, então $u * \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Lema 1.4.1. (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Demonstração: Considerando o intervalo aberto finito $]a, b[$ fixo. Sabe-se que $C_0^\infty(a, b)$ é denso em $L^1(a, b)$. Conseqüentemente, se $u \in L^1_{loc}(a, b)$, então, para cada $\epsilon > 0$ existe $v \in C_0^\infty(a, b)$ tal que:

$$\int_a^b |u - v| dx \leq \epsilon.$$

Da hipótese do Lema e desta última desigualdade, resulta:

$$\left| \int_a^b v \varphi dx \right| = \left| \int_a^b (v \varphi - u \varphi) dx \right| \leq \epsilon \max |\varphi|, \quad (1.1)$$

para toda $\varphi \in (a, b)$.

Considere-se os conjuntos:

$$k_1 = \{x \in]a, b[; v(x) \geq \epsilon\}; \quad k_2 = \{x \in]a, b[; v(x) \leq -\epsilon\},$$

$$\varphi_1 = 1 \quad \text{em} \quad k_1, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{em} \quad k_2, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 1$$

$$\varphi_2 = 1 \quad \text{em} \quad k_2, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{em} \quad k_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 1$$

Considerando-se $\Psi = \varphi_1 - \varphi_2$, obtem-se:

$$\Psi = 1 \quad \text{em} \quad k_1, \quad \Psi = -1 \quad \text{em} \quad k_2, \quad 0 \leq \Psi \leq +1$$

Resulta, portanto,

$$\int_a^b v \Psi dx = \int_{]a, b[-K} v \Psi dx + \int_K v \Psi dx,$$

onde $K \cup K_1 \cup K_2$. Observando-se que $|v| \leq \epsilon$ em $]a, b[-K$, a (1.1) implica:

$$\left| \int_K v \Psi dx \right| \leq \left| \int_a^b v \Psi dx \right| + \left| \int_{]a, b[-K} v \Psi dx \right| \leq \epsilon + (b-a)\epsilon.$$

Da definição de Ψ e desta última desigualdade, obtém-se:

$$\int_K |v| dx = \int_K v \Psi dx \leq \epsilon + (b-a)\epsilon.$$

Portanto,

$$\int_a^b |u| dx < \int_a^b |u - v| dx + \int_K |v| dx + \int_{]a, b[-K} |v| dx \leq 2\epsilon + 2(b-a)\epsilon.$$

Fazendo-se ϵ tender para zero conclui-se que $u = 0$ quase sempre em $]a, b[$. Sendo $]a, b[$ arbitrário, resulta a demonstração do Lema.

1.4.4 Convergência e Derivada Distribucional

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : D'(\Omega) \rightarrow D'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $D'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \quad \text{em} \quad D'(\Omega) \quad \text{então} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \quad \text{em} \quad D'(\Omega).$$

1.5 Espaços de Sobolev

Nesta seção mostraremos uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Tal classe é conhecida como Espaços de Sobolev.

1.5.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $D^\alpha u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados Espaços de Sobolev.

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para os quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo mult-índice α com $|\alpha| \leq m$. Em símbolos temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um Espaço de Bannach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O Traço em $H^1(\Omega)$

$D(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi|_{\overline{\Omega}}; \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω . Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_v)_{v \in \mathbb{N}}$ em $D(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_v \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma},$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0 denominado o operador traço é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_\Gamma = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,p}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,p}(\Omega)$, então $\varphi|_{D(\Omega)} \in D'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$ cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.5.1. *Seja $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Demonstração : Ver [19]

Lema 1.5.1. *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção.*

Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > \epsilon$ tal que

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Dmonstração: Ver [18]

Lema 1.5.2. *(Lema de Gronwall) Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas,*

$\alpha \geq 0$. Se

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t \psi(s)ds \right], \quad \forall t \in [a, b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração:

Fazendo $Z(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds$, da hipótese segue que $\varphi(t) \leq Z(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, temos que $Z'(t) = \varphi(t)\psi(t)$. Logo, $Z'(t) \leq Z(t)\psi(t)$, de onde segue:

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} \leq \psi(t)$$

Integrando a última desigualdade de a até t , segue:

$$\int_a^t \frac{Z'(s)}{Z(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s) ds$$

Daí,

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(Z(s)) ds \leq \int_a^t \psi(s) ds$$

Portanto,

$$\ln \frac{Z(t)}{Z(a)} \leq \int_a^t \psi(s) ds, \text{ ou seja,}$$

$$Z(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \psi(s) ds \right), \quad t \in [a, b]$$

De tal desigualdade e de $\varphi(t) \leq Z(t)$, temos o Lema.

Definição 1.5.1. Dizemos que uma função $b \in L^1[0, \infty[$ é positiva definida quando

$$\int_0^T \omega(t) \int_0^t b(t-\tau)\omega(\tau)d\tau dt \geq 0, \quad (1.2)$$

para todo $\omega \in C([0, \infty[)$ e $T > 0$. Dizemos que b é fortemente positiva definida se existir $\epsilon > 0$ tal que a função $t \rightarrow b(t) - \epsilon^{-t}$ é positiva definida.

Observação 1.5.1. Toda função fortemente positiva definida é positiva definida.

Lema 1.5.3. Se $b \in L^1(0, \infty)$. Então b é fortemente positiva definida se e somente se existir uma constante positiva ϵ tal que

$$\operatorname{Re} \hat{b}(i\lambda) \geq \frac{\epsilon}{\lambda^2 + 1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

onde $\hat{b}$ é a transformada de Laplace de b .

Demonstração: ver[12]

Lema 1.5.4. *Suponhamos que $k \in L^1(\mathbb{R}_+)$ é uma função fortemente positiva definida satisfazendo $k' \in L^1(\mathbb{R}_+)$, então*

$$\int_0^t |k * y(\tau)|^2 d\tau \leq \beta_0 K \int_0^t k * y(\tau) y(\tau) d\tau$$

para todo $y \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ onde $K = \|k\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2 + 4\|k'\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}^2$ e $\beta_0 > 0$ é tal que a função $k(t) - \beta_0 e^{-t}$ é uma função positiva definida.

Demonstração: ver[12]

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Global

O objetivo principal deste capítulo é estudar a Existência e Unicidade de solução global do seguinte sistema termoelástico com memória:

$$u_{tt} - u_{xx} + \beta\theta x = 0 \quad \text{em } \hat{Q} \quad (2.1)$$

$$\theta_t - k * \theta_{xx} - \eta\theta_{xx} + \mu u_{xt} = 0 \quad \text{em } \hat{Q} \quad (2.2)$$

onde $\hat{Q}$ é um domínio não-cilíndrico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\hat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, \ 0 < x < \gamma(t), \ 0 < t < T\} = \bigcup_{0 < t < T}]0, \gamma(t)[\times \{t\}, \quad (2.3)$$

$\gamma(\cdot)$ é uma função positiva e η é uma constante suficientemente pequena. A fronteira lateral $\hat{\Sigma}$ de $\hat{Q}$ é dada por

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{0 < t < T} (\{0\} \times \{t\}) \cup (\{\gamma(t)\} \times \{t\}).$$

Além disso, a solução satisfaz a condição de fronteira

$$u(0, t) = u(\gamma(t), t) = 0; \quad k * \theta(0, t) = k * \theta(\gamma(t), t) = 0 \quad (0 < t < T) \quad (2.4)$$

e as condições iniciais

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{em }]0, \gamma(0)[. \quad (2.5)$$

Note que as condições de fronteira (2.4) implicam na condição de fronteira de Dirichlet para $\theta \in H^1(I_t)$, onde $I_t =]0, \gamma(t)[$. Assumiremos que

$$\theta(x, t) = 0 \quad \forall t < 0^-.$$

Finalmente, denotaremos por k uma função $C^1(0, \infty)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- k é uma função fortemente positiva definida;
- k e k' decaem exponencialmente para zero; isto é, existem constantes C_i e p_i ($i = 1, 2$) tal que

$$|k(t)| \leq C_1 e^{-p_1 t}, \quad |k'(t)| \leq C_2 e^{-p_2 t}.$$

De (2.1)-(2.2), temos:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} (k * \theta_x) \theta_x dx - \eta \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} |\theta_x|^2 dx, \quad (2.6)$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{I_t} (|u_t|^2 + |u_x|^2 + \frac{\beta}{\mu} |\theta|^2) dx,$$

é a energia do sistema. Note que do fato de k ser uma função fortemente positiva definida não implica que (2.6) seja negativa, veja observação abaixo.

Observação 2.0.2. Considerando a função $k(t) = e^{-t} \cos t$ e $\omega(t) = e^{-2t}$. Temos que k satisfaz as hipóteses do Lema (1.5.3), então k é fortemente positiva definida; isto é, satisfaz (1.2). Além disso temos

$$k * \omega = \int_0^t e^{-s} \cos s e^{-2(t-s)} ds$$

e

$$\begin{aligned} R(t) &= (k * \omega)(t) \cdot \omega(t) = \left[\frac{e^{-t}}{2} (\cos t + \sin t) \frac{e^{-2t}}{2} \right] e^{-2t} \\ &= \frac{e^{-4t}}{2} [e^t (\cos t + \sin t) - 1]. \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, segue que $R(t) > 0$, e escolhendo $t = \frac{-\pi}{2} + 2n\pi$, temos

$R(t) < 0$. Portanto, $R(t)$ é não positiva. Mas $\int_0^T R(t)dt > 0$, para todo $T > 0$. Portanto, o sistema (2.1)- (2.2) e (2.4)-(2.5) é do tipo não dissipativo.

Mostraremos a existência e unicidade de solução do nosso problema em um domínio cilíndrico $Q =]0, 1[\times]0, T[$ ($T > 0$), que é relacionado com $\hat{Q}$ (ver(2.3)) pelo difeomorfismo $\tau : \hat{Q} \rightarrow Q$ definido por

$$\tau(x, t) = (y, t) = (x\gamma^{-1}(t), t) \quad \text{para } (x, t) \in \hat{Q}. \quad (2.7)$$

Definimos:

$$\begin{aligned} \psi(y, t) &= u \circ \tau^{-1}(y, t) = u(\gamma(t)y, t) \\ \varphi(y, t) &= \theta \circ \tau^{-1}(y, t) = \theta(\gamma(t)y, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Denotaremos por Dw a derivada parcial da função w em relação a y .

Temos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \psi(y, t), \\ u_x(x, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= \gamma^{-1} \psi_y(y, t), \\ u_{xx}(x, t) &= \gamma^{-2} \psi_{yy}, \\ u_t(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \psi_y \left(-y \frac{\gamma'}{\gamma} \right) + \psi_t, \\ u_{tx} &= \frac{d}{dt} \left(\gamma^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, t) \right) \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\gamma'}{\gamma^2} y - \frac{\gamma'}{\gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= \frac{d}{dt} \left[-y \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = \left(-y \frac{\gamma'}{\gamma} \right)' \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(-y \frac{\gamma'}{\gamma} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)' + \frac{\partial \psi'}{\partial t} \\ &= \left(y \frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2y \frac{\gamma'}{\gamma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{\gamma'' \gamma}{\gamma^2} y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Das considerações acima, obtemos o problema transformado,

$$\psi_{tt} - D(a_1 D\psi) + a_2 D\psi_t + a_3 D\psi + \beta\gamma^{-1} D\varphi = 0 \quad \text{em } Q, \quad (2.9)$$

$$\varphi_t - \gamma^{-2} k * D^2\varphi - \eta\gamma^{-2} D^2\varphi + \frac{a_2}{2} D\varphi + \mu\gamma^{-1} D\psi_t + b_2 D\psi + b_1 D^2\psi = 0 \quad \text{em } Q \quad (2.10)$$

$$\psi(0, t) = \psi(1, t) = k * \varphi(0, t) = k * \varphi(1, t) = 0 \quad \text{em } , \forall t > 0, \quad (2.11)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0; \psi_t|_{t=0} = \psi_1; \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \quad \text{em }]0, 1[, \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1(y, t) &= \frac{1 - (\gamma' y)^2}{\gamma^2}, \\ a_2(y, t) &= -2 \frac{\gamma'}{\gamma} y, \\ a_3(y, t) &= -\frac{\gamma'' \gamma}{\gamma^2} y, \\ b_1(y, t) &= -\mu \frac{\gamma'}{\gamma^2} y, \\ b_2(t) &= -\mu \frac{\gamma'}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

Considere

$$a(t, v, w) = \int_0^1 a_1(t, y) Dv Dw dy \quad (2.13)$$

e suponhamos que

$$\gamma \in W^{3,\infty}(0, \infty), \text{ess} \inf_{0 \leq t < \infty} \gamma(t) \geq \gamma_0 > 0, \quad (2.14)$$

$$\gamma' \in W^{1,2}(0, \infty), \text{ess} \inf_{0 \leq t < \infty} \gamma'(t) \geq \gamma_1 > 0. \quad (2.15)$$

Exemplo 2.0.1. Como exemplo de uma função satisfazendo (2.14) e (2.15), temos:

$$\gamma(t) = e^{-\alpha \frac{1}{t}} + \frac{1}{\alpha_0}, \quad \text{onde } \alpha_0 > 0$$

De (2.15), temos que $\hat{Q}$ cresce no sentido que $t_1 > t_2$, então a projeção de $[0, \gamma(t_1)]$ sobre o espaço $t = 0$ contém a projeção $[0, \gamma(t_2)]$ sobre o mesmo espaço.

Assumindo que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |\gamma'(t)| < \sqrt{1 - \lambda \|\gamma\|_{L^\infty}^2}, \quad (0 < \lambda < \|\gamma\|_{L^\infty}^{-2}). \quad (2.16)$$

Segue que

$$a_1(y, t) \geq \lambda > 0, \quad \forall (y, t) \in Q, \quad (2.17)$$

onde λ é uma constante positiva independente de y e t .

Teorema 2.0.2. *Sejam $T > 0$, $\psi_0 \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$, $\psi_1 \in H_0^1(0, 1)$ e $\varphi_0 \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$. Se (2.5)-(2.8) são válidas, então existe uma única solução regular para o sistema (2.9)-(2.12) tal que*

$$\begin{cases} \psi \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), & \psi_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(0, 1)) \\ \psi_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)), \\ \varphi \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \\ \varphi_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(0, 1)). \end{cases} \quad (2.18)$$

Demonstração: Seja A o operador denotado por

$$Aw = -w_{ww}, \quad D(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1).$$

Sendo A um operador auto-adjunto positivo no espaço de Hilbert $L^2(0, 1)$, considere $\{w_n\}$ um conjunto ortonormal completo de $H_0^1(0, 1)$, formado por auto-funções do operador A com correspondentes auto-valores $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$. Denotaremos por

$$\begin{aligned} \psi_0^{(m)} &= \sum_{i=1}^m (\psi_0, w_i) w_i, \\ \psi_1^{(m)} &= \sum_{i=1}^m (\psi_1, w_i) w_i, \\ \varphi_0^{(m)} &= \sum_{i=1}^m (\varphi_0, w_i) w_i. \end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja V_m o subespaço gerado por $w_1, w_2, \dots, w_m$. Do Teorema de Picard segue que existe uma única solução local $(\psi^{(m)}, \varphi^{(m)})$ sob a forma:

$$\begin{cases} \psi^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^m g_{in}(t) w_i \\ \varphi^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^m h_{in}(t) w_i \end{cases}$$

do problema aproximado

$$\begin{aligned}
& (\psi_{tt}^{(m)}, w_i) + a(t, \psi^{(m)}, w_i) + (a_2 D\psi_t^{(m)}, w_i) + (a_3 D\psi^{(m)}, w_i) \\
& + \beta \gamma^{-1} (D\varphi^{(m)}, w_i) = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& (\varphi_t^{(m)}, w_i) - \gamma^{-2} (k * D^2 \varphi^{(m)}, w_i) - \eta \gamma^{-2} (D^2 \varphi^{(m)}, w_i) + \frac{1}{2} (a_2 \varphi^{(n)}, w_i) \\
& + \mu \gamma^{-1} (D\psi_t^{(m)}, w_i) + (b_2 D\psi^{(m)}, w_i) + (b_1 D^2 \psi^{(m)}, w_i) = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\psi^{(m)}(x, 0) &= \psi_0^{(m)} \rightarrow \psi_0 \quad em \quad D(A) \\
\psi_t^{(m)}(x, 0) &= \psi_1^{(m)} \rightarrow \psi_1 \quad em \quad H_0^1(0, 1) \\
\varphi^{(m)}(x, 0) &= \varphi_0^{(m)} \rightarrow \varphi_0 \quad em \quad D(A)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A extensão destas soluções para o intervalo $[0, T], 0 < T < \infty$, é consequência da estimativa abaixo:

2.1 Estimativa a Priori I

Multiplicando a equação (2.19) e (2.20) por $g'_{im}(t)$ e $\frac{\beta}{\mu} h_{im}(t)$ respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
& (\psi_{tt}^{(m)}, \psi_t^{(m)}) + a(t, \psi^{(m)}, \psi_t^{(m)}) + (a_2 D\psi_t^{(m)}, \psi_t^{(m)}) + (a_3 D\psi^{(m)}, \psi_t^{(m)}) \\
& + \beta \gamma^{-1} (D\varphi^{(m)}, \psi_t^{(m)}) = 0 \\
& \frac{\beta}{\mu} (\varphi_t^{(m)}, \varphi^{(m)}) - \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} (k * D^2 \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)}) - \frac{\beta}{\mu} \eta \gamma^{-2} (D^2 \varphi^{(m)}, \varphi^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} (a_2 D\varphi^{(m)}, \varphi^{(m)}) \\
& + \frac{\beta}{\mu} \mu \gamma^{-1} (D\psi_t^{(m)}, \varphi^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} (b_2 D\psi^{(m)}, \varphi^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} (b_1 D^2 \psi^{(m)}, \varphi^{(m)}) = 0
\end{aligned}$$

Observando que

$$a(t, \psi, \psi_t) = \int_0^1 a_1(y, t) D\psi D\psi_t dy,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 a_1(y, t) D\psi D\psi_t dy &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 a_1(y, t) D\psi D\psi dy - \frac{1}{2} \int_0^1 a'_1(y, t) D\psi D\psi dy \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, \psi, \psi) - \frac{1}{2} \int_0^1 a'_1(y, t) D\psi D\psi dy.
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, \psi, \psi) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu} \frac{d}{dt} \|\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{\mu} \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 a'_1(t, y) D\psi D\psi dy - (a_2 D\psi_t, \psi_t) - (a_3 D\psi, \psi_t) - \beta \gamma^{-1} (D\varphi, \psi_t) \\ & - \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} \int_0^1 (k * D\varphi(y)) D\varphi(y) dy - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\mu} (a_2 D\varphi, \varphi) - \frac{\beta}{\mu} \mu \gamma^{-1} (D\psi_t, \varphi) - \frac{\beta}{\mu} (b_2 D\psi, \varphi) - \frac{\beta}{\mu} (b_1 D^2\psi, \varphi). \end{aligned}$$

De

$$-\beta \gamma^{-1} (D\varphi, \psi_t) - \beta \gamma^{-1} (D\psi_t, \varphi) = \beta \gamma^{-1} (D\varphi, \psi_t) + \beta \gamma^{-1} (D\psi_t, \varphi) = 0,$$

e

$$\int_0^1 (D\psi_t, \varphi) dx = \varphi \psi_t - \int_0^1 \psi_t D\varphi dx = - \int_0^1 \psi_t D\varphi dx = -(\psi_t, D\varphi).$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\psi_t\|_{L^2}^2 + a(t, \psi, \psi) + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi\|_{L^2}^2) + \frac{\beta}{\mu} \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{-2\gamma' \gamma'' y^2 \gamma^2 - 2\gamma \gamma' + 2(\gamma')^3 \gamma y^2}{\gamma^4} \right) |D\psi|^2 dy \\ & - \left[-2 \frac{\gamma'}{\gamma} y (D\psi_t, \psi_t) \right] - \left[-\frac{\gamma'' \gamma}{\gamma^2} y (D\psi, \psi_t) \right] - \beta \gamma^{-1} (D\varphi, \psi_t) + \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} \int_0^1 (k * D\varphi(y)) D\varphi(y) dy \\ & \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} \left[-\frac{2\gamma'}{\gamma} y (D\varphi, \varphi) \right] - \beta \gamma^{-1} (D\psi_t, \varphi) - \frac{\beta}{\mu} \left[-\mu \frac{\gamma'}{\gamma^2} y (D\psi, \varphi) \right] - \frac{\beta}{\mu} \left[-\frac{\mu \gamma'}{\gamma^2} y (D^2\psi, \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\psi_t\|_{L^2}^2 + a(t, \psi, \psi) + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi\|_{L^2}^2) + \frac{\beta}{\mu \gamma^2} \int_0^1 (k * D\varphi(y)) D\varphi(y) dy + \frac{\beta}{\mu} \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi(y)|^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{-2\gamma' \gamma'' y^2 \gamma^2 - 2\gamma \gamma' + 2(\gamma')^3 \gamma y^2}{\gamma^4} \right) |D\psi|^2 dy + \frac{2\gamma'}{\gamma} y (D\psi_t, \psi_t) + \frac{\gamma'' \gamma}{\gamma^2} y (D\psi, \psi_t) \\ & - \frac{\beta}{\mu} \frac{\gamma'}{\gamma} y (D\varphi, \varphi) + \frac{\beta \gamma'}{\gamma^2} y (D\psi, \varphi) - \frac{\beta \gamma'}{\gamma^2} y (D\psi, D\varphi). \end{aligned}$$

Da condição (2.14), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\psi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 + a(t, \psi^{(m)}, \psi^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi^{(m)}\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\beta}{\mu} \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi^{(m)}(y)|^2 dy \\ & + \frac{\beta}{\mu \gamma^2} \int_0^1 (k * D\varphi^{(m)}(y)) D\varphi^{(m)}(y) dy \leq (\|\gamma'\|_{L^1} + \|\gamma''\|_{L^1}) E_1^{(m)}(t), \end{aligned}$$

onde

$$E_1^{(m)}(t) = \|\psi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 + \|D\psi^{(m)}\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi^{(m)}\|_{L^2}^2.$$

Integrando a expressão acima em $[0, t]$, usando o fato de que k é fortemente positiva definida, o Lema (1.5.4) e o Lema de Gronwall concluimos que:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\psi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 + a(t, \psi^{(m)}, \psi^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi^{(m)}\|_{L^2}^2 \right) dt + \frac{\beta}{\mu \gamma^2} \int_0^t \int_0^1 (k * D\varphi^{(m)}(y)) D\varphi^{(m)}(y) dy dt \\ & + \frac{\beta}{\mu} \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^t \int_0^1 |D\varphi^{(m)}(y)|^2 dy dt \leq \int_0^t C(\|\gamma'\| + \|\gamma''\|) E_1^{(m)}(t) dt. \end{aligned}$$

Dai

$$E_1^{(m)}(t) + C_0 \int_0^t \int_0^1 (|k * D\varphi^{(m)}|^2 + |D\varphi^{(m)}(y)|^2) dy dt \leq M, \quad \forall m \in \mathbf{N} \text{ e } \forall t \in [0, T]. \quad (2.22)$$

2.2 Estimativa a Priori II

Derivando as equações (2.19) e (2.20) em t , multiplicando-as por $g_{im}''(t)$ e $\frac{\beta}{\mu} h_{im}'(t)$, respectivamente e somando seus produtos, teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi_{tt}^{(m)}\|_{L^2}^2 - 2 \int_0^1 \left(\frac{\gamma' \gamma''}{\gamma^2} \right) (D\psi^{(m)}, D\psi_{tt}^{(m)}) dy - \int_0^1 \left(\frac{(1 - \gamma'^2) 2\gamma'}{\gamma^3} \right) (D\psi^{(m)}, D\psi_{tt}^{(m)}) dy \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(t, \psi_t^{(m)}, \psi_t^{(m)}) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 a_1(y, t) D\psi_t^{(m)} D\psi_t^{(m)} dy - 2 \frac{\gamma'}{\gamma} (D\psi_t^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) \\ & + 2 \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 (D\psi_t^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) + a_2(D\psi_{tt}^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) - \frac{\gamma'''}{\gamma} (D\psi^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) + \frac{\gamma'' \gamma'}{\gamma^2} (D\psi^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) \\ & + a_3(D\psi_t^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) - \beta \gamma^{-2} (D\varphi^{(m)}, \psi_{tt}^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{\mu} 2\gamma^{-3} \int_0^1 k * D\varphi^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy \\ & - \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} D^2 \varphi^{(m)}(0) k(t) \varphi_t^{(m)} + \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} k(0) D^2 \varphi^{(m)}(t) \varphi_t^{(m)} - \frac{\beta}{\mu} \gamma^{-2} \int_0^1 k * D^2 \varphi_t^{(m)} \varphi_t^{(m)} dy \\ & - \frac{\beta}{\mu} \eta \gamma^{-3} \gamma' (D^2 \varphi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \eta \gamma^{-2} (D^2 \varphi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) - \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} \frac{\gamma''}{\gamma} (D\varphi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) \\ & + \frac{\beta}{\mu} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 (D\varphi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} (a_2 D\varphi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) - \beta \gamma^{-2} (D\psi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) - \beta \frac{\gamma''}{\gamma^2} (D\psi^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) \\ & - \beta \frac{2\gamma'}{\gamma^3} (D\psi^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu} (b D\psi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) - \beta \frac{\gamma''}{\gamma^2} (D^2 \psi^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) + \beta \frac{2\gamma'}{\gamma^3} (D^2 \psi^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) \\ & + \frac{\beta}{\mu} (b D^2 \psi_t^{(m)}, \varphi_t^{(m)}) = 0. \end{aligned}$$

Usando procedimento similar ao da primeira estimativa, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}(\|\psi_{tt}^{(m)}\|_{L^2}^2 + a(t, \psi_t^{(m)}, \psi_t^{(m)}) + \frac{\beta}{\mu}\|\varphi_t^{(m)}\|_{L^2}^2) + \frac{\eta}{\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi_t^{(m)}|^2 dy \\
& \leq C(\|\gamma'\|_{W^{1,2}}(E_1^{(m)}(t) + E_2^{(m)}(t))) + 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 k * D\varphi^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy \\
& \quad - \gamma^{-2}(t) \int_0^1 k * D\varphi_t^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy - \gamma^{-2}(t) \int_0^1 D\varphi^{(m)}(0) D\varphi_t^{(m)} dy + \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} \int_0^1 D\varphi^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
E_1^{(m)}(t) &= \|\psi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 + \|D\psi^{(m)}\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{\mu}\|\varphi^{(m)}\|_{L^2}^2. \\
E_2^{(m)}(t) &= \|\psi_{tt}^{(m)}\|_{L^2}^2 + \|D\psi_t^{(m)}\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{\mu}\|\varphi_t^{(m)}\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando o fato de k ser fortemente positiva definida e a desigualdade de Young, obtemos;

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}E_2^{(m)}(t) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \int_0^1 k * D\varphi_t^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy + \frac{\eta}{2\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi_t^{(m)}|^2 dy \leq C(\|\gamma'\|_{W^{1,2}}(E_1^{(m)}(t) + E_2^{(m)}(t))) \\
& + \frac{(2\gamma'(t))^2}{\eta\gamma^4(t)} \int_0^1 |k * D\varphi^{(m)}|^2 dy + \frac{4}{\eta\gamma^2(t)} \int_0^1 |D\varphi^{(m)}(0)|^2 dy + \frac{(\gamma'(t))^2}{\eta\gamma^4(t)} \int_0^1 |D\varphi^{(m)}|^2 dy.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ nas equações (2.19) e (2.20) multiplicando o resultado por $g_{im}''(0)$ e $h_{im}'(0)$, respectivamente, e somando em $i = 1, \dots, m$ obtemos:

$$\|\psi_{tt}^{(m)}(0)\|_{L^2}^2 + \|\varphi_t^{(m)}(0)\|_{L^2}^2 \leq M_1, \quad \forall m \in N; \forall t \in [0, T]. \tag{2.25}$$

Integrando a inequação (2.24) em t , considerando a primeira estimativa, o Lema de Gronwall e (2.25), obtemos:

$$E_2^{(m)}(t) + \int_0^t \int_0^1 k * D\varphi_t^{(m)} D\varphi_t^{(m)} dy ds + \int_0^t \int_0^1 |D\varphi_t^{(m)}|^2 dy ds \leq M_2, \quad \forall m \in N; \forall t \in [0, T]. \tag{2.26}$$

Das limitações acima, segue que:

$$\begin{aligned}
\psi^{(m)} &\rightharpoonup \psi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1)), \\
\varphi^{(m)} &\rightharpoonup \varphi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_t^{(m)} &\rightharpoonup \psi_t \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)), \\
\varphi_t^{(m)} &\rightharpoonup \varphi_t \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \\
\psi_{tt}^{(m)} &\rightharpoonup \psi_{tt} \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), \\
\varphi^{(m)} &\rightharpoonup \varphi \quad \text{fraco em } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\
k * \varphi^{(m)} &\longrightarrow \chi \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\
D\varphi^{(m)} &\rightharpoonup D\varphi \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
k * D\varphi^{(m)} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\
k * D\varphi_t^{(m)} &\text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(0, 1)), \\
\varphi^{(m)} &\rightharpoonup \varphi \quad \text{fraco em } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\
\varphi_t^{(m)} &\rightharpoonup \varphi_t \quad \text{fraco em } L^2(0, T; H_0^1(0, 1)), \\
\varphi^{(m)} &\rightharpoonup \varphi \quad \text{forte em } L^2(0, T; L^2(0, 1)).
\end{aligned}$$

Das hipóteses de k segue-se que

$$k * \varphi^{(m)} \longrightarrow k * \varphi \quad \text{forte em } L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

Usando distribuições concluimos que

$$\chi = k * \varphi.$$

Das convergências acima podemos passar o limite com $m \rightarrow \infty$ em (2.19) e (2.20).

O limite de (ψ, φ) satisfaz

$$\begin{cases} \psi \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), & \psi \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(0, 1)), \\ \psi_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)), \\ \varphi \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)), \\ k * \varphi \in L^2(0, \infty; L^2(0, 1)), \\ \varphi_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(0, 1)) \end{cases} \quad (2.27)$$

e obter (2.9)-(2.10).

Usando regularidade elíptica, concluimos que $\psi \in L^\infty(0, T; H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1))$, os dados iniciais seguem imediatamente a partir das convergências obtidas e a unicidade é obtida usando o Método da Energia, conforme Lions[19].

Teorema 2.2.1. *Seja $T > 0, I_t, 0 < t < T$, e I_0 os intervalos $]0, \gamma(t)[$ e $]0, \gamma(0)[$, respectivamente. Se $u_0, \theta_0 \in H_0^1(I_0) \cap H^2(I_0), u_1 \in H_0^1(I_0)$ e as hipóteses do Teorema (2.0.2) são válidas, então existe uma única solução regular (u, θ) do sistema (2.1)-(2.2) na classe (2.28).*

Demonstração: Seja (ψ, φ) a solução obtida pelo teorema (2.0.2) e (u, θ) definidos por $u = \psi \circ \tau, \theta = \varphi \circ \tau$ (ver (2.8) para τ), então por (2.27) u e θ pertencem a classe

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t)), & u_t \in L^\infty(0, \infty; H_0^1(I_t)), \\ u_{tt} \in L^\infty(0, \infty; L^2(I_t)), \\ \theta \in L^\infty(0, \infty; L^2(I_t)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(I_t) \cap H^2(I_t)), \\ \theta_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(I_t)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(I_t)) \end{cases} \quad (2.28)$$

e das equações (2.9)-(2.10) temos que (u, θ) satisfaz o sistema de equações (2.1)-(2.2) em $L^2(0, \infty; L^2(I_t))$. Seja $(u_1, \theta_1), (u_2, \theta_2)$ as soluções para (2.1)-(2.2), e $(\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2)$ as funções obtidas através do difeomorfismo τ dado por (2.8). Então $(\psi_1, \varphi_1), (\psi_2, \varphi_2)$ são as soluções para o sistema (2.9)-(2.10). A unicidade resulta do Teorema (2.0.2). Temos $(\psi_1, \varphi_1) = (\psi_2, \varphi_2), u_1 = u_2$ e $\theta_1 = \theta_2$.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Neste capítulo temos o estudo do decaimento exponencial da solução do problema (2.1)-(2.2) e (2.4)-(2.5) quando $t \rightarrow \infty$.

Para estudarmos o comportamento assintótico da solução com $t \rightarrow \infty$, consideramos a seguinte transformação.

$$v(x, t) = u(x, t)e^{\alpha t}, \quad \varphi(x, t) = \theta(x, t)e^{\alpha t}.$$

com as condições abaixo:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha u(x, t)e^{\alpha t}, \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + \alpha u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} + \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} - \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha u_t(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} - \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha(u_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha u(x, t)e^{\alpha t}) - \alpha^2 u(x, t)e^{\alpha t} \\ v_{tt}(x, t) &= u_{tt}(x, t)e^{\alpha t} + 2\alpha v_t(x, t) - \alpha^2 v(x, t), \end{aligned}$$

$$\varphi_t(x, t) = \theta_t(x, t)e^{\alpha t} + \alpha \theta(x, t)e^{\alpha t},$$

$$\varphi_x(x, t) = \theta_x(x, t)e^{\alpha t},$$

$$v_x(x, t) = u_x(x, t)e^{\alpha t},$$

$$v_{xx}(x, t) = u_{xx}(x, t)e^{\alpha t}.$$

Definindo

$$\widehat{k}(t) = e^{\alpha t} k(t) \Rightarrow \widehat{k} * \varphi_{xx} = e^{\alpha t} (k * \theta_{xx}).$$

Para mostrar o decaimento exponencial, usaremos o fato de que o Kernel (núcleo) de k decai exponencialmente, ou seja, $|k(t)| \leq ce^{-bt}$. Para α suficientemente pequeno, $0 < \alpha < \epsilon$ (ver (3.21) para ϵ), dessa forma, segue $|\widehat{k}(t)| \leq ce^{\xi t}$, onde $\xi = b - \alpha > 0$, assim, fazendo as devidas mudanças de variáveis, usando o par (v, φ) sobre o sistema (2.1) e (2.2). De (2.1) temos:

$$v_{tt} - 2\alpha v_t + \alpha^2 v - v_{xx} + \beta \varphi_x = 0,$$

$$v_{tt} - v_{xx} + \beta \varphi_x = 2\alpha v_t - \alpha^2 v.$$

e de (2.2) temos:

$$\varphi_t - \alpha \theta e^{\alpha t} - (k * \theta_{xx})e^{\alpha t} - \eta \varphi_{xx} e^{\alpha t} + \mu v_{xt} - \mu \alpha v_x = 0,$$

$$\varphi_t - \alpha \theta e^{\alpha t} - \widehat{k} * \varphi_{xx} - \eta \varphi_{xx} + \mu v_{xt} - \mu \alpha v_x = 0$$

$$\varphi_t - \alpha \varphi - \widehat{k} * \varphi_{xx} - \eta \varphi_{xx} + \mu v_{xt} - \mu \alpha v_x = 0$$

$$\varphi_t - \widehat{k} * \varphi_{xx} - \eta \varphi_{xx} + \mu v_{xt} = \alpha \varphi + \mu \alpha v_x = 0$$

Segue que o par (v, φ) satisfaz:

$$v_{tt} - v_{xx} + \beta \varphi_x = R, \tag{3.1}$$

$$\varphi_t - \widehat{k} * \varphi_{xx} - \eta \varphi_{xx} + \mu v_{xt} = S. \tag{3.2}$$

onde R e S são dados por:

$$R = 2\alpha v_t - \alpha^2 v,$$

$$S = \alpha v + \mu \alpha v_x.$$

onde v e φ satisfazendo as condições de fronteira e de valor inicial do sistema (2.1)-(2.2) e (2.4)-(2.5).

Definimos a energia associada a (3.1)-(3.2);

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_{I_t} (|v_t|^2 + |v_x|^2 + \frac{\beta}{\mu} |\varphi|^2) dx.$$

Mostrar o decaimento exponencial do acoplamento (u, θ) é o mesmo que mostrar que $\varepsilon(t)$ é limitada. Agora definindo que a função γ satisfaz as seguintes condições:

$$\max_{0 \leq t < \infty} |\gamma'(t)| \leq \epsilon, \quad \max_{0 \leq t < \infty} |\gamma''(t)| \leq \epsilon, \quad (3.3)$$

onde ϵ é um número positivo determinado convenientemente no decorrer do trabalho (ver (3.21)).

Teorema 3.0.2. *Sejam $T > 0$, I_t , $0 < t < T$, e I_0 os intervalos $]0, \gamma(t)[$ e $]0, \gamma(0)[$, respectivamente. Se $u_0, \theta_0 \in H_0^1(I_0) \cap H^2(I_0)$, $u_1 \in H_0^1(I_0)$, as hipóteses do Teorema 2.1 e (3.3) são válidas, então temos que*

$$E(t) \leq Ce^{-\varsigma t},$$

onde C e ς são constantes positivas.

Demonstração: Consideremos o produto interno em $L^2(I_t)$ de (3.1)-(3.2) por $(v_t + \gamma'(t)v_x)$ e φ , respectivamente.

Primeiramente, vejamos o produto de (3.1) por $(v_t + \gamma'(t)v_x)$:

$$v_{tt}v_t - v_{tt}\gamma'(t)v_x - v_{xx}v_t - v_{xx}\gamma'(t)v_x + \beta\varphi_x v_t + \beta\varphi_x \gamma'(t)v_x = Rv_t + R\gamma'(t)v_x.$$

Integrando a igualdade acima no intervalo I_t , sejam as integrais uma a uma:

$$1. \int_{I_t} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_t|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} |v_t|^2 - \frac{1}{2} |v_t(\gamma(t))|^2 + \frac{1}{2} |v_t(0)|^2.$$

$$2. v_{tt}\gamma'v_x$$

$$\begin{aligned} \int_{I_t} \gamma'(t) v_{tt} v_x dx &= \frac{d}{dt} \gamma'(t) \int_{I_t} v_t v_x dx - \gamma'(t) v_t(\gamma(t)) v_x(\gamma(t)) - \gamma''(t) \int_{I_t} v_t v_x dx \\ &\quad - \frac{\gamma'}{2} |v_t(\gamma(t))|^2 - \frac{\gamma'}{2} |v_t(0)|^2. \end{aligned}$$

$$3. v_{xx}v_t$$

$$- \int_{I_t} v_{xx} v_t dx = - \frac{d}{dx} \int_{I_t} (v_x v_t) dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} |v_x|^2 dx - \frac{1}{2} |v_x(\gamma(t))|^2 + \frac{1}{2} |v_x(0)|^2.$$

4. $-v_{xx}\gamma'v_x$

$$-\int_{I_t} \gamma'(t)v_{xx}v_x dx = \gamma'(t) \int_{I_t} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |v_x|^2 dx = -\frac{\gamma'}{2} |v_x(\gamma(t))|^2 + \frac{\gamma'}{2} |v_x(0)|^2.$$

5. $\beta \int_{I_t} v_t \varphi_x dx$.

6. $\beta \gamma' \int_{I_t} \varphi_x v_x dx$.

Vejamos o produto de (3.2) por φ e $\frac{\beta}{\mu}$:

$$\frac{\beta}{\mu} \varphi_t \varphi - \frac{\beta}{\mu} (\widehat{k} * \varphi_{xx}) \varphi - \frac{\beta}{\mu} \eta \varphi_{xx} \varphi + \beta v_{xt} \varphi = \frac{\beta}{\mu} \alpha \varphi^2 + \beta \alpha \varphi v_x.$$

Intrando a igualdade acima em x no intervalo I_t , teremos:

7. $\frac{\beta}{\mu} \varphi_t \varphi = \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \varphi_t \varphi dx = \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varphi|^2 dx = \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} |\varphi|^2 dx - \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} |\varphi(\gamma(t))|^2 + \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} |\varphi(0)|^2.$

8. $\frac{\beta}{\mu} (\widehat{k} * \varphi_{xx}) \varphi$

$$\frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} (\widehat{k} * \varphi_{xx}) \varphi dx = \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx.$$

9. $\frac{-\beta}{\mu} \eta \varphi_{xx} \varphi = \frac{-\beta}{\mu} \eta \int_{I_t} \varphi_{xx} \varphi dx = \frac{\beta}{\mu} \eta \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx.$

10. $\beta v_{tx} \varphi$

$$\beta \int v_{tx} \varphi dx = \beta [(\varphi \cdot v_t)_{I_t} - \int_{I_t} v_t \varphi_x dx] = -\beta \int_{I_t} v_t \varphi_x dx.$$

Somando-se as identidades, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} |v_t|^2 dx - \frac{1}{2} |v_t(\gamma(t))|^2 + \frac{d}{dt} \gamma'(t) \int_{I_t} v_t v_x dx \\ & - \gamma'(t) v_t(\gamma(t)) v_x(\gamma(t)) - \gamma''(t) \int_{I_t} v_t v_x dx \\ & - \frac{\gamma'}{2} |v_t(\gamma(t))|^2 - v_x(\gamma(t)) v_t(\gamma(t)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} |v_x|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} |v_x(\gamma(t))|^2 + \frac{1}{2} |v_x(0)|^2 + \frac{\gamma'}{2} |v_x(\gamma(t))|^2 + \frac{\gamma'}{2} |v_x(0)|^2 \\ & + \beta \int_{I_t} v_t \varphi_x dx + \beta \gamma'(t) \int_{I_t} \varphi_x v_x dx + \frac{\beta}{\mu} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{I_t} |\varphi|^2 dx \\ & + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\beta}{\mu} \eta \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx - \beta \int_{I_t} v_t \varphi_x dx \\ & = \int_{I_t} R v_t dx + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} S \varphi dx + \gamma'(t) \int_{I_t} R v_x dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_t} (|v_t|^2 + |v_x|^2 + \frac{\beta}{\mu} |\varphi|^2) dx + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\beta}{\mu} \eta \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \gamma'(t) |v_x(0)|^2 \\
& - \gamma''(t) \int_{I_t} v_t v_x dx + \beta \gamma'(t) \int_{I_t} \varphi_x v_x dx + \frac{d}{dx} \gamma'(t) \int_{I_t} v_t v_x dx - |\gamma'(t)|^2 v_t(\gamma(t)) v_x(\gamma(t)) \\
& - v_x(\gamma(t)) v_t(\gamma(t)) - \gamma' |v_t(\gamma(t))|^2 + \gamma' |v_x(\gamma(t))|^2 = \int_{I_t} R v_t dx + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} S \varphi dx + \gamma'(t) \int_{I_t} R v_x dx. \\
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t) + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\beta}{\mu} \eta \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{\gamma'}{2}(t) |v_x(0)|^2 - \gamma''(t) \int_{I_t} v_t v_x dx + \\
& \beta \gamma'(t) \int_{I_t} \varphi_x v_x dx - \gamma'(t) v_t(\gamma(t)) [v_t(\gamma(t)) + \gamma'(t) v_x(\gamma(t))] - \gamma'(t) v_x(\gamma(t)) [v_t(\gamma(t)) + \gamma'(t) v_x(\gamma(t))] \\
& = \int_{I_t} R v_t dx + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} S \varphi dx + \gamma'(t) \int_{I_t} R v_x dx. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_1(t) = \varepsilon(t) + 2\gamma' \int_{I_t} v_t v_x dx.$$

Vejamos que:

$$\begin{aligned}
|\gamma'' \int_{I_t} v_t v_x dx| & \leq \frac{|\gamma''|}{2} \left(\int_{I_t} |v_t|^2 dx + \int_{I_t} |v_x|^2 dx \right), \\
|\beta \gamma' \int_{I_t} \varphi_x v_x dx| & \leq \frac{\eta \beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{\mu \beta |\gamma'|^2}{2\eta} \int_{I_t} |v_x|^2 dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\int_{I_t} R v_t dx| & \leq \frac{5}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \frac{\epsilon C_p}{2} \int_{I_t} |v_x|^2 dx, \\
|\frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} S \varphi dx| & \leq \frac{\eta \beta}{4\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{2\epsilon C_p^2 \beta}{\mu \eta} \int_{I_t} |v_x|^2 dx, \\
|\gamma' \int_{I_t} R v_x dx| & \leq |\gamma'| \int_{I_t} |v_t|^2 dx + (C_p + 1) |\gamma'| \int_{I_t} |v_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando a condição (3.3), segue que

$$\begin{aligned}
|\gamma'' \int_{I_t} v_t v_x| & \leq \frac{\epsilon}{2} \left(\int_{I_t} |v_t|^2 dx + \int_{I_t} |v_x|^2 dx \right), \\
|\beta \gamma' \int_{I_t} \varphi_x v_x dx| & \leq \frac{\eta \beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{\mu \beta \epsilon}{2\eta} \int_{I_t} |v_x|^2 dx, \\
|\int_{I_t} R v_t dx| & \leq \frac{5}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \epsilon C_p \frac{1}{2} \int_{I_t} |v_x|^2 dx, \\
|\gamma' \int_{I_t} R v_x dx| & \leq \epsilon \int_{I_t} |v_t|^2 dx + (C_p + 1) \epsilon \int_{I_t} |v_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

Em virtude da seguinte relação

$$v_x(\gamma(t))\gamma'(t) + v_t(\gamma(t)) = 0 \quad (3.5)$$

Usando a condição de Dirichlet, conforme (1.4), em (3.4), segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\eta\beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx \\ & + \gamma'|v_x(0)|^2 \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \frac{\epsilon}{2} \int_{I_t} |v_x|^2 dx \\ & + \frac{\eta\beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{\mu\beta\epsilon}{2\eta} \int_{I_t} |v_x|^2 dx + \frac{5}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \frac{\epsilon}{2} c \int_{I_t} |v_x|^2 dx \\ & \frac{\eta\beta}{4\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \frac{2\epsilon c^2\beta}{\mu\eta} \int_{I_t} |v_x|^2 dx + \epsilon \int_{I_t} |v_t|^2 dx + c\epsilon \int_{I_t} |v_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Dai

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\mathcal{L}_1(t) + \frac{\beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\eta\beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \gamma'|v_x(0)|^2 \\ & \leq 4\epsilon \int_{I_t} |v_x|^2 dx + \epsilon \left(\frac{3}{2} + \frac{\mu\beta}{2\eta} + \frac{3C_p}{2} + \frac{2C_p^2\beta}{\mu\eta} \right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora, definimos a função positiva $\omega \in C^1([0, 1])$ tal que

$$\omega' < 0 \text{ em }]0, 1[, \quad \max_{0 \leq y \leq 1} \omega'(y) = -k < 0 \quad (3.7)$$

Definimos

$$\xi : I_t = [\gamma(t), 0] \rightarrow [0, 1], \quad x \in I_t \mapsto y = \frac{x}{\gamma(t)} \quad (3.8)$$

e

$$q(x) = (\omega \circ \xi)(x) = \omega(x\gamma^{-1}(t)) = \omega(y). \quad (3.9)$$

Então $q \in C^1(I_t)$ e com base na segunda condição de (2.14), obtemos:

$$\begin{aligned}
q(x) &= \omega(x\gamma^{-1}(t)) \Leftrightarrow \|q\|_{C^1(I_t)} = \|\omega(x\gamma^{-1}(t))\| \\
\sup_{0 \leq x \leq \gamma(t)} \|q\|_{C^1(I_t)} &= \sup_{0 \leq x \leq \gamma(t)} \|\omega(x\gamma^{-1}(t))\| \leq \|\omega\| + \frac{\|\omega\|}{\inf_{0 \leq t \leq \infty} |\gamma'(t)|} \\
&= \|\omega\|_{C^1(I_t)}(1 + \gamma_0^{-1}) = M < \infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|q\|_{C^1(I_t)} \leq (1 + \gamma_0^{-1})\|\omega\|_{C^1([0,1])} = M < \infty. \quad (3.10)$$

Alem disso, de (3.7) segue que

$$q_x = \left(\frac{\gamma(t)}{\gamma^2(t)}\right)\omega' = \frac{\omega'}{\gamma(t)} < 0, \quad \min_{x \in I_t}(-q_x) = \frac{k}{\gamma(t)} \geq \frac{k}{r}, \quad r = \|\gamma\|_{L^\infty(0,\infty)}. \quad (3.11)$$

Consideremos o Produto interno em $L^2(I_t)$ da equação (3.1) por $-qv_x$, vem que

$$-qv_x v_{tt} + qv_x v_{xx} - \beta qv_x \varphi_x = -qv_x R.$$

Integrando a igualdade acima em x , vejamos o cálculo das integrais uma a uma:

11.

$$\begin{aligned}
\int_{I_t} \frac{d}{dt} qv_x v_t dx &= \int_{I_t} q_t v_x v_t dx + \int_{I_t} qv_{xt} v_t dx + \int_{I_t} qv_x v_{tt} dx \\
- \int_{I_t} qv_x v_{tt} dx &= - \int_{I_t} \frac{d}{dt} qv_x v_t dx + \int_{I_t} q_t v_x v_t dx + \int_{I_t} qv_{xt} v_t dx \\
&= \int_{I_t} q_t v_x v_t dx - \frac{1}{2} \int_{I_t} q_x |v_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{I_t} \frac{d}{dx} q |v_t|^2 dx \\
&\quad - \int_{I_t} \frac{d}{dt} qv_x v_t dx + q(\gamma(t))v_x(\gamma(t))v_t(\gamma(t)).
\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}
\int_{I_t} \frac{d}{dx} qv_x v_x dx &= \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx + \int_{I_t} 2qv_x v_{xx} dx. \\
-2 \int_{I_t} qv_x v_{xx} dx &= - \int_{I_t} \frac{d}{dx} qv_x v_x dx + \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx. \\
\int_{I_t} qv_x v_{xx} dx &= \frac{-1}{2} \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{I_t} \frac{d}{dx} q |v_x|^2 dx \\
&= \frac{-1}{2} \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx + \frac{1}{2} q(\gamma(t))|v_x(\gamma(t))|^2 - \frac{1}{2} q(0)|v_x(0)|^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando os componentes acima por 2, vem que:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_{I_t} q_t v_x v_t dx - \int_{I_t} q_x |v_t|^2 dx + \frac{d}{dx} \int_{I_t} q |v_t|^2 dx - 2 \frac{d}{dt} \int_{I_t} q v_x v_t dx + 2q(\gamma(t)) v_x(\gamma(t)) v_t(\gamma(t)) \\
& - \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx + q(\gamma(t)) |v_x(\gamma(t))|^2 - q(0) |v_x(0)|^2 - 2\beta \int_{I_t} q v_x \varphi_x dx = -2 \int_{I_t} q v_x R dx. \\
& \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) + q(\gamma(t)) \left[|v_x(\gamma(t))|^2 + 2v_x(\gamma'(t)) v_t(\gamma(t)) + |v_t(\gamma(t))|^2 \right] - q(0) |v_x(0)|^2 \\
& - \int_{I_t} q_x |v_t|^2 dx - \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx = 2\beta \int_{I_t} q v_x \varphi_x dx - 2 \int_{I_t} q_t v_t v_x dx - 2 \int_{I_t} R q v_x dx, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_2(t) = -2 \int_{I_t} q v_x v_t dx.$$

Desde que

$$\begin{aligned}
& \left[|v_x(\gamma(t))|^2 + 2\gamma' v_x(\gamma(t)) v_t(\gamma(t)) + |v_t(\gamma(t))|^2 \right] \\
& = (1 - \gamma'^2) |v_x(\gamma(t))|^2 + [v_t(\gamma(t)) + \gamma'(t) v_x(\gamma(t))]^2,
\end{aligned}$$

Sabendo que $v_t(\gamma(t)) + \gamma'(t) v_x(\gamma(t)) = 0$, pois se trata do ponto de fronteira e (ver (3.9)), segue

$$q(0) = (\omega \circ \xi)(0) = \omega_0 > 0,$$

$$q(\gamma(t)) = \omega(1) \geq 0.$$

Dai

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) + \omega(1)(1 - \gamma'^2) |v_x(\gamma(t))|^2 - \omega_0 |v_x(0)|^2 - \int_{I_t} q_x |v_t|^2 dx + \int_{I_t} q_x |v_x|^2 dx \\
& = 2\beta \int_{I_t} q v_x v_x dx - 2 \int_{I_t} q_t v_t v_x dx - 2 \int_{I_t} R q v_x dx. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Com base em (3.10), temos:

$$|2\beta \int_{I_t} q \varphi_x v_x dx| \leq \frac{k}{2\tau} \int_{I_t} |v_x|^2 dx + \frac{2\tau\beta^2 M^2}{k} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx. \quad (3.14)$$

Além disso,

$$q_t = \frac{-x\gamma'}{\gamma\gamma'}\omega_y = -\frac{\gamma'}{\gamma}y\omega_y = -\gamma'yq_x.$$

De (3.10) e (3.3), segue:

$$|-2 \int_{I_t} q_t v_t v_x dx| \leq \epsilon M \left(\int_{I_t} |v_x|^2 dx + \int_{I_t} |v_t|^2 dx \right), \quad (3.15)$$

$$|-2 \int_{I_t} Rq v_x dx| \leq 2\alpha M \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \alpha(2M + C_p M) \int_{I_t} |v_x|^2 dx. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.14), (3.15), (3.16) na equação (3.13), sabendo que $0 < \alpha < \epsilon$ e considerando (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) + \omega(1)(1 - \gamma'^2(t))|v_x(\gamma(t))|^2 - \omega_0|v_x(0)|^2 + \left(\frac{k}{\tau} - 3\epsilon M\right) \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \\ + \left(\frac{k}{\tau} - \epsilon M - 2\epsilon M + 2\epsilon C_p M\right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx \leq \frac{2\tau\beta^2 M^2}{k} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De (3.10) e (3.3), temos a seguinte inequação:

$$2 \left| \int_{I_t} (\delta\gamma' - q) v_x v_t dx \right| \leq \frac{\delta}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + 2 \left(\delta\epsilon^2 + \frac{M^2}{\delta} \right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx,$$

fixando $\epsilon_0 \in]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ e escolhendo

$$\delta > \delta(\epsilon_0) = \frac{M\sqrt{2}}{\sqrt{1 - 2\epsilon_0^2}}, \quad (3.18)$$

Temos que, para todo $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) &= \delta \left(\epsilon + 2\gamma' \int_{I_t} v_t v_x dx \right) - 2 \int_{I_t} q v_x v_t dx, \\ \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) &= \delta\epsilon + \delta 2\gamma' \int_{I_t} v_t v_x dx - 2 \int_{I_t} q v_x v_t dx, \\ \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) &= \delta\epsilon + 2 \int_{I_t} (\delta\gamma' - q) v_t v_x dx, \\ \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) &\geq \frac{\delta}{2} \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \frac{\delta\beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi|^2 dx + ((1 - 2\epsilon^2)\delta - 2M^2\delta) \int_{I_t} |v_x|^2 dx, \\ \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) &\geq C \left(\int_{I_t} (|v_t|^2 + |v_x|^2 + |\varphi|^2) dx \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde C é uma constante positiva dependente de μ, β, τ, M e ϵ_0 .

Agora, multiplicando (3.6) por δ e somando com (3.17), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \delta \mathcal{L}_1(t) + \frac{\delta \beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \frac{\delta \eta \beta}{2\mu} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx + \delta \frac{\gamma'}{2} |v_x(0)|^2 \\ & - 4\epsilon \delta \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \delta \epsilon \left(\frac{3}{2} + \frac{\mu \beta}{2\eta} + \frac{3C_p}{2} + \frac{2C_p \beta}{\mu \eta} \right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx \\ & \frac{d}{dt} \mathcal{L}_2(t) + \omega(1)(1 - \gamma'^2) |v_x(\gamma(t))|^2 - \omega_0 |v_x(0)|^2 \\ & + \left(\frac{k}{\tau} - 3\epsilon M \right) \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \left(\frac{k}{2\tau} - \epsilon(3M + 2C_p M) \right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx - \frac{2\tau \beta^2 M^2}{k} \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

fazendo as derivadas simplificações, obtemos;

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) \} + \frac{\delta \beta}{\mu} \int_{I_t} \widehat{k} * \varphi_x \varphi_x dx + \left(\frac{\delta \eta \beta}{2\mu} - \frac{2\tau \beta^2 M^2}{k} \right) \int_{I_t} |\varphi_x|^2 dx \\ & + \omega(1)(1 - \gamma'^2(t)) |v_x(\gamma(t))|^2 + \left(\delta \frac{\gamma'}{2} - \omega_0 \right) |v_x(0)|^2 + \left(\frac{k}{\tau} - \epsilon(4\delta + 3M) \right) \int_{I_t} |v_t|^2 dx + \\ & + \left(\frac{k}{2\tau} - \epsilon \left(\delta \left(\frac{3}{2} + \frac{\mu \beta}{2\eta} + \frac{3C_p}{2} + \frac{2C_p \beta}{\mu \eta} \right) \right) + 3M + 2C_p M \right) \int_{I_t} |v_x|^2 dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Escolhendo,

$$\delta = \max \left(\delta(\epsilon_0), \frac{4\tau \beta \mu M^2}{\eta k}, \frac{2\omega_0}{\gamma_1} \right),$$

$$\epsilon = \min \left(\epsilon_0, \frac{k}{\tau(4\delta + 3M)}, \frac{k}{2\tau \left(\delta \left(\frac{3}{2} + \frac{\mu \beta}{2\eta} + \frac{3C_p}{2} + \frac{2C_p \beta}{\mu \eta} \right) + 3M + 2C_p M \right)} \right), \quad (3.21)$$

e usando o Lema (1.5.4) em (3.20), vem que:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + C \left(\int_{I_t} (|v_t|^2 + |v_x|^2 + |\varphi_x|^2) dx \right) \leq 0, \quad (3.22)$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = \delta \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t). \quad (3.23)$$

De (3.21), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq 0.$$

Integrando de 0 a T a relação acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq 0, \\ \mathcal{L}(T) - \mathcal{L}(0) &\leq 0, \\ \mathcal{L}(T) &\leq \mathcal{L}(0).\end{aligned}$$

Repetindo a integração acima de 0 a nT com $n \in \mathbf{N}$, concluimos que

$$\begin{aligned}\int_0^{nT} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq 0, \\ \mathcal{L}(nT) &\leq \mathcal{L}(0).\end{aligned}\tag{3.24}$$

De (3.19), segue que existem constantes positivas, então definimos, C_0 e C_1 satisfazendo

$$C_0 e^{2\alpha t} E(t) \leq \varepsilon(t) < \mathcal{L}(t) < \mathcal{L}(0).\tag{3.25}$$

Para todo $t > 0$, podemos escrever $t = nT + r$, onde $r < T$, e $E(t)$ é uma função decrescente, então de (3.25) e (3.24), segue que existe uma constante positiva C tal que:

$$E(t) \leq E(nT) \leq \frac{1}{C_0} e^{-2\alpha t} \mathcal{L}(nT) \leq C e^{-2\alpha nT} E(0).$$

Quando $t \leq 2nT$, temos

$$E(t) \leq C e^{-2\alpha t} E(0).$$

Segue portanto o resultado requerido.

Capítulo 4

Análise Numérica Da Solução

Neste capítulo obteremos a solução numérica do problema (2.1)-(2.2) aplicando o método dos elementos finitos em combinação com o método das diferenças finitas.

4.1 Aproximação Por Elementos Finitos

É mais simples aplicar o método dos elementos finitos no problema equivalente (2.9),(2.10), (2.11), (2.12), ou seja, no domínio cilíndrico, do que no problema em domínio não-cilíndrico (2.1) e (2.2). Vamos considerar a seguinte forma variacional do problema apresentado em (2.19), (2.20) e (2.21)

$$(\psi_{tt}^{(m)}, w) + a(t, \psi^{(m)}, w) + (a_2 D\psi_t^{(m)}, w) + (a_3 D\psi^{(m)}, w) + \beta\gamma^{-1}(D\varphi^{(m)}, w) = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &(\varphi_t^{(m)}, w) - \gamma^{-2}(k * D^2\varphi^{(m)}, w) - \eta\gamma^{-2}(D^2\varphi^{(m)}, w) + \frac{1}{2}(a_2 D\varphi^{(m)}, w) \\ &+ \mu\gamma^{-1}(D\psi_t^{(m)}, w) - (b_2 D\psi^{(m)}, w) = 0, \quad \forall w \in V_m \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1.1 Aproximação Via Galerkin

Conderando as funções $\psi^{(m)}, \varphi^{(m)} \in V_m$ definido por:

$$\psi^{(m)} = \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i(y) \quad (4.3)$$

$$\varphi^{(m)} = \sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i(y) \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) e (4.4) nas equações (4.1) e (4.2), escolhendo $w = \phi_j(y)$, teremos:

$$\begin{aligned}
& g_{im}''(t) \int_0^1 \phi_j(y) \phi_i(y) dy + \frac{1}{\gamma^2} g_{im}(t) \int_0^1 D\phi_j(y) D\phi_i(y) dy - 2\frac{\gamma'}{\gamma} y g_{im}'(t) \int_0^1 D\phi_j(y) \phi_i(y) dy \\
& - \left(\frac{2\gamma'}{\gamma} y \right) g_{im}'(t) \int_0^1 \phi_j(y) D\phi_i(y) dy - \left(\frac{\gamma''}{\gamma} y \right) g_{im} \int_0^1 D\phi_i(y) \phi_j(y) dy \\
& + \beta\gamma^{-1} h_{im} \int_0^1 D\phi_j(y) \phi_i(y) dy = 0 \\
& h_{im}'(t) \int_0^1 \phi_j(y) \phi_i(y) dy + \gamma^{-2} k * h_{im}(t) \int_0^1 D\phi_j(y) D\phi_i(y) dy + \eta\gamma^{-2} h_{im}(t) \int_0^1 D\phi_j(y) D\phi_i(y) dy \\
& - \left(\frac{\gamma'}{\gamma} y \right) h_{im} \int_0^1 \phi_j(y) D\phi_i(y) dy + \mu\gamma^{-1} g_{im}'(t) \int_0^1 \phi_j(y) D\phi_i(y) dy \\
& + \left(\frac{\mu\gamma'}{\gamma^2} y \right) g_{im} \int_0^1 D\phi_j(y) D\phi_i(y) dy = 0
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
Ag_{tt} + (B_1 + B_2 + E)g + Cg_t + \beta\gamma^{-1}Fh &= 0 \\
Ah_t + G(k * \gamma^{-2}h) + \eta\gamma^{-2}Gh + \frac{1}{2}Ch + \mu\gamma^{-1}Fg_t - Jg &= 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \phi_j \phi_i dy & E &= -\frac{\gamma''}{\gamma} \int_0^1 y \phi_j' \phi_i dy \\
B_1 &= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \phi_j' \phi_i' dy & C &= -2\frac{\gamma'}{\gamma} \int_0^1 y \phi_j' \phi_i dy \\
B_2 &= -\frac{(\gamma')^2}{\gamma^2} \int_0^1 y^2 \phi_j' \phi_i' dy & F &= \int_0^1 \phi_j' \phi_i dy \\
J &= \mu\frac{\gamma'}{\gamma^2} \int_0^1 y \phi_j' \phi_i' dy & G &= \int_0^1 \phi_j' \phi_i' dy
\end{aligned}$$

Discretizando o domínio $Q = [0, 1]$ em sub-domínios $Q_i = (y_i, y_{i+1})$ chamados elementos finitos da forma $(Q = \sum_i Q_i)$, e escolhendo o tipo de função para representar os (Q_i) , a partir disso, as matrizes do sistema (4.5) são obtidas, as funções convenientemente usadas são

$$\phi_i(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{i-1}}{\Delta} & \forall y \in [y_{i-1}, y_i] \\ \frac{y_{i+1} - y}{\Delta} & \forall y \in [y_i, y_{i+1}] \\ 0 & \forall y \notin [y_{i-1}, y_{i+1}] \end{cases}$$

onde consideramos a malha uniforme, $\Delta = \Delta_i = y_{i+1} - y_i$ ($i = 1, 2, \dots, M$) com $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = 1$.

Para cada matriz tridiagonal A, B_1, B_2, C, E, F, J são calculados os seguintes elementos:

Tomando $\phi_A = 1 - \frac{\epsilon}{h} = \frac{y_{i+1} - y}{h}$ e $\phi_B = \frac{\epsilon}{h} = \frac{y - y_i}{h}$

Sabendo que:

$$A = \int_0^1 \phi_j \phi_i dy \text{ . Daí}$$

$$a_{AA} = \int_0^h \left(\frac{\epsilon}{h} \right)^2 d\epsilon = \frac{h}{3},$$

$$a_{AB} = \int_0^h \frac{\epsilon}{h} \left(1 - \frac{\epsilon}{h} \right) d\epsilon = \frac{h}{6},$$

$$a_{BB} = \int_0^h \left(1 - \frac{\epsilon}{h} \right)^2 d\epsilon = \frac{h}{3}. \text{ Logo,}$$

$$a_{ii} = a_{AA} + a_{BB} = \frac{2h}{3}, \text{ assim } a_{ii} = \frac{2\Delta}{3}, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \frac{\Delta}{6}.$$

$$\text{De } B_1 = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \phi_j' \phi_i' dy. \text{ Daí,}$$

$$b_{1AA} = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \left(\frac{1}{h} \right)^2 d\epsilon = \frac{1}{\gamma^2 h},$$

$$b_{1AB} = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^h \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{h} \right) d\epsilon = -\frac{1}{\gamma^2 h},$$

$$b_{1BB} = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{h} \right)^2 d\epsilon = \frac{1}{\gamma^2 h}. \text{ Daí,}$$

$$b_{1ii} = b_{1AA} + b_{1BB} = \frac{2}{\gamma^2 h}, \text{ assim } b_{1ii} = \frac{2}{\gamma^2 \Delta} \quad b_{1i,i+1} = b_{1i+1,i} = \frac{-1}{\gamma^2 \Delta}.$$

De $B_2 = -\frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \int_0^1 y^2 \phi'_j \phi'_i dy$. **Daí,**

$$b_{2AA} = \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \int_0^h (\epsilon + y_A)^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 d\epsilon = -\frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{1}{3h} (h^2 + 3y_A h + 3y_A^2),$$

$$b_{2BB} = -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^h (\epsilon + y_A)^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 d\epsilon = -\frac{\gamma'^2}{\gamma^2 3h} (h^2 + 3y_A h + 3y_A^2),$$

$$b_{2AB} = b_{2BA} = \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \int_0^h (\epsilon + y_A)^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 d\epsilon = \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{1}{3h} (h^2 + 3y_A h + 3y_A^2). \text{ Assim,}$$

$$b_{2ii} = -\frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{2}{3\Delta} (\Delta^2 + 3y_A \Delta + 3y_A^2),$$

$$b_{2i,i+1} = b_{2i+1,i} = \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{2}{3\Delta} (\Delta^2 + 3y_A \Delta + 3y_A^2).$$

De $C = -2\frac{\gamma'}{\gamma} \int_0^1 y \phi'_j \phi_i dy$. **Daí,**

$$c_{AA} = \frac{2\gamma'}{\gamma} \int_0^h (\epsilon + y_A) \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{\epsilon}{h}\right) d\epsilon = -\frac{\gamma'}{3\gamma} (2h + 3y_A),$$

$$c_{BB} = -\frac{2\gamma'}{\gamma} \int_0^h (\epsilon + y_A) \left(-\frac{1}{h}\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right) d\epsilon = \frac{2\gamma'}{\gamma} \left(\frac{h}{6} + \frac{y_A}{2}\right),$$

$$c_{AB} = -\frac{2\gamma'}{\gamma} \int_0^h (\epsilon + y_A) \left(\frac{1}{h}\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right) d\epsilon = -\frac{\gamma'}{3\gamma} (h + 3y_A),$$

$$c_{BA} = -\frac{2\gamma'}{\gamma} \int_0^h (\epsilon + y_A) \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{\epsilon}{h}\right) d\epsilon = \frac{\gamma'}{3\gamma} (2h + 3y_A).$$

Dessa forma,

$$c_{ii} = -\frac{\gamma' \Delta}{3\gamma}, \quad c_{i,i+1} = -\frac{\gamma'}{3\gamma} (\Delta + 3y_i), \quad c_{i,i+1} = -\frac{\gamma'}{3\gamma} (2\Delta + 3y_i).$$

De $\phi_A = \frac{y_i - y}{h}$, $\phi_B = \frac{y - y_{i-1}}{h}$ e $E = -\frac{\gamma''}{\gamma} \int_0^1 y \phi'_j \phi_i dy$. **Daí,**

$$E_{AA} = -\frac{\gamma''}{\gamma} \int_{y_{i-1}}^{y_i} y \left(-\frac{1}{h}\right) \left(\frac{y_i - y}{h}\right) dy = \frac{\gamma''}{6\gamma} (3y_i - 2h),$$

$$E_{BB} = -\frac{\gamma''}{\gamma} \int_{y_{i-1}}^{y_i} y \left(\frac{1}{h} \right) \left(\frac{y - y_{i-1}}{h} \right) dy = \frac{\gamma''}{6\gamma} (-3y_i + h),$$

Ou seja,

$$a_{ii} = \frac{2\Delta}{3}$$

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = \frac{\Delta}{6}$$

$$a_{1ii} = \frac{2}{\gamma^2 \Delta}$$

$$b_{1i,i+1} = b_{1i+1,i} = \frac{-1}{\gamma^2 \Delta}$$

$$b_{2ii} = \frac{-\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{2}{3\Delta} (\Delta^2 + 3\Delta y_i + 3y_i^2)$$

$$b_{2i,i+1} = b_{2i+1,i} = \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \frac{1}{3\Delta} (\Delta^2 + 3\Delta y_i + 3y_i^2)$$

$$C_{ii} = -\frac{\gamma' \Delta}{3\gamma}$$

$$c_{i+1,i} = -\frac{\gamma'}{3\gamma} (\Delta + 3y_i)$$

$$e_{ii} = -\frac{\gamma'' \Delta}{6\gamma}$$

$$e_{i+1,i} = -\frac{\gamma''}{6\gamma} (\Delta + 3y_i)$$

$$f_{ii} = 0$$

$$g_{ii} = \frac{2}{\Delta}$$

$$e_{i,i+1} = \frac{\gamma''}{6\gamma} (2\Delta + 3y_i)$$

$$J_{ii} = -\mu \frac{\gamma' \Delta}{6\gamma^2}$$

$$f_{i+i,i} = f_{i,i+1} = \frac{1}{2}$$

$$g_{i+1,i} = g_{i,i+1} = -\frac{1}{\Delta}$$

$$j_{i+i,i} = \mu \frac{\gamma' \Delta}{6\gamma^2} (2\Delta + 3y_i)$$

$$j_{i,i+1} = -\mu \frac{\gamma' \Delta}{6\gamma^2} (\Delta + 3y_i)$$

4.2 Método Das Diferenças Finitas

Para obter as aproximações das soluções do sistema de equações em (4.5), usando uma variante do método da aproximação por diferença centrada (ver [23]). Seja $t_n = n\delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$, isto é, a discretização em t no intervalo $[0, T]$, considerando $g_n = g(t_n)$ e $h_n = h(t_n)$ as aproximações de solução $g(t)$ e $h(t)$, respectivamente, em t_n . As derivadas que estão na equação diferencial são aproximadas por equações de

diferenças entre valores da solução em pontos discretos do domínio. A ferramenta mais utilizada para obter essas aproximações é a série de Taylor, daí temos as seguintes discretizações das derivadas de primeira e segunda ordens que aparecem na equação diferencial:

$$g_t \cong \frac{g_{n+1} - g_{n-1}}{2\delta t} \quad (4.6)$$

$$g_{tt} \cong \frac{g_{n+1} - 2g_n + g_{n-1}}{\delta t^2} \quad (4.7)$$

$$h_t \cong \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2\delta t} \quad (4.8)$$

e as aproximações para g_n e h_n , em (4.5), são assim consideradas:

$$g_n^* = \frac{\alpha}{2}g_{n+1} + (1 - \alpha)g_n + \frac{\alpha}{2}g_{n-1} \quad (4.9)$$

$$h_n^* = \frac{\alpha}{2}h_{n+1} + (1 - \alpha)h_n + \frac{\alpha}{2}h_{n-1} \quad (4.10)$$

com $\alpha > 0$ resulta a aproximação. A convolução tem sua aproximação conforme (ver[24]),

$$k * \gamma^{-2}h = \sum_{j=1}^i K_{i-j+1}g_j/\gamma^2(t_j) \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.6),(4.7),(4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) em (4.5), temos:

$$\begin{aligned} \frac{Ag_{n+1}}{\delta t^2} - \frac{Ag_n}{\delta t^2} + \frac{Ag_{n-1}}{\delta t^2} + B_1 \frac{\alpha}{2} g_{n+1} + B_1(1 - \alpha)g_n + B_1 \frac{\alpha}{2} g_{n-1} + B_2 g_n + E g_n + C \frac{g_{n+1}}{2\delta t} \\ - C \frac{g_{n-1}}{2\delta t} + \beta \gamma^{-1} F \frac{\alpha}{2} h_{n+1} + \beta \gamma^{-1} F (1 - \alpha) h_n + \beta \gamma^{-1} F \frac{\alpha}{2} h_{n-1} = 0, \\ \frac{A h_{n+1}}{2\delta t} - \frac{A h_{n-1}}{2\delta t} + G(k * \gamma^{-2})h_n + \eta \gamma^{-2} G \left(\frac{\alpha}{2} h_{n+1} + (1 - \alpha)h_n + \frac{\alpha}{2} h_{n-1} \right) \\ + \frac{1}{2} C h_n + \mu \gamma^{-1} F \frac{g_{n+1}}{2\delta t} - \mu \gamma^{-1} F \frac{g_{n-1}}{2\delta t} - J g_n = 0. \end{aligned}$$

então

$$\bar{A}_n g_{n+1} + \bar{B}_n h_{n+1} = \bar{C}_n g_n + \bar{E}_n g_{n-1} + \bar{F}_n h_n + \bar{G}_n h_{n-1} \quad (4.12)$$

$$\bar{\bar{A}}_n g_{n+1} + \bar{\bar{B}}_n h_{n+1} = \bar{\bar{C}}_n g_n + \bar{\bar{E}}_n g_{n-1} + \bar{\bar{F}}_n h_n + \bar{\bar{G}}_n h_{n-1} - \sum_{j=1}^i K_{i-j+1}g_j/\gamma^2(t_j)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{A}_n &= \frac{A}{\delta t^2} + \frac{\alpha}{2}B_1 + \frac{1}{2\delta t}C, & \bar{B}_n &= \beta\gamma^{-1}\frac{\alpha}{2}F, \\
\bar{C}_n &= \frac{2A}{\delta t^2} + (\alpha - 1)B_1 - B_2 - E, & \bar{E}_n &= \frac{-A}{\delta t^2} - \frac{\alpha}{2}B_1 + \frac{C}{2\delta t}, \\
\bar{F} &= -\beta\gamma^{-1}(1 - \alpha)F, & \bar{G}_n &= -\beta\gamma^{-1}\frac{\alpha}{2}F, \\
\bar{\bar{A}}_n &= \frac{\mu\gamma^{-1}}{2\delta t}F, & \bar{\bar{B}}_n &= \frac{A}{2\delta t} + \eta\gamma^{-1}\frac{\alpha}{2}G, \\
\bar{\bar{C}}_n &= J, & \bar{\bar{E}}_n &= \frac{\mu\gamma^{-1}}{2\delta t}F, \\
\bar{\bar{F}}_n &= \eta\gamma^{-2}(\alpha - 1)G - \frac{1}{2}C, & \bar{\bar{G}}_n &= \frac{A}{2\delta t} - \eta\gamma^{-2}\frac{\alpha}{2}G.
\end{aligned}$$

Para obter a solução do par $\{g_n, h_n\}$ será primeiramente considerado $n = 0$ em (4.12), assim:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_0 g_1 + \bar{B}_0 h_1 &= \bar{C}_0 g_0 + \bar{E}_0 g_{-1} + \bar{F}_0 h_0 + \bar{G}_0 h_{-1} \\
\bar{\bar{A}}_0 g_1 + \bar{\bar{B}}_0 h_1 &= \bar{\bar{C}}_0 g_0 + \bar{\bar{E}}_0 g_{-1} + \bar{\bar{F}}_0 h_0 + \bar{\bar{G}}_0 h_{-1}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Onde os valores de $\{g_0, h_0\}$ de (4.14) são determinados a partir das soluções de $\{\psi(y, t), \varphi(y, t)\}$ quando $t = 0$, isto é, $g_0 = \psi(y, 0), h_0 = \varphi(y, 0)$. Para o cálculo das aproximações de $\{g_{-1}, h_{-1}\}$, expandiremos $\psi(y, t)$ e $\varphi(y, t)$ em polinômio de Taylor de primeiro e segundo graus, respectivamente, em $t = 0$.

$$g_{-1} = g_0 - \delta t g_t(0) + \frac{\delta t^2}{2} g_{tt}(0) \quad h_{-1} = h_0 - \delta t h_t(0) \tag{4.14}$$

nos quais os valores de $g_t(0), g_{tt}(0)$ e $h_t(0)$ são dados por

$$g_t(0) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(y_i, 0) = \psi(y_i), \quad g_{tt}(0) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(y_i, 0), \quad h_t(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y_i, 0) \tag{4.15}$$

e são calculadas a partir do problema (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) definido no domínio

cilíndrico. Dos valores $\{g_1, h_1\}$ e usando as equações do sistema acoplado (4.12), as aproximações $\{g_{n+1}, h_{n+1}\}$ para $n = 1, 2, \dots, N$ são obtidas.

4.3 Sistema Desacoplado

Para obter a solução numérica do sistema desacoplado, utiliza-se a extrapolação regressiva da primeira derivada ,

$$g_t(t_n) = \frac{1}{2\delta t}(3g_n - 4g_{n-1} + g_{n-2}) \quad (4.16)$$

Substituindo (4.6)-(4.10) e (4.16) no sistema de equações (4.5), segue:

$$\begin{aligned} \frac{Ag_{n+1}}{\delta t^2} - \frac{2g_n}{\delta t^2} + \frac{Ag_{n-1}}{\delta t^2} + B_1 \frac{\alpha}{2} g_{n+1} + B_1(1-\alpha) g_n + B_1 \frac{\alpha}{2} g_{n-1} + B_2 g_n + E g_n + C \frac{g_{n+1}}{2\delta t} \\ - C \frac{g_{n-1}}{2\delta t} + \beta\gamma^{-1} F \left(\frac{\alpha}{2} h_{n+1} + (1-\alpha)h_n + \frac{\alpha}{2} h_{n-1} \right) = 0, \\ \frac{A h_{n+1}}{2\delta t} - \frac{A h_{n-1}}{2\delta t} + G(k * \gamma^{-2}) h_n + \eta\gamma^{-2} G \left(\frac{\alpha}{2} h_{n+1} + (1-\alpha)h_n + \frac{\alpha}{2} h_{n-1} \right) + \frac{1}{2} C h_n \\ + \mu\gamma^{-1} F \left(\frac{3g_n}{2\delta t} - \frac{4g_{n-1}}{2\delta t} + \frac{g_{n-2}}{2\delta t} \right) - J g_n = 0. \end{aligned}$$

Resultando no sistema:

$$\begin{aligned} \bar{A}_n g_{n+1} &= \bar{B}_n h_{n+1} + \bar{C}_n g_n + \bar{E}_n g_{n-1} + \bar{F}_n h_n + \bar{G}_n h_{n-1} \\ \bar{\bar{A}}_n h_{n+1} &= \bar{\bar{B}}_n g_n + \bar{\bar{C}}_n g_{n-1} + \bar{\bar{E}}_n g_{n-2} + \bar{\bar{F}}_n h_n + \bar{\bar{G}}_n h_{n-1} - \sum_{j=1}^i K_{i-j+1} g_j / \gamma^2(t_j) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \frac{A}{\delta t^2} + \frac{\alpha}{2} B_1 + \frac{1}{2\delta t} C, & \bar{B}_n &= -\beta\gamma^{-1} \frac{\alpha}{2} F, \\ \bar{C}_n &= \frac{2A}{\delta t^2} + (\alpha - 1)B_1 - B_2 - E, & \bar{E}_n &= \frac{-A}{\delta t^2} - \frac{\alpha}{2} B_1 + \frac{C}{2\delta t}, \\ \bar{F}_n &= -\beta\gamma^{-1}(1-\alpha)F, & \bar{G}_n &= -\beta\gamma^{-1} \frac{\alpha}{2} F, \\ \bar{\bar{A}}_n &= \frac{A}{2\delta t} + \eta\gamma^{-2} \frac{\alpha}{2} G, & \bar{\bar{B}}_n &= \frac{-3\mu\gamma^{-1}}{2\delta t} F + J, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{C}}_n &= \frac{2\mu\gamma^{-1}}{\delta t} F, & \bar{\bar{E}}_n &= \frac{-\mu\gamma^{-1}}{2\delta t} F, \\ \bar{\bar{F}}_n &= \eta\gamma^{-2}(\alpha - 1)G - \frac{1}{2} C, & \bar{\bar{G}}_n &= \frac{A}{2\delta t} - \eta\gamma^{-2} \frac{\alpha}{2} G.\end{aligned}$$

Note que o sistema desacoplado (4.17) é computacionalmente simples de ser resolvido, já o sistema acoplado (4.12) não, pois, no primeiro a cada intervalo t_n , os valores de h_{n+1} são calculados independentemente dos valores de g_{n+1} .

4.4 Discretização Da Energia Do Sistema

A energia do sistema é dada por:

$$E(t) = \|\psi_t\|_{L^2}^2 + \|D\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{\mu} \|\varphi\|_{L^2}^2 \quad (4.18)$$

A discretização de (4.11) se faz pelo método das diferenças finitas, obtendo:

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\psi(i, n+1) - \psi(i, n)}{\delta t} \frac{\psi(i+1, n+1) - \psi(i+1, n)}{\delta t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi(i+1, n+1) - \psi(i, n+1)}{h} \frac{\psi(i+1, n) - \psi(i, n)}{h} + \frac{\beta}{\mu} \varphi(i, n)^2 \right) \quad (4.19)\end{aligned}$$

4.5 Resultados Numéricos

Nesta seção, temos os resultados numéricos do sistema termoelástico hiperbólico com memória. Usando os seguintes valores para as constantes : $\mu = 0.161$, $\beta = 0.164$, $\eta = 0.177$. Satisfazendo as hipóteses sobre a função $\gamma(t)$ que define o tempo dependendo das condições de fronteira para o domínio não-cilíndrico, assim $\gamma(t) = 1 - e^{-t-1}$.

Sejam as condições de fronteira:

$$\psi|_{t=0} = \psi_0 = 0.3(y^2 - y), \quad \psi_t|_{t=0} = \psi_1 = 0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 = 0.1(y - y^2).$$

onde $x = \gamma(t)y$ é usado em todos os resultados desta seção , $N = 400$ e $M = 100$ são usados em todas as simulações. Nas figuras 1 e 2 temos as soluções aproximadas de

$\theta(x, t)$ e $u(x, t)$, respectivamente, sem o termo de memória ($k * \theta_{xx}$) com $T = 5$.

Nas figuras 3 e 4 temos a solução numérica do problema com termo de memória tendo $T = 2$. Note que devido ao efeito de memória, o parâmetro $\theta(x, t)$ decai rapidamente. E usando $T = 5$ obtemos as aproximações de solução apresentadas nas figuras 5 e 6. Na figura 7, temos a simulação do termo $u(x, t)$ considerando $T = 10$, note que $u(x, t)$ decai lentamente. Na figura 8, temos que a fronteira da energia associada ao sistema, considerando $T = 20$ decai exponencialmente.

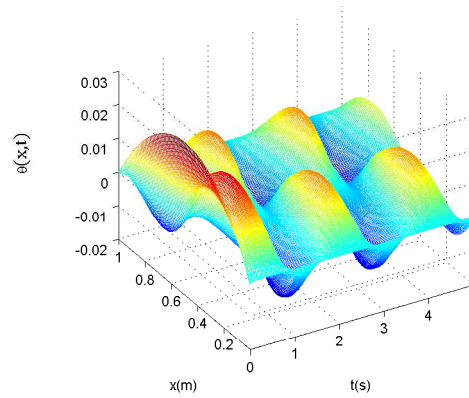


Figura 4.1 $\theta(x, t)$ sem termo de memória.

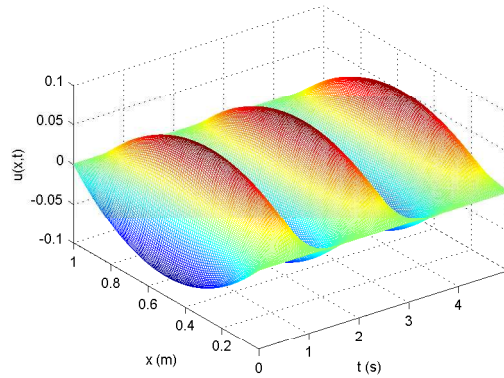


Figura 4.2 $u(x, t)$ sem termo de memória.

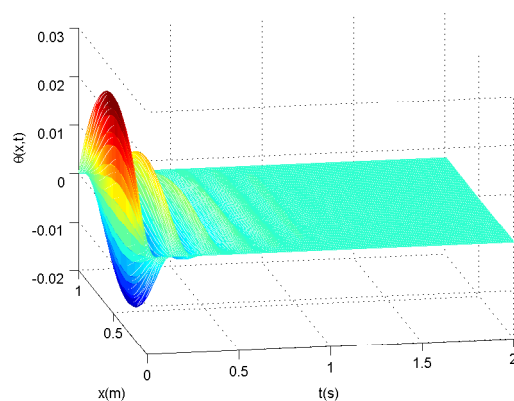


Figura 4.3 $\theta(x,t)$ com termo de memória e $T=2$.

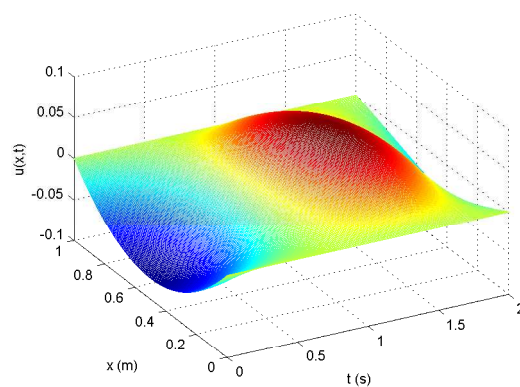


Figura 4.4 $u(x,t)$ com termo de memória e $T=2$.

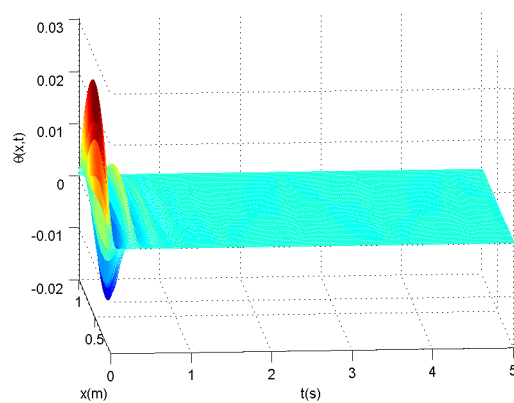


Figura 4.5 $\theta(x,t)$ com termo de memória e $T=5$.

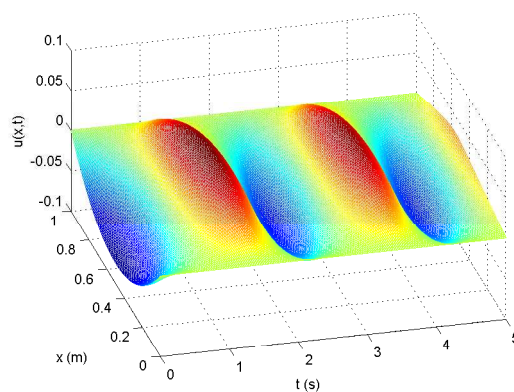


Figura 4.6 $u(x,t)$ com termo de memória e $T=5$.

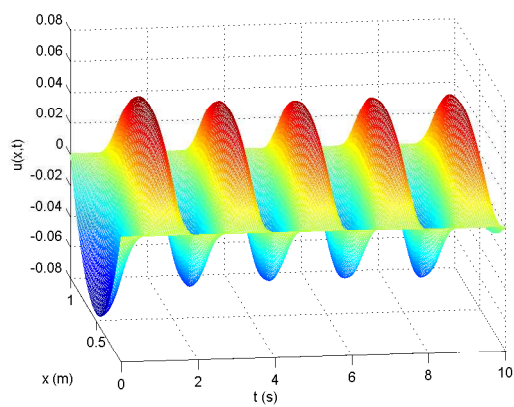


Figura 4.7 $u(x,t)$ com termo de memória e $T=10$.

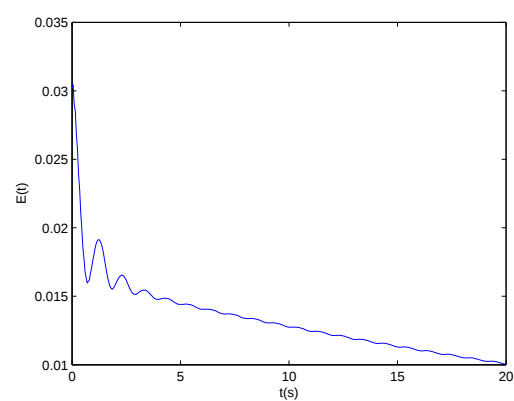


Figura 4.8 A energia do sistema, $T=20$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.M. Dafermos, *On the existence and asymptotic stability of the equations of linear thermoelasticity*. Arch. Rational Mech. Anal., 29, 241-271, (1968)
- [2] D. C. Pereira and G. P. Menzala , *Exponential decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity*. Comp. Appl. Math., 76, 193-204, (1989).
- [3] G. Avalos and I. Lasiecka, *Exponential stability o thermoelastic system without mechanical dissipation*. Rent. Inst. Mat. Univ. Trieste Suppl., Vol. XXVIII, 1-28, (1997).
- [4] G. Avalos and I. Lasiecka, *Exponential stability of a thermoelastic system with free boundary conditions without mechanical dissipation* . SIAM J. Math. Anal., Vol. 29, No. 1, 155-182, (1998).
- [5] G. Ponce and R. Racke, , *Global eistence small solutions to the inicial value problem for nonlinear thermoelasticity*. J. Differential equations, 87, 70-83, (1990).
- [6] J. E. Muñoz Rivera, *Asymptotic behaviour in inhomogeneous linear thermoelasticity* . Applicable Analysis, 53, 55-66, (1994).
- [7] J. E. Muñoz Rivera, *Energy decay rates in linear thermoelasticity*. Funkcialaj Ekvacioj, 35, 19-30, (1992).
- [8] J. Song, R. Racke and J. E. Muñoz Rivera, *Asymptotic stability and global existence in thermoelasticity with symmtry*. Quart. Appl. Math., LVI, 2, 259-276, (1998).
- [9] J. U. Kim, *On the energy of a linear thermoelastic bar and plate*. SIAM J. Math. Anal., 23, 889-899, (1992).
- [10] L. H. Fatori and J. E. Muñoz Rivera, *Energy decay for hyperbolic thermoelastic system of memory type*. Quart. Appl. Math., VII, 1, 557-578, (2001).
- [11] M. Slemrod, *Global existence, uniqueness and asymptotic stabiliy of classical smooth solution in one dimencional non linear thermoelasticity*. Arth. Rat. Mech. Math., 76, 97-133, (1981).

-
- [12] O. L. Staffans, *On a nonlinear hyperbolic Volterra Equations*. **SIAM J. Math. Anal.**, **11**, 793-812, (1980).
 - [13] R. Racke, *On the time-asymptotic behaviour of solutions in thermoelasticity*. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh**, **107**, 289-298, (1987).
 - [14] R. Racke and Y. Shibata, *Global smooth solution and asymptotic stability in one dimensional nonlinear thermoelasticity*. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, **116**, 1-34, (1991).
 - [15] R. Racke, Y. Shibata and S. Zheng, *Global solvability and exponential stability in one dimensional nonlinear thermoelasticity*. **Quart. Appl. Math.**, **51**, 751-763, (1993).
 - [16] S. Kawashima and Y. Shibata, *On the Neumann problem of one-dimensional nonlinear thermoelasticity with time-independent external forces*. **Czechoslovak Math. J.**, **1-31**, (1994).
 - [17] H. Brézis, *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones*. Alianza Editora, Madrid, Paris, (1984).
 - [18] L.A. Medeiros e M.M. Miranda, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. **Textos de Métodos Matemáticos**, nº 25, IM-UFRJ, (1993).
 - [19] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Lineaires*. Dunod Gauthiers Villars, Paris, (1969).
 - [20] J.L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problem Applications* springer-Varlag. New York, Vol. I, (1972).
 - [21] M. E. Gurtin and A. C. Pipikin, *A General Theory of Heat Conduction with Wave Speeds*. **Arch. Rat. Mech. Anal.**, **31**, 113-126, (1968).
 - [22] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*. John Wiley and Sons-Masson, Paris, (1994).
 - [23] L. Lapidus and G. F. Pinder, *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley and Sons, Canadá.
 - [24] L. W. B. Leite, *Introdução A Análise Espectral Em Geofísica*. Belém, Pará, MCT/CNPq/PADCT-II/GTM, 1998.