SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não-locais dos tipos Kirchhoff e p-Kirchhoff

Andrelino Vasconcelos Santos

Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Belém
ICEN - UFPA
Dezembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não-locais dos tipos Kirchhoff e p-Kirchhoff

Andrelino Vasconcelos Santos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo.
Área de Concentração: Equações diferenciais.

Belém
ICEN - UFPA
Dezembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Existência de soluções para uma classe de problemas elípticos não-locais dos tipos Kirchhoff e p-Kirchhoff

Andrelino Vasconcelos Santos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 14 de Dezembro de 2007.
Conceito:______________

Banca Examinadora

____
Prof.° Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Orientador
Faculdade de Matemática - UFPA

____
Prof.° Dr. Marcelo Fernandes Furtado
Departamento de Matemática - Unb

____
Prof.° Dr. Ducival Carvalho Pereira
Colegiado do Curso de Mestrado em Matemática e Estatística - PPGME

____
Prof.° Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

AGRADECIMENTOS

A Deus que, sem dúvida, é o maior sentido da minha vida.

A minha família, namorada e amigos que sempre estiveram presentes em todos os momentos.

Ao meu orientador Prof°. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo pela paciência, dedicação e excelente orientação desde o curso de verão. Serei sempre grato por tudo.

Aos professores Marcelo Fernandes, Ducival Carvalho e Francisco Júlio por se apresentarem disponível nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora.

Aos professores do curso de Pós-Graduação em Matemática e Estatística-PPGME por minha formação profissional.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos amigos de Abaetetuba, Genivaldo e Elizabeth, pela parceria desde o curso de verão.

Finalmente, agradeço aos colegas de curso e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

A proposta deste trabalho é estudar a existência de soluções não-triviais dos seguintes problemas:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^2\right)\right]\Delta u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \quad \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda\,|u|^{s-2}\,u \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$ e cujas hípoteses sobre as funções f e M serão introduzidas oportunamente.

Abstract

The purpose of this work is to investigate the existence of solutions of the following problems:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^2\right)\right]\Delta u = f(x,u) \ \text{ in } \ \Omega \\ \\ u = 0 \ \text{ in } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \ \text{ in } \ \Omega \\ \\ u = 0 \ \text{ in } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

and

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda\,|u|^{s-2}\,u \ \text{ in } \ \Omega \\ \\ u = 0 \ \text{ in } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$ and whose hypotheses about the functions f and M they will be introduced opportunely.

Índice

Introdução

Nessa dissertação estudaremos resultados de existência de solução para as seguintes classes de problemas:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^2\right)\right]\Delta u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

$$(P) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) + \lambda\,|u|^{s-2}\,u \;\; \text{em} \; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$ e cujas hipóteses sobre as funções f e M serão introduzidas oportunamente.

O problema elíptico típico é o chamado problema de Dirichlet cuja formulação é dada por

$$(D) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,u(x)) \;\; \text{em} \;\; x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 \;\; \text{em} \;\; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma dada função, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a função incógnita cuja regularidade depende da regularidade de f.

O problema descrito na equação em (D) é chamado local pois em todos os termos envolvidos os valores são calculados pontualmente, o que não ocorre com os problemas (P_0),(P) e (P_λ).

Soluções da equação em (P_0) representam soluções estacionárias da equação de Kirchhoff

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\|u\|^2)\Delta u(x) = f(x,u(x))$$

que é uma generalização daquela introduzida por Kirchhoff(ver [16]) em 1883

$$(K) \qquad \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Esta equação é uma extensão da Equação Clássica da Corda Vibrante, proposta por D'Alembert, considerando os efeitos das mudanças no comprimento da corda durante a vibração.

Os parâmetros na equação (K) têm os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área da seção transversal da corda, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade de massa e P_0 é a tensão inicial. Deve-se ressaltar que a equação (K) começou a receber maior atenção após a publicação do trabalho [17], no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para tal problema. O leitor poderá consultar os trabalhos [2], [8] e [19] nos quais encontrará resultados interessantes e outras referências.

Outros exemplos importantes de problemas não-locais, e que suscitam relevantes abordagens de Análise Funcional Não-Linear são estudados em [9], [10], [11] e suas referências.

Este trabalho é constituído de 3 capítulos, os quais comentaremos a seguir.

No Capítulo 1, o qual denominaremos de **Problema subcrítico não-local do tipo Kirchhoff**, estudaremos o problema (P_0), mostrando um resultado de existência de solução de Alves, Corrêa e Ma [1], onde os autores usaram o Teorema do Passo da Montanha associado a estimativas do tipo Gidas-Spruck, com a não-linearidade f tendo crescimento subcrítico e superlinear. Ressalte-se que neste artigo, ao que parece, foi usada pela primeira vez a abordagem variacional numa classe de problemas não-locais do tipo Kirchhoff.

Nos Capítulos 2 e 3, o qual denominaremos **Problema subcrítico não-local do tipo p-Kirchhoff** e **Problema supercrítico não-local do tipo p-Kirchhoff**, respectivamente, estudaremos o artigo de Corrêa e Figueiredo [7]. Os autores mostraram, na primeira parte do artigo, existência de solução para o problema (P) e na segunda parte, existência de solução para o problema (P_λ), o que completou o trabalho de Alves, Corrêa e Ma [1] nos seguintes aspectos:

1) O p-Laplaciano é um operador não linear definido em um espaço de Banach e os problemas que envolvem este tipo de operador apresentam várias dificuldades tais como unicidade, regularidade, etc..., o que o difere, entre outras coisas, do Laplaciano.

2) Ao que parece, as estimativas de Gidas-Spruck não são válidas para problemas envolvendo o operador p-Laplaciano. Esta dificuldade foi contornada usando-se

comparação entre os níveis de energia de certos funcionais. Aqui a não-linearidade f também tinha crescimento superlinear e subcrítico.

3) No problema (P_λ) a não-linearidade f tinha crescimento crítico ou supercrítico, caso não estudado em [1]. Aqui, uma dificuldade adicional surgiu: problemas com crescimento supercrítico não podem ser abordados diretamente do ponto de vista variacional, devido a falta das imersões contínuas de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^s(\Omega)$ com $s > \dfrac{pN}{N-p}$, $N \geq 3$. Isto foi contornado usando-se método de Iteração de Moser [20] e argumentos usados em [13](ver também [14], [18]).

Para finalizar essa dissertação, mostraremos no Apêndice A que os funcionais usados neste trabalho são de classe C^1. No Apêndice B enunciaremos todos os resultados elementares usados neste trabalho, indicando onde o leitor poderá encontrar as demosntrações. No Apêndice C, enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha.

No corpo da dissertação usaremos as seguintes notações:
$\blacksquare$: fim de uma demonstração,
$\rightarrow$: convergência forte,
$\rightharpoonup$ convergência fraca,
$|A|$: medida de Lebesgue de um conjunto A,
$\|u\|_{(X)'}$: norma no dual de X,
$|u|_s$: norma em $L^s(\Omega)$, $0 < s \leq \infty$,
$A(h) = o(h)$ desde que $|\frac{A(h)}{h}| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$,

Capítulo 1

Problema subcrítico não-local do tipo Kirchhoff

1.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a classe de problemas não-locais de valor de fronteira do tipo Kirchhoff

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^2\right)\right]\Delta u = f(x,u) \;\text{ em }\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo respectivamente:

$$M(t) \geq m_0 > 0 \;\text{ para todo }\; t \geq 0 \tag{M_0}$$

e

$$|f(x,t)| \leq C(1 + |t|^p), \;\text{ para todo } x \in \Omega \text{ e } t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

onde $C > 0$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$, $N \geq 3$. Além disso, Δ é o operador Laplaciano, isto é

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

e $\|.\|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

Nosso objetivo é encontrar soluções não-triviais para o problema (P_0). Faremos isto usando Métodos Variacionais.

Mostraremos a existência de solução fraca para o problema (P_0) determinando pontos críticos do funcional

$$I_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definido por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)$$

onde

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds, \;\; F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

Segue do Apêndice A que o funcional I_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I_1'(u).h = M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla h dx - \int_\Omega f(x,u)h, \;\; \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

A fim de usarmos a Teoria dos Pontos Críticos, mostraremos um resultado sobre seqüências de Palais-Smale para o funcional I_1.

Sejam E um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Diz-se que uma seqüência (u_n) em E é uma seqüência de Palais-Smale, ou simplesmente (PS), para o funcional I se

$$(I(u_n)) \text{ for limitada e } \|I'(u_n)\|_{(E)'} \to 0.$$

Se toda seqüência de Palais-Smale de I possuir uma subseqüência fortemente convergente em E, diz-se que I satisfaz a condição de Palais-Smale, ou simplesmente (PS).

Os resultados apresentados a seguir, nesta seção, são devidos a Alves-Corrêa-Ma e estão contidos em [1]

Lema 1.1. Suponhamos que as condições (M_0) e (1.1) sejam satisfeitas. Então qualquer seqüência de Palais-Smale limitada do funcional I_1 possui uma subseqüência convergente em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja (u_n) uma seqüência (PS) limitada de I_1. Desde que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo, passando, se necessário, para uma subseqüência, encontramos $u \in H_0^1(\Omega)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

e

$$\|u_n\|^2 \to t_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Da continuidade da M e usando (M_0), temos que

$$M(\|u_n\|^2) \to M(t_0) \geq m_0 > 0. \tag{1.2}$$

Desde que $I_1'(u_n)$ é um funcional linear contínuo, segue da convergência $I_1'(u_n) \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))'$ e da limitação da seqüência (u_n) que existe $k > 0$ tal que $\|u_n\| \leq k \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq |I_1'(u_n)u_n| &\leq \|I_1'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \|u_n\| \\ &\leq \|I_1'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} k \to 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_1'(u_n)u_n \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

De modo análogo, temos

$$I_1'(u_n)u \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$I_1'(u_n)(u_n - u) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Da imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 2^*$, obtemos, a menos de subseqüência,

$$u_n \to u \text{ em } L^{p+1}(\Omega),$$

logo, a menos de subseqüência

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega \tag{1.4}$$

e existe v em $L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq v(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega. \tag{1.5}$$

De (1.4) e da continuidade de $f(x, .)$, temos

$$f(x, u_n(x))u_n(x) \to f(x, u(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$f(x, u_n(x))u(x) \to f(x, u(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, de (1.1) e (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x))u_n(x)| &\leq C(1 + |u_n(x)|^p) |u_n(x)| \\ &\leq C(1 + [v(x)]^p)v(x), \end{aligned}$$

q.t.p. em Ω e

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x))u(x)| &\leq C(1 + |u_n(x)|^p) |u(x)| \\ &\leq C(1 + [v(x)]^p) |u(x)|, \end{aligned}$$

q.t.p. em Ω onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $C > 0$. Desde que $v^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$ e $u \in L^{p+1}(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$C(1+v^p)v \in L^1(\Omega) \quad \text{ e } \quad C(1+v^p)u \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n \to \int_\Omega f(x,u)u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}$$

e

$$\int_\Omega f(x,u_n)u \to \int_\Omega f(x,u)u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Logo, de (1.3) e (1.6), obtemos

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Desde que a seqüência $(\frac{1}{M(\|u_n\|^2)})$ é limitada em $\mathbb{R}$ por (1.2), segue de (1.7) que,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u) = (M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n-u))\frac{1}{M(\|u_n\|^2)} \to 0 \text{ em } \mathbb{R}$$

ou seja,

$$(\|u_n\|^2 - \langle u_n, u\rangle) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Da convregência fraca, obtemos

$$\|u_n\|^2 \to \|u\|^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\|u_n-u\|^2 = (\|u_n\|^2 - 2\langle u_n, u\rangle + \|u\|^2) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R},$$

isto é,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega),$$

o que conclui a prova do lema. ■

1.2 Existência de solução com M não podendo ser crescente

Nesta seção usaremos a seguinte hipótese sobre a função M:

$$\widehat{M}(t) \geq M(t)t, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{1.8}$$

Note que esta hipótese implica que M não pode ser crescente. De fato, suponhamos que M seja crescente, então teríamos

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t M(s)ds \\ &< \int_0^t M(t)ds \\ &= M(t)t \end{aligned}$$

o que contradiz (1.8).

Teorema 1.1. Suponhamos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ seja uma função localmente Lipschitziana satisfazendo (1.1) e (1.8). Além disso, que a função M satisfaz (M_0) e

$$f(x,t) = o(t), \text{ quando } t \to 0, \tag{1.9}$$

e, para algum $\mu > 2$ e $R > 0$,

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t, \text{ para todo } |t| > R. \tag{1.10}$$

Então o problema (P_0) possui uma solução não-trivial.

Demonstração. Temos que toda solução não-trivial de (P_0) é ponto crítico não-nulo do funcional I_1. Então, poderemos usar o Teorema do Passo da Montanha(ver Apêndice C) se mostrarmos que:

(i) $I_1(0) = 0$,

(ii) Existem $\rho, r > 0$, tais que $I_1(u) \geq \rho$ se $\|u\| = r$,

(iii) Existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|e\| > r$ e $I_1(e) \leq 0$,

(iv) I_1 satisfaz (PS).

A condição **(i)** segue imediatamente da própria definição do funcional I_1.

Verificação da condição (ii)

De (1.9), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$f(x,t) < \epsilon\,|t| \quad \text{para } |t| < \delta_\epsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F(x,u) &= \int_0^u f(x,t)dt \\ &\le \int_0^u \epsilon\,|t|\,dt \\ &= \frac{\epsilon}{2}\,|u|^2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $|u| \le \delta_\epsilon$. De (1.1), temos

$$\begin{aligned} F(x,u) &= \int_0^u f(x,t)dt \\ &\le \int_0^u C(1+|t|^p)dt \\ &= C\,|u| + \frac{C}{p+1}\,|u|^{p+1}, \end{aligned}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $C > 0$. Assim, para $|u| > \delta_\epsilon$, temos

$$\begin{aligned} F(x,u) &\le C\,|u|^{p+1}\frac{1}{|u|^p} + \frac{C}{p+1}\,|u|^{p+1} \\ &\le \frac{C}{\delta_\epsilon^p}\,|u|^{p+1} + \frac{C}{p+1}\,|u|^{p+1} \\ &= C\left(\frac{1}{\delta_\epsilon^p} + \frac{1}{p+1}\right)|u|^{p+1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

De (1.11) e (1.12), obtemos

$$F(x,u) \le \frac{\epsilon}{2}\,|u|^2 + C_\epsilon\,|u|^{p+1}, \tag{1.13}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $C_\epsilon = C\left(\frac{1}{\delta_\epsilon^p} + \frac{1}{p+1}\right) > 0$. Portanto, de (M_0), (1.8) e (1.13) resulta para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\ge \frac{1}{2}m_0\,\|u\|^2 - [\int_\Omega \frac{\epsilon}{2}\,|u|^2\,dx + \int_\Omega C_\epsilon\,|u|^{p+1}\,dx] \\ &= \frac{1}{2}m_0\,\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}\,|u|_2^2 - C_\epsilon\,|u|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $1 \le r \le 2^*$, obtemos constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$I_1(u) \ge \frac{1}{2}m_0\,\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}C_1\,\|u\|^2 - C_\epsilon C_2\,\|u\|^{p+1}.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $\frac{\epsilon}{2}C_1 < \frac{1}{2}m_0$, resulta

$$I_1(u) \ge C_3\,\|u\|^2 - C_4\,\|u\|^{p+1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $C_3 = \left(\frac{1}{2}m_0 - \frac{\epsilon}{2}C_1\right) > 0$ e $C_4 = C_\epsilon C_2 > 0$. Considerando $0 < r < \left(\frac{C_3}{C_4}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, obtemos

$$I_1(u) \geq (C_3 r^2 - C_4 r^{p+1}) > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| = r,$$

daí,

$$I_1(u) \geq \rho > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| = r,$$

onde $\rho = C_3 r^2 - C_4 r^{p+1} > 0$, mostrando que o funcional I_1 satisfaz a condição **(ii)**.

Verificação da condição (iii)

Afirmação 1.1. Existem constantes positivas K_1 e K_2 tais que

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^\mu - K_2, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Demonstração. Considerando $F(x,t) \neq 0$ e $t \neq 0$, vamos analisar os seguintes casos:

1ºCaso: $t \geq R+1$. Então, por (1.10)

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)},$$

o que implica

$$\int_{R+1}^{t} \frac{\mu}{s} ds \leq \int_{R+1}^{t} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds,$$

de onde segue,

$$\mu \ln t - \mu \ln(R+1) \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,R+1).$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{t}{R+1}\right)^\mu \leq \ln \frac{F(x,t)}{F(x,R+1)}, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Como ln é uma função crescente, temos

$$\left(\frac{t}{R+1}\right)^\mu \leq \frac{F(x,t)}{F(x,R+1)}, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,R+1)}{(R+1)^\mu} t^\mu, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} F(x,R+1) = m > 0$, observamos que m está bem definido, visto que $F(.,R+1)$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso,

$$F(x,t) \geq \frac{m}{(R+1)^\mu} t^\mu, \text{ para } t \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, fixando $C_1 = \frac{m}{(R+1)^\mu} > 0$,

$$F(x,t) \geq C_1 t^\mu, \tag{1.14}$$

para todo $t \geq R+1$ e $x \in \overline{\Omega}$.

2°Caso: $t \leq -(R+1)$. Então, novamente de (1.10)

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\mu}{t},$$

o que implica

$$\int_t^{-(R+1)} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \leq \int_t^{-(R+1)} \frac{\mu}{s} ds,$$

de onde segue,

$$\ln F(x,-(R+1)) - \ln F(x,t) \leq \mu \ln |-(R+1)| - \mu \ln |t|,$$

logo,

$$\ln \left| \frac{-(R+1)}{t} \right|^{\mu} \geq \ln \frac{F(x,-(R+1))}{F(x,t)}, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Como ln é uma função crescente, obtemos

$$\left| \frac{-(R+1)}{t} \right|^{\mu} \geq \frac{F(x,-(R+1))}{F(x,t)}, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega},$$

ou seja,

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-(R+1))}{(R+1)^{\mu}} |t|^{\mu}, \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando $\min_{x \in \overline{\Omega}} F(x,-(R+1)) = \overline{n}$, observamos que $\overline{n}$ está bem definido, visto que $F(.,-(R+1))$ é contínua e $\overline{\Omega}$ é compacto. Além disso, tem-se

$$F(x,t) \geq \frac{\overline{n}}{(R+1)^{\mu}} |t|^{\mu} \text{ para } t \leq -(R+1) \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Assim, considerando $C_2 = \frac{\overline{n}}{(R+1)^{\mu}} > 0$,

$$F(x,t) \geq C_2 |t|^{\mu}, \tag{1.15}$$

para todo $t \leq -(R+1)$ e $x \in \overline{\Omega}$. Considerando $K_1 = \min\{C_1, C_2\}$, segue-se de (1.14) e (1.15) que,

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^{\mu}, \text{ para todo } |t| \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega}.$$

Dessa forma,

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^{\mu} - K_2, \text{ para todo } |t| \geq R+1 \text{ e } x \in \overline{\Omega},$$

onde $K_2 > 0$ é uma constante positiva arbitrária. Considerando $\overline{m} = \min F(x,t)$ com $x \in \overline{\Omega}$ e $t \in [-(R+1), R+1]$, note que $\overline{m}$ está bem definido, pois F é contínua e $\overline{\Omega} \times [-(R+1), R+1] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é um compacto, logo

$$F(x,t) \geq \overline{m}, \; \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } t \in [-(R+1), R+1].$$

Considere $K_2 > 0$, de modo que

$$K_2 \geq K_1(R+1)^\mu - \overline{m},$$

logo,

$$K_2 \geq K_1 |t|^\mu - \overline{m}, \;\; \forall t \in [-(R+1), R+1],$$

ou seja,

$$\overline{m} \geq K_1 |t|^\mu - K_2, \;\; \forall t \in [-(R+1), R+1].$$

Assim,

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^\mu - K_2, \;\; \forall t \in [-(R+1), R+1], x \in \overline{\Omega} \tag{1.16}$$

e

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^\mu - K_2, \;\; \forall\, |t| \geq R+1, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17) segue que

$$F(x,t) \geq K_1 |t|^\mu - K_2, \;\; \forall t \in \mathbb{R}, x \in \overline{\Omega}, \tag{1.18}$$

donde concluímos que a Afirmação é verdadeira. ■

Considerando $\varphi > 0$ em $H_0^1(\Omega)$, de (1.18) obtemos, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} I_1(t\varphi) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\varphi\|^2) - \int_\Omega F(x,t\varphi) \\ &\leq \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\varphi\|^2) - t^\mu K_1 \int_\Omega |\varphi|^\mu + K_2 |\Omega| \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\varphi\|^2) - t^\mu K_1 |\varphi|_\mu^\mu + K_2 |\Omega| \,. \end{aligned}$$

De (1.8), obtemos

$$\int_1^t \frac{1}{s} ds \geq \int_1^t \frac{M(s)}{\widehat{M}(s)} ds$$

ou seja,

$$\ln t \geq \ln \frac{1}{\widehat{M}(1)} \widehat{M}(t)$$

conseqüentemente

$$\widehat{M}(t) \leq \widehat{M}(1)t \;\; \text{para todo } t > 1.$$

Daí,

$$I_1(t\varphi) \leq \frac{1}{2}\widehat{M}(1) \|\varphi\|^2 t^2 - K_1 |\varphi|_\mu^\mu t^\mu + K_2 |\Omega| \,,$$

para todo t suficientemente grande. Desde que $\mu > 2$, existe $\bar{t} > 0$ tal que $I_1(\bar{t}\varphi) < 0$, mostrando que o funcional I_1 satisfaz a condição **(iii)**.

Verificação da condição (iv)

Pelo Lema 1.1 é suficiente mostrarmos que toda seqüência (PS) para o funcional I_1 é limitada. Seja (u_n) uma seqüência (PS) para I_1 e note que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} I_1'(u_n)u_n &\leq \frac{1}{\mu} \left| I_1'(u_n)u_n \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left\| I_1'(u_n) \right\|_{(H_0^1(\Omega))'} \left\| u_n \right\|. \end{aligned}$$

Desde que $I_1'(u_n) \to 0$ em $(H_0^1(\Omega))'$, existe $k > 0$ tal que

$$-\frac{1}{\mu} I_1'(u_n)u_n \leq k \left\| u_n \right\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo $(I_1(u_n))$ limitada em $H_0^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que $I_1(u_n) < C$ $\forall n$, logo

$$I_1(u_n) - \frac{1}{\mu} I_1'(u_n)u_n \leq C + k \left\| u_n \right\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

De (M_0), (1.8) e (1.19), obtemos

$$\begin{aligned} C + k\|u_n\| &\geq I_1(u_n) - \frac{1}{\mu} I_1'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_n\|^2) - \frac{1}{\mu} M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u) \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 + \int_{|u_n|>R} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) - C_1 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0\|u_n\|^2 + \int_{|u_n|>R} \left(\frac{1}{\mu} f(x,u_n)u_n - F(x,u_n) \right) - C_1 \end{aligned}$$

Por (1.10), temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0\|u_n\|^2 \leq C + C_1 + k\|u_n\|$$

ou seja,

$$C_3\|u_n\|^2 \leq C_2 + k \left\| u_n \right\|, \tag{1.20}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, em que $C_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) m_0$ e $C_2 = (C + C_1)$ são constantes positivas.

Suponhamos por absurdo que a seqüência (u_n) não seja limitada. Então existe uma subseqüência, ainda denotada por (u_n), tal que

$$\|u_n\| \to +\infty,$$

logo, multiplicando (1.20) por $\frac{1}{\|u_n\|}$ para n suficientemente grande, resulta

$$\|u_n\| \leq C_4,$$

onde $C_4 = \frac{k}{C_3} > 0$, o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto a seqüência (u_n) é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, pelo Lema 1.1, I_1 satisfaz a condição (PS), mostrando a condição (iv). Logo, do Teorema do Passo da Montanha, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I_1(u) = c > 0$ e $I_1'(u) = 0$, ou seja, u é ponto crítico não-nulo do funcional I_1, e portanto solução fraca do problema (P_0). ■

1.3 Existência de solução com M podendo ser crescente

Observação 1.1. Nas aplicações originais a função M é crescente. Tem-se então

$$\widehat{M}(u) < \int_0^u M(u)ds = M(u)u, \text{ para todo } u > 0,$$

de modo que a condição (1.8) não pode ser satisfeita.

No que se segue consideraremos a existência de solução do problema (P_0) em que M pode ser crescente. Para tal fim, começaremos supondo que M seja limitada e que exista $m_1 \geq m_0$ e $t_0 > 0$ tal que

$$M(t) = m_1, \text{ para todo } t \geq t_0. \tag{1.21}$$

Teorema 1.2. Suponhamos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ seja uma função localmente Lipschitziana satisfazendo as condições (1.1), (1.9) e(1.10). Suponhamos, além disso, que a função M satisfaz (M_0) e (1.21), e

$$(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}) > 0. \tag{1.22}$$

Então o problema (P_0) possui uma solução não-trivial.

Demonstração. Argumentaremos como na demonstração do Teorema 1.1 para mostrar que o funcional I_1 possui um ponto crítico não-nulo. De (M_0) e (1.21) temos que

$$\widehat{M}(t) \geq m_0 t, \ \forall t \geq 0 \tag{1.23}$$

e

$$\begin{aligned}
\widehat{M}(t) &= \int_0^t M(s)ds \\
&= \int_0^{t_0} M(s)ds + \int_{t_0}^t m_1 ds \\
&\leq m_1 t + m_2, \ \forall t \geq t_0,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

onde $m_2 = \left| \int_0^{t_0} M(s)ds - m_1 t_0 \right|$. De (1.13) e (1.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
I_1(u) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - [\int_\Omega \frac{\epsilon}{2}|u|^2\,dx + \int_\Omega C_\epsilon |u|^{p+1}\,dx] \\
&= \frac{1}{2}m_0\|u\|^2 - \frac{\epsilon}{2}|u|_2^2 - C_\epsilon |u|_{p+1}^{p+1}.
\end{aligned}
$$

Logo, podemos repetir o mesmo argumento usado no Teorema 1.1 e obter

$$I_1(u) \geq \rho > 0, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\| = r,$$

mostrando que o funcional I_1 satisfaz a condição **(ii)** do Teorema 1.2.

Se $\phi > 0$ for uma função em $H_0^1(\Omega)$, conseguimos, de (1.18) e (1.24)

$$
\begin{aligned}
I_1(t\phi) &= \frac{1}{2}\widehat{M}(\|t\phi\|^2) - \int_\Omega F(x,t\phi)dx \\
&\leq t^2\frac{m_1}{2}\|\phi\|^2 - K_1 t^\mu \int_\Omega |\phi|^\mu\,dx + K_2|\Omega| + \frac{m_2}{2},
\end{aligned}
$$

logo,

$$I_1(t\phi) \leq t^2\frac{m_1}{2}\|\phi\|^2 - t^\mu K_1|\phi|_\mu^\mu + K_3,$$

para todo t suficientemente grande, onde $K_3 = (K_2|\Omega| + \frac{m_2}{2}) > 0$. Portanto, desde que $\mu > 2$, temos que $I_1(t\phi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, logo existe $e \in H_0^1(\Omega)$ com $\|e\| > r$ tal que $I_1(e) < 0$, mostrando que o funcional I_1 satisfaz a condição **(iii)** do Teorema 1.2.

Por conseguinte, o funcional I_1 satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha e, em virtude do Teorema do Passo da Montanha, I_1 possuirá um ponto crítico não-trivial, desde que ele satisfaça a condição (PS).

Mostremos que tal condição é satisfeita. Seja (u_n) uma seqüência (PS) de I_1 e suponhamos, por contradição, que $\|u_n\| \to +\infty$. Então, procedendo como no Teorema 1.2, temos

$$C + k\|u_n\| \geq I_1(u_n) - \frac{1}{\mu}I_1'(u_n)u_n \geq \left(\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 - C_1.$$

ou seja,

$$C_3\|u_n\|^2 \leq C_2 + k\|u_n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande onde $C_2 = (C + C_1) > 0$ e $C_3 = (\frac{m_0}{2} - \frac{m_1}{\mu}) > 0$ por (1.22), o que contradiz $\|u_n\| \to \infty$. Logo, (u_n) é limitada e em virtude do Lema 1.1 tal seqüência satisfaz a condição (PS).

Portanto, usando o Teorema do Passo da Montanha, temos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ ponto crítico não-nulo do funcional I_1 e assim u é solução fraca de (P_0). $\blacksquare$

Nosso objetivo é estender o Teorema 1.2 para uma classe maior de funções M que incluam as funções lineares crescentes pois foi este tipo de função que, historicamente, surgiu na equação em (P_0). Isto será feito usando um argumento de truncamento e estimativas a priori tal como é feito em Gidas-Spruck [15]. Nesse trabalho, considera-se a hipótese

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t^p} = h(x), \tag{1.25}$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$, onde $h > 0$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$. Assim, qualquer solução u de

$$-\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega, u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

satisfaz $u(x) \leq C_*$ q.t.p em Ω, onde C_* depende somente de p, h e Ω, e não da particular solução u deste último problema. A fim de estabelecer as hipóteses exigidas no próximo teorema, mostraremos um lema que exibirá uma relação entre as normas em $H_0^1(\Omega)$ das soluções do problema (P_0) com $M(\|u\|^2)$.

Lema 1.2. Seja $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C_0|s|^q + C_1|s|^p, \ \forall x \in \Omega, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

onde $C_0 \geq 0$, $C_1 > 0$, $0 < q \leq p, 1 < p < (N+2)/(N-2)$. Então, se f satisfizer (1.25) e M satisfizer (M_0), existe $\theta > 0$, que não depende de M, tal que

$$\|u\|^2 \leq \max\left\{M(\|u\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(\|u\|^2)^{2/(p-1)}\right\}\theta, \tag{1.27}$$

para qualquer solução u do problema (P_0).

Demonstração. Seja u uma solução não-trivial do problema (P_0). Então

$$\omega = \frac{u}{M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}}$$

é uma solução não-trivial de

$$\begin{cases} -\Delta\omega = g(x,\omega) & \text{em} \quad \Omega, \\ \omega = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$g(x,s) = \frac{f\left(x, M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s\right)}{M(\|u\|^2)^{p/(p-1)}}.$$

Agora, considerando $l = M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s$, temos

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{s^p} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{f\left(x, M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s\right)}{\left(M(\|u\|^2)^{1/(p-1)}s\right)^p} = \lim_{|l|\to\infty} \frac{f(x,l)}{l^p} = h(x)$$

não depende de M, em virtude das estimativas de Gidas-Spruck [15], existe $C_* > 0$, não-dependente de M, tal que

$$\|\omega\|_\infty \leq C_*,$$

ou seja,

$$\left\| \frac{u}{[M(\|u\|^2)]^{1/(p-1)}} \right\|_\infty \leq C_*.$$

Portanto,

$$\|u\|_\infty \leq [M(\|u\|^2)]^{1/(p-1)} C_*.$$

Usando (1.26), temos

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= M(\|u\|^2)^{-1} \int_\Omega f(x,u)u dx \\ &\leq M(\|u\|^2)^{-1} \int_\Omega (C_0|u|^q + C_1|u|^p) u dx \\ &\leq M(\|u\|^2)^{-1} (C_0\|u\|_\infty^{q+1} + C_1\|u\|_\infty^{p+1})|\Omega| \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq M(\|u\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)} C_0 C_*^{q+1}|\Omega| + M(\|u\|^2)^{2/(p-1)} C_1 C_*^{p+1}|\Omega| \\ &\leq \max\left\{M(\|u\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(\|u\|^2)^{2/(p-1)}\right\} (C_0 C_*^{q+1} + C_1 C_*^{p+1})|\Omega|. \end{aligned}$$

Tomando $\theta = (C_0 C_*^{q+1} + C_1 C_*^{p+1})|\Omega|$ concluímos a demonstração do Lema. ■

Demonstraremos, a seguir, o principal resultado desta seção.

Teorema 1.3. Suponhamos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ seja uma função localmente Lipschitziana satisfazendo às condições (1.9), (1.10) e (1.25). Além disso, suponhamos que M seja uma função contínua satisfazendo (M_0) e que exista $k > 0$ tal que

$$M(k) < \frac{\mu m_0}{2} \tag{1.28}$$

e

$$\max\left\{M(k)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(k)^{2/(p-1)}\right\} \leq \frac{k}{\theta}, \tag{1.29}$$

onde p, q e θ foram introduzidos no Lema 1.2. Então o problema (P_0) possui uma solução não-trivial.

Demonstração. Observemos, inicialmente, que as hipóteses (1.9) e (1.25) implicam na validez de (1.26). De fato, de (1.9), para $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq |t| \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \ \forall |t| \leq \delta. \tag{1.30}$$

Por outro lado, de (1.25), para $\epsilon = 1$, existe $A > \delta > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq (1 + |h(x)|)|t|^p \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall |t| > A.$$

Sendo h contínua e $\overline{\Omega}$ compacto, obtemos $C > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq (1 + C)|t|^p \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall |t| > A,$$

o que implica

$$|f(x,t)| \leq C_1|t| + (1 + C)|t|^p \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall |t| > A, \tag{1.31}$$

onde $C_1 \geq 0$ é uma constante arbitrária.

Agora, sendo f contínua e $\overline{\Omega} \times ([-A, -\delta] \cup [\delta, A])$ compacto, existe $C_2 > 0$ tal que

$$|\frac{f(x,t)}{t}| \leq C_2 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [-A, -\delta] \cup [\delta, A].$$

ou seja,

$$|f(x,t)| \leq C_2|t| \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [-A, -\delta] \cup [\delta, A]. \tag{1.32}$$

Assim, de (1.30), (1.31) e (1.32) segue que

$$|f(x,t)| \leq C_3|t| + (1 + C)|t|^p \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_3 = \max\{1, C_1, C_2\} > 0$, mostrando que (1.26) ocorre para $q = 1$ e assim θ está bem definido. Definamos a função truncada

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t), & \text{se} \quad t \leq k, \\ M(k), & \text{se} \quad t > k. \end{cases}$$

A hipótese (1.28) implica que M_k satisfaz (1.22) com $m_1 = M(k)$. De fato, de (1.28),

$$M(k) < \frac{\mu m_0}{2}$$

isto é,

$$(\frac{m_0}{2} - \frac{M(k)}{\mu}) > 0,$$

mostrando que (1.22) ocorre com $m_1 = M(k)$. Além disso, note que (1.25) implica em (1.1). De fato, de (1.25), existem constantes $A, C > 0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq (1 + C)|t|^p \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall |t| > A,$$

o que implica

$$|f(x,t)| \leq C_1(1 + |t|^p) \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall |t| > A, \tag{1.33}$$

onde $C_1 = (1 + C) > 0$. Agora, desde que f é contínua e $\overline{\Omega} \times [-A, A]$ compacto, existe $C_2 > 0$ tal que

$$|f(x,t)| \leq C_2 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [-A, A],$$

conseqüentemente,

$$|f(x,t)| \leq C_2(1 + |t|^p) \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in [-A, A]. \tag{1.34}$$

Portanto, de (1.33) e (1.34), obtemos

$$|f(x,t)| \leq C_3(1 + |t|^p) \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $C_3 = \max\{C_1, C_2\} > 0$, mostrando que (1.1) ocorre. Assim, podemos aplicar o Teorema 1.2 para concluir que u_k, é solução não-trivial do problema truncado

$$\begin{cases} -M_k(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando o Lema 1.2, obtemos

$$\|u_k\|^2 \leq \max\left\{M_k(\|u_k\|^2)^{(2-p+q)/(p-1)}, M_k(\|u_k\|^2)^{2/(p-1)}\right\}\theta.$$

Isto implica que se $\|u_k\|^2 > k$, então

$$\frac{k}{\theta} < \max\left\{M(k)^{(2-p+q)/(p-1)}, M(k)^{2/(p-1)}\right\},$$

o que contradiz (1.29). Portanto, $\|u_k\|^2 \leq k$, o que mostra que u_k é, de fato, uma solução não-trivial do problema (P_0). ■

Exemplo 1.1. Vejamos um exemplo em que tal resultado se aplica. Seja f uma função dada satisfazendo (1.25) e (1.26), com $p = q$ em (1.27). Uma vez computado μ e θ, fixemos $m_0 > 0$ e $k > 0$, tais que

$$m_0 > \left(\frac{k}{\theta}\right)^{(p-1)/2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{k}{\theta}\right)^{(p-1)/2} < \frac{\mu}{2} m_0,$$

e defina M como sendo a funçao linear afim $M(s) = ms + m_0$ com

$$m = \left(\left(\frac{k}{\theta}\right)^{(p-1)/2} - m_0\right)\frac{1}{k}.$$

Daí segue-se que M satisfaz as condições (1.28) e (1.29) do Teorema 1.3.

Capítulo 2

Problema subcrítico não local do tipo p-Kirchhoff

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a classe de problemas não-locais de valor de fronteira do tipo p-Kirchhoff

$$(P) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) \;\; \text{em} \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; \text{em} \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $N \geq 3$, $M : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ é uma função contínua satisfazendo a condição (M_0) e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

$$|f(x,t)| \leq C\,|t|^{q-1}\,, \;\; \text{para todo } x \in \Omega \text{ e } t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

onde $C > 0$, $p < q < p^* = \frac{pN}{N-p}$. Além disso, Δ_p é o operador p-Laplaciano, isto é,

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}), \quad 1 < p < N,$$

e daqui por diante, $\|.\|$ representará a norma usual em $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p\,.$$

Como foi dito na introdução, aqui vamos seguir parte dos argumentos usados no Capítulo 1 para a equação do tipo p-Kirchhoff, pois as estimativas do tipo Gidas-Spruk [15], ao que parece , não são válidas para problemas envolvendo o operador p-Laplaciano. Para contornar tal dificuldade, faremos comparações entre os níveis de energia de certos funcionais. Nosso objetivo é encontrar soluções não-negativas para o problema (P).

Neste capítulo, estudaremos o problema (P) usando Métodos Variacionais. Dizemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P) se

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h - \int_\Omega f(x,u)h = 0$$

para todo $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Encontraremos soluções para (P) achando pontos críticos do funcional $I_2 : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_2(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x,u^+)dx$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1}ds$, $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ e $u^+ = \max\{u,0\}$.

Segue do Apêndice C que o funcional I_2 é classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$ e

$$I_2'(u).h = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h - \int_\Omega f(x,u^+)h,$$

para todo $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

A fim de usarmos a Teoria dos Pontos Críticos, mostraremos um resultado sobre seqüências de Palais-Smale (PS).

Lema 2.1. Suponhamos que as condições (M_0) e (2.1) sejam satisfeitas. Então qualquer seqüência de Palais-Smale limitada (u_n) do funcional I_2 possui uma subseqüência convergente em $W_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência (PS) limitada para o funcional I_2. Assim, passando se necessário para uma subsequência, obtemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\|u_n\|^p \to t_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \tag{2.2}$$

e

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Da imersão compacta de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, obtemos a menos de subseqüência

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega),$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

para alguma $h \in L^q(\Omega)$, $p < q < p^*$. Além disso, da continuidade de $f(x,.)$, temos

$$f(x, u_n^+(x))u(x) \to f(x, u^+(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$f(x, u_n^+(x))u_n(x) \to f(x, u^+(x))u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

De (2.1), resulta,

$$\begin{aligned} \left|f(x, u_n^+(x))u(x)\right| &\leq C\left|u_n^+(x)\right|^{q-1}|u(x)| \\ &\leq C[h(x)]^{q-1}|u(x)|, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left|f(x, u_n^+(x))u_n(x)\right| &\leq C\left|u_n^+(x)\right|^{q-1}|u_n(x)| \\ &\leq C[h(x)]^{q} \end{aligned}$$

q.t.p. em Ω, com $p < q < p^*$. Desde que $h^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ e $u \in L^q(\Omega)$, segue da desigualdade de Hölder que

$$h^{q-1}u \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega f(x, u_n^+)u \to \int_\Omega f(x, u^+)u \quad \text{e} \quad \int_\Omega f(x, u_n^+)u_n \to \int_\Omega f(x, u^+)u.$$

Agora, consideremos a seqüência

$$P_n = I_2'(u_n)u_n + \int_\Omega f(x, u_n^+)u_n - I_2'(u_n)u - \int_\Omega f(x, u_n^+)u.$$

Sendo $I_2'(u_n)$ um funcional linear contínuo, segue da convergência $I'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ e da limitação da seqüência (u_n) que existe $k > 0$ tal que $\|u_n\| \leq k \; \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} 0 \leq |I_2'(u_n)u_n| &\leq \|I_2'(u_n)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'}\|u_n\| \\ &\leq \|I_2'(u_n)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'}k \to 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_2'(u_n)u_n \to 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

De modo análogo, temos

$$I_2'(u_n)u \to 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Com isso, temos que $P_n \to 0$ e

$$P_n = [M(\|u_n\|^p)]^{p-1}\|u_n\|^p - [M(\|u_n\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u.$$

Note que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fixada, o funcional $H : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $H(v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v$ é um funcional linear e contínuo. De fato, dados $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} H(\alpha v + w) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla(\alpha v + w) \\ &= \alpha H(v) + H(w) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |H(v)| &= \left| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right| \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \,. \end{aligned}$$

Desde que $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ e $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|H(v)| \leq \|u\|^{p-1} \|v\| \,.$$

Portanto, H é um funcional linear e contínuo. Segue da convergência fraca que,

$$H(u_n) \to H(u),$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n \to \|u\|^p \,.$$

Além disso, de (2.2), temos $M(\|u_n\|^p) \to M(t_0)$. Logo,

$$-[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n + [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \|u\|^p = o_n(1).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} o_n(1) + P_n = [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \|u_n\|^p - [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla u \\ -[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n + [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \|u\|^p \,. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$o_n(1) + P_n = [M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega \langle |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_n - \nabla u \rangle.$$

Usando a seguinte desigualdade em $\mathbb{R}^N$ (ver Apêndice C),

$$\langle |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y, x - y \rangle \geq C_p |x - y|^p \text{ se } p \geq 2$$

ou,

$$\langle |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y, x - y \rangle \geq \frac{C_p |x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} \text{ se } 1 < p < 2,$$

onde $\langle , \rangle$ é o produto interno Euclidiano em $\mathbb{R}^N$ e de (M_0), obtemos

$$o_n(1) + P_n \geq m_0^{p-1} C_p \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p \,.$$

Assim, concluímos que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

2.2 Existência de solução com M não podendo ser crescente

Agora, mostraremos um resultado de existência básico como uma motivação para nosso teorema principal. Aqui, usamos a versão devido a M. Willem [22] do Teorema do Passo da Montanha(Teorema C.4) cuja demonstração encontra-se no Apêndice C.

Nesta seção usaremos a seguinte hipótese sobre a função M:

$$\widehat{M}(t) \geq [M(t)]^{p-1}t, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{2.3}$$

Note que esta hipótese implica que M não pode ser crescente. De fato, suponhamos que M seja crescente, então teríamos

$$\begin{aligned}\widehat{M}(t) &= \int_0^t [M(s)]^{p-1}ds \\ &< \int_0^t [M(t)]^{p-1}ds \\ &= [M(t)]^{p-1}t\end{aligned}$$

o que contradiz (2.3).

Teorema 2.1. Suponhamos que as condições (2.1), (2.3) e (M_0) sejam satisfeitas. Além disso, suponhamos que

$$0 < \mu F(x,t) \leq f(x,t)t \quad \text{para todo} \quad t > 0, \tag{2.4}$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$ com $p < \mu < q$. Então, o problema (P) possui uma solução não-negativa.

Demonstração. Temos que todo ponto crítico não-nulo de I_2 é solução não-nula de (P). Então, poderemos usar o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice C) se mostrarmos que:

(i) $I_2(0) = 0$,

(ii) Existem $\rho, r > 0$, tais que $I_2(u) \geq \rho$ se $\|u\| = r$,

(iii) Existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|e\| > r$ e $I_2(e) \leq 0$.

Note que $I_2(0) = 0$ pela própria definição do funcional I_2, e a condição **(i)** é satisfeita.

Usando a condição (2.3), obtemos,

$$\begin{aligned}I_2(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x,u^+) \\ &\geq \frac{1}{p}[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,u^+),\end{aligned}$$

por (M_0) e (2.1), obtemos,

$$I_2(u) \geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{C}{q} \int_\Omega |u^+|^q$$

o que implica

$$\begin{aligned} I_2(u) &\geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{C}{q} \int_\Omega |u|^q \\ &= \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{C}{q} |u|_q^q, \end{aligned}$$

da imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$I_2(u) \geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{CC_1}{q} \|u\|^q,$$

ou seja,

$$I_2(u) \geq C_2 \|u\|^p - C_3 \|u\|^q,$$

onde $C_2 = \frac{1}{p} m_0^{p-1} > 0$, $C_3 = \frac{CC_1}{q} > 0$ e $p < q$. Assim, considerando $0 < r < \left(\frac{C_2}{C_3}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, temos

$$I_2(u) \geq \alpha > 0, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \|u\| = r,$$

onde $\alpha = (C_2 r^p - C_3 r^q) > 0$, mostrando que I_2 satisfaz **(ii)**.

Considerando $\varphi > 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, de (1.18) obtemos, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} I_2(t\varphi) &= \frac{1}{p} \widehat{M}(\|t\varphi\|^p) - \int_\Omega F(x, t\varphi) \\ &\leq \frac{1}{p} \widehat{M}(\|t\varphi\|^p) - t^\mu K_1 \int_\Omega |\varphi|^\mu + K_2 |\Omega| \\ &= \frac{1}{p} \widehat{M}(\|t\varphi\|^p) - t^\mu K_1 |\varphi|_\mu^\mu + K_2 |\Omega|. \end{aligned}$$

Definindo a função $h : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ por $h(t) = \frac{t}{\widehat{M}(t)}$. Temos que h está bem definida, é derivável e por (2.3)

$$h'(t) = \frac{\widehat{M}(t) - [M(t)]^{p-1} t}{[\widehat{M}(t)]^2} \geq 0.$$

Logo h é não-decrescente. Assím, para todo $t > 1$

$$h(t) \geq h(1)$$

ou seja

$$\widehat{M}(t) \leq \widehat{M}(1) t \quad \text{para todo } t > 1.$$

Daí,

$$I_2(t\varphi) \leq \frac{1}{p} \widehat{M}(1) \|\varphi\|^p t^p - K_1 |\varphi|_\mu^\mu t^\mu + K_2 |\Omega|,$$

para todo t suficientemente grande. Desde que $\mu > p$, existe $\widetilde{t} > 0$ suficientemente grande tal que $I_2(\widetilde{t}\varphi) < 0$. Logo existe $e = \widetilde{t}\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I_2(e) < 0$, mostrando que o funcional I_2 satisfaz a condição **(iii)**. Portanto, Pelo Teorema do Passo da Montanha, existe uma seqüência Palais-Smale $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ para o funcional I_2.

Mostraremos que a seqüência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, note que $I_2'(u_n) \to 0$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ implica que,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} I_2'(u_n)u_n &\leq \frac{1}{\mu} |I_2'(u_n)u_n| \\ &\leq \frac{1}{\mu} \|I_2'(u_n)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \|u_n\|, \end{aligned}$$

e assim,

$$-\frac{1}{\mu} I_2'(u_n)u_n \leq k \|u_n\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k > 0$. Desde que $I_2(u_n) \to c$, existe $C > 0$ tal que $I_2(u_n) < C$, logo

$$I_2(u_n) - \frac{1}{\mu} I_2'(u_n)u_n \leq C + k \|u_n\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando (M_0), (2.3) e (2.4), temos

$$\begin{aligned} C + k\|u_n\| &\geq I_2(u_n) - \frac{1}{\mu} I_2'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \|u_n\|^p + \int_\Omega [\frac{1}{\mu} f(x, u_n^+)u_n - F(x, u_n^+)] \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) m_0^{p-1} \|u_n\|^p \geq C_1 \|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_1 \|u_n\|^p \leq C + k \|u_n\|, \tag{2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $C_1 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) m_0^{p-1} > 0$. Suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to +\infty$, então multiplicando (2.5) por $\frac{1}{\|u_n\|}$ para n suficientemente grande, obtemos

$$C_1 \|u_n\|^{p-1} \leq k,$$

o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto a seqüência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e do Lema 2.1, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Da continuidade de I_2, temos

$$I_2(u_n) \to I_2(u),$$

o que implica,

$$I_2(u) = c_M > 0,$$

onde,

$$c_M = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{0\le t\le 1} I_2(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I_2(\gamma(1)) < 0\right\}.$$

Além disso,

$$I_2'(u_n) \to I_2'(u) \text{ em } (W_0^{1,p}(\Omega))',$$

conseqüentemente,

$$I_2'(u) = 0.$$

Logo, u é ponto crítico não-nulo de I_2 e portanto solução fraca de (P). Usando u^- como função teste, por (2.1) temos

$$I_2'(u)(u^-) = [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(-u^-) = 0,$$

conseqüentemente,

$$\|u^-\| = 0,$$

ou seja,

$$u \ge 0.$$

■

2.3 Existência de solução com M podendo ser crescente

No que segue, provaremos a existência de solução não-negativa de (P) com M podendo ser crescente. Para isto, suponhamos primeiro que M seja limitada. Mais precisamente, assumiremos que existem $m_1 \ge m_0$ e $t_0 > 0$ tais que

$$M(t) = m_1 \quad \text{para todo} \quad t \ge t_0. \tag{2.6}$$

Teorema 2.2. Suponhamos que f satisfaz (2.1) e (2.4). Assumiremos, além disso, que M é uma função satisfazendo (M_0) e (2.6) com

$$\left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{m_1^{p-1}}{\mu}\right) > 0. \tag{2.7}$$

Então, o problema (P) possui uma solução não-negativa.

Demonstração. Discutiremos como no Teorema 2.1 para mostrar que o funcional I_2 possui um ponto crítico não-nulo. De (M_0) e (2.6), temos que,

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds \\ &\geq \int_0^t m_0^{p-1} ds \\ &= m_0^{p-1} t, \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $t \geq 0$, e

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^t [M(s)]^{p-1} ds \\ &= \int_0^{t_0} [M(s)]^{p-1} ds + \int_{t_0}^t [M(s)]^{p-1} ds \\ &= \int_0^{t_0} [M(s)]^{p-1} ds + \int_{t_0}^t m_1^{p-1} ds, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \widehat{M}(t) &= \int_0^{t_0} [M(s)]^{p-1} ds + m_1^{p-1} t - m_1^{p-1} t_0 \\ &\leq m_1^{p-1} t + m_2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $t \geq t_0$, onde $m_2 = \left| \int_0^{t_0} [M(s)]^{p-1} ds - m_1^{p-1} t_0 \right|$. Usando (2.8), temos,

$$\begin{aligned} I_2(u) &= \frac{1}{p} \widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x, u^+) \\ &\geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \int_\Omega F(x, u^+). \end{aligned}$$

De (2.1), obtemos

$$I_2(u) \geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{C}{q} |u|_q^q.$$

Da imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{p} m_0^{p-1} \|u\|^p - \frac{CC_1}{q} \|u\|^q,$$

ou seja,

$$I_2(u) \geq C_2 \|u\|^p - C_3 \|u\|^q,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $C_2 = \frac{1}{p} m_0^{p-1} > 0$, $C_3 = \frac{CC_1}{q} > 0$ e $p < q$. Assim, escolhendo $0 < r < \left(\frac{C_2}{C_3}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, resulta

$$I_2(u) \geq \rho > 0,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|u\| = r$, onde $\rho = (C_2 r^p - C_3 r^q) > 0$, mostrando que I_2 satisfaz a condição **(ii)** do Teorema 2.1.

Seja $u > 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De (1.18), temos

$$\begin{aligned} I_2(tu) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|tu\|^p) - \int_\Omega F(x,tu)dx \\ &\leq \frac{1}{p}\widehat{M}(\|tu\|^p) - K_1|u|_\mu^\mu t^\mu + K_2|\Omega|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assim, de (2.9) e (2.10), resulta

$$I_2(tu) \leq \frac{1}{p} m_1^{p-1} \|u\|^p t^p - K_1|u|_\mu^\mu t^\mu + K_2|\Omega| + m_2,$$

para todo t suficientemente grande. Portanto, como $\mu > p$, temos que $I_2(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, logo existe $e \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|e\| > r$ e $I_2(e) < 0$, mostrando que I_2 satisfaz a condição **(iii)** do Teorema 2.1. Assim, do Teorema do Passo da Montanha, existe uma seqüência Palais-Smale $(PS)_c$ $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ para I_2.

Mostraremos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, suponhamos por contradição que $\|u_n\| \to +\infty$. Assim $M(\|u_n\|) = m_1$ para n suficientemente grande, e de (2.3), (2.6) e (2.8), temos

$$\begin{aligned} C + \|u_n\| &\geq I_2(u_n) - \frac{1}{\mu} I_2'(u_n)u_n \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u_n\|^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u_n\|^p)]^{p-1}\|u_n\|^p + \int_\Omega [\frac{1}{\mu} f(x,u_n^+)u_n - F(x,u_n^+)] \\ &\geq \left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{m_1^{p-1}}{\mu}\right)\|u_n\|^p. \end{aligned}$$

Usando (2.7), concluímos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, o que contradiz $\|u_n\| \to +\infty$. Portanto, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ponto crítico não-nulo do funcional I_2, e portanto solução fraca de (P). Usando u^- como função teste, de (2.1) obtemos

$$\|u^-\| = 0,$$

ou seja,

$$u \geq 0.$$

■

Nosso objetivo é estender o Teorema 2.2 a uma classe maior de funções M, inclusive as funções lineares crescentes. Isto será feito usando um argumento de truncamento e estimativas a priori obtidas por comparação entre os níveis de minimax c_M e c_0, relacionado ao funcional I_0 associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \frac{1}{m_1^{p-1}} f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é,

$$I_0(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \frac{1}{m_1^{p-1}}\int_\Omega F(x,u).$$

A fim de estabelecer as hipóteses exigidas no próximo teorema, mostraremos um lema que exibirá uma relação entre as normas em $W_0^{1,p}(\Omega)$ das soluções do problema (P) com $M(\|u\|^p)$.

Lema 2.2. Seja u uma solução de (P) obtida pelo Teorema 2.2. Então, existem $\widetilde{C} > 0$ e $\theta > 0$ que não dependem de M, tais que

$$\|u\| \leq \widetilde{C} \text{ e } \|u\|^p \leq [M(\|u\|^p)]^{1-p}\theta.$$

Demonstração. Se $\|u\|^p < t_0$, escolha $\widetilde{C} = t_0^{1/p}$. Se $\|u\|^p \geq t_0$, temos $M(\|u\|^p) = m_1$ e

$$\begin{aligned} c_M &= I_2(u) - \frac{1}{\mu}I_2'(u)u \\ &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \frac{1}{\mu}[M(\|u\|^p)]^{p-1}\|u\|^p + \int_\Omega [\frac{1}{\mu}f(x,u)u - F(x,u)] \\ &\geq \left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{m_1^{p-1}}{\mu}\right)\|u\|^p + \int_\Omega [\frac{1}{\mu}f(x,u) - F(x,u)], \end{aligned}$$

por (2.4), temos

$$c_M \geq \left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{m_1^{p-1}}{\mu}\right)\|u\|^p. \tag{2.11}$$

Além disso, de (2.9), temos

$$\begin{aligned} I_2(u) &= \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x,u) \\ &\leq \frac{1}{p}m_1^{p-1}\|u\|^p - \int_\Omega F(x,u) + m_2 \\ &= m_1^{p-1}[\frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{m_1^{p-1}}\int_\Omega F(x,u)dx] + m_2 \\ &= m_1^{p-1}I_0(u) + m_2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$c_M \leq m_1^{p-1}c_0 + m_2. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12), obtemos

$$\|u\|^p \leq \left(m_1^{p-1}c_0 + m_2\right)\left(\frac{p\mu}{m_0^{p-1}\mu - m_1^{p-1}p}\right) = \widetilde{C}^p.$$

Note que, $I_2'(u)u = 0$, logo

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|^p = \int_\Omega f(x,u)u dx.$$

Segue de (2.1) e da imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ que

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1} \|u\|^p \leq C \int_\Omega |u|^q \, dx \leq C\|u\|^q \leq C\widetilde{C}^q,$$

com $p < q < p^*$. Conseqüentemente,

$$\|u\|^p \leq [M(\|u\|^p)]^{1-p}\theta,$$

onde $\theta = C\widetilde{C}^q$. ■

Teorema 2.3. Suponha que f satisfaz (2.1) e (2.4). Assumiremos, além disso, que M satisfaz (M_0) e existe $k > 0$ tal que

$$(M_2) \qquad [M(k)]^{p-1} < \mu \frac{m_0^{p-1}}{p}$$

e

$$(M_3) \qquad [M(k)]^{1-p} \leq \frac{k}{\theta},$$

onde θ foi determinado no Lema 2.2. Então, o problema (P) possui uma solução não-negativa.

Demonstração. Definimos a função truncada

$$M_k(t) = \begin{cases} M(t) & \text{se} \quad t \leq k \\ M(k) & \text{se} \quad t > k. \end{cases}$$

Então, a hipótese (M_2) implica que M_k satisfaz (2.7) com $m_1 = M(k)$. De fato, de (M_2)

$$[M(k)]^{p-1} < \mu \frac{m_0^{p-1}}{p}$$

ou seja,

$$\left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{[M(k)]^{p-1}}{\mu} \right) > 0.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 2.2 para obter uma solução $u_k \geq 0$ do problema truncado

$$\begin{cases} -[M_k(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Do Lema 2.2, sabemos que

$$\|u_k\|^p \leq [M_k(\|u_k\|^p)]^{1-p}\theta.$$

Isso implica que se $\|u_k\|^p > k$, temos

$$\frac{k}{\theta} < [M(k)]^{1-p},$$

que contradiz (M_3). Portanto, $\|u_k\|^p \leq k$, mostrando que u_k é, de fato, uma solução não-negativa do problema (P). ■

Capítulo 3

Problema crítico ou supercrítico não local do tipo p-Kirchhoff

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a classe de problemas não-locais de valor de fronteira do tipo p-Kirchhoff

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} -\left[M\left(\|u\|^p\right)\right]^{p-1} \Delta_p u = f(x,u) + \lambda\, |u|^{s-2}\, u \ \text{ em } \ \Omega \\ \\ u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $1 < p < N$, $s \geq p^* = \frac{pN}{N-p}$, $N \geq 3$ e $M : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ são funções contínuas satisfazendo as hipóteses do problema (P). Além disso, Δ_p é o operador p-Laplaciano, isto é

$$\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

e $\|.\|$ é a norma usual em $W_0^{1,p}(\Omega)$ dada por

$$\|u\|^p = \int_\Omega |\nabla u|^p .$$

Em primeiro lugar, desde que $f(x,t) + \lambda\, |t|^{s-2}\, t$ tem um crescimento supercrítico, não podemos usar as técnicas variacionais diretamente, em virtude da falta de continuidade das imersões de Sobolev. Assim, construiremos um truncamento da função $f(x,t) + \lambda\, |t|^{s-2}\, t$ para usar métodos variacionais ou, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha. Este truncamento foi usado por Rabinowitz, ver [20](ver também [14, 13]).

3.2 O problema truncado

Seja $K > 0$ um número real, que será especificado depois, e considere a função $g_K : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_K(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ f(x,t) + \lambda t^{s-1} & \text{se} \quad 0 \leq t \leq K \\ f(x,t) + \lambda K^{s-q} t^{q-1} & \text{se} \quad t \geq K. \end{cases}$$

Estudaremos o problema truncado associado a g_K

$$(T)_\lambda \qquad \begin{cases} -[M(\|u\|^p)]^{p-1}\Delta_p u = g_K(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Tal função satisfaz as condições seguintes:

$$(g_{K,1}) \qquad |g_K(x,t)| \leq (C+\lambda K^{s-q})|t|^{q-1}$$

para todo $x \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $C > 0$ e $p < q < p^* = \frac{(pN)}{(N-p)}$ e

$$(g_{K,2}) \qquad 0 < \mu G_K(x,t) \leq g_K(x,t)t,$$

para todo $x \in \Omega$, para todo $t > 0$, onde $G_K(x,t) = \int_0^t g_K(x,\xi)d\xi$.

Verificação da condição $(g_{K,1})$

Vejamos três casos:

1º Caso: $t < 0$. Então $(g_{K,1})$ segue imediatamente da definição de g_K.

2º Caso: $0 \leq t \leq K$. Então,

$$\begin{aligned} |g_K(x,t)| &= |f(x,t) + \lambda t^{s-1}| \\ &\leq |f(x,t)| + \lambda |t|^{s-1} \\ &\leq C|t|^{q-1} + \lambda |t|^{s-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |g_K(x,t)| &\leq C|t|^{q-1} + \lambda |t|^{s-1} \\ &= (C + \lambda t^{s-q})|t|^{q-1} \\ &\leq (C + \lambda K^{s-q})|t|^{q-1}, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 \leq t \leq K$, onde $C > 0$ e $p < q < p^* = \frac{(pN)}{(N-p)}$.

3º Caso: $t > K$. Então,

$$\begin{aligned} |g_K(x,t)| &= |f(x,t) + \lambda K^{s-q} t^{q-1}| \\ &\leq |f(x,t)| + \lambda K^{s-q}|t|^{q-1} \\ &\leq C|t|^{q-1} + \lambda K^{s-q}|t|^{q-1} \\ &= (C + \lambda K^{s-q})|t|^{q-1} \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$ e $t > K$, onde $C > 0$ e $p < q < p^* = \frac{(pN)}{(N-p)}$, e portanto a função g_K satisfaz a condição $(g_{K,1})$.

Verificação da condição $(g_{K,2})$

Vejamos dois casos:

1º Caso: $0 < t \leq K$. Então, suponhamos por contradição que

$$g_K(x,t)t < \mu G_K(x,t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x,t)t + \lambda t^s &< \mu \int_0^t g_K(x,\epsilon)d\epsilon \\ &= \mu \int_0^t (f(x,\epsilon) + \lambda \epsilon^{s-1})d\epsilon \\ &= \mu \int_0^t f(x,\epsilon)d\epsilon + \mu\lambda \frac{t^s}{s}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x,t)t + (\frac{s-\mu}{s})\lambda t^s < \mu F(x,t).$$

Desde que $(\frac{s-\mu}{s}) > 0$, obtemos

$$f(x,t)t < \mu F(x,t),$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < t \leq K$, o que contradiz (2.4). Portanto, a condição $(g_{K,2})$ é verdadeira para todo $x \in \Omega$ e $0 < t \leq K$.

2º Caso: $t > K$. Então, suponhamos por contradição que

$$g_K(x,t)t < \mu G_K(x,t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x,t)t + \lambda K^{s-q}t^q &< \mu \int_0^t g_K(x,\epsilon)d\epsilon \\ &= \mu(\int_0^K g_K(x,\epsilon)d\epsilon + \int_K^t g_K(x,\epsilon)d\epsilon) \\ &= \mu \int_0^t f(x,\epsilon)d\epsilon + (\frac{q-s}{sq})\mu\lambda K^s + \frac{\mu}{q}\lambda K^{s-q}t^q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mu F(x,t) > f(x,t)t + (\frac{q-\mu}{q})\lambda K^{s-q}t^q + (\frac{s-q}{sq})\mu\lambda K^s.$$

Desde que $(\frac{q-\mu}{q}) > 0$ e $(\frac{s-q}{sq}) > 0$, obtemos

$$\mu F(x,t) > f(x,t)t,$$

para todo $x \in \Omega$ e $t > K$, o que contradiz (2.4). Portanto, a condição $(g_{K,2})$ é verdadeira para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$.

Assumindo (M_0), (M_2) e (M_3), do Teorema 2.3, obtemos uma solução não-negativa u_λ para $(T)_\lambda$, tal que $I_\lambda(u_\lambda) = c_\lambda$, onde c_λ é o nível do Teorema do Passo da Montanha associado ao funcional

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega G_K(x,u)$$

que é relacionado ao problema $(T)_\lambda$, onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$. Além disso,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{\mu}I'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda \quad &\geq \quad \left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{M(k)^{p-1}}{\mu}\right)\|u_\lambda\|^p \\ &+ \quad \int_\Omega [\frac{1}{\mu}g_K(x,u_\lambda)u_\lambda - G_K(x,u_\lambda)]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para provar o resultado principal desta seção, precisamos da seguinte estimativa.

Lema 3.1. Se u_λ é uma solução (não-negativa) do problema $(T)_\lambda$, então $\|u_\lambda\| \leq \overline{C}$ para todo $\lambda \geq 0$, onde $\overline{C} > 0$ é uma constante que não depende de λ.

Demonstração. Desde que $G_K(x,t) \geq F(x,t)$ para todo $x \in \Omega$ e para todo $t \geq 0$, temos $c_\lambda \leq c_M$, onde c_M é o nível no Teorema do Passo da Montanha relacionado ao funcional I_2. De fato, note que

$$I_2(tu) \geq I_\lambda(tu) \;\text{ para todo }\; tu \geq 0,$$

o que implica

$$\sup_{t\geq 0} I_2(tu) \geq \sup_{t\geq 0} I_\lambda(tu) \;\text{ para todo }\; u > 0,$$

conseqüentemente,

$$\inf_{u>0}\sup_{t\geq 0} I_\lambda(tu) \leq \sup_{t\geq 0} I_2(tu) \;\text{ para todo }\; u > 0,$$

por conseguinte(ver Apêndice C),

$$\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} I_\lambda(tu) = c_\lambda \leq \sup_{t\geq 0} I_2(tu) \;\text{ para todo }\; u > 0,$$

logo,

$$c_\lambda \leq \sup_{t\geq 0} I_2(tu) \;\text{ para todo }\; u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\},$$

portanto,

$$c_\lambda \leq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} I_2(tu),$$

isto é,

$$c_\lambda \leq c_M.$$

Além disso,

$$c_M \geq c_\lambda = I_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{\mu} I'_\lambda(u_\lambda)u_\lambda,$$

e de (3.1),

$$c_\lambda \geq \left(\frac{m_0^{p-1}}{p} - \frac{M(k)^{p-1}}{\mu} \right) \|u_\lambda\|^p + \int_\Omega [\frac{1}{\mu} g_K(x, u_\lambda)u^\lambda - G_K(x, u_\lambda)].$$

De $(g_{K,2})$, obtemos

$$\|u_\lambda\| \leq \left(\frac{p\mu^{p-1}c_M}{\mu m_0^{p-1} - pM(k)^{p-1}} \right)^{1/p} := \overline{C},$$

para todo $\lambda \geq 0$. ■

3.3 O teorema principal

Agora, usaremos o método de Iteração de Moser, veja [18](veja também [14, 13]).

Teorema 3.1. Suponha que a função M satisfaz (M_0), (M_2) e (M_3), e que f satisfaz (2.1) e (2.4). Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (P_λ) possui uma solução não-negativa para cada $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

Demonstração. Seja u_λ uma solução do problema $(T)_\lambda$. Mostraremos que existe K_0 tal que para todo $K > K_0$ existe um correspondente λ_0 para qual

$$|u_\lambda|_{L^\infty(\Omega)} \leq K \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0].$$

Este é o caso em que $g_K(x, u_\lambda) = f(x, u_\lambda) + \lambda |u_\lambda|^{s-1}$ e assim u_λ é uma solução do problema (P_λ), para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Por simplicidade, usaremos a seguinte notação:

$$u_\lambda := u$$

Para $L > 0$, definimos as seguintes funções:

$$u_L = \begin{cases} u & \text{se} \quad u \leq L \\ L & \text{se} \quad u > L, \end{cases}$$

$$z_L = u_L^{p(\beta-1)}u \quad e \quad w_L = uu_L^{\beta-1},$$

onde $\beta > 1$ será fixado depois. Usando z_L como uma função teste, temos

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla z_L = \int_\Omega g_K(x, u)z_L$$

o que implica,

$$[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p = -p(\beta-1)[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega u_L^{p\beta-p-1}u\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_L$$
$$+\int_\Omega g_K(x,u)uu_L^{p(\beta-1)}.$$

Da definição de u_L, resulta

$$p(\beta-1)[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega u_L^{p\beta-p-1}u\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla u_L =$$
$$= p(\beta-1)[M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_{\{u\le L\}} u^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p \ge 0$$

e usando $(g_{K,1})$ e (M_0), obtemos

$$\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p \le (C+\lambda K^{s-q})\frac{1}{m_0^{p-1}}\int_\Omega u^q u_L^{p(\beta-1)},$$

isto é,

$$\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p \le C_{\lambda,K}\int_\Omega u^q u_L^{p(\beta-1)}, \tag{3.2}$$

onde $C_{\lambda,K}=(C+\lambda K^{s-q})1/m_0^{p-1}$.
Por outro lado, da imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, segue que

$$|w_L|_{p^*}^p \le C_1\int_\Omega |\nabla w_L|^p = C_1\int_\Omega \left|\nabla(uu_L^{\beta-1})\right|^p.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
|w_L|_{p^*}^p &\le C_1\int_\Omega \left|u_L^{\beta-1}\nabla u + u(\beta-1)u_L^{\beta-2}\nabla u_L\right|^p\\
&\le C_1\int_\Omega\left(\left|u_L^{\beta-1}\nabla u\right| + \left|u(\beta-1)u_L^{\beta-2}\nabla u_L\right|\right)^p\\
&\le C_1 2^{p-1}\int_\Omega\left(u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p + u^p(\beta-1)^p u_L^{p(\beta-2)}|\nabla u_L|^p\right)
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$|w_L|_{p^*}^p \le C_1'\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p + C_1'(\beta-1)^p\int_\Omega u_L^{p(\beta-2)}u^p|\nabla u_L|^p.$$

Note que, sendo $u_L=L$, então $|\nabla u_L|=0$ e

$$|w_L|_{p^*}^p \le C_1'\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p \le C_1'\beta^p\int_\Omega u_L^{p(\beta-1)}|\nabla u|^p.$$

Por outro lado, se $u_L = u$, resulta

$$\begin{aligned} |w_L|_{p^*}^p &\leq (C_1' + C_1'(\beta-1)^p) \int_\Omega u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p \\ &\leq 2C_1'\beta^p \int_\Omega u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p . \end{aligned}$$

Assim, em ambos os casos, temos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p \int_\Omega u_L^{p(\beta-1)} |\nabla u|^p , \tag{3.3}$$

onde $C_2 = 2C_1'$. De (3.2) e (3.3), obtemos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_\Omega u^q u_L^{p(\beta-1)},$$

e conseqüêntemente,

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_\Omega u^{q-p}(uu_L^{\beta-1})^p = C_2\beta^p C_{\lambda,K} \int_\Omega u^{q-p} w_L^p.$$

Usando a desigualdade de Hölder, com os expoentes conjugados $p^*/[q-p]$ e $p^*/[p^*-(q-p)]$, obtemos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2\beta^p C_{\lambda,K} \left(\int_\Omega u^{p^*}\right)^{(q-p)/p^*} \left(\int_\Omega w_L^{pp^*/[p^*-(q-p)]}\right)^{[p^*-(q-p)]/p^*}, \tag{3.4}$$

onde $p < (pp^*)/(p^* - (q-p)) < p^*$. Considerando a imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $p-1 \leq q \leq p^*$, obtemos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_2'\beta^p C_{\lambda,K} \|u\|^{q-p} |w_L|_{\alpha^*}^p ,$$

onde $\alpha^* = pp^*/(p^* - (q-p))$. Usando o Lema 3.1, temos

$$|w_L|_{p^*}^p \leq C_3\beta^p C_{\lambda,K}\overline{C}^{q-p} |w_L|_{\alpha^*}^p \tag{3.5}$$

Desde que $w_L = uu_L^{\beta-1} \leq u^\beta$ e supondo que $u^\beta \in L^{\alpha^*}(\Omega)$, temos de (3.5) que

$$\left(\int_\Omega \left|uu_L^{\beta-1}\right|^{p^*}\right)^{p/p^*} \leq C_4\beta^p C_{\lambda,K} \left(\int_\Omega u^{\beta\alpha^*}\right)^{p/\alpha^*} < +\infty,$$

Aplicando o Lema de Fatou com respeito á variável L, obtemos

$$\begin{aligned} \left[\int_\Omega \left(\liminf \left|uu_L^{\beta-1}\right|^{p^*}\right)\right]^{p/p^*} &\leq \left[\liminf \int_\Omega \left|uu_L^{\beta-1}\right|^{p^*}\right]^{p/p^*} \\ &\leq C_4\beta^p C_{\lambda,K} \left(\int_\Omega u^{\beta\alpha^*}\right)^{p/\alpha^*} \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\left(\int_\Omega |u|^{\beta p^*}\right)^{p/p^*} \leq C_4\beta^p C_{\lambda,K}\left(\int_\Omega u^{\beta\alpha^*}\right)^{p/\alpha^*},$$

o que implica

$$|u|_{\beta p^*}^{p\beta} \leq C_4 C_{\lambda,K}\beta^p\,|u|_{\beta\alpha^*}^{p\beta},$$

e assim,

$$|u|_{\beta p^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\beta p}\beta^{1/\beta}\,|u|_{\beta\alpha^*}. \tag{3.6}$$

Além disso, considerando $\chi = p^*/\alpha^*$, temos $p^* = \chi\alpha^*$ e $\beta\chi\alpha^* = \beta p^*$, para todo $\beta > 1$ de forma que $u^\beta \in L^{\alpha^*}(\Omega)$.

Consideremos dois casos:

1° Caso: Considere primeiro $\beta = p^*/\alpha^*$ e note que

$$\int_\Omega (u^\beta)^{\alpha^*} = \int_\Omega u^{p^*} < +\infty,$$

logo,

$$u^\beta \in L^{\alpha^*}(\Omega).$$

Conseqüentemente, da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, do Lema 3.1 e da relação (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} |u|_{(p^*)^2/\alpha^*} &\leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/p\beta}\beta^{1/\beta}C_5\,\|u\| \\ &\leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/p\beta}\beta^{1/\beta}\overline{C}C_5, \end{aligned} \tag{3.7}$$

e assim,

$$|u|_{\chi^2\alpha^*} \leq C_6(C_4 C_{\lambda,K})^{1/\chi p}\chi^{1/\chi}. \tag{3.8}$$

2° Caso: Considere agora $\beta = (p^*/\alpha^*)^2$. Segue da desigualdade em (3.7), que

$$\int_\Omega (u^\beta)^{\alpha^*} = \int_\Omega u^{(p^*)^2/\alpha^*} < +\infty,$$

conseqüentemente,

$$u^\beta \in L^{\alpha^*}(\Omega).$$

Da desigualdade em (3.6) obtemos,

$$|u|_{(p^*)^3/(\alpha^*)^2} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\beta p}\beta^{1/\beta}\,|u|_{(p^*)^2/\alpha^*},$$

o que implica

$$|u|_{\chi^3\alpha^*} \leq (C_4 C_{\lambda,K})^{1/\chi^2 p}(\chi^2)^{1/\chi^2}\,|u|_{\chi^2\alpha^*}.$$

De (3.8), resulta

$$|u|_{\chi^3\alpha^*} \leq (C_4C_{\lambda,K})^{1/\chi^2 p}(\chi^2)^{1/\chi^2}C_6(C_4C_{\lambda,K})^{1/\chi p}\chi^{1/\chi}$$

ou,

$$|u|_{\chi^3\alpha^*} \leq C_6(C_4C_{\lambda,K})^{1/\chi^2 p+1/\chi p}(\chi)^{2/\chi^2+1/\chi}.$$

Um processo iterativo conduz a

$$|u|_{\chi^{(m+1)}\alpha^*} \leq C_6(C_4C_{\lambda,K})^{\sum_{i=1}^m \frac{\chi^{-i}}{p}}\chi^{\sum_{i=1}^m i\chi^{-i}}.$$

Usando o teste da razão, temos

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m \frac{\chi^{-i}}{p} < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^m i\chi^{-i} < \infty.$$

Assim, passando ao limite quando $m \to \infty$(ver [4]), obtemos

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_6(C_4C_{\lambda,K})^{\sigma_1}\chi^{\sigma_2},$$

onde $\sigma_1 = \sum_{i=1}^\infty(\chi^{-i})/p$ e $\sigma_2 = \sum_{i=1}^\infty i\chi^{-i}$. Para escolher λ_0 consideramos a desigualdade

$$C_6(C_4C_{\lambda,K})^{\sigma_1}\chi^{\sigma_2} = C_6[C_4(C+\lambda K^{s-q})\frac{1}{m_0^{p-1}}]^{\sigma_1}\chi^{\sigma_2} \leq K,$$

da qual,

$$\left(C+\lambda K^{s-q}\right)^{\sigma_1} \leq \frac{Km_0^{(p-1)\sigma_1}}{C_4^{\sigma_1}\chi^{\sigma_2}C_6}.$$

Escolhendo $\lambda_0 > 0$ para satisfazer a desigualdade

$$\lambda_0 \leq [\frac{K^{1/\sigma_1}m_0^{p-1}}{C_4\chi^{\sigma_2/\sigma_1}C_6^{1/\sigma_1}} - C]\frac{1}{K^{s-q}},$$

e fixando K tal que

$$[\frac{K^{1/\sigma_1}m_0^{p-1}}{C_4\chi^{\sigma_2/\sigma_1}C_6^{1/\sigma_1}} - C] > 0,$$

resulta,

$$|u_\lambda|_{L^\infty(\Omega)} \leq K \quad \forall\lambda \in [0,\lambda_0],$$

e o teorema está provado. $\blacksquare$

Apêndice A

Funcionais Diferenciáveis

Neste apêndice mostraremos a diferenciabilidade dos funcionais energia definidos ao longo deste trabalho.

Definição A.1. Seja $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ onde U é um aberto de um espaço de Banach X. O fucional φ é Gateaux-diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que para todo $h \in X$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(u+th)-\varphi(u)-\langle f, th\rangle]=0.$$

Se o limite acima existir, ele é único e a derivada de Gateaux em u será denotada por $\varphi'(u)$, e dada por

$$\langle\varphi'(u), h\rangle := \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(u+th)-\varphi(u)].$$

O funcional φ tem derivada a Fréchet $f \in X'$ em u se

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+h)-\varphi(u)-\langle f, h\rangle]=0.$$

O funcional φ pertence a $C^1(U,\mathbb{R})$ se φ possui derivada a Fréchet e esta é contínua em U.

Proposição A.1. Se φ tem derivada Gateaux contínua em U, então $\varphi \in C^1(U,\mathbb{R})$.

Demonstração. Dados $u_0 \in U$, $h \in X$ e φ' a derivada de Gateaux. Defina $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$F(u)=\varphi(u)-\langle\varphi'(u_0), u-u_0\rangle.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}|F(u)-F(u_0)| &= |\varphi(u)-\langle\varphi'(u_0), u-u_0\rangle-\varphi(u_0)| \\ &\le \sup_{0\le\theta\le 1}\|\varphi'(u_0+\theta(u-u_0))-\varphi'(u_0)\|\,\|u-u_0\|.\end{aligned} \tag{A.1}$$

Como φ tem derivada Gateaux contínua em U, então dado $\epsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que, para qualquer $\|h\| < \delta$ temos

$$\|\varphi'(u_0+h)-\varphi'(u_0)\| \le \epsilon.$$

Por (A.1),

$$\begin{aligned}\|\varphi(u_0+h)-\varphi(u_0)-\langle\varphi'(u_0),h\rangle\| &\leq \sup_{0\leq\theta\leq 1}\|\varphi'(u_0+\theta(h))-\varphi'(u_0)\|\,\|h\| \\ &\leq \epsilon\,\|h\|\,,\end{aligned}$$

donde segue que φ é diferenciável a Fréchet e esta é contínua. ■

Proposição A.2. O funcional $I_1 : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ definido por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) - \int_\Omega F(x,u)$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que o funcional I_1 está bem definido. De fato, notemos que:

(a) Sendo $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos que,

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

logo,

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) < +\infty \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

(b) Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| &= \left|\int_\Omega\left[\int_0^u f(x,s)ds\right]dx\right| \\ &\leq \int_\Omega\left|\int_0^u f(x,s)ds\right|dx.\end{aligned}$$

Vejamos dois casos:

1^ocaso: $u \geq 0$. Por (1.1), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| &\leq \int_0^u |f(x,s)|\,ds \\ &\leq C\int_0^u (1+|s|^p)ds \\ &= C\int_0^u (1+s^p)ds,\end{aligned}$$

assim,

$$\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq C(|u| + \frac{1}{p+1}\,|u|^{p+1}),$$

com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $C > 0$.

2^ocaso: $u < 0$. Por (1.1), temos,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| &= \left|-\int_u^0 f(x,s)ds\right| \\ &\leq \int_u^0 |f(x,s)|\, ds \\ &\leq C\int_u^0 (1+|s|^p)ds,\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| &\leq C\int_u^0 (1+(-s)^p)ds \\ &= C\int_u^0 (1+(-1)^p s^p)ds \\ &= C(|u| + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}),\end{aligned}$$

com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $C > 0$. Portanto, em ambos os casos, resulta

$$\left|\int_0^u f(x,s)ds\right| \leq C(|u| + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1}),$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, com $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e $C > 0$. Da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $2 \leq r \leq 2^*$, segue que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega F(x,u)dx\right| \leq C\int_\Omega (|u| + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1})dx < +\infty.$$

mostrando que I_1 está bem definido.

Definindo os funcionais $J_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $L_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2) \ \ e \ \ L_1(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

podemos afirmar o seguinte:

Afirmação A.1. O funcional J_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $u, h \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u+th\|^2) - \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u\|^2)}{t} = M(\|u+\lambda th\|^2)(\int_\Omega \nabla u\nabla h + 2\lambda t\,\|h\|^2),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\widehat{M}(\|u+th\|^2)-\widehat{M}(\|u\|^2)}{t} &= \lim_{t\to 0} M(\|u+\lambda th\|^2)(\int_\Omega \nabla u \nabla h + 2\lambda t\,\|h\|^2) \\
&= M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla h,
\end{aligned}$$

mostrando que J_1 é Gateaux-diferenciável e,

$$J_1'(u).h = 2\,M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla h, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

A aplicação $u \to J_1'(u)$ é contínua no dual de $H_0^1(\Omega)$.

De fato, seja $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\|h\| \leq 1$. Da continuidade de M, obtemos

$$M(\|u_n\|^2) \to M(\|u\|^2) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Note que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ implica $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla h \to \int_\Omega \nabla u\nabla h \text{ em } \mathbb{R},$$

e portanto,

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla h \to M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla h \text{ em } \mathbb{R},$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n\nabla h - M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u\nabla h\right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

conseqüentemente,

$$\|J_1'(u_n) - J_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

mostrando que a aplicação $u \to J_1'(u)$ é contínua e J_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Afirmação A.2. O funcional L_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $u, h \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{F(x,u+th)-F(x,u)}{t} &= f(x,u+\lambda th)h \\
&\leq C(1+|u+h|^p)h.
\end{aligned}$$

Da imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$, para $2 \leq r \leq 2^*$, resulta

$$h \in L^{p+1}(\Omega) \quad e \quad |u+h|^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega),$$

usando a desigualdade de Hölder, temos,

$$[(1+|u+h|^p)h] \in L^1(\Omega).$$

Observe que,

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x,u+th)-F(x,u)}{t} = f(x,u)h.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{[F(x,u+th)-F(x,u)]}{t} = \int_\Omega f(x,u)h,$$

mostrando que o funcional L_1 é Gateaux-diferenciável e,

$$L_1'(u).h = \int_\Omega f(x,u)h, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

A aplicação $u \to L_1'(u)$ é contínua.

De fato, consideremos uma seqüência (u_n) tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $h \in H_0^1(\Omega)$ com $\|h\| \leq 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |(L_1'(u_n)-L_1'(u))h| &= |L_1'(u_n)h - L_1(u)h| \\ &= \left| \int_\Omega f(x,(u_n))h - \int_\Omega f(x,u)h \right|. \end{aligned}$$

Novamente da imersão contínua de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $2 \leq r \leq 2^*$, obtemos

$$u_n \to u \text{ em } L^{p+1}(\Omega),$$

logo, existe uma função $v \in L^{p+1}(\Omega)$, tal que, a menos de subsequência,

$$|u_n(x)| \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Da continuidade de $f(x,.)$, temos que

$$f(x,u_n(x))h(x) \to f(x,u(x))h(x) \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

De (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} |f(x,u_n(x))h(x)| &\leq C(1+|u_n(x)|^p)\,|h(x)| \\ &\leq C(1+[v(x)]^p)\,|h(x)|\,, \end{aligned}$$

q.t.p. em Ω onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Usando a desigualdade de Hölder, resulta

$$(1+v^p)h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f(x,u_n)h \to \int_\Omega f(x,u)h.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n)h - \int_\Omega f(x,u)h\right| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

conseqüentemente,

$$\|L_1'(u_n) - L_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que a aplicação $u \to L_1'(u)$ é contínua e o funcional L_1 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$, o que conclui a prova da proposição. ■

Proposição A.3. O funcional $I_2 : W_0^{1,p} \mapsto \mathbb{R}$ definido por

$$I_2 = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) - \int_\Omega F(x,u^+),$$

onde $\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1}ds$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que o funcional I_2 está bem definido. De fato, observe que:

(a) Sendo $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ contínua, temos que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t [M(s)]^{p-1}ds < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

conseqüentemente,

$$\frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) < +\infty \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(b) Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(x,u^+)dx\right| &\leq \left|\int_\Omega \left[\int_0^{u^+} f(x,s)ds\right]dx\right| \\ &\leq \int_\Omega \left|\int_0^{u^+} f(x,s)ds\right|dx.\end{aligned}$$

Por (2.1), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{u^+} f(x,s)ds\right| &\leq \int_0^{u^+} |f(x,s)|\,ds \\ &\leq C\int_0^{u^+} |s|^{q-1} \\ &= C\int_0^{u^+} s^{q-1},\end{aligned}$$

assim,
$$\left|\int_0^{u^+} f(x,s)ds\right| \leq \frac{C}{q}(u^+)^q = \frac{C}{q}\left|u^+\right|^q.$$
para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $p < q < p^*$. Pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $p \leq r \leq p^*$, segue-se
$$\left|\int_\Omega F(x,u^+)dx\right| \leq \frac{C}{q}\int_\Omega \left|u^+\right|^q < +\infty,$$
mostrando que o funcional I_2 está bem definido.

Considere os funcionais $J_2, L_2 : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por
$$J_2(u) = \frac{1}{p}\widehat{M}(\|u\|^p) \ \ \mathrm{e} L_2(u) = \int_\Omega F(x,u^+)dx$$

Afirmação A.3. O funcional J_2 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$.

Demonstração.

J_2 é Gateaux-diferenciável.

De fato, considere o funcional $G : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R})$, definido por $G(u) = \|u\|^p$. Sejam $u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que
$$\frac{|\nabla u + t\nabla h|^p - |\nabla u|^p}{t} = p\left|\nabla u + \lambda t\nabla h\right|^{p-2}(\nabla u + \lambda t\nabla h)\nabla h,$$
assim,
$$\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u + t\nabla h|^p - |\nabla u|^p}{t} = p\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla h.$$
Note que,
$$\left|\frac{|\nabla u + t\nabla h|^p - |\nabla u|^p}{t}\right| \leq p\left|\nabla u + \nabla h\right|^{p-1}\left|\nabla h\right|.$$
Observando que,
$$(\nabla u + \nabla h)^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \text{ e } \nabla h \in L^p(\Omega),$$
usando a desigualdade de Hölder, obtemos
$$p(\nabla u + \nabla h)^{p-1}\nabla h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos
$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_\Omega|\nabla u + t\nabla h|^p - \int_\Omega|\nabla u|^p}{t} = p\int_\Omega\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla h,$$

ou seja,

$$\lim_{t\to 0}\frac{G(u+th)-G(u)}{t}=p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla h,$$

mostrando que G é Gateaux-diferenciável, e

$$G'(u).h=p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla h.$$

Daí, usando a Regra da Cadeia, resulta

$$\begin{aligned}J_2'(u)h &= [\frac{1}{p}(\widehat{M}(G(u))'G'(u)].h\\ &= [M(\|u\|^p)]^{p-1}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla h,\end{aligned}$$

mostrando que J_2 é Gateaux-diferenciável.

A aplicação $u\to J_2'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, consideremos uma seqüência (u_n) tal que $u_n\to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $h\in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|h\|\le 1$. Note que,

$$\nabla u_n\to\nabla u \text{ em } L^p(\Omega),$$

logo, a menos de subseqüência

$$\nabla u_n(x)\to\nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$|\nabla u_n(x)|\le s(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

onde $s\in L^p(\Omega)$. Daí,

$$|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla h(x)\to|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$\begin{aligned}\left||\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x)\nabla h(x)\right| &= |\nabla u_n(x)|^{p-1}|\nabla h(x)|\\ &\le [s(x)]^{p-1}|\nabla h(x)|\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω. Desde que,

$$s^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \text{ e} \nabla h\in L^p(\Omega),$$

usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$s^{p-1}\nabla h\in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla h\to\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla h,$$

logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla h - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h\right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

o que implica,

$$\sup_{\|h\|\leq 1} \left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla h - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h\right| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\|G'(u_n) - G'(u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que a aplicação $u \to G'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional G é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, conseqüêntemente,

$$G(u_n) \to G(u),$$

isto é,

$$\|u_n\|^p \to \|u\|^p .$$

Da continuidade de M, segue que

$$[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \to [M(\|u\|^p)]^{p-1}.$$

Assim, resulta que

$$[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla h \to [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que

$$\left|[M(\|u_n\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla h - [M(\|u\|^p)]^{p-1} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla h\right| < \epsilon \ \forall n \geq n_0,$$

e por conseguinte,

$$\|J_2'(u_n) - J_2'(u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} < \epsilon \ \forall n \geq n_0,$$

mostrando que a aplicação $u \to J_2'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional J_2 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação A.4. O funcional L_2 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$.

Demonstração.

L_2 é Gateaux-diferenciável.

De fato, sejam $u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{F(x, u^+(x) + th^+(x)) - F(x, u^+(x))}{t} = f(x, u^+(x) + \lambda th^+(x))h(x)$$

assim,

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x, u^+(x) + th^+(x)) - F(x, u^+(x))}{t} = f(x, u^+(x))h(x).$$

De (2.1), temos,

$$\begin{aligned} |f(x, u^+(x) + \lambda th^+(x))h(x)| &\leq C \left|u^+(x) + \lambda th^+(x)\right|^{q-1} |h(x)| \\ &\leq C \left|u^+(x) + h^+(x)\right|^{q-1} |h(x)| \text{ com } p < q < p^*. \end{aligned}$$

Pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para $p \leq r \leq p^*$, temos

$$(u^+ + h^+)^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega) \text{ e } h \in L^q(\Omega).$$

Usando a desigualdade de Hölder, resulta

$$(u^+ + h^+)^{q-1} h \in L^1(\Omega).$$

Do Teorema da Convergencia Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{\int_\Omega F(x, u^+ + th^+) - \int_\Omega F(x, u^+)}{t} = \int_\Omega f(x, u^+)h$$

mostrando que o funcional L_2 é Gateaux-diferenciável e,

$$L_2'(u).h = \int_\Omega f(x, u^+)h.$$

A aplicação $u \to L_2'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, consideremos uma seqüência (u_n) tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $\|h\| \leq 1$. Da imersão contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^r(\Omega)$, $p \leq r \leq p^*$, obtemos

$$u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega),$$

logo, existe uma função $v \in L^q(\Omega)$, tal que, a menos de subsequência,

$$|u_n(x)| \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

o que implica

$$\left|u_n^+(x)\right| \leq v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

e

$$u_n^+(x) \to u^+(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

Da continuidade de $f(x, .)$, temos que,

$$f(x, u_n^+(x))h(x) \to f(x, u^+(x))h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

De (2.1), obtemos,

$$\begin{aligned}
\left|f(x,u_n^+(x))h(x)\right| &\leq C\left|u_n^+(x)\right|^{q-1}|h(x)| \\
&\leq C[v(x)]^{q-1}|h(x)|,
\end{aligned}$$

q.t.p. em Ω, com $p < q < p^*$. Desde que $v^{q-1} \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ e $h \in L^q(\Omega)$(pela imersão contínua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$), segue da desigualdade de Hölder que

$$v^{q-1}h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f(x,u_n^+)h \to \int_\Omega f(x,u^+)h.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n^+)h - \int_\Omega f(x,u^+)h\right| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

logo,

$$\|L_2'(u_n) - L_2'(u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))'} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

mostrando que a aplicação $u \to L_2'(u)$ é contínua no dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional L_2 é de classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$, o que conclui a prova da proposição. ■

Apêndice B

Resultados Gerais

Neste apêndice, enunciaremos os principais teoremas utilizados nas demonstrações deste trabalho.

Teorema B.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver [5]) Seja u_n uma seqüência de funções integráves que convergem em quase toda parte para uma função mensurável u. Se existe uma função integrável v tal que

$$|u_n| \leq v, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

então u é integrável e

$$\int u dx = \lim \int u_n dx.$$

Teorema B.2. (Lema de Fatou)(Ver [5]) Seja u_n uma seqüência de funções integráves não-negativas, então

$$\int (\liminf u_n) dx \leq \liminf \int u_n dx$$

Teorema B.3. (Desigualdade de Hölder)(Ver [5]) Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$uv \in L^1(\Omega) \text{ e } \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema B.4. (Ver [6]) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma seqüência limitada em X, então existem uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ e $u \in X$ tais que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } X.$$

Teorema B.5. (Ver [6]) Sejam u_n uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, tais que

$$u_n \to u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então, existe uma subseqüência $(u_{n_j}) \subset (u_n)$ tal que
(1) $\mathrm{u}_{n_j}(x) \to u(x)$ em q.t.p. $x \in \Omega$;
(2) $\left|u_{n_j}(x)\right| \leq v(x)$ em q.t.p. $x \in \Omega, \forall j,$ onde $v \in L^p(\Omega)$.

Apêndice C

Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos e demonstraremos alguns resultados importantes, utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Lema C.1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$ e seja $\langle .,. \rangle$ o produto interno usual no $\mathbb{R}^N$. Então

$$\langle |x|^{p-2}\, x - |y|^{p-2}\, y, x-y \rangle \geq C_p \, |x-y|^p \quad \text{se } p \geq 2$$

e

$$\langle |x|^{p-2}\, x - |y|^{p-2}\, y, x-y \rangle \geq \frac{C_p \, |x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} \quad \text{se } 1 < p < 2.$$

Demonstração. Por homogeneidade podemos assumir que $|x| = 1$ e $|y| \leq 1$. Além disso, escolhendo uma base conveniente no $\mathbb{R}^N$ podemos assumir

$$x = (1, 0, 0, ..., 0) \quad , \quad y = (y_1, y_2, 0, ..., 0) \quad \text{e} \ \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq 1.$$

(i) Caso $1 < p < 2$. Está claro que a desigualdade é equivalente a

$$\left\{ \left(1 - \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right) (1 - y_1) + \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{(2-p)/2}} \right\} \frac{(1 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \geq C.$$

Mas

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - \frac{y_1}{left|y_1}^{2-p} \geq (p-1)(1-y_1) \quad \text{se } 0 \leq y_1 \leq 1,$$

ou,

$$1 - \frac{y_1}{(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1) \quad \text{se } y_1 \leq 0,$$

então,

$$(p-1) \left\{ (1-y_1)^2 + y_2^2 \right\} \frac{(1 + y_1 + y_2)^{(2-p)/2}}{(1-y_1)^2 + y_2} \geq p - 1.$$

(ii) Caso $p \geq 2$. A desigualdade é equivalente a

$$\frac{[1 - y_1(y_1^2 + y_2^2)^{(p-2)/2}](1-y_1) + y_2^2(y_1^2 + y_2^2)^{(p-2)/2}}{((1-y_1)^2 + y_2^2)^{p/2}} \geq C.$$

Denotando $t = |y| \,/\, |x|$ e $s = \langle x, y\rangle/(|x|\,|y|)$ então, temos que mostrar que a função

$$f(t,s) = \frac{1-(t^{p-1}+t)s+t^p}{(1-2ts+t^2)^{p/2}}$$

é limitada inferiormente. Um cálculo direto mostra que fixando t, $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ se

$$1-(t^{p-1}+t)s+t^p = \frac{t^{p-2}+1}{p}(1-2ts+t^2),$$

temos,

$$f(t,s) = \frac{t^{p-2}+1}{p(1-2ts+t^2)^{(p-2/2)}} \geq \frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1}\frac{t^{p-2}+1}{(t+1)^{p-2}} \geq \frac{1}{2p},$$

o que conclui a prova do lema. ■

Definição C.1. Seja X um espaço de Banach, um campo pseudo-gradiente para $\phi \in C^1(X,R)$ é uma aplicação localmente Lipschitziana $V : Y \longrightarrow X$, que verifica

$$\|V(u)\| \leq \alpha\|\phi^{'}(u)\| \tag{C.1}$$

e

$$\langle\phi^{'}(u), V(u)\rangle \geq \beta\|\phi^{'}(u)\|^2, \tag{C.2}$$

Definição C.2. Seja X um espaço de Banach, $S \subset X$ e $\alpha > 0$. Designamos por S_α a vizinhança fechada de S definida por

$$S_\alpha = \{u \in X; d(u,S) \leq \alpha\},$$

onde $d(u,S) = \inf\{\|u-v\|; v \in S\}$.

Teorema C.1. Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $4\beta > \alpha$ e $\varepsilon, \delta > 0$ são tais que

$$\|\phi^{'}(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad \forall\, u \in \phi^{-1}([c-2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1), c+2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)] \cap S_{2\delta}. \tag{C.3}$$

Então, existe $\eta \in C([0,1]\times X)$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in [0.1]$, tem-se:

(i) $\eta(0,u) = u$;

(ii) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c-2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1), c+2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)]) \cap S_{2\delta}$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$;

(iv) $\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Sejam

$$A = \phi^{-1}([c - 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = \phi^{-1}([c - \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)]) \cap S_{\delta}$$

e

$$Y = \{u \in X; \phi^{'}(u) \neq 0\}.$$

Assim, note que $B \subset A \subset Y$. Considere $V : Y \longrightarrow X$ um campo pseudo-gradiente para ϕ e uma função localmente Lipschitziana $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u, B)}, \qquad \text{(Ver [12])}$$

de onde segue que $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(u) = 1$ se $u \in B$ e $\rho(u) = 0$ se $u \in X\backslash A$. Considere ainda a seguinte aplicação localmente Lipschitziana $f : X \longrightarrow X$ definida por

$$f(u) = \begin{cases} -\rho(u)\frac{V(u)}{\|V(u)\|}, \text{ se } u \in A \\ \\ 0, \text{ se } u \notin A. \end{cases} \qquad \text{(Ver [12])}$$

Sendo $\|f(u)\| \leq 1$, para todo $u \in X$, segue que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{w} = f(w(t)) \\ \\ w(0) = u \end{cases}$$

tem para cada $u \in X$ a solução definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Seja $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u).$$

Então,

(i) $\eta(0, u) = w(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + 2\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)]) \cap S_{2\delta}$.

De fato, considerando $w_1(t) = u$, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\dot{w}(t) = 0 = f(w_1(t)) = f(u), \text{ se } u \notin A,$$

logo

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = f(w_1(t)), \quad se \ \ u \notin A \\ \\ w_1(0) = u. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema de Existência e Unicidade de soluções, se $u \notin A$

$$w(t) = w_1(t) = u, \text{ para todo } \mathbb{R},$$

portanto

$$\eta(t,u) = w(\delta t, u) = u, \text{ para todo } t \in [0,1];$$

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

De fato, note que para todo $t \geq 0$ e $u \in S$

$$w(t,u) - w(0,u) = \int_0^t f(w(\tau,u))d\tau,$$

o que implica

$$\|w(t,u) - u\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau,u))d\tau\| \leq \int_0^t d\tau = t.$$

De modo que, sendo $S_\delta = \{v \in X; d(v,S) \leq \delta\}$, onde $d(v,S) = inf\{\|v-u\|; u \in S\}$, obtemos para todo $t \in [0,\delta]$

$$\|w(t,u) - u\| \leq t \leq \delta,$$

de onde segue

$$d(w(t,u),S) \leq \delta, \text{ para todo } u \in S,$$

o que implica

$$w(t,u) \in S_\delta, \text{ para todo } u \in S,$$

ou seja,

$$w(t,S) \subset S_\delta, \text{ para todo } t \in [0,\delta].$$

Logo,

$$\eta(t,S) \subset S_\delta, \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]. \tag{C.4}$$

Note também que, para cada $u \in X$ fixado, a função $\phi(w(t,u))$ é não-crescente, pois

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))\dot{w}(t,u)$$

e do problema de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = \phi^{'}(w(t,u))f(w(t,u)).$$

Da definição de f, tem-se $\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = 0$ se $w(t,u) \notin A$ e caso contrário,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) = -\rho(w(t,u))\phi^{'}(w(t,u))\frac{V(w(t,u))}{\|V(w(t,u))\|}.$$

Assim, de (C.2),

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq -\beta\rho(w(t,u))\frac{\|\phi^{'}(w(t,u))\|^2}{\|V(w(t,u))\|}, \tag{C.5}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\phi(w(t,u)) \leq 0, \text{ para todo } \ t \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que $\phi(w(t,u))$ é não-crescente.

Se $u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)\cap S}$, note que:

a) Se $\phi(w(bt,u)) < c - \epsilon$, para algum $\widehat{t} \in [0,\delta)$, então

$$\phi(\eta(1,u)) = \phi(w(\delta,u)) \leq \phi(w(\widehat{t},u)) < c - \epsilon.$$

Portanto, de (C.4),

$$\eta(1,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

b) Observe que para todo $t \in [0,\delta]$, temos

$$\phi(w(t,u)) \leq (w(0,u)) = \phi(u) \leq c + \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1).$$

Dessa forma, supondo que

$$w(t,u) \in B = \phi^{-1}([c - \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1), c + \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1)]) \cap S_\delta, \text{ para todo } \ t \in [0,\delta],$$

usando (C.1), (C.5) e o fato que $\rho \equiv 1$ em B, obtemos

$$\phi(w(\delta,u)) = \phi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt}\phi(w(t,u))dt,$$

de onde segue

$$\phi(w(\delta,u)) \leq \phi(u) - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^\delta \|\phi^{'}(w(t,u))\|dt,$$

logo

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c + \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1) - \frac{\beta}{\alpha}\frac{4\epsilon}{\delta}\delta \leq c + \epsilon(\frac{4\beta}{\alpha} - 1) - \frac{\beta}{\alpha}4\epsilon,$$

mostrando que

$$\phi(w(\delta,u)) \leq c - \epsilon.$$

Portanto, em qualquer um dos casos (a) ou (b)

$$\eta(1,u) = w(\delta,u) \in \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta, \text{ se } \ u \in \phi^{c+\epsilon(\frac{4\beta}{\alpha}-1)} \cap S;$$

$(iv)\eta(1,.) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. De fato, devemos mostrar que η é contínua e que possui inversa contínua.

Assim, considere as seguintes funções

$$\begin{array}{rcl} g : X & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & g(u) = w(\delta t, u) \end{array}$$

e

$$
\begin{aligned}
h : X &\longrightarrow X \\
u &\longmapsto h(u) = w(-\delta t, u).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, tem-se

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, h(u)),$$

de onde segue

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t, w(-\delta t, u)).$$

Usando propriedades de fluxo, obtemos

$$(g \circ h)(u) = w(\delta t - \delta t, u) = w(0, u) = u,$$

ou seja,

$$(g \circ h)(u) = u.$$

De modo análogo, temos

$$(h \circ g)(u) = u.$$

Logo, temos que $\eta(t, u) = w(\delta t, u)$ possui inversa dada por $\eta^{-1}(t, u) = w(-\delta t, u)$. Note ainda que $\eta(t, .)$ é contínua pela dependência contínua com relação aos dados iniciais para $w(\delta t, u)$. Da mesma forma, temos que $\eta^{-1}(., u)$ também é contínua, donde concluímos que $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo. ■

Teorema C.2. (Teorema de Deformação) Seja X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que ϕ satifaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ϕ. Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0, 1], \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se:

(i) $\eta(0, u) = u$;

(ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \phi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;

(iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$;

(iv) $\eta(1, .) : X \longrightarrow X$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Devem existir constantes $\theta, \gamma > 0$, tais que, se $u \in \phi^{-1}([c - 2\theta, c + 2\theta])$, temos $\|\phi'(u)\| \geq \gamma$, pois , caso contrário, existe uma sequência (u_n) com

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \phi'(u_n) \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{C.6}$$

Por hipótese, temos que ϕ satisfaz a condição (PS), logo existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que $u_{n_k} \to u$ em X. Sendo $\phi \in C^1(X, R)$, segue-se

$$\phi(u_{n_k}) \to \phi(u) \tag{C.7}$$

e

$$\phi^{'}(u_{n_k}) \to \phi^{'}(u). \tag{C.8}$$

De (C.6), (C.7) e (C.8), tem-se

$$\phi(u) = c \ \text{ e } \ \phi^{'}(u) = 0,$$

donde concluímos que c é um valor crítico de ϕ, contrariando a hipótese, logo mostramos que existem constantes $\theta, \gamma > 0$, tais que, se $u \in \phi^{-1}([c - 2\theta, c + 2\theta])$, temos $\|\phi^{'}(u)\| \geq \gamma$.

Assim, considerando $S = X$, $\epsilon \in (0, \theta]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\gamma}$, ou seja, $\gamma = \frac{4\epsilon}{\delta}$, pelo Teorema C.1, segue o resultado. ■

Teorema C.3. (Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach e I um funcional de classe $C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição Palais-Smale(PS). Além disso, suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas :

(i) $I(0) = 0$,

(ii) Existem $\rho, r > 0$, tais que $I\mid_{\partial B_r} \geq \rho$,

(iii) Existe $e \in X \setminus \overline{B}_r$ tal que $I(e) \leq 0$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \rho$, com

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], X) \setminus g(0) = 0 \ \text{ e } \ g(1) = e\}$.

Demonstração. Seja $c = \inf\limits_{g \in \Gamma} \max\limits_{u \in g([0,1])} I(u)$, ou seja, $c = \inf\limits_{g \in \Gamma} \max\limits_{t \in [0,1]} I(g(t))$. Afirmamos que c está bem definido. De fato, pois sendo $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], X)$, segue que $I \circ g$ é uma função contínua e sendo [0,1] um conjunto compacto, temos que $I \circ g$ possui máximo em [0,1].

Afirmação C.1. $\max\limits_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \rho, \ \ \forall g \in \Gamma$.

Demontração. De fato, seja $g \in \Gamma$ e defina

$$\begin{array}{rcl} h : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & h(t) = \|g(t)\|. \end{array}$$

Observe que h é uma composição de funções contínuas, logo h é contínua. Além disso, sendo $e \in X \setminus \overline{B}_r$, temos que

$$h(0) = \|g(0)\| = \|0\| =< r$$

e

$$h(1) = \|g(1)\| = \|e\| > r,$$

ou seja, $h(0) < r < h(1)$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $h(t_0) = \|g(t_0)\| = r$, de onde segue pela condição (ii) que $I(g(t_0)) \geq \rho$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq \rho, \ \ \forall g \in \Gamma, \tag{C.9}$$

mostrando assim a Afirmação C.1.

Definindo $H = \left\{ \max_{t\in[0,1]} I(g(t)); g \in \Gamma \right\}$, segue da Afirmação C.1, que H é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$. Assim pelo Postulado de Dedekind, existe o ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, $\inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t))$ está bem definido.

De (C.1) temos que ρ é uma cota inferior para H, conseqüentemente pela definição de c, segue que $c \geq \rho$. Suponha por contradição que c não é um valor crítico. Então, pelo Teorema C.2, temos que dado $0 < \epsilon < \frac{c-\rho}{2}$, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que

(a) $\eta(t,u) = u$ se $u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$ e $t \in [0,1]$;

(b) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$.

Além disso, pela definção de c, existe $g \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon. \tag{C.10}$$

Considere $\widetilde{h}(t) = \eta(1, g(t))$. Sendo $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ e $g \in C([0,1], X)$, segue que $\widetilde{h} \in C([0,1], X)$. Uma vez que, $I(e) < \rho < c - 2\epsilon$, tem-se $I(e) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, o que implica $e \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Da mesma forma, sendo $I(0) = 0 < \rho < c - 2\epsilon$, tem-se $I(0) \notin [c-2\epsilon, c+2\epsilon]$, ou seja, $0 \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$. Assim, de (a),

$$\widetilde{h}(0) = \eta(1, g(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$\widetilde{h}(1) = \eta(1, g(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde concluímos, que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Por (C.2), obtemos

$$I(g(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \leq c + \epsilon,$$

o que implica $g(t) \in I^{c+\epsilon}$ $\forall t \in [0,1]$. De (b),

$$\widetilde{h}(t) = \eta(1, g(t)) \in I^{c-\epsilon} \ \ \forall t \in [0,1],$$

ou seja, $I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$ $\forall t \in [0,1]$, logo

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon$$

e sendo, $c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t))$, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{h}(t)) \leq c - \epsilon,$$

visto que $\widetilde{h} \in \Gamma$. Assim,

$$c \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. Portanto, concluímos que c é um valor crítico para I, finalizando assim a demonstração do Teorema . ∎

Agora, demonstraremos o Teorema do Passo da Montanha em uma versão devido à Willem [22], esse resultado foi usado para encontrar a solução do problema (P) no capítulo 2 desta dissertação. Antes demonstraremos o seguinte lema de Deformação.

Lema C.2. (Lema de Deformação) Seja X um expaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, com

$$(\forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])) : \|I'(u)\| \geq 2\epsilon.$$

Então existe $\eta \in C(X, X)$ tal que

(i) $\eta(u) = u, \forall u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$,

(ii) $\eta(I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}$,

onde,

$$I^d := I^{-1}(] - \infty, d[).$$

Demonstração. Definamos

$$\begin{array}{rcl} A & := & \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]), \\ B & := & \varphi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]), \\ \psi & := & dist(u, X\backslash A)(dist(u, X\backslash A) + dist(u, B))^{-1}, \end{array}$$

de forma que ψ é contínua e localmente Lipschitziana, $\psi = 1$ em B e $\psi = 0$ em $X\backslash A$. Definamos também a função contínua e localmente Lipschitziana campo vetorial

$$\begin{array}{rcl} f(u) & := & -\psi(u)\|\nabla\varphi(u)\|^{-2} \bigtriangledown \varphi(u), \quad u \in A, \\ & := & 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u \in X\backslash A. \end{array}$$

Note que $\|f(u)\| \leq (2\epsilon)^{-1}$ em X. Além disso, para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\sigma(t, u) & = & f(\sigma(t, u)), \\ \sigma(0, u) & = & u, \end{array}$$

possui uma única solução definida em $\mathbb{R}$. Além disso, σ é contínua em $\mathbb{R} \times X$(veja [21]). A função η definida em X por $\eta(u) := \sigma(2\epsilon, u)$ satisfaz **(i)**. Desde que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u)) &= (\bigtriangledown\varphi(\sigma(t,u)), \frac{d}{dt}\sigma(t,u)) \\
&= (\bigtriangledown\varphi(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)) \\
&= -\psi(\sigma(t,u))
\end{aligned} \tag{C.11}$$

$\varphi(\sigma(t,u))$ é não-crescente. Seja $u \in \varphi^{c+\epsilon}$. Se existe $t \in [0, 2\epsilon]$ tal que $\varphi(\sigma(t,u)) < c - \epsilon$, então $\varphi(\sigma(2\epsilon, u)) < c - \epsilon$ e **(ii)** é satisfeita. Se

$$\sigma(t,u) \in \varphi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]), \quad \forall t \in [0, 2\epsilon],$$

obtemos de (C.11),

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma(2\epsilon,u)) &= \varphi(u) + \int_0^{2\epsilon} \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t,u))dt \\
&= \varphi(u) - \int_0^{2\epsilon} \psi(\sigma(t,u))dt \\
&\leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon,
\end{aligned}$$

e **(ii)** também é satisfeita. ■

Teorema C.4. (Passo da Montanha) Seja X um espaço de Banach e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, $e \in X$ e $\rho > 0$ tais que $\|e\| > \rho$ e

$$b := \inf_{\|u\|=\rho} I(u) > I(0) \geq I(e). \tag{C.12}$$

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que

(a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$

(b) $\|I'(u)\| < 2\epsilon$,

onde,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

Demonstração. A hipótese (C.12) implica que

$$b \leq \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

e também

$$b \leq c \leq \max_{t\in[0,1]} I(te).$$

Suponha que, para algum $\epsilon > 0$, a conclusão do teorema não é satisfeita. Então

$$c - 2\epsilon \geq I(0) \geq I(e). \tag{C.13}$$

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \tag{C.14}$$

Considere $\beta := \eta \circ \gamma$, onde η é dado pelo Lema C.2. Usando **(i)** e (C.13), obtemos

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0,$$

e similarmente $\beta(1) = e$, de forma que $\beta \in \Gamma$. Segue-se de **(ii)** e (C.14) que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon.$$

Isso é uma contradição. ∎

Teorema C.5. Se c_M é o nível do Passo da Montanha do funcional I_2(ver capítulo 2), então

$$c_M = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} I_2(tu).$$

Demonstração. Considere

$$c_M^* = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \sup_{t\geq 0} I_2(tu).$$

e defina $\phi(u) = t_u$ quando o mesmo existe e $\phi(u) = \infty$ caso contrário. Observe que

$$c_M^* = \inf_{v\in M} I_2(v),$$

onde $M = \{v = t_u u : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}\}$. De fato, $v \in M$ implica $v \neq 0$ e

$$\|v\|^p = [M(\|v\|^p)]^{1-p} \int_\Omega f(x, v^+)v.$$

Assim,

$$I_2(v) = \max_{t\geq 0} I_2(tu) \geq c_M^*.$$

Logo,

$$\inf_{v\in M} I_2(v) \geq c_M^*.$$

Por outro lado, seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $t_u < \infty$. Conseqüentemente,

$$\inf_{v\in M} I_2(v) \leq I_2(t_u u) = \max_{t\geq 0} I_2(tu)$$

de onde concluímos

$$\inf_{v\in M} I_2(v) \leq c_M^*.$$

Provaremos primeiramente que

$$c_M \leq c_M^*.$$

Seja $\bar{u} \neq 0$ tal que $t_u < \infty$. Desde que $I_2(t\bar{u}) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, seja $\tilde{t} > 0$ verificando $I_2(\tilde{t}\bar{u}) < 0$. Considere

$$\bar{\gamma}(t) = (\tilde{t}\bar{u})t.$$

Temos $\bar{\gamma}(0) = 0$ e $I_2(\bar{\gamma}(1)) < 0$ e assim $\bar{\gamma} \in \Gamma$. Além disso,

$$\sup_{t\in[0,1]} I_2(\bar{\gamma}(t)) \leq \sup_{t\geq 0} I_2(tu)$$

e portanto,

$$c_M \leq c_M^*.$$

Finalmente, provaremos que

$$c_M \geq c_M^*.$$

Dado $\gamma \in \Gamma$, temos que $\gamma(0) = 0$ e $I_2(\gamma(1)) < 0$. Assím, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$I_2(\gamma(t_\gamma) = \max_{t\in[0,1]} I_2(\gamma(t)).$$

Desde que $\gamma(t_\gamma) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, segue-se que $\gamma(t_\gamma) \in M$ e

$$c_M^* = \inf_{v\in M} I_2(v) \leq I_2(\gamma(t_\gamma) = \sup_{t\in[0,1]} I_2(\gamma(t)).$$

Portanto,

$$c_M \geq c_M^*,$$

e o teorema esta provado. ■

Referências Bibliográficas

[1] Alves C.O., Corrêa F.J.S.A. e Ma T.F., Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff type, Computers and Mathematics With Applications, 49(2005)85-93.

[2] Arosio A. e Panizzi S., On the Well-Posedness of the Kirchhoff String, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996), 305-330.

[3] Ambosetti A. & Rabinowitz P.H., Dual variational Methods in Critical Point Theory and Applications, J. Functional Analysis,Vol. 14(1973)349-381.

[4] Adams R. A., Sobolev Space, Academic Press(June 1975).

[5] Bartle, Robert G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Wiley , 1995.

[6] Brezis H., Analisi Funtionale teoria e aplicaciones, Alianza editorial, Madrid 1984.

[7] Corrêa F.J.S.A. e Figueiredo G.M., On an Elliptic Equation of p-Kirchhoff type via Variational methods, Bull. Austrl. Math. Soc. vol 74(2006)263-277.

[8] Cousin A.T., Frota C.L., Lar'kin N.A. e Medeiros L.A., On the Abstract Model of the Kirchhoff-Carrier Equation, Comm. Appl. Anal. 1(1997), 389-404.

[9] Chipot M., Elements of Nonlinear Analysis, Birkhäuser Advanced Texts(2000)

[10] Chipot M. e Lovat B., Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems, Nonlinear Analysis, T.M.A. 30(1997), 4619-4627.

[11] Chipot M. e Rodrigues J.F., On a class of Nonlocal Nonlinear Problems, RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér. 26(1992), 447-467.

[12] Cavalcante L. P. L., Existência de soluções positivas para classe de problemas elípticos não lineares com domínio não limitado. Dissertação de Mestrado. UFCG, 2004.

[13] Chabrowski J. and Yang J., Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponents, Adv. Differential Equations 2 (1997), 231-256.

[14] Figueiredo G.M., Multiplicidades de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares, Doct. dissertation (Unicamp, 2004).

[15] Gidas B. and Spruk J., A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations 6, 883-901, (1981).

[16] Kirchhoff G., Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[17] Lions J.L., On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics, em G. de La Penha, L.A. Medeiros(Eds), International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284-346.

[18] Moser J., A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457-468.

[19] Ono K., On Global Solutions and Blow-up Solutions of Nonlinear Kirchhoff Strings with Nonlinear Dissipation, J. Math. Anal. Appl. 216(1997), 321-342

[20] Rabinowitz P.H., Variational methods for Nonlinear elliptic eigenvalue problems, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 729-754.

[21] Schwartz L., Cours d'analyse, Hermann, Paris, 1991-1994.

[22] Willem, Michel, Minimax Theorems, Progress in nonlinear differential equations and their applications. Birkhäuser, 1996.