



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados
e Problemas de Autovalor Envolvendo o
 $p(x)$ -Laplaciano**

por

Marcos Oliveira de Oliveira

sob orientação do

**Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de
Araujo Corrêa**

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de Autovalor Envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano

por

Marcos Oliveira de Oliveira

sob orientação do

**Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de
Araujo Corrêa**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará, como pré-requisito para a ob-
tenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: ANÁLISE

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marcos Oliveira de Oliveira

Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de
Autovalor Envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará, como pré-requisito para a ob-
tenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof.º Dr. FRANCISCO JÚLIO SOBREIRA DE ARAUJO CORRÊA - Orientador
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof.º Dr. UBERLÂNDIO BATISTA SEVERO - Membro
Departamento de Matemática - UFPB

Prof.º Dr. GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO - Membro
Faculdade de Matemática - UFPA

Prof.º Dr. SILVANO DIAS BEZERRA DE MENEZES - Suplente
Faculdade de Matemática - UFPA

Agradecimentos

Agradeço a Deus que no decorrer desses um ano e meio me deu saúde para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço à minha família que sempre me incetivou a nunca desistir do curso devido a dificuldades.

Agradeço ao meu orientador Prof^o. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa que durante a realização deste trabalho sempre esteve disposto a esclarecer alguns pontos obscuros do trabalho.

Aos Professores Giovany Figueiredo e Uberlândio Batista Severo, pelas sugestões e por aceitarem a participar da banca examinadora.

Agradeço aos professores com os quais cursei disciplinas no mestrado: Giovany Figueiredo, Mauro Santos, Ducival Pereira, Marcus Rocha e Francisco Corrêa do Departamento da Pós-Graduação de Matemática e Estatística-PPGEM.

Aos demais professores da UFPA.

A todos os funcionários da UFPA.

A todos os colegas de mestrado.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas, em particular:

- Cinthia Helena Míleo de Miranda Bandeira;
- Laila Conceição Fontineli;
- Sofia Rodrigues.

que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

O homem tem ciência das coisas da terra, mas a sabedoria é dom de Deus.

12:Mas onde se achará a sabedoria?

13:O homem não lhe conhece o valor; não se acha na terra dos viventes.

20:Donde pois vem a sabedoria e onde está o lugar da inteligência?

28:Mas disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a sabedoria e apartar-se do mal é a inteligência.

Jó, Capítulo 28, Bíblia Sagrada.

Resumo

Neste trabalho, abordaremos questões de existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio limitado e regular, $p(x) > 1$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e $\Delta_{p(x)}$ é o $p(x)$ -Laplaciano, ou seja,

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) .$$

Trabalharemos nos espaços generalizados de Lebesgue e Lebesgue-Sobolev $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e usaremos métodos variacionais e topológicos.

Abstract

In this work we will approach subjects of existence of solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) is a bounded domain and smooth, $p(x) > 1$ it is a continuous function in $\overline{\Omega}$ and $\Delta_{p(x)}$ it is $p(x)$ -Laplacian, which is defined by

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)$$

We will work in the generalized spaces of Lebesgue e Lebesgue-Sobolev $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ and we used of methods variational and topological, we obtain some results of existence of solution for the problems in question.

Sumário

Introdução	1
1 Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$	4
1.1 Resultados Básicos e Definições	4
1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$	6
1.3 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$	7
1.4 Imersões	8
2 Um Princípio do Máximo Forte	9
2.1 Introdução	9
2.2 Preliminares	9
2.3 Resultado Principal	11
3 Um Problema Quase-Linear de Autovalor	15
3.1 Introdução	15
3.2 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano	16
4 Um Problema Singular via Método Topológico	35
4.1 Introdução	35
4.2 Hipóteses sobre as funções $p(x)$, $\gamma(x)$, $\alpha(x)$, $h(x)$ e $k(x)$	36
4.3 Existência de Solução	36
A Desigualdades de Simon	45
B Resultados Básicos Usados na Dissertação	48
C Minimização de Funcionais	50
Referências Bibliográficas	55

Introdução

O principal objetivo dessa dissertação é estudar os Espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados, bem como a existência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio limitado e suave, $p(x) > 1$ é uma função contínua e $\Delta_{p(x)}$ designa o operador $p(x)$ –Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) .$$

O operador $p(x)$ –Laplaciano ocorre em problemas físicos como, por exemplo, na teoria da elasticidade e mecânica dos fluidos eletroreológicos (ver [8] e [17]), em particular neste último a equação do movimento dos fluidos é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} S(u) + (u \nabla)u + \nabla \pi = f$$

onde $u : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido em um ponto do espaço-tempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ é o operador gradiente, $\pi : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ é a pressão, $f : \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa forças externas e o tensor "stress" $S : W_{loc}^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3+3}$ é da forma

$$S(u)(x) = \mu(x) \left(1 + |Du(x)|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x),$$

onde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ é a parte simétrica do gradiente de u .

Este trabalho é constituído de quatro capítulos e três apêndices. Observemos que ao longo deste trabalho Ω será sempre um domínio limitado e suave.

No **capítulo 1**, estudaremos o Espaço de Lebesgue Generalizado, definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < +\infty \right\},$$

$p \in C_+(\Omega)$, com $p(x) > 1$ e mencionaremos várias propriedades desse espaço, tais como, completeza, reflexividade, separabilidade e densidade. Apresentamos também um estudo do Espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, o qual é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}; |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

onde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Mostraremos vários resultados importantes para essa dissertação.

O **Capítulo 1** é baseado em Guimarães [5] e Fan [9].

No **Capítulo 2** apresentamos um princípio do máximo forte para equações envolvendo o operador $p(x)$ -Laplaciano, isto é,

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) + d(x)|u|^{q(x)-2}u = 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \quad (1)$$

onde Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ para $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $p \leq q(x) < p^*(x)$, onde

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{se } p(x) < N, \\ +\infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

$d(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $d(x) \geq 0$ em Ω .

O **Capítulo 2** é baseado no artigo de Fan e Zhang [9].

No **Capítulo 3**, estudaremos a existência de solução fraca em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \lambda |u|^{q(x)-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $p > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$.

O **Capítulo 3** é baseado no artigo de Rădulescu [13].

No **Capítulo 4**, estudamos a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quase-lineares:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \frac{h(x)}{u^{\gamma(x)}} + k(x)u^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio limitado e $p, h, k, \alpha, \gamma \in C(\overline{\Omega})$.

Para o **Capítulo 4**, temos como referência o artigo de Corrêa, Costa e Figueiredo [6].

No **Apêndice A** demonstramos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, valem as seguintes desigualdades clássicas:

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p}|x - y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ (p-1)\frac{|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases}$$

As desigualdades, acima, foram muito importantes no desenvolvimento dos **Capítulos 3** e **4**.

No **Apêndice B**, enunciamos vários resultados utilizados na dissertação.

No **Apêndice C**, demonstramos alguns resultados sobre minimização de funcionais, entre os quais o famoso Princípio Variacional de Ekeland.

Capítulo 1

Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo, estudaremos o Espaço de Lebesgue Generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ e apresentaremos um estudo do Espaço de Sobolev Generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Demonstrações podem ser encontradas em Fan [9] e Guimarães [5], respectivamente. Define-se

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável.

1.1 Resultados Básicos e Definições

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, um conjunto mensurável. Considere o conjunto

$$C_+(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}); u(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

Para cada $p \in C_+(\Omega)$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, definimos

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx,$$

$$p^- = \min_{\overline{\Omega}} p \quad e \quad p^+ = \max_{\overline{\Omega}} p.$$

A função ρ é chamada de modular.

Proposição 1.1. *Para cada $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tem-se*

- (a) $\rho(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$;
- (b) $\rho(-u) = \rho(u)$;
- (c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$, para todo $t \in [0, 1]$, isto é, ρ é uma função convexa;
- (d) $\rho(u + v) \leq 2^{p^+} [\rho(u) + \rho(v)]$;

(e) Se $\lambda > 1$, então

$$\rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+} \rho(u),$$

e se $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$\lambda^{p^+} \rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-} \rho(u) \leq \lambda \rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) Para cada $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\rho(\lambda u)$ é uma função crescente, contínua e convexa em $\lambda \in [0, \infty)$.

Pelos itens anteriores, podemos concluir:

Proposição 1.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Vamos, agora, definir uma norma no espaço $L^{p(x)}(\Omega)$, que será denotada por $\|\cdot\|_{p(x)}$ e apresentar algumas propriedades.

Proposição 1.3. $\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$ é uma norma em $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposição 1.4. Se a função $p(x) = p$ é constante, então

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p,$$

onde $\|\cdot\|_p$ é a norma usual do espaço $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.5. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$. Então,

$$\|u\|_{p(x)} = a \text{ se, e somente se, } \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Proposição 1.6. Seja $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. Então,

(1) $\|u\|_{p(x)} < 1$ ($= 1$; > 1) se, e somente se, $\rho(u) < 1$ ($= 1$; > 1);

(2) Se $\|u\|_{p(x)} > 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$;

(3) Se $\|u\|_{p(x)} < 1$, então $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.

Proposição 1.7. Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$. Se $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$.

1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades de $L^{p(x)}(\Omega)$.

O resultado abaixo é um corolário da demonstração da Proposição 1.7.

Teorema 1.1. *Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) tal que*

- (a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$, q.s. em Ω ;
- (b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para $k \geq 1$, q.s. em Ω , $h \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.2. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

A seguir, apresentamos uma versão do **Teorema da Representação de Riesz** para o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.3. *Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L_+^\infty$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Então, dado $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^$ existe um único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que*

$$f(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Agora, abordaremos a questão da densidade em $L^{p(x)}(\Omega)$

Teorema 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Teorema 1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Teorema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável.*

1.3 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, estudaremos o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, ou seja, o seguinte espaço

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \dots, N \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio. Tal espaço é muito importante em nosso trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a existência de solução para os problemas considerados nos capítulos seguintes.

Observamos que, para $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, então $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j -ésima derivada fraca de u , ou seja,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} -\frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, temos a seguinte norma

$$\|u\|_* = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}. \quad (1.1)$$

Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos o gradiente de u , por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

Note que podemos escrever o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega); |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Neste caso, é mais conveniente usarmos a norma equivalente

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

Teorema 1.7. $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.8. O espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo, se $p^- > 1$.

Definição 1.1. Definimos o espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Segue, imediatamente da definição de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, o seguinte resultado:

Teorema 1.9. $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.

1.4 Imersões

Temos alguns resultados de imersão que serão bastante úteis nos capítulos subseqüentes. Dentre esses resultados, destacamos um teorema que generaliza os teoremas de Sobolev e Rellich-Kondrachov, bem como uma desigualdade do tipo Poincaré.

Teorema 1.10. *Sejam $p, q \in C_+(\Omega)$ tais que $q(x) \leq p(x)$, q.s. em Ω . Então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua.

No que segue, temos

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N, \\ \infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Teorema 1.11. *Sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se*

$$q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Observação 1.1. *É possível mostrar que, se p e $q \in C(\overline{\Omega})$ são tais que*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

com imersão contínua.

Teorema 1.12. (Desigualdade de Poincaré) *Seja $p \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Observação 1.2. *Como consequência da Desigualdade de Poincaré, temos*

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{p(x)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, ou seja, as normas $\|u\|$ e $\|\nabla u\|_{p(x)}$ são equivalentes em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Capítulo 2

Um Princípio do Máximo Forte

2.1 Introdução

Consideremos a seguinte equação envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + d(x)|u|^{q(x)-2}u = 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \quad (2.1)$$

onde Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ para $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $p(x) \leq q(x) < p^*(x)$, onde

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{se } p(x) < N, \\ +\infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

$d(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $d(x) \geq 0$ em Ω .

No caso em que $p(x)$ não é idêntico a uma constante, até agora, não existia nenhum princípio do máximo, para a $p(x)$ -Laplaciano, porque os métodos tratavam com p -Laplaciano. Nesta seção, estudaremos o artigo "A strong maximum principle for $p(x)$ -laplace equations" de Fan X.L.; Zhao, D.; Zhang, Q. H.[11], que usando o ideal de Montenegro [14] e algumas técnicas especiais, estabelecemos um princípio do máximo forte para equação (2.1).

2.2 Preliminares

Definindo a aplicação

$$A : W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W^{1,p(x)}(\Omega))^*$$

como

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \varphi + d(x)|u|^{q(x)-2}u\varphi) dx,$$

$\forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\forall \varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

Verifica-se que A é uma aplicação contínua e limitada.

Lema 2.1. (ver [9]). Seja $h \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $X = h + W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, $A : X \rightarrow (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ é estritamente monótono e coercivo com respeito a h e é um homeomorfismo.

Seja $g \in (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$. Se

$$\langle g, \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \varphi \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega,$$

então denotemos por $g \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$. Correspondentemente, se $-g \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$, então denotemos $g \leq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$.

Definição 2.1. Dizemos que $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.1) se $Au = 0$ e u é chamada uma super-solução (sub-solução fraca) de (2.1) se $Au \geq 0$ ($Au \leq 0$) em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$.

Lema 2.2. (Princípio de Comparação). Sejam $u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfazendo $Au - Av \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ e $\varphi(x) = \min\{u(x) - v(x), 0\}$. Se $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (isto é, $u \geq v$ sobre $\partial\Omega$), então $u \geq v$ q.t.p. em Ω .

Demonstração. Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) < v(x)\}$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Au - Av, \varphi \rangle \\ &= - \int_{\Omega_1} [(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v)(\nabla u - \nabla v) \\ &\quad + d(x)(|u|^{q(x)-2} u - |v|^{q(x)-2} v)(u - v)] dx \leq 0, \end{aligned}$$

assim, $\nabla \varphi = 0$ q.t.p. em Ω e portanto $\varphi = 0$ q.t.p. em Ω desde que $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Conseqüentemente, $u \geq v$ q.t.p. em Ω . ■

Lema 2.3. (ver [10]) Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.1), então $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0, 1)$ é uma constante.

Observação 2.1. Para alguma constante positiva $p > 1$, T , a e k_1 , seja

$$v(t) = \frac{a}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} (e^{\frac{k_1 t}{p-1}} - 1), \forall t \in [0, T], \quad (2.2)$$

Derivando, obtemos

$$v'(t) = \frac{a \frac{k_1}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} e^{\frac{k_1 t}{p-1}}, \quad (2.3)$$

e é facilmente segue que para $t \in [0, T]$, temos $v'(t) > 0$, $v''(t) > 0$. Portanto, $v(t)$ e $v'(t)$ são estritamente crescentes em $[0, T]$. Além disso, $v(t)$ satisfaz

$$(p-1)v''(t) = k_1 v'(t), \forall t \in (0, T). \quad (2.4)$$

Por (2.3), temos

$$v'(0) = \frac{a}{T} \frac{\frac{k_1 T}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} > \frac{a}{T} e^{\frac{k_1 T}{p-1}} \quad (2.5)$$

e

$$v'(T) = \frac{\frac{a}{T} \frac{k_1}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} e^{\frac{k_1 T}{p-1}} < \frac{a}{T} e^{\frac{k_1 T}{p-1}}. \quad (2.6)$$

Sejam $\frac{a}{T} < 1$, $b > 0$ e

$$k_1 = -b \ln \frac{a}{T} + \frac{2(N-1)}{T}. \quad (2.7)$$

Então por (2.5) e (2.6) segue que

$$v'(0) > e^{\frac{-2(N-1)}{p-1}} \left(\frac{a}{T}\right)^{1+\frac{bT}{p-1}}, \quad (2.8)$$

e

$$v'(T) < e^{\frac{-2(N-1)}{p-1}} \left(\frac{a}{T}\right)^{1+\frac{bT}{p-1}}. \quad (2.9)$$

2.3 Resultado Principal

Apresentaremos agora, os enunciados dos resultados principais de capítulo, que serão demonstrados logo em seguida em duas etapas, para melhor entendimento:

Teorema 2.1. *Seja u uma super-solução fraca de (2.1), $u \geq 0$ q.t.p. em Ω , e seja u não idêntica a zero em Ω . Então, para algum subconjunto compacto não-vazio $K \subset \Omega$, existe uma constante positiva c tal que $u \geq c$ q.t.p. em K .*

Teorema 2.2. *Sejam u como no Teorema 2.1, $x_1 \in \partial\Omega$, $u \in C^1(\Omega \cup \{x_1\})$ e $u(x_1) = 0$. Se Ω satisfaz a condição de bola interior, então $\frac{\partial u(x_1)}{\partial \gamma} > 0$, onde γ é o vetor unitário normal dentro de $\partial\Omega$ sobre x_1 .*

Demonstração. Seja $u \geq 0$ um super-solução de (2.1) e em que não idêntica a zero em Ω . Provaremos o teorema (2.1) em dois passos:

Passo1: Prova do Teorema 2.1, no caso em que $u \in C^1(\Omega)$.

Afirmamos que $u > 0$ em Ω . Suponha o contrário, então podemos encontrar $x_1, x_2 \in \Omega$ e uma bola aberta $B(x_2, 2T) \subset\subset \Omega$ tal que $x_1 \in \partial B(x_2, 2T)$, $u(x_1) = 0$ e $u > 0$ em $B(x_2, 2T)$. O raio $2T = |x_1 - x_2|$ pode ser escolhido suficientemente pequeno (fixe x_1 , varie x_2).

Seja

$$a = \inf\{u(x) : |x_1 - x_2| = T\},$$

Então $a > 0$. Note que $\nabla u(x_1) = 0$ desde que $u_1(x) = 0$. Quando $T \rightarrow 0$, temos $a \rightarrow 0$ e fracamente $T \rightarrow 0$.

Denote

$$\begin{aligned} Y &= \{x \in \Omega : T < |x - x_2| < 2T\}, \quad p = p(x_1), \\ d &= \sup\{d(x) : x \in Y\}, \quad L = \sup\{|\nabla p(x)| : x \in Y\}, \\ b &= 8L + 2, \quad k_1 = -b \ln \frac{a}{T} + \frac{2(N-1)}{T}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sejam $T < 1$ e $\frac{a}{T}$ suficientemente pequeno tais que

$$\frac{p(x) - 1}{p - 1} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in Y, \quad (2.11)$$

e

$$-\ln \frac{a}{T} \geq d. \quad (2.12)$$

Sejam p, T, a, k_1 escolhidos como acima, e $v(t)$ a função definida por (2.2). Então

$$\left(\frac{a}{T}\right)^3 \leq v'(t) < 1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.13)$$

Sem perda de generalidade, considere $x_2 = 0$. Sejam $r = |x - x_2| = |x|$ e $t = 2T - r$.

Para $t \in [0, T]$ e $r \in [T, 2T]$, definido

$$w(r) = v(2T - r) = v(t),$$

então $w'(r) = -v'(t)$ e $w''(r) = v''(t)$.

Seja $w(x) = w(r)$ para $x \in Y$ com $|x| = r$, então $w \in C^2(Y)$.

A seguir, provaremos que $w(x)$ é uma sub-solução fraca de (2.1) em Y . Temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla w(x)|^{p(x)-2} \nabla w(x)) &= (p(x) - 1)(v'(t))^{p(x)-2} v''(t) \\ &\quad - (v'(t))^{p(x)-1} \ln v'(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} - \frac{N-1}{r} (v'(t))^{p(x)-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Segue de (2.4) e (2.11) que

$$(p(x) - 1)(v'(t))^{p(x)-2} v''(t) \geq \frac{1}{2} k_1 (v'(t))^{p(x)-1}. \quad (2.15)$$

Por (2.10) e (2.13),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} k_1 (v'(t))^{p(x)-1} - (v'(t))^{p(x)-1} \ln v'(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} - \frac{N-1}{r} (v'(t))^{p(x)-1} \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} \left(\frac{1}{2} k_1 + L \ln v'(t) - \frac{N-1}{r} \right) \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} \left(\frac{b}{2} k_1 + L \ln \frac{a}{T} - \frac{N-1}{T} + L \ln \left(\frac{a}{T}\right)^3 - \frac{N-1}{r} \right) \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} \left(\frac{a}{T} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Note que

$$v'(t) = \frac{1}{T}v(t) \geq v(t),$$

que juntamente com (2.12), mostra que

$$(v'(t))^{p(x)-1}(-\ln \frac{a}{T}) - d(v(t))^{q(x)-1}(-\ln \frac{a}{T} - d) \geq 0. \quad (2.17)$$

Segue de (2.14)-(2.17) que

$$\operatorname{div}(|\nabla w(x)|^{p(x)-2}\nabla w(x)) \geq d(x)|w(x)|^{q(x)-1},$$

isto é, $w(x)$ é uma sub-solução de (2.1) em Y .

Note que $w \leq u$ sobre ∂Y . Pelo Lema 2.2, obtemos $w \leq u$ em Y . Assim,

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{u(x_1 + s(x_2 - x_1)) - u(x_1)}{s} \\ & \geq \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{w(x_1 + s(x_2 - x_1)) - w(x_1)}{s} = v'(0) > 0 \end{aligned}$$

contradizendo o fato que $\nabla u(x_1) = 0$, o que finaliza a etapa 1.

Etapa 2. Prova do Teorema 2.1 para uma super-solução fraca geral $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Seja $\Omega_0 = \{x \in \Omega : \exists B(x, \epsilon) \subset \Omega\}$, tal que $u = 0$ q.t.p. em $B(x, \epsilon)$, seja $\Omega_+ = \Omega \setminus \Omega_0$.

Lema 2.4. Para $x_0 \in \Omega_+$, existe $B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ e uma constante positiva c tal que $u \geq c$, q.t.p. em Ω .

Prova. Seja $x_0 \in \Omega_+$, então existe $B(x_0, 2\epsilon) \subset \subset \Omega$ tal que u é não identicamente nula sobre $\partial B(x_0, 2\epsilon)$.

Considere o problema

$$Aw = 0 \text{ em } B(x_0, 2\epsilon), \quad w = u \text{ sobre } \partial B(x_0, 2\epsilon). \quad (2.18)$$

Então pelo Lema 2.1 (2.18) tem uma única solução w . Conseqüentemente

$$w \in C_{loc}^{1,\alpha}(B(x_0, 2\epsilon)).$$

Pelo Lema 2.3, w é não identicamente nula em $B(x_0, 2\epsilon)$ pois w é não identicamente nula sobre $\partial B(x_0, 2\epsilon)$. Aplicando o princípio da comparação para w e $v \equiv 0$, concluímos que $w \geq 0$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Pela etapa 1, $w > 0$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Assim existe $c > 0$ tal que $w \geq c$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Conseqüentemente, $u \geq c$ q.t.p. em $B(x_0, 2\epsilon)$ pela aplicação do princípio da comparação para w e u em $B(x_0, 2\epsilon)$.

Lema 2.5. $\Omega_0 = \phi$, isto é, $\Omega = \Omega_+$.

Prova. Obviamente, $\Omega_0 \subset \Omega$ é aberto e $\Omega_0 \neq \Omega$ pois u é não identicamente nula em Ω . Se $\omega_0 \neq \phi$, então existe $x_0 \in \Omega_+ \cap \partial\Omega_0$ e uma bola $B = B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ tal que $u > 0$ q.t.p.

em B pelo Lema 2.4, especificamente, $u > 0$ q.t.p. em $B \cap \Omega_0$; que contradiz a definição de Ω_0 .

Agora, podemos terminar a etapa 2, pelo Lema 2.1 e Lema 2.2. De fato, para qualquer compacto não-vazio $K \subset \Omega$, existem finitas bolas abertas B_i , $i = 1, 2, \dots, m$, tais que $K \subset \cup_{i=1}^m B_i \subset \Omega$ e $u \geq c_i$ q.t.p. em B_i , onde c_i são constantes positivas. Seja $c = \min\{c_i : i = 1, 2, \dots, m\}$, então $u \geq c$ q.t.p. em K . Logo, o Teorema 2.1. está provado.

Prova do Teorema 2.2. Escolha $T > 0$ suficientemente pequeno. Seja $x_2 = x_1 + 2T\gamma$, então $B(x_2, 2T) \subset \Omega$, $x_1 \in \partial B(x_2, 2T)$. Denote $Y = \{x \in \Omega : T < |x - x_2| < 2T\}$, nós escolhemos $0 < a < \inf\{u(x) : |x - x_2| = T\}$ e considere a tão pequeno quanto se queira, da mesma maneira que a etapa 1 da prova de Teorema 2.1, existe uma sub-solução $w \in C^{\bar{Y}}$ de (2.1) em Y e w satisfaz: $w \leq u$ em Y , $w(x_1) = 0$, $\frac{\partial w(x_1)}{\partial \gamma} > 0$. Conseqüentemente

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial \gamma} > \frac{\partial w(x_1)}{\partial \gamma} > 0$$

.

■

Capítulo 3

Um Problema Quase-Linear de Autovalor

3.1 Introdução

Um dos problemas de grande importância em Equações Diferenciais Parciais é o estudo do **Espectro do Laplaciano no Espaço de Sobolev** $H_0^1(\Omega)$. Mais precisamente, dado um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$, devemos estudar o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

ou seja, encontrar valores de λ e funções $u \neq 0, u \in H_0^1(\Omega)$, que satisfaçam (3.1).

Segue-se da **Teoria Espectral de Operadores Compactos e Auto-Adjuntos** que existe uma sequência de autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$, $\lambda_j \rightarrow \infty$ e tal sequência é exatamente o espectro de $-\Delta$. Além disso, segue-se do **Princípio do Máximo** que se designarmos por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ as autofunções correspondentes, temos que φ_1 é a única que possui sinal definido e λ_1 é simples, isto é, seu autoespaço possui dimensão igual a um. Tem-se, também, que $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ constitui uma base ortonormal hilbertiana em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j &= 0, \text{ se } i \neq j \\ \int_{\Omega} |\nabla \varphi_i|^2 &= 1, \text{ se } i = j \end{aligned}$$

Este é o caso isotrópico. O caso anisotrópico:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

também tem sido estudado por Manes-Micheletti [12] e Hess-Kato [15].

Neste capítulo, estaremos interessados na existência da solução fraca em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para o seguinte problema de autovalor não-linear, dado por:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) é um domínio limitado e suave, $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real e $p, q \in C(\bar{\Omega})$, onde $\Delta_{p(x)}$ denota o operador $p(x)$ -Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$$

Estudaremos o problema (3.3) considerando a hipótese

$$1 < \min_{x \in \bar{\Omega}} q(x) < \min_{x \in \bar{\Omega}} p(x) < \max_{x \in \bar{\Omega}} q(x) \quad (3.4)$$

O principal resultado deste capítulo estabelece a existência de uma família contínua de autovalores do problema (3.3). Mais precisamente, mostraremos que existe $\lambda^* > 0$, tal que todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ é um autovalor para o problema (3.3).

3.2 Propriedades do Operador $p(x)$ -Laplaciano

Daqui por diante, denotaremos $E = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3.1. *O funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração. Para demonstrar que o funcional I é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, basta mostrar que a derivada de Gateaux de I existe e é contínua.

Existência da derivada de Gateaux: Sejam $u, v \in E$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, considere $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(0, 1)$, definida por

$$g(s) = |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)}.$$

Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$ tal que

$$g'(\lambda) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} g'(s) &= p(x) |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)-1} \frac{t\nabla v(\nabla u + st\nabla v)}{|\nabla u + st\nabla v|} \\ &= p(x)t |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)-2} (\nabla u + st\nabla v) \nabla v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(\lambda) = p(x)t|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v, \quad (3.5)$$

o que implica que

$$\frac{|\lambda t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v. \quad (3.6)$$

Observe que

$$h := |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v \rightarrow |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v, \text{ quase sempre em } \Omega \quad (3.7)$$

quando $t \rightarrow 0$

Notemos que

$$|h| \leq |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|. \quad (3.8)$$

Como

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega).$$

temos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Aplicando a desigualdade do tipo Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| dx = C \|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nabla v\|_{p(x)} < \infty.$$

Portanto,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega). \quad (3.9)$$

Logo, utilizando (3.5) a (3.9) e o Teorema da Convergência Dominada, teremos

$$\begin{aligned} I'(u)v &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} (|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v dx. \end{aligned}$$

Continuidade da derivada de Gateaux: Consideremos $\{u_n\} \subset E$, tal que $u_n \rightarrow u$ em E , desse modo,

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \text{ em } (L^{p(x)}(\Omega))^N \quad (3.10)$$

De acordo com o teorema 1.1, existe uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $g \in L^{p(x)}(\overline{\Omega})$, tais que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \text{ quase sempre em } \Omega, \quad (3.11)$$

$$|\nabla u_n| \leq g, \text{ quase sempre em } \Omega \quad (3.12)$$

Por (3.11), ocorre que:

$$|\nabla u_n(x)| \longrightarrow |\nabla u(x)|, \text{ q.t.p. em } \Omega \quad (3.13)$$

Para todo $v \in E$, temos

$$\begin{aligned} |I'(u_n) - I'(u), v| &= \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla v \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx \right| \\ I'(u_n)v &= \left| \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \nabla v \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u| |\nabla v| \, dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Consideremos

$$f_n = ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u| |\nabla v|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.15)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_n &\leq ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n| + ||\nabla u|^{p(x)-2} (-\nabla u)| \\ &\leq |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Observando que:

$$|\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \in L^{q(x)}(\Omega),$$

onde $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$. De (3.16), concluímos que

$$\{f_n\} \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

Pela desigualdade de Hölder em (3.14), temos

$$\begin{aligned} |I'(u_n) - I'(u), v| &\leq \left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla v \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx \right| \\ I'(u_n)v &\leq \int_{\Omega} f_n |\nabla v| \, dx \\ &\leq C \|f_n\|_{q(x)} \|\nabla v\|_{p(x)} \\ &\leq C \|f_n\|_{q(x)} \|v\|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \leq C\|f_n\|_{q(x)}. \quad (3.17)$$

Usando agora (3.11) e (3.13) em (3.15), temos

$$f_n : \|\nabla u_n\|^{p(x)-2} \nabla u_n - \|\nabla u\|^{p(x)-2} \nabla u \longrightarrow \|\nabla u\|^{p(x)-2} \nabla u - \|\nabla u\|^{p(x)-2} \nabla u = 0,$$

ou seja,

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \text{ quase sempre em } \Omega \quad (3.18)$$

Por (3.12) e (3.16), obtemos

$$f_n(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1} \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_n(x)^{q(x)} &\leq (g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1})^{q(x)} \\ &\leq 2^{q(x)} (g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_n(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+} \cdot (g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x)-1}) \in L^1(\Omega), \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (3.19)$$

De (3.18), (3.19) e usando o Teorema da Convergência Dominada, ocorre que

$$\int_{\Omega} f_n(x)^{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, pela proposição 1.7, tem-se

$$\|f_n\|_{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Desse fato e de (3.17), temos

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux I é contínua.

Teorema 3.2. *O funcional $G : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$G(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração. Para mostrar que o funcional G é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ podemos proceder de modo análogo, com no Teorema (3.1).

Existência da derivada de Gateaux: Sejam $u, v \in E$, $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(0, 1)$, definida por $f(s) = |u + stv|^{q(x)}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$, tal que

$$f'(\lambda) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}.$$

Observe que

$$f'(s) = q(x)|u + stv|^{q(x)-1} \frac{tv(u + stv)}{|u + stv|}$$

$$f'(s) = q(x)t|u + stv|^{q(x)-2}(u + stv)(v).$$

Logo,

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = q(x)t|u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v),$$

ou seja,

$$\frac{|u + stv|^{q(x)} - |u|^{q(x)}}{q(x)t} = |u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v). \quad (3.20)$$

Note que

$$h := |u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v) \rightarrow |u|^{q(x)-2}uv, \text{ quando } t \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Observe que

$$|h| \leq |u + \lambda tv|^{q(x)-1}v \leq (|u| + |v|)^{q(x)-1}|v|. \quad (3.22)$$

Desde que $|u|, |v| \in L^{p(x)}(\Omega)$, temos

$$(|u| + |v|)^{q(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega)$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{\Omega} (|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| dx \leq C \|(|u| + |v|)^{q(x)-1}\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \|v\|_{p(x)} < \infty.$$

Assim,

$$(|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \quad (3.23)$$

De (3.21) - (3.23) e usando o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned} G'(u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)t} (|u + tv|^{q(x)} - |u|^{q(x)}) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} |u + \lambda tv|^{q(x)-2} (u + \lambda tv) v dx \\ &= \int_{\Omega} |u|^{q(x)-1} uv dx. \end{aligned}$$

Continuidade da derivada de Gateaux: Consideremos $\{u_n\} \subset E$, tal que $u_n \rightarrow u$ em E , de acordo com o teorema (ver), existem uma subsequência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $g \in L^{p(x)}(\bar{\Omega})$ tais que

$$u_n(x) \rightarrow u \text{ quase sempre em } \Omega, \quad (3.24)$$

e

$$|u_n| \leq h(s), \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (3.25)$$

Logo, por (3.24), temos

$$|u_n(x)| \rightarrow |u|, \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (3.26)$$

Para todo $v \in E$, tem-se

$$\begin{aligned} | \langle G'(u_n)v - G'(u), v \rangle | &= \left| \int_{\Omega} |u_n|^{q(x)-2} u_n v dx - \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} uv dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (|u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u) v dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} ||u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u| |v| dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Definindo

$$g_n = ||u_n|^{q(x)-2} u_n - |u|^{q(x)-2} u| |v|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.28)$$

tem-se

$$g_n \leq |u_n|^{q(x)-1} - |u|^{q(x)-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.29)$$

Note que

$$|u_n|^{q(x)-1} + |u|^{q(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega)$$

e de (3.29) segue que

$$\{g_n\} \subset L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega).$$

Utilizando a desigualdade de Hölder em (3.27), obtemos

$$\begin{aligned} |G'(u_n) - G'(u), v| &\leq \int_{\Omega} ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u||v|| dx, \\ &\leq \int_{\Omega} g_n |v| dx \\ &\leq C \|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \|v\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \leq C \|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \quad (3.30)$$

Usando (3.24), (3.26) e (3.28), obtemos

$$g_n := ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u| \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$g_n(x) \longrightarrow 0 \text{ quase sempre em } \Omega. \quad (3.31)$$

Por (3.26) e (3.29), temos

$$g_n(x) \leq h(x)^{q(x)-1} + |u(x)|^{q(x)-1} \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Daí,

$$\begin{aligned} [g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} &\leq [g_n(x)^{q(x)-1} + |u(x)|^{q(x)-1}]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \\ &\leq 2^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} (g_n(x)^{q(x)} + |u(x)|^{q(x)}). \end{aligned}$$

Logo,

$$[g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \in L^1(\Omega), \text{ quase sempre em } \Omega \quad (3.32)$$

Utilizando de (3.30)-(3.31) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_{\Omega} [g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Desse modo, pela Proposição 1.7, ocorre

$$\|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Desse fato e (3.30), obtemos

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

e isto conclue a continuidade da derivada de Gateaux G' .

Se definirmos $L := I' : E \longrightarrow E^*$, então

$$(L(u), v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx, \text{ para todo } u, v \in E.$$

Vamos estudar agora, algumas propriedades interessantes e úteis desse operador com intuito de obtermos solução fraca para o problema (3.3).

Teorema 3.3. *O operador $L : E \longrightarrow E^*$ é:*

- (a) *contínuo;*
- (b) *limitado;*
- (c) *estritamente monótono, isto é, $(L(u) - L(v), u - v) > 0, \forall u, v \in E$, com $u \neq v$;*
- (d) *do tipo S_+ , isto é, se*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} (L(u) - L(v), u - v) \leq 0,$$

então

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } E;$$

- (e) *um homeomorfismo.*

Demonstração.

(a) Como $(L(v), v) = (I'(v), v)$, para todos $u, v \in E$, temos que L é contínua devido a continuidade da derivada de Gateaux de I .

(b) Considere $B \subset E$ um conjunto limitado. Portanto, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\| \leq K, \text{ para todo } u \in B. \quad (3.33)$$

Se $u \in B$ e $v \in E$, então,

$$(L(u), v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx \Rightarrow |(L(u), v)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla v| \, dx \quad (3.34)$$

Pela desigualdade de Hölder em (3.34), temos:

$$\begin{aligned} |(L(u), v)| &\leq C \| |\nabla u|^{p(x)-1} \|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nabla v\|_{p(x)} \\ &= C \|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nabla v\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|L(v)\| \leq C \|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}, \forall v \in B \quad (3.35)$$

onde $g = |\nabla u|^{p(x)-1}$.

Desde que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| \leq K, \text{ para todo } u \in B,$$

então existe $\ddot{k} > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x)^{p(x)} dx = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-1})^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \leq \ddot{k}.$$

Portanto, por (3.35), concluímos que L é limitado.

(c) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, valem as desigualdades (ver apêndice B):

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p} |x - y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ (p-1) \frac{|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Considere $u, v \in E$, tais que $u \neq v$. Então, $\nabla u \neq \nabla v$. Considere os conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega; p(x) \geq 2\} \text{ e } \Omega_- = \{x \in \Omega; 1 < p(x) < 2\}.$$

A monotonicidade estrita de L segue fazendo $x = \nabla u$ e $y = \nabla v$ nas desigualdades acima e integrando sobre Ω_+ ou Ω_- , conforme seja $p(x) \geq 2$ ou $1 < p(x) < 2$, respectivamente.

(d) Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u), u_n - u) = 0.$$

Se $p(x) \geq 2$, então

$$\int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \leq (L(u_n) - L(u), u_n - u) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Se $1 < p(x) < 2$, então utilizando a desigualdade tipo Hölder, ocorre

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx &= C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx \\ &\leq C \|g_n\|_{\frac{2}{p(x)}} \|h_n\|_{\frac{2}{2-p(x)}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$g_n := \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}$$

e

$$h_n := (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em E , então (u_n) é limitada. Portanto, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx \leq C_3.$$

Assim,

$$\rho_{\frac{2}{2-p(x)}}(h_n) = \int_{\Omega_-} |h_n|^{\frac{2}{2-p(x)}} dx = \int_{\Omega_-} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)} dx \quad (3.37)$$

$$\leq 2^{p^+} \left(\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p(x)} dx \right) \leq C_4. \quad (3.38)$$

Temos também

$$\rho_{\frac{2}{p(x)}}(h_n) = \int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}} dx \leq C_5 \cdot (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Usando (3.37) e (3.39) em (3.36), obtemos

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx = \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Logo, pela Proposição 1.7, temos

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{p(x)} \longrightarrow 0.$$

o que implica

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0.$$

(e) Como L estritamente monótona, então L é injetivo.

Suponhamos que $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$. Pela Proposição 1.5, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx \geq \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \quad (3.40)$$

Pela desigualdade de Poincaré, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geq C \|u\| \quad (3.41)$$

Por (3.40) e (3.41), segue que

$$\frac{(L(u), u)}{\|u\|} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla v dx}{\|u\|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}}{\|u\|} \\
&\geq \frac{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}}{\|u\|} \\
&\geq \frac{C^{p^-} \cdot \|u\|_{p(x)}^{p^-}}{\|u\|} \\
&\geq \ddot{C} \|u\|_{p(x)}^{p^- - 1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(L(u), u)}{\|u\|} = \infty, \quad (3.42)$$

ou seja, L é coercivo. Usando essa última propriedade, a continuidade e a monotonicidade de L , concluímos que L é sobrejetivo.

Dessa forma, existe o operador inverso

$$L^{-1} : E^* \longrightarrow E. \quad (3.43)$$

Vamos demonstrar que L^{-1} é contínuo. Seja $\{g_n\} \subset E^*$, tal que $g_n \longrightarrow g$ em E^* .

Considere

$$u_n = L^{-1}(g_n) \text{ e } u = L^{-1}(g).$$

Desde que L é uma bijeção, ocorre

$$L(u_n) = g_n \text{ e } L(u) = g \quad (3.44)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(L(u_n), u_n)}{\|u_n\|} &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla u_n \, dx}{\|u_n\|} \\
&= \frac{\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} \, dx}{\|u_n\|}.
\end{aligned}$$

Pela limitação $\{g_n\}$ e por (3.42), concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em E . Sendo E um Espaço de Banach reflexivo, então a menos de subsequência podemos supor

$$u_n \rightharpoonup u_0.$$

Notemos que

$$(L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0) = (g_n, u_n - u_0) - (L(u_0), u_n - u_0)$$

Por outro lado, temos

$$(g_n, u_n - u_0) = (g_n - g, u_n - u_0) + (g, u_n - u_0)$$

Mas, $g_n \longrightarrow g$ e $u_n \longrightarrow u_0$, de onde segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0) = 0$$

Como L é do tipo (S_+) , temos

$$u_n \longrightarrow u_0 \quad (3.45)$$

Sendo L contínua, temos

$$L(u_n) \longrightarrow L(u_0)$$

Por (3.44), obtemos

$$L(u) = L(u_0)$$

Desde que L é injetivo, temos $u = u_0$. Portanto, de (3.45) temos

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } E,$$

mostrando que L^{-1} é contínuo, assim concluímos que L é um homeomorfismo.

Observação 3.1. Pelos Teoremas 3.1 e 3.2, o funcional energia $J_\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$J_\lambda(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx.$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, com

$$J'_\lambda(u)v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} uv dx, \quad \forall u, v \in E$$

Dessa forma, as soluções fracas de (3.3) são os pontos críticos de J_λ .

Lema 3.1. Existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ existem $\rho, a > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq a$ para todo $u \in E$ com $\|u\| = \rho$.

Demonstração Desde que $q(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que E está imerso continuamente em $L^{q(x)}(\Omega)$. Assim, existe uma constante positiva C_1 , tal que

$$|u|_{q(x)} \leq C_1 \|u\|, \quad \forall u \in E. \quad (3.46)$$

Fixemos $\rho \in (0, 1)$, tal que $\rho < \frac{1}{C_1}$, Esta condição implica que

$$u \in E, \quad \|u\| = \rho$$

então

$$|u|_{q(x)} \leq C_1 \|u\| = C_1 \rho < 1 \quad (3.47)$$

Além disso, pela relação (1.6), temos

$$\rho_{q(x)}(u) = \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq |u|_{q(x)}^{q^-}, \quad \forall u \in E, \quad \|u\| = \rho \quad (3.48)$$

De (3.46) e (3.48), obtemos

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq |u|_{q(x)}^{q^-} \leq C_1^{q^-} \|u\|^{q^-}, \quad \forall u \in E, \quad \|u\| = \rho \quad (3.49)$$

De (1.6) e (3.49), teremos que, para cada $u \in E$, $\|u\| = \rho$,

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{p^+} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{q^-} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^-} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \|u\|^{q^-} \end{aligned}$$

Agora, observamos que $\|u\| = |\nabla u|_{p(x)} < 1$ e da relação (1.6) tem-se

$$\|u\| = |\nabla u|_{p(x)} < 1 \text{ e } \rho_{p(x)}(|\nabla u|) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^+} = \|u\|^{p^+}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_{\lambda}(u) &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \|u\|^{q^-} \\ &= \frac{1}{p^+} \rho^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \rho^{q^-} \\ &= \rho^{q^-} \left(\frac{1}{p^+} \rho^{p^+ - q^-} - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \right) \end{aligned}$$

Definamos

$$\lambda^* = \frac{\rho^{p^+ - q^-}}{2p^+} \cdot \frac{q^-}{C_1^{q^-}} \quad (3.50)$$

Observando que, em virtude da condição (3.4), temos $p^+ > q^-$. Então, para $\lambda < \lambda^*$, teremos

$$\begin{aligned} \lambda &< \frac{\rho^{p^+ - q^-}}{2p^+} \frac{q^-}{C_1^{q^-}} \\ \frac{\lambda C_1^{q^-}}{q^-} &< \frac{\rho^{p^+ - q^-}}{2p^+} < \frac{\rho^{p^+ - q^-}}{p^+} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\rho^{p^+-q^-}}{p^+} - \frac{\lambda C_1^{q^-}}{q^-} > 0$$

Portanto, tomando $a = \frac{\rho^{p^+}}{2p^+} > 0$, teremos para $\lambda \in (0, \lambda^*)$, $\|u\| = \rho$.

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \rho^{q^-} \left(\frac{1}{p^+} \rho^{p^+-q^-} - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \right) \\ &= \rho^{q^-} \left(\frac{1}{p^+} \rho^{p^+-q^-} - \frac{\rho^{p^+-q^-}}{2p^+} \cdot \frac{q^-}{C_1^{q^-}} \cdot \frac{C_1^{q^-}}{q^-} \right) \\ &= \rho^{q^-} \frac{1}{2p^+} \rho^{p^+-q^-} = \frac{\rho^{p^+}}{2p^+} = a > 0 \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do Lema 2.1.

Lema 3.2. *Existe $\phi \in E$ tal que $\phi \geq 0$ e $\phi \not\equiv 0$ e $J_\lambda(t\phi) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. A hipótese (3.4) nos afirma que

$$1 < \min_{x \in \bar{\Omega}} q(x) < \min_{x \in \bar{\Omega}} p(x) < \max_{x \in \bar{\Omega}} q(x)$$

o que implica que $q^- < p^-$. Considere $\varepsilon_0 > 0$ tal que $q^- + \varepsilon_0 < p^-$.

Por outro lado, desde que $q \in C(\bar{\Omega})$, segue-se que existe um conjunto aberto $\Omega_0 \in \Omega$, tal que $\bar{\Omega}_0 \in \Omega$ e $|q(x) - q^-| < \varepsilon_0$, $\forall x \in \Omega_0$.

Assim,

$$\begin{aligned} -\varepsilon_0 &< q(x) - q^- < \varepsilon_0, \forall x \in \Omega_0 \\ q^- - \varepsilon_0 &< q(x) < q^- + \varepsilon_0, \forall x \in \Omega_0 \end{aligned}$$

desse modo:

$$q(x) < q^- + \varepsilon_0 < p^-, \forall x \in \Omega_0$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tal que $\text{supp}(\phi) \supset \bar{\Omega}_0$, $\phi = 1$, $\forall x \in \bar{\Omega}_0$ e $0 \leq \phi(x) \leq 1$, em Ω .

Para $t \in (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{t^{p(x)}}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{t^{q(x)}}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \cdot \frac{t^{q^-+\varepsilon_0}}{q} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx \end{aligned}$$

Para $J_\lambda(u) < 0$, devemos ter

$$\frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \cdot \frac{t^{q^-+\varepsilon_0}}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx < 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx &< \lambda \cdot \frac{t^{q^- + \varepsilon_0}}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx \\
\frac{t^{p^-}}{t^{q^- + \varepsilon_0}} &< \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx} \\
t^{p^- - q^- - \varepsilon_0} &< \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx}.
\end{aligned}$$

Desde que $p^- - q^- - \varepsilon_0 > 0$, ocorre

$$t < \left(\frac{\frac{\lambda p^-}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx} \right)^{\frac{1}{p^- - q^- - \varepsilon_0}}.$$

Definindo

$$0 < \delta < \min \left\{ 1, \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+} \int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx}{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx} \right\},$$

temos que, $J_{\lambda}(u) < 0$ para $t < \delta^{\frac{1}{p^- - q^- - \varepsilon_0}}$.

Observemos que $\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx > 0$. De fato, é claro que

$$\int_{\Omega_0} |u|^{q(x)} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq \int_{\Omega} |u|^{q^-} dx$$

Por outro lado, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{q^-}(\Omega)$ e, assim, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\phi|_{q^-} = C_2 \|\phi\|.$$

Esta desigualdade nos diz que $\|\phi\| > 0$.

(a) Se $\|\phi\| > 1$, pela relação (1.6), temos

$$1 < |\nabla \phi|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(\nabla \phi) = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx.$$

(b) Se $\|\phi\| < 1$, pela Proposição 1.6, ocorre:

$$|\nabla \phi|^{p^+} \leq \rho_{p(x)}(\nabla \phi) = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx > 0$$

concluindo, assim, a demonstração do lema. ■

Definição 3.1. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do problema (3.3) se existir $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u v dx = 0, \quad (3.51)$$

para todo $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Observemos que se λ for um autovalor do problema (3.3), então a função correspondente $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ é uma solução fraca de (3.3).

Temos o seguinte resultado central desse capítulo:

Teorema 3.4. Suponhamos que condição (3.4) seja satisfeita,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} p(x) < N \text{ e } q(x) < p^*(x), \forall x \in \bar{\Omega}$$

Então existe $\lambda^* > 0$ tal que todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ é um autovalor do problema (3.3).

Esse Teorema implica que

$$\inf_{u \in W_0^{1,p(x)} \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx}{\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx} = 0$$

de onde segue-se que dado qualquer $C > 0$, existe $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$C \int_{\Omega} |u_0|^{q(x)} dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u_0|^{p(x)} dx$$

Demonstração. Seja λ^* definido em (3.50). Pelo Lema 3.1, existe uma bola centrada na origem, $B_\rho(0)$ tal que

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda > 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2, existe $\phi \in E$ tal que $J_\lambda(t\phi) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. Já sabemos que $u \in B_\rho(0)$, teremos

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} C_1^{q^-} \|u\|^{q^-}.$$

Como $p^+ > q^-$, segue-se que

$$-\infty < \underline{C} = \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\epsilon < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda \quad (3.52)$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice C) ao funcional

$$J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \longrightarrow \mathbb{R},$$

encontramos $u_\epsilon \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$J_\lambda(u_\epsilon) < \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon$$

e

$$J_\lambda(u_\epsilon) < J(u) + \epsilon \|u_\epsilon - u\|, \quad u \neq u_\epsilon.$$

Desde que

$$J_\lambda(u_\epsilon) \leq \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < J_\lambda(u), \quad \forall u \in \partial B_\rho(0),$$

concluimos que $u_\epsilon \in B_\rho(0)$.

Agora definimos

$$\begin{aligned} I_\lambda &: \overline{B_\rho(0)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ I_\lambda(u) &= J_\lambda(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_\epsilon) &< J(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\| \\ J_\lambda(u_\epsilon) + \|u_\epsilon - u_\epsilon\| &< J(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\| \\ I_\lambda(u_\epsilon) &< J(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\|, \quad u \neq u_\epsilon, \end{aligned}$$

tem-se que u_ϵ é ponto mínimo de I_λ .

Assim,

$$\frac{I_\lambda(u_\epsilon + tv) - I_\lambda(u_\epsilon)}{t} \geq 0, \text{ se } t > 0 \text{ for pequeno, para todo } v \in B_1(0).$$

A relação acima implica que

$$\begin{aligned} \frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - \epsilon \|u_\epsilon + tv - u_\epsilon\| - J_\lambda(u_\epsilon) - \epsilon \|u_\epsilon - u_\epsilon\|}{t} &\geq 0, \\ \frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - J_\lambda(u_\epsilon)}{t} + \epsilon \|v\| &\geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_\epsilon), v \rangle + \epsilon \|v\| &\geq 0, \\ \langle J'_\lambda(u_\epsilon), -v \rangle + \epsilon \|v\| &\geq 0, \\ -\langle J'_\lambda(u_\epsilon), v \rangle + \epsilon \|v\| &\geq 0 \\ \langle J'_\lambda(u_\epsilon), v \rangle &\leq \epsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\langle J'_\lambda(u_\epsilon), v \rangle}{\|v\|} \leq \epsilon.$$

Portanto,

$$\|J'_\lambda(u_\epsilon)\|_{E^*} = \sup \frac{\langle J'_\lambda(u_\epsilon), v \rangle}{\|v\|} \leq \epsilon.$$

Dessa forma, tomando $\epsilon \subset \frac{1}{n}$ encontramos uma seqüência $(w_n) \in B_\rho(0)$, tal que

$$J_\lambda(w_n) \longrightarrow \underline{C} \text{ e } J'_\lambda(w_n) \longrightarrow 0. \quad (3.53)$$

Desde que $w_n \in B_\rho(0)$, temos que (w_n) é limitada em E . Assim, existe $w \in E$, tal que

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } E.$$

Desde que $q(x) < p^*(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$, E está imerso compactamente em $L^{q(x)}(\Omega)$ e, assim, a menos de subsequência,

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } L^{q(x)}(\Omega).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |w|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx \\ &= \int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-1} (w_n - w) dx. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx \right| \leq C \| |w|^{q(x)-1} \|_{q'(x)} \|w_n - w\|$$

onde

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1 \quad \frac{1}{q(x)} = \frac{q(x) - 1}{q(x)}$$

Desde que

$$\| |w|^{q(x)-1} \|_{q'(x)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_{\Omega} \left| \frac{|w|^{q(x)-1}}{\lambda} \right|^{q'(x)} dx \leq 1 \right\},$$

temos que $\| |w|^{q(x)-1} \|_{q'(x)}$ é limitada por uma constante e $|w_n - w|_{q(x)} \longrightarrow 0$,

concluimos que

$$\int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx \longrightarrow 0.$$

A relação (3.53) implica que

$$\left\langle J'_\lambda(w_n), w_n - w \right\rangle = \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p(x)-2} \nabla w_n \nabla (w_n - w) dx - \lambda \int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx.$$

de onde concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p(x)-2} \nabla w_n \nabla (w_n - w) dx = 0 \quad (3.54)$$

Sabemos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, vale a desigualdade seguinte (ver apêndice A):

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq C|x - y|^p, \text{ se } p \geq 2.$$

Pondo $x = \nabla w_n$ e $y = \nabla w$ na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned} \langle |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n - |\nabla w|^{p-2} \nabla w, \nabla w_n - \nabla w \rangle &\geq C|\nabla(w_n - w)|^{p(x)} \\ \langle |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n, \nabla(w_n - w) \rangle - \langle |\nabla w|^{p-2} \nabla w, \nabla(w_n - w) \rangle &\geq C|\nabla(w_n - w)|^{p(x)} \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla(w_n - w) - |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla(w_n - w)) dx &\geq \\ C \int_{\Omega} |\nabla(w_n - w)|^{p(x)} dx &\quad (3.55) \end{aligned}$$

Desde que $w_n \rightharpoonup w$ em E , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla(w_n - w) \longrightarrow 0,$$

logo

$$\int_{\Omega} |\nabla(w_n - w)|^{p(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\rho_{p(x)}(\nabla(w_n - w)) \longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla(w_n - w)|^{p(x)} dx \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 1.7, ocorre que

$$\|\nabla(w_n - w)\|_{p(x)} \longrightarrow 0$$

donde

$$\|w_n - w\|_{p(x)} \longrightarrow 0.$$

Logo, $w_n \longrightarrow w$ em E . Pela relação (3.53), segue que

$$J_\lambda(w) = \underline{C} \text{ e } J'_\lambda(w) = 0. \quad (3.56)$$

Assim, concluímos que w é solução fraca não-trivial do problema (3.1), mostrando que

Assim, todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ é autovalor de (3.1).

Capítulo 4

Um Problema Singular via Método Topológico

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução fraca em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para o seguinte problema singular elíptico proposto por Corrêa, Costa e Figueiredo [6]:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \frac{h(x)}{u^{\gamma(x)}} + k(x)u^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) é um domínio limitado, p, h, k, α e $\gamma \in C(\overline{\Omega})$ e $\Delta_{p(x)}$ designa o operador $p(x)$ -laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Aqui, usaremos o seguinte resultado devido a Rabinowitz: [16]

Proposição 4.1. *Considere um espaço de Banach X e $T : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e compacta tal que*

$$T(0, u) = 0, \text{ para todo } u \in X.$$

Então a equação

$$u = T(\lambda, u),$$

possui um conjunto conexo, fechado e não limitado $C \subset \mathbb{R}^+ \times X$ de soluções com $(0, 0) \in C$

Os resultados aqui apresentados são generalizações daqueles para o problema de Dirichlet envolvendo o operador p -laplaciano.

No que segue, denotemos

$$\begin{aligned} C_+(\overline{\Omega}) &= \{h; h \in C(\overline{\Omega}), h(x) > 1, \forall h \in C(\overline{\Omega})\}, \\ h^+ &= \max_{x \in \overline{\Omega}} h(x) \text{ e } h^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} h(x), \forall h \in C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

4.2 Hipóteses sobre as funções $p(x)$, $\gamma(x)$, $\alpha(x)$, $h(x)$ e $k(x)$

Ao longo desse capítulo assumiremos as seguintes hipóteses preliminares:

$$(H_1) \quad h, k \in C(\overline{\Omega}), \quad h, k \geq 0 \text{ em } \overline{\Omega}, \quad h, k \neq 0 \text{ em } \overline{\Omega}$$

$$(H_2) \quad \alpha, \gamma \in C(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha(x), \gamma(x) < 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

$$(H_3) \quad r \in C_+(\overline{\Omega}) \text{ é uma função satisfazendo}$$

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1,$$

onde $p^*(x)$ é o expoente crítico de Sobolev.

$$(H_4) \quad 1 < r(x) < p^*(x) \text{ em } \overline{\Omega}.$$

$$(H_5) \quad \alpha^+ < p^- - 1.$$

A condição (H_5) é natural, pois quando α e p são constantes a condição usada é

$$0 < \alpha < p - 1$$

$$(H_6) \quad \alpha(x) + 1 < p^*(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

As hipóteses (H_3) e (H_4) , não são incompatíveis, por exemplo, suponha que

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1 \text{ e } r(x) > 2 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Realmente, se $r(x) < p^*(x)$, temos

$$\frac{1}{p^*(x)} < \frac{1}{r(x)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < \frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r(x)} = \frac{2}{r(x)} < 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

o que mostra que (H_4) implica em (H_3) .

4.3 Existência de Solução

Nesta seção, discutiremos a existência de solução fraca para o problema (4.1).

Definição 4.1. Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Se

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x, u) v \, dx, \quad \forall v \in E.$$

Proposição 4.2. *Se $f(x, u) = f(x)$, $f \in L^{r(x)}(\Omega)$, onde $r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} < 1, \text{ para qualquer } x \in \overline{\Omega},$$

então, o problema (4.2), tem uma única solução fraca.

Demonstração. Considere o funcional $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) = \int_{\Omega} f(x) v \, dx.$$

É claro que g é linear. Mostraremos agora que g é contínuo.

Considere $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$, tal que

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{\beta(x)} = 1, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Assim

$$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{r(x) - 1}{r(x)}$$

por hipótese, temos

$$\frac{1}{\beta(x)} > \frac{1}{p^*(x)}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$\beta(x) < p^*(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Pelo Teorema 1.11, a imersão

$$E \hookrightarrow L^{\beta(x)}(\Omega) \text{ é contínua,}$$

então existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|v\|_{\beta(x)} \leq C_1 \|v\|, \forall v \in E. \quad (4.3)$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|g(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x) v \, dx \right| \leq C \|f\|_{r(x)} \|v\|_{\beta(x)} \quad (4.4)$$

sendo

$$C = \frac{1}{r^-} + \frac{1}{\beta^-}.$$

Por (4.3) e (4.4), temos

$$|g(v)| \leq C_2 \cdot \|v\|, \forall v \in E,$$

o que demonstra que g é contínua.

Como $g \in E^*$ e L é um homeomorfismo, então existe um único $u \in E$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v \, dx, \forall v \in X,$$

isto é, o problema (4.1) possui uma única solução fraca.

As três próximas proposições estabelecem alguns resultados relativos ao Princípio para a equação envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano, que se encontram no capítulo anterior.

Proposição 4.3. (*Princípio da Comparação.*) *Sejam $u, v \in E$ satisfazendo*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla \varphi \, dx,$$

para qualquer $\varphi \in E$, $\varphi > 0$ em Ω .

Seja $\Psi(x) = \min\{u(x) - v(x), 0\}$. Se $\Psi \in E$ então $u \geq v$ em Ω .

Proposição 4.4. *Considere $u \in E$ uma função que satisfaça*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \geq 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$\varphi > 0$ em Ω , $u \geq 0$ em Ω e $u \neq 0$. Então, para qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante positiva $C = C(K)$ tal que $u \geq C$ em K .

Proposição 4.5. *Sejam u como na Proposição 4.4, $x_1 \in \partial\Omega$, $u \in C^1(\Omega \cup \{x_1\})$ e $u(x_1) = 0$. Se Ω satisfaz a condição de bola interior em x_1 , então $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$, onde η é um vetor unitário normal interior em x_1 .*

Proposição 4.6. *Seja S uma aplicação, definida por*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega) &\longrightarrow W_0^{1,p(x)}(\Omega) \\ (\lambda, u) &\longmapsto v = S(\lambda, u), \end{aligned}$$

onde v é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v = \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então S é uma aplicação contínua.

Demonstração. Seja $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega)$, tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ e } u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Fixando $v_n = S(\lambda_n, u_n)$, teremos

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Pela definição de S , obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v_n &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ v_n &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ v &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.6)$$

Usando $v_n - v$ como função-teste em (4.5) e (4.6), obtemos pela definição de solução fraca:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_n|^{p(x)-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v) dx = \lambda_n \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx$$

e

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v) dx = \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx$$

Subtraindo as equações anteriores, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [|\nabla v_n|^{p(x)-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v) - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v_n \nabla (v_n - v)] dx \\ &= \lambda_n \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx \\ & \quad - \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle |\nabla v_n|^{p(x)-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v, \nabla v_n - \nabla v \rangle dx = \\ & \lambda_n \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx - \\ & \quad - \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] (v_n - v) dx \end{aligned}$$

na desigualdade do Apêndice A,

Fazendo $x = \nabla v_n$ e $y = \nabla v$, ocorre que

$$\begin{aligned} C_p \|\nabla v_n - \nabla v\|^{p(x)} &\leq C \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} - \frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} \right] (v_n - v) dx \\ &\quad + C \int_{\Omega} k(x) [|u_n|^\alpha - |u|^\alpha] (v_n - v) dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

Se $v_n \rightarrow v$ em E , então $v_n \rightarrow v$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ o que conclui a prova.

Teorema 4.1. *Considere as hipóteses $(H_1) - (H_6)$. O problema (4.1) possui uma solução fraca.*

Demonstração. Começaremos a prova, considerando o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v &= \frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde $0 < \epsilon < 1$ é um número fixo.

Afim de aplicar aplicarmos a Proposição (4.1). Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ v &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

Para cada $u \in L^{r(x)}(\Omega)$, onde $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real.

Observe

$$\begin{aligned} v &\in L^{r(x)}(\Omega) \text{ então } |u|^{\alpha(x)} \in L^{\frac{r(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \\ 0 &\leq \frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} \leq \frac{h(x)}{\epsilon^{\gamma(x)}} \in L^{\frac{r(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \end{aligned}$$

Devido a hipótese (H_3) , o problema (4.7) possui uma única solução $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Usando a Proposição 4.1, consegue-se uma componente C de soluções $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega)$ de $u = S(\lambda, u)$, (observe que $S(0, u) = 0$), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela Proposição 4.4, temos $u > 0$ em Ω e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Agora, iremos mostrar que a componente C é não-limitada com respeito a $\lambda \geq 0$. Suponha que isso não aconteça, ou seja, existe $\lambda^* > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in C$ então $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$.

Assim, usando u como função-teste na equação (4.9), temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{\Omega} \lambda \left[\frac{h(x)}{(u + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)+1} \right] dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{h(x)u}{(u + \epsilon)^{\gamma(x)}} dx &\leq \int_{\Omega} \|h\|_{\infty} \frac{u}{\epsilon^{\gamma(x)}} dx \\ &\leq \|h\|_{\infty} \int_{\Omega} \frac{u}{\epsilon^{\gamma^+}} dx \\ &\leq C \int_{\Omega} u dx \\ &\leq C |\nabla u|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^1(\Omega)$, também temos

$$\int_{\Omega} k(x)u^{\alpha(x)+1} \leq \|k\|_{\infty} \int_{\Omega} u^{\alpha(x)+1} dx = \|k\|_{\infty} \rho_{\alpha(x)+1}(u),$$

e, pela hipótese (H_6) , temos $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{\alpha(x)+1}(\Omega)$ o que nos dá que $|u|_{\alpha(x)+1} \leq C |\nabla u|_{p(x)}$.

Consideraremos dois casos:

(i) Se $|u|_{\alpha(x)+1} > 1$ pela Proposição 1.6, temos

$$\rho_{\alpha(x)+1}(u) = |u|_{\alpha(x)+1}^{\alpha^++1}.$$

(ii) Se $|u|_{\alpha(x)+1} < 1$, ocorre pelo mesmo fato que

$$\rho_{\alpha(x)+1}(u) = |u|_{\alpha(x)+1}^{\alpha^-+1}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \rho(\nabla u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx = \lambda \int_{\Omega} \left[\frac{h(x)}{(u + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)+1} \right] dx \\ &\leq C \|u\|_{p(x)} + C |\nabla u|_{\alpha(x)+1}^{\beta+1} \\ &\leq C \|u\|_{p(x)} + C |\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\rho(\nabla u) \leq C(\|u\| + \|\nabla u\|^{\beta+1})$, onde $1 < \beta + 1 < 2$.

Utilizando novamente a Proposição 1.6, obtemos

(a) Se $|\nabla u|_{p(x)} > 1$ então $\rho_{p(x)}(\nabla u) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^-}$.

(b) Se $|\nabla u|_{p(x)} < 1$ então $\rho_{p(x)}(\nabla u) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^+}$. Conseqüentemente,

$$|\nabla u|_{p(x)}^{p^-} \leq C(|\nabla u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1})$$

ou

$$|\nabla u|_{p(x)}^{p^+} \leq C(|\nabla u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1}),$$

onde $\alpha^+ = \max_{x \in \bar{\Omega}} p(x) < p^- - 1 = \min_{x \in \bar{\Omega}} p(x) - 1$, o que demonstra que $|\nabla u|_{p(x)}$ é limitada.

Desde que $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$, conclui que $|u|_{p(x)}$ é limitada.

Destas considerações, temos que C é não-limitada com respeito ao parâmetro λ e assim C intersecta $\{1\} \times L^{r(x)}(\Omega)$ produz uma solução $u_\epsilon \in W_0^{1,p(x)}$, satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u_\epsilon &= \frac{h(x)}{(u_\epsilon + \epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x) u_\epsilon^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u_\epsilon &> 0 & \text{ em } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 & \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

no sentido fraco, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, $u_{1/n} = u_n$, obtemos:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u_\epsilon &= \frac{h(x)}{(u_\epsilon + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} + k(x) u_n^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u_\epsilon &\geq \frac{h(x)}{(u_\epsilon + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} + k(x) u_n^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ &\geq C \left[\frac{1}{(u_n + 1)^{\gamma(x)}} + u_n^\alpha \right], & \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

ocorre que

$$\frac{1}{(u_n + 1)^{\gamma(x)}} \geq \frac{1}{(u_n + 1)^{\gamma^+}}$$

(c) Se $u_n(x) \geq 1 \Rightarrow [u_n(x)]^{\alpha(x)} \geq [u_n(x)]^{\alpha^-}$

(d) Se $0 < u_n(x) < 1 \Rightarrow [u_n(x)]^{\alpha(x)} \geq [u_n(x)]^{\alpha^+}$

Portanto, existe uma constante $m_0 > 0$ tal que

$$C \left[\frac{1}{[u_n + 1]^{\gamma(x)}} + [u_n(x)]^{\alpha(x)} \right] \geq m_0 > 0.$$

Seja $w \in W_0^{1,p(x)}$ a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} w &= m_0 > 0 \text{ em } \Omega \\ w &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo forte (ver Capítulo 2)

$$u_n(x) \geq w(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

Logo, encontraremos uma sucessão limitada aproximando u_n . Argumentando como antes, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} \frac{h(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} dx + \int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha(x)+1} dx.$$

Por argumentos já utilizados, temos

$$\int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha(x)+1} dx \leq C |\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1}, \text{ com } 0 < \beta + 1 < 2.$$

onde $\beta = \alpha^{\pm}$.

Ocorre também que

$$\int_{\Omega} \frac{h(x) u_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} \leq C \int_{\Omega} \frac{u_n}{(u_n)^{\gamma(x)}} dx = C \int_{\Omega} u_n^{1-\gamma(x)} dx$$

Se $u_n(x) \geq 1$ temos $[u_n(x)]^{1-\gamma(x)} \leq [u_n(x)]^{1-\gamma^-}$ e se $u(x) < 1$, ocorre $[u_n(x)]^{1-\gamma(x)} \leq [u_n(x)]^{1-\gamma^+}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [u_n(x)]^{1-\gamma(x)} dx &\leq \int_{\Omega} [u_n(x)]^{1-\gamma^-} dx + \int_{\Omega} [u_n(x)]^{1-\gamma^+} dx, \\ &\leq C |u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} + C |u_n^{1-\gamma^+}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^+}}. \end{aligned}$$

Com respeito a $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}$, consideremos dois casos:

(i) Se $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} > 1$ então

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}^{\frac{r^-}{1-\gamma^-}} \leq \rho_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}(u_n^{1-\gamma^-}) = \int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx$$

o que implica que

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}}.$$

(ii) Se $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$, obtemos

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^+}}.$$

Suponhamos que exista $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

(a) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} > 1$ e $|u_n|_{r(x)} > 1$. Neste caso,

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq \left(|u_n|_{r(x)}^{r^+} \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq |u_n|_{r(x)}^{\frac{1-\gamma^-}{r^+}} \leq |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-}.$$

(b) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}$ e $|u_n|_{r(x)} < 1$.

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq |u_n|_{\frac{r(x)}{r^+ r^-}} \leq 1.$$

(c) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$ e $|u_n|_{r(x)} > 1$.

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_{\Omega} u_n^{r(x)} dx \right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^+}} \leq |u_n|_{\frac{r(x)}{r^+ r^-}} \leq |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-}.$$

(d) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$ e $|u_n|_{r(x)} < 1$. podem ser executados os casos relacionados a u de um modo análogo.

mostraremos isso agora:

(1) $|\nabla u_n|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \rho_{p(x)}(|\nabla u_n|) \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-}$

e

(2) $|\nabla u_n|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \rho_{p(x)}(|\nabla u_n|) \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^+}$.

Uma situação possível a ser considerada é:

$$|\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} \leq C \left[|\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1} + |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-} + |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^+} + C' \right]$$

e pela da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ obtemos

$$|\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} \leq C \left[|\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1} + |u_n|_{p(x)}^{1-\gamma^-} + |u_n|_{p(x)}^{1-\gamma^+} + 1 \right]$$

e porque $p^- > \beta + 1$, $1 - \gamma^-$, $1 - \gamma^+$ temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Os outros casos são cumpridos do mesmo modo para obter a limitação de (u_n) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, talvez para subsequências. Desde que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Considerando $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como função-teste temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{h(x)\varphi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} dx + \int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha(x)} dx.$$

Do Teorema 1.11 de Sobolev, temos uma subsequência $u_n \rightarrow u$ em $L^{t(x)}(\Omega)$, $1 \leq t(x) < p^*(x)$.

Usando $u_n - u$ como função-teste e discutindo como na prova da afirmação 1, temos $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, devido ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla \varphi dx &\longrightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi dx, \\ \int_{\Omega} \frac{h(x)\varphi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} dx &\longrightarrow \int_{\Omega} \frac{h(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}} dx, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha(x)} dx \longrightarrow \int_{\Omega} k(x) u^{\alpha(x)} dx.$$

Portanto, u é solução fraca de (4.2) e a prova do teorema está concluída. ■

Apêndice A

Desigualdades de Simon

Neste Apêndice, demonstraremos duas desigualdades que foram utilizadas nos capítulos 3 e 4.

Lema A.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então:*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} \frac{2^{3-p}}{p}|x - y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ (p-1) \frac{|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Demonstração. Consideremos $x, y \in \mathbb{R}^N$. Suponhamos $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$, pois caso contrário, supondo $\|x\| \geq \|y\|$, bastava considerar

$$\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|} \text{ e } \tilde{y} = \frac{y}{\|y\|}$$

Suponha também

$$x = (1, 0, 0, \dots, 0) \text{ e } y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0)$$

De acordo, da escolha de uma base conveniente.

(i) Se $1 < p < 2$, a desigualdade é equivalente à

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \frac{C|x - y|^2}{(|x|^p + |y|^p)^{2-p}}$$

$$g(y_1, y_2) = \left\{ 1 - y_1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|^p)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C$$

ou

$$g(y_1, y_2) := \left\{ \left(1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|^p)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \geq C$$

Caso $0 \leq y_1 \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} &\geq 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} = (1 - y_1) \left(1 + \frac{1}{|y_1|^{2-p}} \right) + y_1 - \frac{1}{|y_1|^{2-p}} \\ &\geq (1 - y_1)p + y_1 - 1 = (p - 1)(1 - y_1) \end{aligned}$$

Caso $y_1 < 0$, ocorre que:

$$1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p-1)(1 - y_1)$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) &\geq \left\{ (1 - y_1)^2(p-1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}} \right\} \frac{(1 + |y|^p)^{2-p}}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &\geq \left\{ (1 - y_1)^2(p-1) + (p-1)y_2^2 \right\} \frac{1}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &\geq (p-1) \left\{ (1 - y_1)^2 + y_2^2 \right\} \frac{1}{(1 - y_1)^2 + y_2^2} \\ &= (p-1). \end{aligned}$$

(ii) Se $p \geq 2$. Substituindo $t = |y|$ e $s = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}$ na expressão

$$\frac{\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle}{|x - y|^p}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} h(t, s) &:= \frac{\langle |x|^p - \langle x, y \rangle |x|^{p-2} - \langle x, y \rangle |y|^{p-2} + |y|^p, x - y \rangle}{\{(x - y)^2\}^{p/2}} \\ h(t, s) &:= \frac{1 - st - stt^{p-2} + t^p}{(1 - 2st + t^2)^{p/2}} = \frac{1 - (t + t^{p-1})s + t^p}{(1 - 2st + t^2)^{p/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Mostraremos que a função acima é limitada inferiormente

Fixando t , temos

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{-t - t^p}{(1 - 2st + t^2)^{p/2}} + \frac{(1 - (t + t^{p-1})s + t^p)pt}{(1 - 2st + t^2)^{p/2}((1 - 2st + t^2))}$$

Se $\frac{\partial h}{\partial s} = 0$, ocorre:

$$(1 - 2st + t^2)(-t - t^p) + (1 - (t + t^{p-1})s + t^p)pt = 0,$$

ou seja,

$$(1 - (t + t^{p-1})s + t^p) = \frac{1}{p}(1 + t^{p-2})(1 - 2st + t^2). \quad (\text{A.2})$$

Portanto, se s_0 é um ponto crítico de h , substituindo (A.2) em (A.1), obtemos

$$\begin{aligned} h(t, s_0) &= \frac{1 + t^{p-2}}{p(1 - 2s_0t + t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\ &\geq \frac{1 + t^{p-2}}{p(1 + t)^{p-2}} \\ &\geq \frac{1}{p} \min_{0 \leq t \leq 1} \frac{1 + t^{p-2}}{(1 + t)^{p-2}} \end{aligned}$$

Ocorrendo o mínimo, quando

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1 + t^{p-2}}{p(1+t)^{p-2}} \right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{(p-2)t^{p-2}}{t(1+t)^{p-2}} - \frac{(1+t^{p-2})(p-2)}{(t+1)(1+t)^{p-2}} = 0$$

Resolvendo, obtemos $t = 1$, logo

$$h(t, s_0) \geq \frac{1}{p} \frac{2}{2^{p-2}} = \frac{2^{3-p}}{p}$$

■

Apêndice B

Resultados Básicos Usados na Dissertação

No que segue, denotaremos

- $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida,
- $M^+ =$ conjunto das funções mensuráveis não-negativas definidas em X e assumindo valores em $\overline{\mathbb{R}}$,
- $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ – espaço das funções reais integráveis.

Teorema B.1. (*Teorema da Convergência Monótona*) Se uma seqüência não-decrescente $\{f_n\} \subset M^+$ converge em quase todo ponto para uma função f , então

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3], Teorema 4.6 e Corolário 4.12.

Teorema B.2. (*Teorema da Convergência Dominada*) Seja uma seqüência $\{f_n\} \subset L$ que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g, \forall n$, então $f \in L$ e

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3], Teorema 5.6.

Lema B.1. (*Du Bois-Reymond*) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que

$$\int f d\mu = 0, \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$, q.s. em Ω .

Demonstração. Veja [3], Lema IV.2 e [18], Proposição 1.31.

Teorema B.3. (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Seja $1 \leq p < N$, então

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Demonstração. Veja [4], Teorema IX.9.

Corolário B.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 . Se $1 \leq p < N$, então

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [p, p^*],$$

com imersão contínua.

Demonstração. Veja [4], Corolário IX.14.

Teorema B.4. (Rellich-Kondrachov) seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 . Se $p < N$, então

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*), \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

com imersão compacta.

Demonstração. Veja [4], Teorema IX. 16.

Teorema B.5. Sejam X um espaço de Banach reflexivo e uma seqüência $(x_n) \subset X$ limitada. Então, existem uma subseqüência (x_{n_k}) e $x \in X$ tais que $x_{n_k} \rightharpoonup x$.

Demonstração. Veja [4], Teorema III.27.

Teorema B.6. Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X , então $Tx_n \longrightarrow Tx$ em Y .

Demonstração. Veja [18], Teorema 8.1-7.

Teorema B.7. Sejam X um espaço vetorial normado e uma seqüência $(x_n) \subset X$. Tem-se

- (i) $x_n \rightharpoonup x$ se, e somente se, $\langle f, x_n, \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$;
- (ii) se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$;
- (iii) se $x_n \rightharpoonup x$ então $\|x\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
- (iv) se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \rightarrow f$ em X^{ast} , então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Veja [4], Proposição III.5.

Observação B.1. (Desigualdade de Young) Se $1 < p < +\infty$ e a, b são números reais não-negativos, então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Apêndice C

Minimização de Funcionais

Neste Apêndice estudaremos alguns resultados básicos de minimização de funcionais, os quais foram importantes nessa dissertação.

Definição C.1. *Seja X um Espaço Topológico, um funcional $\Phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ é dito ser semicontínuo inferior (s.c.i), se o conjunto*

$$[\Phi \leq \lambda] = \{x \in X; \Phi(x) \leq \lambda\}$$

for fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que esse conjunto ser fechado é equivalente a

$$\{x \in X; \Phi > \lambda\}$$

ser aberto.

Teorema C.1. *Sejam X um Espaço Topológico Compacto e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente. Então*

- (i) Φ é limitado inferiormente,
- (ii) O ínfimo de Φ é atingido, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_X \Phi = \min_X \Phi.$$

Demonstração. (i) Sendo Φ um funcional s.c.i, temos que os conjuntos

$$A_n = \{x \in X; \Phi(x) > -n\},$$

são abertos para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \in A_n$ e assim $X \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ o que mostra que

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ é cobertura de } X$$

Como X é compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $X = \cup_{j=1}^{n_0} A_j$. Assim, $\Phi(x) > -n_0$, para todo $x \in X$, de modo que Φ é limitado inferiormente.

(ii) Seja $l = \inf_x \Phi$, $l > -\infty$. Suponhamos por absurdo, que tal ínfimo não seja atingido. Assim, se $x \in X$, então $J(x) > l \Rightarrow \Phi(x) - l > 0$. Dessa forma, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi(x) - l > \frac{1}{n} \Rightarrow \Phi(x) > l + \frac{1}{n}.$$

Então, $X = \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; \Phi(x) > l + \frac{1}{n}\}$, pela compacidade de X , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \cup_{n=1}^{n_1} \{x \in X; \Phi(x) > l + \frac{1}{n_1}\}.$$

Mas, isto implica que

$$\Phi(x) > l + \frac{1}{n} > l, \forall x \in X.$$

O que contraria a definição de ínfimo. Portanto, existe $x_0 \in X$, tal que

$$\Phi(x_0) = \inf_{x \in X} \Phi(x)$$

■

Teorema C.2. *Princípio Variacional de Ekeland*

Seja (M, d) um espaço métrico completo e $\Phi : M \rightarrow (-\infty, +\infty]$ um funcional s.c.i e limitado inferiormente e tal que $\Phi \not\equiv +\infty$. Então, dados $\epsilon > 0$ e $u_\epsilon \in M$, tais que

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_M \Phi + \epsilon.$$

Existe $v \in M$, com

(c1) $\Phi(v) \leq \Phi(u)$ e $d(u, v) \leq 1$. Além disso, para cada $w \in M$, $w \neq v$, tem-se:

(c2) $\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(w, v)$

Demonstração. Considere $\epsilon > 0$, definimos a seguinte relação de ordem parcial sobre M , por

$$w \prec v \Leftrightarrow \Phi(w) + \epsilon d(w, v) \leq \Phi(v).$$

Verificaremos que $\prec$ é uma ordem parcial em M

(i) $\prec$ é reflexiva.

$$\Phi(w) \leq \Phi(w) - \epsilon d(w, v) \Rightarrow \Phi(w) \leq \Phi(u) \Leftrightarrow w \leq u$$

(ii) $\prec$ é anti-simétrica

$$w \prec v \Leftrightarrow \Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v) \tag{C.1}$$

$$v \prec w \Leftrightarrow \Phi(v) \leq \Phi(w) - \epsilon d(v, w) \tag{C.2}$$

Substituindo (C.2) em (C.1), obtemos:

o que implica

$$d(w, v) \leq 0 \Rightarrow d(w, v) = 0 \Leftrightarrow w = v.$$

(iii) $\prec$ é transitiva.

$$w \prec v \Leftrightarrow \Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v) \tag{C.3}$$

$$v \prec u \Leftrightarrow \Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u) \tag{C.4}$$

Substituindo (C.4) em (C.3), obtemos

$$\Phi(w) \leq \Phi(u) - \epsilon(d(w, v) + d(v, u))$$

Portanto,

$$\Phi(w) \leq \Phi(u) - \epsilon d(w, u) \Leftrightarrow w \leq u, \text{ para todo } u, v \text{ e } w \in M.$$

Definimos agora uma seqüência (s_n) de subsequências de X como se segue:

$$S_0 = \{w \in M; w \leq u_o\}; u_1 \in S_0 \text{ tal que } \Phi(u_1) \leq \inf_{S_1} \Phi + \frac{1}{2} \quad (\text{C.5})$$

e indutivamente definimos o conjunto

$$S_n = \{w \in M; w \leq u_n\}$$

Agora escolhermos $u_{n+1} \in S_n$, tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}$$

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ De fato, $u_{n+1} \in S_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \in S_n$, para $n = 1, 2, \dots$

(b) S_n é fechado.

De fato, seja (w_j) uma seqüência de S_n tal que

$$w_j \longrightarrow w \in M.$$

Provemos que $w \in S_n$, como $w_j \in S_n$, segue-se que $w_j \leq u_n$, temos

$$\Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon(w_j, u_n)$$

Como Φ é um funcional s.c.i e d é contínua, os conjuntos

$$A = \{w_j \in S_n; \Phi(w_j) \leq 2\Phi(u_n)\}$$

e

$$B = \{w_j \in S_n; \Phi(w_j) \leq -2\epsilon d(w_j, u_n)\}.$$

São fechados, portanto o conjunto

$$A \cup B = \{w_j \in S_n; \Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w_j, u_n)\},$$

é fechado.

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade quando $j \rightarrow \infty$ e usando a smicontinuidade de Φ , obtemos

$$\Phi(w) \leq \liminf \Phi(w_j) \leq \liminf [\Phi(u_n) - \epsilon d(w, u_n)]$$

$$\Phi(w) \leq \liminf \Phi(w_j) - \lim_{j \rightarrow +\infty} \epsilon d(w, u_n)$$

$$\Phi(w) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w, u_n) \Leftrightarrow w \leq u_n \Rightarrow w \in S_n.$$

Seja $w \in S_{n+1}$. Então $w \leq u_{n+1} \leq u_n$, e daí

$$\begin{aligned}\Phi(w) &\leq \Phi(u_{n+1}) - \epsilon d(w, u_{n+1}) \\ \epsilon d(w, u_{n+1}) &\leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \\ \epsilon d(w, u_{n+1}) &\leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n+1} \\ d(w, u_{n+1}) &\leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}.\end{aligned}$$

Portanto, considerando $w, v \in S_{n+1}$, então

$$\begin{aligned}d(w, v) &= d(w, u_{n+1}) + d(v, u_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon(n+1)} + \frac{1}{\epsilon(n+1)} = \frac{2}{\epsilon(n+1)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\text{diam} S_{n+1} = \sup d(w, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)}$$

e, portanto, $\text{diam} S_{n+1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, $\text{diam} S_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$ (C5).

Desde que $(S_n) \subset M$ é uma sequência decrescente de conjuntos fechados, verificando (C5) e M é compacto temos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{v\},$$

para algum $v \in M$. Em particular $v \in S_0$, logo,

$$v \leq u_0 = u \Leftrightarrow \Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u) \leq \Phi(u)$$

e

$$\begin{aligned}d(v, u) &= \epsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(v)) \\ d(v, u) &= \epsilon^{-1} \left(\inf_M \Phi + \epsilon - \inf_M \Phi \right) = 1\end{aligned}$$

Com isto, obtendo (C1).

Para obter (C2), suponha que $w \prec v$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $w \prec u_n$, logo,

$$w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \text{ e assim } w = v.$$

Dessa forma, concluímos que $w \neq v$

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(w, v).$$

■

Observação C.1. Se usarmos a métrica λd , com $\lambda > 0$, as conclusões (C1) e (C2) podem ser substituídas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} d(u, v) &\leq \frac{1}{\lambda} \\ \Phi(w) &> \Phi(v) - \epsilon \lambda d(w, v). \end{aligned}$$

Teorema C.3. Seja X um espaço de Banach, $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional s.c.i e limitado inferiormente. Se for Fréchet-diferenciável em todo $x \in X$. Então para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon$$

e

$$\|\Phi'(u_\epsilon)\|_{X^*} \leq \epsilon$$

Demonstração. Usando a apresentação (C.1), com $\lambda = \epsilon^{1/2}$ pelo teorema anterior, temos

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon$$

e

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + \epsilon \lambda d(u_\epsilon, u), \text{ com } u \neq u_\epsilon,$$

Portanto, $\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u_\epsilon + \epsilon t h) + \epsilon t \|h\|$

$$\frac{\Phi(u_\epsilon) - \Phi(u_\epsilon + \epsilon t h)}{t} < \epsilon \|h\|.$$

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade, quanto $t \rightarrow \infty$, obtem-se:

$$-\langle \Phi'(u_\epsilon), h \rangle < \epsilon \|h\|.$$

Assim,

$$\frac{\langle \Phi'(u_\epsilon), h \rangle}{\|h\|} < \epsilon.$$

Então,

$$\|\Phi'(u_\epsilon)\|_{X^*} = \sup \frac{\langle \Phi'(u_\epsilon), h \rangle}{\|h\|} \leq \epsilon.$$

■

Definição C.2. Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Diz-se que o funcional Φ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível C , $(PS)_C$, se toda sequência (u_n) em X , tal que

$$\Phi(x_n) \rightarrow C \text{ e } \Phi'(x_n) \rightarrow 0$$

possui uma subsequência convergente.

Teorema C.4. *Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição $(PS)_C$ é limitado inferiormente. Então, o ínfimo de Φ é atingido em um ponto $x_0 \in X$ o qual é um ponto crítico de Φ , isto é,*

$$\Phi'(u_0) = 0$$

Demonstração. Pelo teorema C.3, para cada inteiro positivo n , existe $u_n \in X$ tal que

$$\Phi(u_n) \leq \inf_X \Phi + \frac{1}{n} \text{ e } \|\Phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Pela condição $(PS)_C$, temos uma subsequência u_{n_j} em X e $u_0 \in X$, tal que $u_{n_j} \rightarrow u_0$.

Da continuidade de Φ e Φ' , obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(u_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_{n_j}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_X \Phi + \frac{1}{n} \right) \\ \Phi(u_0) &\leq \inf_X \Phi \Rightarrow \Phi(u_0) = \inf_X \Phi. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi'(u_{n_j})\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n},$$

o que implica

$$\|\Phi'(u_0)\| \leq 0 \Rightarrow \|\Phi'(u_0)\| = 0 \Rightarrow \Phi'(u_0) = 0.$$

■

Este resultado é verdadeiro sem a continuidade de Φ' , basta que Φ seja Fréchet-diferenciável em cada ponto de X .

De fato, mostramos que $\Phi(u_0) = \inf_X \Phi$, implica em $\Phi'(u_0) = 0$.

Consideremos $v \in X$, $\|v\| = 1$ e $t > 0$.

Assim,

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + tv) = \Phi(u_0) + t \langle \Phi'(u_0), v \rangle + \mathcal{O}(t).$$

O que implica

$$t \langle \Phi'(u_0), v \rangle + \mathcal{O}(t) \geq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} -\langle \Phi'(u_0), v \rangle &\leq \frac{\mathcal{O}(t)}{t}, \text{ para todo } v \in X, \\ \langle \Phi'(u_0), v \rangle &\leq \frac{\mathcal{O}(t)}{t}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|\Phi'(u_0)\| = \sup_{\|v\|=1} \langle \Phi'(u_0), v \rangle \leq \frac{\mathcal{O}(t)}{t}.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$, temos

$$\|\Phi'(u_0)\| \leq 0 \Rightarrow \|\Phi'(u_0)\| = 0 \Rightarrow \Phi'(u_0) = 0$$

■

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, C.O., & Souto, M.A.S., Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving $p(x)$ -Laplacian, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 66, pp 17-32. Published by Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005.
- [2] Alves, C.O., do Ó, J.M. & Miyagaki, O.H., On Perturbations of class os a periodic m -Laplacian equation with critical growth, Nonlinear Analysis 45 (2001) 849-863.
- [3] Bartle, R.G., The Elements of Integration, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.
- [4] Brezis, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, 2005.
- [5] Guimarães, C.J., Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o $p(x)$ -Laplaciano. Dissertação de mestrado, CCT - UFCG, 2006.
- [6] Corrêa, F.J.S.A., Costa, A.C.R. & Figueiredo G.M., On a singular elliptic problem involving the $p(x)$ -Laplacian and generalized Lebesgue-Sobolev spaces, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 17, (2007).
- [7] de Figueiredo, D.G., Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] Diening, L., Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.
- [9] Fan, Xianling. & Zhang, Qi-Hu, Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problem, Nonlinear Analysis, 52, 1843-1852 (2003).
- [10] Fan, X. L. & Zhao, D, Local $C^{1,\alpha}$ regularity of weak solutions for $p(x)$ -Laplacian equations, J. Gansu Education College (NS), 15, (2) pp. 1-5, (2001).

- [11] Fan Xianling & Zhao Yuanzhang, A strong maximum principle for $p(x)$ -Laplace equations. *J. Cont. Math.*, Vol. 24, 277-282 (2003).
- [12] A. Manes, Un Estensione Della Teoria Classica Degli Autovalor Por Operatori Ellitici Del Secondo Ordine, *Bolletino U.M.I.*, 7(1973)285-301
- [13] Mihăilescu, M. & Rădulescu, V., on a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2000.
- [14] M., A strong principles for super-solutions of quasi-linear elliptic equations, *nonlinear Anal.*, 37, pp. 431-448, 1999.
- [15] P. Hess e T. Kato, On Some Linear And Nonlinear Eigenvalue Problems With An Indefinite Weight Function, *Comm. P.D.E.*, 5(1980)999-1030.
- [16] P.H. Rabinowitz , Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.*, vol. 7, 487-513 (1971).
- [17] Ruzicka, M., *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [18] Kreyszig, W., *Introductory Functional Analyses with Applications*, John Wiley e Sons, Inc., New York, 1989.
- [19] Vainberg, M.M., *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day, Series in Mathematical Physics, San Francisco, 1964.