SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Sobre a Existência de Soluções para Problemas Elípticos envolvendo a Equação de Kirchhoff

por

Laila Conceição Fontinele

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Sobre a Existência de Soluções para Problemas Elípticos envolvendo a Equação de Kirchhoff

por

Laila Conceição Fontinele

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: ANÁLISE

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Laila Conceição Fontinele

Sobre a Existência de Soluções para Problemas Elípticos envolvendo a Equação de Kirchhoff

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 30 de Novembro de 2007.
Conceito:_______________

Banca Examinadora

____

Prof.°Dr.FRANCISCO JÚLIO SOBREIRA DE ARAUJO CORRÊA - Orientador
Instituto de Matemática - UFPA

____

Prof.º Dr.Uberlândio Batista Severo - Menbro
Departamento de Matemática - UFPB

____

Prof.° Dr.Silvano Dias Bezerra de Menezes - Membro
Instituto de Matemática - UFPA

____

Prof.°Dr.Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - Suplente
Instituto de Matemática - UFPA

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu DEUS que me proporcionou sáude para poder concluir este trabalho.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Belmira.

Agradeço ao meu orientador Profº Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa por ter contribuído com a minha formação.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação de Matemática e Estatística-PPGEM, em particular ao Professor Giovany Figueiredo.

Agradeço e dedico esta dissertação a minha grande amiga Rosi Cléa Campos Ferreira por acreditar em mim incondicionalmente.

Á DEUS toda glória pelas bençãos sem fim.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos questões de existência, unicidade e multiplicidade de soluções para o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{c} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x), x \;\text{ em }\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\text{ em }\; \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular.

Usaremos o Método de Galerkin e a técnica de Sub e Supersolução por meio de um método iterativo.

Abstract

In this work, we will study questions of existence, uniqueness and multiplicity of solutions for o problem

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x), x \text{ em } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

in that is a limited and regular domain.

We will use the Galerkin Method and the Sub and Supersolution technique by means of an iteration scheme.

Sumário

Introdução **1**

1 Noções e Resultados Preliminares **6**

1.1 Notações . . . 6
1.2 Identidades Úteis . . . 7
1.3 Topologias Fraca e Fraca* . . . 7
1.4 Distribuições . . . 8
1.4.1 Noção de Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ . . . 9
1.4.2 Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . 9
1.5 Espaços $L^p(\Omega)$ . . . 9
1.6 Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$ . . . 10
1.7 Espaços de Sobolev . . . 11
1.7.1 Norma em $W^{m,p}(\Omega)$ . . . 11
1.7.2 Imersões de Sobolev . . . 11
1.8 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ . . . 12
1.9 Desigualdades Importantes . . . 13
1.9.1 Desigualdade de Hölder . . . 13
1.9.2 Desigualdade de Young . . . 13
1.9.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz para Funções em $L^2(\Omega)$ . . . 13
1.9.4 Desigualdade de Poincaré . . . 13
1.9.5 Conseqüências da Desigualdade de Poincaré . . . 13
1.10 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green . . . 14
1.11 Alguns Resultados de Álgebra Linear . . . 14

2 Problemas M-Lineares **16**

2.1 Um Problema M-Linear . . . 16
2.2 Um Problema M-Linear de Autovalor e o Método de Galerkin . . . 20
2.3 O Problema M-linear: Caso Contínuo . . . 28
2.4 O Problema M-linear: Um Caso Descontínuo . . . 32

3 Problemas Sublineares **35**

3.1 Introdução . . . 35
3.2 Um Problema M-Homogêneo . . . 37
3.3 Um Problema Sublinear Via Iteração Monotônica . . . 39

Introdução

Neste trabalho, estudaremos alguns problemas elípticos não-locais e algumas técnicas de Análise Funcional Não-Linear. Um problema elíptico típico, chamado Problema de Dirichelet é dada por

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x,\, u(x),\, \nabla u(x)) \ \ em \ \ \Omega \\ \\ \quad u(x) = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma dada função, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a função incógnita cuja regularidade depende de f e $\nabla u(x)$ é o gradiente de u em x. Tal problema se reveste da maior importância na Matemática por dois aspectos básicos na pesquisa matemática, a saber:

1- Ele provém de fenômenos físicos relevantes na análise do mundo físico, tais como: Mecânica do Contínuo, Teoria do Potencial, Mecânica dos Fluidos, Crescimento Populacional, Teoria do Controle Estocástico, Potencial Elétrico em Corpos Metálicos, entre outros, assim como em Geometria Diferencial, no estudo de Superficies Mínimas, Superfícies de Curvatura Constante, Teoria de Funções Automorfas, entre outras coisas.

2- A busca de suas soluções propiciou, e ainda propicia, a criação e o desenvolvimento de áreas centrais na Matemática como, por exemplo, o Cálculo das Variações, as Séries de Fourier, a Teoria do Grau de Leray-Schauder, as técnicas de Sub e Supersolução, baseadas no Princípio do Máximo, diversos ramos da Topologia Álgebrica, Teoria de Pontos Fixos, etc. Mais recentemente, devemos citar a elaboração de teorias como o Princípio de Concentração de Compacidade de Pierre-Louis Lions, os Espaços Generalizados de Lebesgue, designados por $L^{p(x)}(\Omega)$, os Espaços Generalizados de Lebesgue-Sobolev, designados por $W^{m,p(x)}(\Omega)$, e o operador $p(x)$-Laplaciano.

Com relação a tal problema e algumas de suas variações o(a) leitor(a) poderá consultar De Figueiredo[17], Gilbarg-Trudinger [18], P.L.Lions [21].

O problema descrito na equação (3) é chamado local pois em todos os termos envolvidos os valores são calculados pontualmente. No entanto, nem sempre isto acontece. Exemplificaremos, a seguir, algumas situações nas quais as equações são descritas com termos não-locais.

Exemplo 0.1. Consideremos o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u(x) = f(x,u(x)) \text{ em } \Omega \\ \\ u(x) = 0 \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e regular, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $\|u\|^2 = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma dada função .

Observemos que em (P_1) o termo $M(\|u\|^2)$ é não-local, ou seja, ele não é calculado pontualmente em cada $x \in \Omega$, haja visto que ele envolve $\|u\|^2$ que é calculado globalmente, considerando todo o domínio Ω.

Soluções do problema (P_1) representam soluções estacionárias da Equação de Kirchhoff

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\|u\|^2)\Delta u(x) = f(x,u(x)) \tag{4}$$

que é uma generalização daquela introduzida por Kirchhoff [19], em 1883,

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

Esta equação é uma extensão da Equação Clássica da Corda Vibrante, proposta por D'Alembert, considerando os efeitos das mudanças no comprimento da corda durante a vibração.

Os parâmetros na equação (5) possuem os seguintes significados: L é o comprimento da corda, h é a área da seção transversal da corda, E é o módulo de Young do material do qual a corda é feita, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial. Deve-se ressaltar que a equação em (4) começou a receber maior atenção após a publicação do trabalho de Lions [20] no qual foi proposta uma abordagem de Análise Funcional para tal problema. O(a) leitor(a) poderá consultar os trabalhos de Arosio-Panizzi [3], Cousin-Frota-Larkin [14] e Ono [23], nos quais encontrará resultados interessantes e outras referências relacionadas com o problema (4).

Vejamos, à guiza de motivação, outros problemas não-locais relevantes por seus interesses matemáticos intrínsecos, assim como por suas aplicações.

Exemplo 0.2. Consideremos um modelo que tem sido estudado por vários autores, entre os quais citamos Chipot-Lovat [6], Chipot-Rodrigues [7], Corrêa-Ferreira-Menezes [10] e Corrêa [9].

Sejam Ω um domínio limitado e regular do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, (ao longo deste trabalho, a menos que se diga algo em contrário, Ω será deste tipo) e $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma dada função.

O problema

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega u\right)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

aparece em várias situações. Por exemplo, u pode descrever a densidade de uma população (de bactérias por exemplo) sujeita à disseminação. O coeficiente de difusão a é suposto depender da população total no domínio Ω em vez de depender da densidade local, isto é, o movimento das bactérias é determinado considerando o estado global do meio. Aqui, o termo não-local é $a\left(\displaystyle\int_\Omega u\right)$.

Uma interessante variação do problema (6), que em certo sentido o generaliza, é

$$\begin{cases} -a(\|u\|_q^q)\Delta u = f(x,u) \text{ em } \Omega \\ \\ \qquad\qquad u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{7}$$

onde $\| \ \|_q$ é a norma usual em $L^q(\Omega)$. Veja Corrêa [8].

Em (7), o termo não local é

$$a(\|u\|_q^q) = a\left(\int_\Omega |u|^q\right).$$

Exemplo 0.3. Outro problema relevante, de natureza não-local, é o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\delta e^u}{\displaystyle\int_\Omega e^u} \text{ em } \Omega \\ \\ \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{8}$$

em que δ é um parâmetro positivo e o termo não-local é $\displaystyle\int_\Omega e^u$.

Tal tipo de problema surge na investigação analítica de fenômenos em que ocorrem rupturas de placas metálicas deformadas por ação de alta tensão, na investigação de fluxos altamente turbulentos e em problemas de equilíbrio na teoria gravitacional de estrelas politrópicas.

Exemplo 0.4. Uma generalização do problema (8) é dado por

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{(g(x,u))^{\alpha}}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} f(x,u)\right)^{\beta}} \text{ em } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

com termo não-local $\left(\displaystyle\int_{\Omega} f(x,u)\right)^{\beta}$, que surge em problemas relacionados com sistemas de partículas, perdas térmicas em problemas de geração ohmica de calor, etc. Com relação ao problema (9), pode-se consultar Stánczy [25], Carrillo [5], Tzanetis-Vlamos [26], Corrêa-de Morais Filho [11] e suas referências.

Exemplo 0.5. Em Deng-Li-Xie [15], os autores consideram o seguinte problema parabólico não-local dado por

$$\begin{cases} u_t = f(u)\left(\Delta u + a\left(\displaystyle\int_{\Omega} u\right)\right) \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ \\ u(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{10}$$

onde $a > 0$ e f é uma função positiva e regular. O problema (10) naturalmente nos conduz ao problema estacionário.

$$\begin{cases} -\Delta u = a\left(\displaystyle\int_{\Omega} u\right) \text{ em } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{11}$$

cuja generalização

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x,u)|u|_q^p \text{ em } \Omega \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{12}$$

foi estudada por Corrêa-Menezes [12].

Um sistema associado ao problema (12) foi estudado, por exemplo, por Deng-Li-Xie [16], no qual os autores investigam a existência global de soluções não-negativas do sistema parabólico não-local e degenerado

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a|v|_p^{\alpha} \text{ em } \Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ \\ v_t = \Delta v^n + b|u|_q^{\beta} \text{ em } \Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ \\ u(x,t) = v(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, \mathrm{T}) \\ \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x) \text{ em } \Omega \end{cases} \tag{13}$$

com $m, n > 1; p, q \geq 1$ e α, β ,$a, b > 0$ e u_0, v_0 são funções limitadas não-negativas. Um ponto central em Deng-Li-Xie [16] é a questão da ocorrência de blow-up na solução.

A versão estacionária de (13) é

$$\begin{cases} -\Delta u^m = a|v|_p^\alpha \ \text{ em } \ \Omega \\ \\ -\Delta v^n = b|u|_q^\beta \ \text{ em } \ \Omega \\ \\ u = v = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

a qual foi estudada por Corrêa-Marques [13].

Problemas como (12)-(13)-(14) surgem em relevantes fenômenos físicos e da engenharia. Eles estão relacionados com alguns modelos de ignição para gases reativos compressíveis; eles descrevem fenômenos físicos nos quais a reação é conduzida pela temperatura em uma única região do corpo e surgem no estudo de fluxos de fluidos através de meios porosos isotrópicos, rígidos e homogênos; também surgem no estudo da dinâmica de populações.

Com estes exemplos e mais outros que poderão ser encontrados na literatura disponível, esperamos ter motivado o(a) leitor(a) sobre a relevância dos problemas elípticos não-locais.

Capítulo 1

Noções e Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados básicos os quais serão utilizados nos capítulos posteriores. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem se encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$.

1.1 Notações

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$.
2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $N \in \mathbb{N}$.
3. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.
4. Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é diferenciável, então o gradiente de f, que será denotado por ∇f, é definido como o vetor de $\mathbb{R}^N$ dado por $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$.
5. Se $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$ é um campo vetorial de classe C^1, definimos o divergente de $F(x)$, denotado por $divF$ como $divF = \nabla \cdot F = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, onde ∇ é o operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$.
6. O Laplaciano de uma função f é definido como $div(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ e é denotado por Δf.

1.2 Identidades Úteis

Se f, g forem funções escalares de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto, c uma constante real e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são campos vetoriais também de classe $C^1(\Omega)$, então as seguintes relações podem ser facilmente provadas:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $\mathrm{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{div}\ \mathbf{F} + \mathrm{div}\ \mathbf{G}$
5. $\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = f\ \mathrm{div}\ \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

1.3 Topologias Fraca e Fraca*

Um espaço métrico é dito completo quando toda sucessão de Cauchy nesse espaço for convergente.

Um espaço vetorial normado que é completo, relativamente à métrica induzida pela norma, chama-se espaço de Banach.

Um espaço vetorial com produto interno V denomina-se um espaço de Hilbert V, se V é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Um espaço métrico E é dito separável se existir um subconjunto $D \subset E$, tal que D é enumerável e denso em E.

Seja E um espaço de Banach e seja $f \in E'$ designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ a aplicação dada por $T_f(x) =< f, x >$, onde a notação $< f, x >$ indica o funcional f calculado em x. Aqui E' é o dual de E dado por $E' = \{f : E \to \mathbb{K};\ f\ \text{é linear e contínua}\}$.

A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $(T_f)_{f \in E'}$.

Se E for um espaço normado, diz-se que $x_n \to x$ forte em E se $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Dada uma sucessão (x_n) em E tal que E é um espaço normado, a notação de convergência fraca é indicada por:

$x_n \rightharpoonup x$ ou , simplesmente, $x_n \to x$ fraco em $\sigma(E, E')$.

Proposição 1.1. Seja x_n uma sucessão em E. Então:

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ se, e somente se, $< f, x_n > \to < f, x >$, $\forall f \in E'$;

(ii) Se $x_n \to x$ fortemente em E, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$.

Seja E' o dual de E munido da norma $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ e E'' o bidual munido da norma $\|\xi\| = \sup\limits_{f \in E'; \|f\| \leq 1} | < \xi, f > |$.

A topologia fraca*, denotada por $\sigma(E', E)$ é a topologia menos fina sobre E' que torna contínua todas as aplicações $(T_x)_{x \in E}$, onde:

$$T_x : E' \to \mathbb{K}$$
$$< T_x, f > = < f, x >, \forall f \in E'.$$

Dada uma sucessão f_n em E' a notação de convergência fraca* pode ser $\mathrm{f}_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ ou simplesmente $f_n \to f$ fraco* *em* $\sigma(E', E)$.

Proposição 1.2. Seja E um espaço de Banach e seja (f_n) uma sucessão de E' então:

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ se, e somente se, $< f_n, x > \longrightarrow < f, x >$, $\forall x \in E$;

(ii) Se $f_n \longrightarrow f$ fortemente, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E'')$;

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$;

(iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ é limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;

(v) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* $\sigma(E', E)$ e $x_n \to x$ fortemente em E, então $< f_n, x_n > \longrightarrow < f, x >$.

1.4 Distribuições

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. O suporte de f, que denotaremos por $suppf$, é o fecho em Ω do seguinte conjunto

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}.$$

Definição 1.1. Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$, o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

1.4.1 Noção de Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2. Sejam (φ_N) uma seqüência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Dizemos que $\varphi_N \longrightarrow \varphi$ se:

(i) $\exists K \subset \Omega$, K compacto, tal que $Supp\ \varphi_N \subset K$, para todo $N \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha \varphi_N(x) \longrightarrow D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.

Definição 1.3. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotada por $D(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.

Definição 1.4. Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $< T, \varphi >$ o valor de T aplicado ao elemento φ.

1.4.2 Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5. Dizemos que $T_N \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se $< T_N, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1.5 Espaços $L^p(\Omega)$

Neste trabalho, as integrais realizadas sobre Ω são consideradas no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.6. Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\|f\|_p < \infty$ onde :

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},\ se\ 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty = \sup ess_{t\in\Omega}|f(t)| &= \inf\{C \in \mathbb{R}^+ | med\ \{t \in \Omega|\ |f(t)| > C\} = 0\} \\ &= \inf\{C;\ |f| \leq C \text{ q.s.}\}. \end{aligned}$$

Observação 1.1. As funções $\|\cdot\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classe de funções onde duas funções reais estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral.

Teorema 1.1. $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

1.6 Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.7. Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que, $f\mathcal{X}_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde $\mathcal{X}_K$ é a função característica do compacto K.

Observação 1.2. $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$< T, \varphi >=< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.1. (**Du Bois-Raymond**) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Observemos que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva. Em decorrência disso, é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.8. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é uma distribuição definida por

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in C^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. Assim, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

1.7 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser vistos nas referências Adams [1], Brézis [4] e Medeiros [22].

Definição 1.9. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq m\}.$$

1.7.1 Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty$$

ou

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \ p = \infty$$

define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

1.7.2 Imersões de Sobolev

Teorema 1.2. (**Teorema de Sobolev**) Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então

(i) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$,

(ii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$,

(iii) Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,

sendo as imersões acima contínuas.

Observação 1.3.

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.
2. Quando $p = 2$ o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por
$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}\,,\ \ u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$
3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

Observação 1.4. Considera-se os espaços de Hilbert V e H, sendo V com a norma $\|.\|_V$ e H com a norma $|.|_H$. Suponhamos que $V \subset H$ e seja

$$T : V \longrightarrow H$$

a injeção canônica de V em H, que a cada $v \in V$ faz corresponder Tv com um elemento de H. Diz-se simplesmente que o operador T é o operador de imersão, ou a imersão T de V em H.

Definição 1.10. Diz-se que a "imersão"$T : V \longrightarrow H$ é contínua, quando existe uma constante $C > 0$, tal que
$$|\ Tv\ |_H \leq C\|v\|_V$$
para todo $v \in V$. Um exemplo simples é o caso $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$.

Definição 1.11. Diz-se que a "imersão"$T : V \longrightarrow H$ é compacta, quando a imagem dos limitados de V por T, são conjuntos relativamente compactos de H, isto é, conjuntos cujo fecho é compacto em H.

Teorema 1.3. (Teorema de Kakutani) Seja E um espaço de Banach. E é reflexivo se, e somente se,

$$B_E = \{f \in E :\|\ x\ \|\leq 1\}$$

é fracamente compacta.

1.8 O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.12. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.5.

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.
2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então a medida de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \overline{\Omega}$ é nula.
3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

1.9 Desigualdades Importantes

1.9.1 Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (q=1 se $p = \infty$ e $q = \infty$ se p=1). Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.9.2 Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então $ab \leq \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.

1.9.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz para Funções em $L^2(\Omega)$

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções de quadrado integrável, então

$$| \langle f, g \rangle_{L^2} | = | \int_\Omega f(x) g(x)\, dx| \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

1.9.4 Desigualdade de Poincaré

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$. Então existe uma constante C(dependendo de Ω) tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.1}$$

para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. A constante $C = C(\Omega)$ citada no teorema acima é chamada de contante de Poincaré para Ω. A desigualdade (1.1) também é válida se Ω for limitado em apenas uma direção.

Observação 1.6.

1. A desigualdade de Poincaré também é válida se $u \in H^1(\Omega)$ e o traço de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ anular sobre apenas uma parte de Γ.

1.9.5 Conseqüências da Desigualdade de Poincaré

1. A norma de Sobolev em $H_0^1(\Omega)$ é equivalente a norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. De fato, a desigualdade de Poincaré diz que existe $C > 0$ tal que

   $$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

   para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, naturalmente , tem-se que

   $$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

   para toda $u \in H^1(\Omega)$.

2. A norma de Sobolev é equivalente à norma do Laplaciano em $L^2(\Omega)$ para funções em $H_0^2(\Omega)$, isto é, existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$. Isso segue do fato que se $u \in H_0^2(\Omega)$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ e ainda da desigualdade de Poincaré.

1.10 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas:

(i) $\displaystyle\int_\Omega div\mathbf{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x)\cdot\eta(x)d\Gamma,\ \mathbf{F} \in [H^1(\Omega)]^N$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u\, dx = -\int_\Omega \nabla v \nabla u\, dx,\ \ v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega v\Delta u\, dx = \int_\Omega (\Delta v) u\, dx,\ \ u, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$

Onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe C^2 e $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$.

1.11 Alguns Resultados de Álgebra Linear

Definição 1.13. Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores em um espaço V munido de produto interno. Se $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ sempre que $i \neq j$, então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é dito um conjunto ortogonal de vetores.

Teorema 1.4. Se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não-nulo em um espaço V munido de um produto interno, então, $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente independentes.

Definição 1.14. Um conjunto ortonormal de vetores é um conjunto ortogonal de vetores unitários. O conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é ortonormal se, e somente se,

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Dado qualquer conjunto ortogonal de vetores não-nulos $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é possível formar um conjunto ortonornal definindo

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i$$

para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 1.5. Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal para um espaço V munido de um produto interno. Se $v = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i v_i$, então $a_i = \langle v_i, v\rangle$

Corolário 1.1. Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base ortonormal para um espaço V munido de um produto interno. Se $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$, então

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Corolário 1.2. (Identitidade de Parseval) Se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ é uma base ortonormal para um espaço V munido de um produto interno e se $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, então

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

Capítulo 2

Problemas M-Lineares

2.1 Um Problema M-Linear

Esta seção será dedicada ao estudo do problema (P_1) em sua forma mais simples. Mais precisamente, consideraremos as questões de existência, unicidade e multiplicidade de soluções no caso em que $f(x,u) = f(x)$.

Suponhamos que $f \in H^{-1}(\Omega)$, onde $H^{-1}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_o^1(\Omega)$, e consideremos o problema

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f \quad em \quad \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad \partial\Omega \end{cases}$$

em que $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é uma função não necessariamente contínua.

Diz-se que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_1) se

$$M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = < f, \varphi >, \tag{2.1}$$

para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; onde $< , >$ é o par de dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Motivados por Chipot- Lovat [6] e Chipot-Rodrigues[7], Ma [24] estabelece o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Suponhamos que $f \in H^{-1}(\Omega)$ seja um funcional linear não-nulo e consideremos a equação

$$M(t)\, t^{\frac{1}{2}} = ||w||; t > 0, \tag{2.2}$$

em que $w \in H_0^1(\Omega)$ é a solução única do problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta w = f \ em \ \Omega \\ \\ w = 0 \ em \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então a equação (2.2) e o problema (P_1) em $H_0^1(\Omega)$, possuem números iguais de soluções.

Demonstração. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de (P_1). Então,

$$M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi =< f, \varphi >, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega M(\|u\|^2) \nabla u \nabla \varphi =< f, \varphi >, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla(M(\|u\|^2)u) \nabla \varphi =< f, \varphi >, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Segue-se que

$$w = M(\|u\|^2)u$$

é a solução fraca de (P) e

$$\|w\| = \|M(\|u\|^2)u\| = M(\|u\|^2)\|u\|,$$

isto é,

$$t = \|u\|^2 > 0$$

é solução da equação (2.2). Reciprocamente, se $t > 0$ for uma solução de (2.2), defina

$$u = t^{\frac{1}{2}} \frac{w}{\|w\|}$$

donde segue-se que

$$\|u\| = \left\| t^{\frac{1}{2}} \frac{w}{\|w\|} \right\| = t^{\frac{1}{2}} \frac{\|w\|}{\|w\|} = t^{\frac{1}{2}},$$

e daí

$$\|u\|^2 = t.$$

Portanto,

$$-M(\|u\|^2)\Delta u = -M(t)\Delta \left(t^{\frac{1}{2}} \frac{w}{\|w\|} \right) = -M(t) \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\|w\|} \Delta w. \tag{2.3}$$

Como $t > 0$ é solução de (2.2), temos

$$\frac{M(t)t^{\frac{1}{2}}}{\|w\|} = 1. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3) teremos,

$$-M(\|u\|^2)\Delta u \;\; = \;\; -\Delta w \; em \; \Omega.$$

Logo,

$$-M(\|u\|^2)\Delta u \;\; = \;\; f \; em \; \Omega.$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_1). □

Observação 2.1. Se $M : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ for contínua, a função

$$t \mapsto M(t)t^{\frac{1}{2}}$$

for crescente e

$$\lim_{t \to +\infty} M(t)t^{\frac{1}{2}} = +\infty,$$

segue-se, em virtude de $\lim_{t \to 0^+} M(t)t^{\frac{1}{2}} = 0$ e do Teorema do Valor Intermediário, que o problema (P_1) possui uma única solução.

Observação 2.2. Se $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ for contínua e se existirem $m_0 > 0$ *e* $t_\infty > 0$ tais que $M(t) \geq m_0 > 0$ se $t \geq t_\infty$, então

$$\lim_{t \to 0^+} M(t)t^{\frac{1}{2}} = 0 \quad e \quad \lim_{t \to +\infty} M(t)t^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

e daí conclui-se que o problema (P_1) possui pelo menos uma solução, para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Observação 2.3. Observamos que a existência de solução, não requer necessariamente, que a função M seja positiva em todo $\mathbb{R}^+$. De fato, vejamos a observação feita por Ma [24].

Suponhamos que M seja contínua em $(t_0, +\infty)$, onde

$$t_0 = \begin{cases} 0 \quad se \quad M > 0 \quad em \quad (0, +\infty) \\ \\ \sup\{t > 0; M(t) = 0\} \qquad se \quad M \leq 0 \ \ em \ \ (0, +\infty) \end{cases} \tag{2.5}$$

Então, se $M(t) \geq m_0 > 0$ para t suficientemente grande, o problema (P_1) possui pelo menos uma solução para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$ não-nula. Com efeito, vê-se facilmente que

$$\lim_{t \to t_0^+} M(t)t^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad e \qquad \lim_{t \to +\infty} M(t)t^{\frac{1}{2}} = +\infty$$

e daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, a observação acima segue-se imediatamente.

Observação 2.4. Considere a função $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$M(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{s^2 + 1}.$$

Assim,

$$M(s)s^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

e observamos que a função

$$s \mapsto M(s)s^{\frac{1}{2}}\ ,\ s > 0,$$

possui máximo positivo e mínimo igual a zero. Portanto, se $\|w\|$ for maior do que tal máximo, o problema (P_1) não terá solução. Se $\|w\|$ for igual a tal máximo o problema (P_1) terá apenas uma solução. Se $0 < \|w\|$ for menor do que tal máximo o problema (P_1) terá exatamente duas soluções.

Observação 2.5. Deve-se enfatizar que o Teorema 2.1 e as observações que lhe seguem contrastam com o que acontece com o caso linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ em \ \Omega \\ \quad u = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

no qual, para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe apenas uma solução fraca.

Observação 2.6. Se $M(t_0) = 0$ para algum $t_0 > 0$ e $f = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, não se tem unicidade.

De fato, seja $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ uma função não nula e faça $v = \sqrt{t_0}\dfrac{u}{\|u\|}$. Neste caso, $\|v\|^2 = t_0$ e assim

$$\begin{cases} -M(\|v\|^2)\Delta v = 0 \ em \ \Omega, \\ \\ \qquad\qquad v = 0 \ em \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Observação 2.7. A questão de existência de solução para o problema (P_1) foi abordado por outros autores. Em Alves-Corrêa [2], os autores usam Séries de Fourier e consideram a condição $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$, e analisam as questões de existência e unicidade de solução para o problema (P_1). Já em Corrêa-Menezes [12], as questões de existência, não apenas para o problema (P_1), são estudadas via Método de Galerkin. Deve-se ressaltar que no caso da condição $M(t) \geq m_0 > 0$, para todo $t \geq 0$, pode-se analisar o problema (P_1) via minimização, considerando o funcional

$$J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \tag{2.8}$$

definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\widehat{M}(\| u \|^2) - < f, u >, \tag{2.9}$$

em que

$$\widehat{M}(t) = \int_0^t M(s)ds. \tag{2.10}$$

2.2 Um Problema M-Linear de Autovalor e o Método de Galerkin

Nesta seção, consideraremos o problema de autovalor não-linear

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \lambda p(x)u + q(x) & em \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro e $p, q \in C^0(\overline{\Omega})$ são funções dadas.

Admitiremos as seguintes hipóteses:

(H_1) $M : \mathbb{R}^+ \to (0, +\infty)$ é uma função contínua e existem $m_0, t_0 > 0$ tais que

$$M(t) \geqslant m_0 \;\; se \; t \geqslant t_0.$$

(H_2) $p, q \in C^0(\overline{\Omega})$, $p, q \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, $p \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$ e $q \not\equiv 0$ em $\overline{\Omega}$.

Observemos que, em virtude da perda de homogeneidade, não podemos usar no problema (P_2) a mesma técnica desenvolvida ao analisar o problema (P_1). Para contornar tal dificuldade, lançaremos mão do Método de Galerkin cujo objetivo consiste em encontrar soluções aproximadas em espaços de dimensão finita n e então fazer $n \to \infty$. Este método repousa sobre a proposição a seguir, que é uma conseqüência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A seguir, enunciaremos tal Teorema do Ponto Fixo e demonstraremos a proposição que será usada no Método de Galerkin. Veja Lions [21] para mais detalhes.

Teorema 2.2. (**Teorema do Ponto Fixo de Brouwer**) Seja $F : \overline{B_r(0)} \to \overline{B_r(0)}$ uma função contínua, onde $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| < r\}$ e $|\ |$ é a norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^N$. Então F possui um ponto fixo em $\overline{B_r(0)}$, isto é, existe $x \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(x) = x$.

Proposição 2.1. Seja $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma aplicação contínua tal que $\langle P(\xi), \xi \rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ com $|\xi| = r$ para algum $r > 0$, em que $\langle , \rangle$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$ e $|.|$ sua norma correspondente. Então existe $\xi_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $P(\xi_0) = 0$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $P(\xi) \neq 0$ para todo $|\xi| \leq r$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} F : \overline{B_r(0)} &\longrightarrow \overline{B_r(0)} \\ \xi &\longmapsto -P(\xi)\frac{r}{|P(\xi)|} \end{aligned}$$

que é contínua. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, existe $\xi_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $F(\xi_0) = \xi_0$, ou seja,

$$\xi_0 = -P(\xi_0)\frac{r}{|P(\xi_0)|}. \tag{2.11}$$

Então,

$$|\xi_0| = \left| -P(\xi_0)\frac{r}{|P(\xi_0)|} \right| = |-P(\xi_0)|\ \frac{|r|}{|P(\xi_0)|} = |r|.$$

De (2.11) temos que

$$P(\xi_0) = -\frac{|P(\xi_0)|}{r}\ \xi_0.$$

Portanto,

$$\langle P(\xi_0), \xi_0 \rangle = \left\langle -\frac{|P(\xi_0)|}{r}\xi_0, \xi_0 \right\rangle = -\frac{|P(\xi_0)|}{r}\langle \xi_0, \xi_0 \rangle < 0,$$

o que é um absurdo. □

Teorema 2.3. Suponhamos que as hipóteses (H_1) e (H_2) sejam satisfeitas. Então existe $\lambda^* > 0$ tal que para cada $0 < \lambda < \lambda^*$ o problema (P_2) possui solução fraca $u_\lambda > 0$.

Demonstração. Inicialmente, consideremos uma base hilbertiana $B = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$, constituída por autofunções de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ tais que

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j = \delta_{ij},$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}$ em que δ_{ij} é o delta de Krönecker dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ se \ \ i = j \\ 0 \ \ se \ \ i \neq j. \end{cases} \tag{2.12}$$

Para cada $m = 1, 2, 3, ...$, seja

$$V_m = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m]$$

o espaço vetorial gerado pelas autofunções $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ com o produto interno induzido de $H_0^1(\Omega)$. Assim, se $u \in V_m$, existem $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j.$$

Deste modo, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre V_m e $\mathbb{R}^m$ da seguinte maneira:

$$V_m \longleftrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 = \| \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi j \|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j \right\rangle \Longrightarrow \\ &= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{m} \xi_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2 = |\xi|^2, \end{aligned}$$

o que implica que tal correspondência é um isomorfismo linear e isométrico, e isto nos permite identificar V_m com $\mathbb{R}^m$.

Defina

$$\begin{aligned} P : V_m &\longrightarrow V_m \\ u &\longmapsto P(u) = (P_1(u), P_2(u), P_3(u), ..., P_m(u)), \end{aligned}$$

onde

$$P_i(u) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi_i - \lambda \int_\Omega p(x) \mid u \mid \varphi_i - \int_\Omega q(x) \varphi_i; \; i = 1, 2, ..., m.$$

Como

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j,$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
P_i(u) &= \int_\Omega \nabla\left(\sum_{j=1}^m \xi_j\varphi_j\right)\nabla\varphi_i - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i \\
&= \sum_{j=1}^m \xi_j\left(\int_\Omega \nabla\varphi_j\nabla\varphi_i\right) - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i \\
&= \xi_i\int_\Omega \nabla\varphi_i\nabla\varphi_i - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i \\
&= \xi_i - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i;\ i = 1, 2, ..., m.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\langle P(\xi), \xi\rangle = \langle\ (P_1(u), P_2(u), P_3(u), ..., P_m(u)), (\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_m)\ \rangle$$

e

$$P_1(u) = \xi_1 - \lambda\int_\Omega p(x) \mid u \mid \varphi_1 - \int_\Omega q(x)\varphi_1$$

$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

$$P_m(u) = \xi_m - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\varphi_m - \int_\Omega q(x)\varphi_m,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\langle P(\xi), \xi\rangle &= \sum_{i=1}^m \xi_i^2 - \lambda\int_\Omega p(x)|u|\left(\sum_{i=1}^m \xi_i\varphi_i\right) - \int_\Omega q(x)\left(\sum_{i=1}^m \xi_i\varphi_i\right) \\
&= \|u\|^2 - \lambda\int_\Omega p(x)|u|u - \int_\Omega q(x)u, \forall u \in V_m.
\end{aligned}$$

Considere

$|\ |_\infty$ a norma da convergência uniforme em $\overline{\Omega}$

$|\Omega|$ a medida de Lebesgue de Ω

λ_1 o primeiro autovalor do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Observe que

$$p(x) \leq |p|_\infty \; para \; todo \; x \in \Omega \; ou \; quase \; sempre \; em \; \Omega \tag{2.13}$$

Segue da caracterização variacional do primeiro autovalor do $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ que

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2}.$$

Logo,

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2, \tag{2.14}$$

ou seja,

$$\|u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|. \tag{2.15}$$

Como

$$\int_\Omega p(x)|u|u \leq \left|\int_\Omega p(x)|u|u\right| \leq \int_\Omega |p(x)|u^2,$$

de (2.13), temos

$$\int_\Omega p(x)|u|u \leq |p|_\infty \int_\Omega u^2$$

e usando (2.14), teremos

$$\int_\Omega p(x) \mid u \mid u \leq \frac{\mid p \mid_\infty \| \; u \; \|^2}{\lambda_1}. \tag{2.16}$$

De maneira análoga,

$$\int_\Omega q(x)u \leq \left|\int_\Omega q(x)u\right| \leq \int_\Omega |q(x)||u|$$

$$\int_\Omega q(x)u \leq \; |q(x)| \int_\Omega |u| \;\; \leq \;\; |q|_\infty \int_\Omega |u|. \tag{2.17}$$

Usando a Desigualdade de Holder em (2.17),

$$\int_\Omega q(x)u \leq |q|_\infty \left(\int_\Omega 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |q|_\infty \; |\Omega|^{\frac{1}{2}} \; \|u\|_2$$

$$\int_\Omega q(x)u \leq |q|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|. \tag{2.18}$$

Portanto,

$$\langle P(\xi), \xi \rangle \;\geq\; \|u\|^2 \;-\frac{\lambda |p|_\infty \; \|u\|^2}{\lambda_1} \;-\frac{|q|_\infty \; |\Omega|^{\frac{1}{2}} \; \|u\|}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

$$\geq \left(1 - \frac{\lambda |p|_\infty}{\lambda_1}\right) \|u\|^2 - \frac{|q|_{\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\lambda_1}} \|u\|$$

Façamos $\lambda^* = \dfrac{\lambda_1}{|p|_\infty}$ e tomemos $0 < \lambda < \lambda^*$.
Logo,

$$1 - \frac{\lambda |p|_\infty}{\lambda_1} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_*} = \frac{\lambda_* - \lambda}{\lambda_*} > 0,$$

de modo que existe $r > 0$, com r dependendo de λ mas independente de m, tal que

$$\langle P(\xi), \xi \rangle > 0 \;\; se \;\; |\xi| = \; r.$$

Observemos que estamos com λ fixado, $0 < \lambda < \lambda^*$. Pela Proposição 2.1, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_i - \lambda \int_\Omega p(x)|u_m|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i = 0, \;\; i = 1, 2, ..., m.$$

Portanto,

$$M(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi_i - \lambda \int_\Omega p(x)|u_m|\varphi_i - \int_\Omega q(x)\varphi_i = 0, \;\; i = 1, 2, ..., m. \tag{2.19}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, pelo Teorema de Kakutani, temos que

$$u_m \rightharpoonup u_\lambda \;\; em \;\; H_0^1(\Omega),$$

eventualmente para uma subseqüência. Em virtude da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$u_m \to u_\lambda \;\; em \;\; L^2(\Omega)$$
$$|u_m| \to |u_\lambda| \;\; em \;\; L^2(\Omega)$$
$$u_m(x) \to u_\lambda(x) \;\; quase \;\; sempre \;\; em \;\; \Omega$$
$$u_m^+(x) \to u_\lambda^+(x) \;\; quase \;\; sempre \;\; em \;\; \Omega,$$

também para subseqüências. Observemos, agora, que em virtude de (2.19) tem-se

$$M(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega p(x)|u_m|\varphi + \int_\Omega q(x)\varphi, \forall \varphi \in V_m. \tag{2.20}$$

Fixemos $1 \leq l \leq m, V_l \subset V_m$, e façamos $m \to \infty$ em (2.20) para obter

$$M(t_0) \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega p(x)|u_\lambda|\varphi + \int_\Omega q(x)\varphi, \ \ para \ \ toda \ \ \varphi \in V_l, \tag{2.21}$$

onde t_0 é um número real tal que

$$\|u_m\|^2 \to t_0.$$

Como l é arbitrário, tem-se que a igualdade em (2.21) é válida para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$M(t_0) \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega p(x)|u_\lambda|\varphi + \int_\Omega q(x)\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.22}$$

e assim, fazendo $\varphi = u_\lambda$, teremos

$$M(t_0) \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 = \lambda \int_\Omega p(x)u_\lambda^2 + \int_\Omega q(x)u_\lambda, \tag{2.23}$$

Na equação (2.20), façamos $\varphi = u_m$ para obter

$$M(\|u_m\|^2) \int_\Omega |\nabla u_m|^2 = \lambda \int_\Omega p(x)(u_m^+)^2 + \int_\Omega q(x)u_m, \ m = 1, 2, ... \tag{2.24}$$

Observemos que, em virtude da convergência $u_m \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|u_m(x)| \ \ \leq \ \ h(x) \ \ quase \ \ sempre \ \ em \ \ \Omega,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega p(x)u_m^2 - \int_\Omega p(x)u_\lambda^2 \right| &= \left| \int_\Omega p(x)(u_m^2 - u_\lambda^2) \right| \\
&\leq \int_\Omega | \ p(x) \ (u_m^2 - u_\lambda^2) \ | \\
&\leq |p|_\infty \int_\Omega |u_m^2 - u_\lambda^2| \\
&\leq |p|_\infty \int_\Omega |u_m - u_\lambda|(|u_m| + |u_\lambda|) \\
&\leq |p|_\infty \int_\Omega |u_m - u_\lambda|(|h| + |u_\lambda|)
\end{aligned}$$

Desde que

$$\int_\Omega |u_m - u_\lambda| \ \ (|h| + |u_\lambda|) \ \ \leq \ \ \|h+u\|_2 \ \ \|u_m - u\|_2,$$

então

$$0 \leq \left| \int_\Omega p(x)u_m^2 - \int_\Omega p(x)u_\lambda^2 \right| \leq |p|_\infty \ \ \|h+u\|_2 \ \ \|u_m - u_\lambda\|_2.$$

Tomando o limite, quando $m \to \infty$ teremos

$$\int_\Omega p(x)u_m^2 \to \int_\Omega p(x)u_\lambda^2.$$

Em (2.24) quando $m \to \infty$, obtemos

$$M(t_0)t_0 = \lambda \int_\Omega p(x)u_\lambda^2 + \int_\Omega q(x)u_\lambda, \tag{2.25}$$

e comparando as igualdades em (2.23) e (2.25) teremos

$$M(t_0) \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 = M(t_0)t_0$$

como $M(t_0) > 0$. Portanto,

$$t_0 = \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2$$

e de (2.22) obtém-se

$$M(\|u_\lambda\|^2) \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi = \lambda \int_\Omega p(x)u_\lambda \varphi + \int_\Omega q(x)\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.26}$$

o que mostra que u_λ é solução fraca de (P_2).

Em vista disso, u_λ satisfaz, no sentido fraco, o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{c} -M(\|u\|^2)\triangle u_\lambda = \lambda p(x)|u_\lambda| + q(x) \ \ em \ \ \Omega \\ \\ u_\lambda = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.27}$$

e, em virtude do Princío do Máximo, $u_\lambda > 0$ em Ω. □

2.3 O Problema M-linear: Caso Contínuo

Nesta seção, estudaremos o problema (P_1) onde $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a seguinte hipótese:

(M_1) Existem números positivos t_∞ e m_0 tal que $M(t) \geq m_0$, para todo $t \geq t_\infty$.

Teorema 2.4. Sob a hipótese (M_1), para cada $0 \neq f \in H^{-1}(\Omega)$ o problema (P_1) possui solução fraca.

Demonstração. Seja $M^+(t) = \max\{M(t), 0\}$ a parte positiva de M, e considere o pro-blema auxiliar

$$(P_1^+) \qquad \begin{cases} -M^+(\| u \|)^2 \Delta u = f \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ \quad u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

Provaremos que o problema (P_1^+) possui solução fraca e tal solução também resolve o problema (P_1). Observe que M^+ também satisfaz a hipótese (M_1). Aplicaremos o Método de Galerkin usando a Proposição 2.1.

Para isso, seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots\}$ uma base ortonormal do Espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere o Espaço de Hilbert de dimensão finita

$$V_m = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

Como $(V_m, \| \cdot \|)$ e $(\mathbb{R}^m, | \cdot |)$ são isométricos e isomorfos, quando $\| \cdot \|$ é a norma usual em $H_0^1(\Omega)$ e $| \cdot |$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^m$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno correspondente. Então, fazemos a seguinte identificação

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \longleftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m); \;\; \|u\| = |\xi|$$

Iremos mostrar que para cada m, existe um $u_m \in V_m$, uma solução aproximada de (P_1^+), satisfazendo

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i \;\; = \;\; < f, e_i >, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

onde $<, >$ é o par de dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$F(\xi) \;\; = \;\; (F_1(\xi), F_2(\xi), \ldots, F_m(\xi)),$$

onde

$$F_i(\xi) \;\; = \;\; M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla e_i - < f, e_i >,$$

quando

$$i = 1, 2, \ldots, m \ e \ u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j.$$

Logo, temos que

$$F_i(\xi) \ = \ M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j) \nabla e_i - < f, e_i >, \ \ i = 1, 2, \ldots, m$$

o que implica que

$$F_i(\xi) \ = \ M^+(\|u\|^2)\xi_i - < f, e_i >, \ \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Como $\|u\|^2 = |\xi|^2 = \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2$, temos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = M^+(\|u\|^2)\xi_1^2 - < f, \xi_1 e_1 > + \ldots + M^+(\|u\|^2)\xi_m^2 - < f, \xi_m e_m >$$

$$= M^+(\|u\|^2)\|u\|^2 - < f, u >$$

Usando (M_1), temos:

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq m_0 \|u\|^2 - < f, u > .$$

Pelas desigualdades de Hölder e Poincaré, teremos

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \ \geq \ m_0 \|u\|^2 - C\|f\|_{H^{-1}} \|u\| \geq 0,$$

se $\|u\| = r$, para r grande o suficiente, onde $\|f\|_{H^{-1}}$ é a norma do funcional em H^{-1}. Assim, pela Proposição 2.1, há $u_m \in V_m$, $\|u_m\| \leq r$, com r não dependendo de m, tal que $F(\xi) = 0$, mostrando que

$$F_i(\xi) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Então,

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla e_i \ = \ < f, e_i >, \ \ i = 1, 2, \ldots, m$$

e isto implica que

$$M^+(\|u_m\|^2) \int_\Omega \nabla u_m \nabla w \ = \ < f, w > \tag{2.28}$$

para todo $w \in V_m$. Desde que $(\|u_m\|^2)$ é uma seqüência real limitada e M^+ é contínua temos

$$\|u_m\|^2 \to \widetilde{t}_0,$$

para algum $\widetilde{t}_0 \geq 0$, e

$$\begin{gathered} u_m \rightharpoonup u \;\; em \;\; H_0^1(\Omega), \\ u_m \to u \;\; em \;\; L^2(\Omega), \\ M^+(\|u_m\|^2) \to M^+(\widetilde{t}_0), \end{gathered}$$

para alguma subseqüência.

Tome $K \leq m$, $V_K \subset V_m$. Fixando K e fazendo $m \to \infty$ na equação (2.28), obtemos

$$M^+(\widetilde{t}_0) \int_\Omega \nabla u \nabla w \;\; = \;\; < f, w >,$$

para todo $w \in V_K$, desde que K é arbitrário teremos que

$$M^+(\widetilde{t}_0) \int_\Omega \nabla u \nabla w \;\; = \;\; < f, w >,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Se $M^+(\widetilde{t}_0) = 0$ então $< f, w >= 0$ para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e, assim, $f = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$, o que é uma contradição. Conseqüentemente, $M^+(\widetilde{t}_0) > 0$ e assim, $M(\widetilde{t}_0) = M^+(\widetilde{t}_0)$.

Tomando $w = u_m$ em (2.28), teremos

$$\begin{aligned} M^+(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 \;\; &= \;\; < f, u_m > \Longrightarrow \\ M(\|u_m\|^2)\|u_m\|^2 \;\; &= \;\; < f, u_m > . \end{aligned}$$

Fazendo, novamente, $m \to \infty$, obtemos

$$M(\widetilde{t}_0)\widetilde{t}_0 =< f, u > . \tag{2.29}$$

De (2.29) e $M(\widetilde{t}_0)\|u\|^2 =< f, u >$; temos que $\|u\|^2 = \widetilde{t}_0$ o que mostra que a função u é uma solução fraca do problema (P_1). □

Observação 2.8. Segue da prova do Teorema 2.4 que a solução u obtida satisfaz $M(\|u\|^2) > 0$. Afirmamos que só há uma solução para (P_1) satisfazendo esta propriedade.

De fato, sejam u e v soluções fracas de (P_1). Então

$$M(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \;\; = \;\; M(\|v\|^2) \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi, \; \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla(M(\| u \|^2)u)\nabla\varphi = \int_\Omega \nabla(M(\| v \|^2)v)\nabla\varphi.$$

Conseqüentemente $M(\|u\|^2)u$ e $M(\|v\|^2)v$ são ambas soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta U & = f \quad em\ \Omega; \\ \quad U & = 0 \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela unicidade, temos $M(\|u\|^2)u = M(\|v\|^2)v$e, assim,

$$\begin{aligned} \| M(\|u\|^2)u \| &= \| M(\|v\|^2)v \| \\ | M(\|u\|^2) | \ \| u \| &= | M(\|v\|^2) | \ \| v \| \\ M(\|u\|^2)\ \|u\| &= M(\|v\|^2)\ \|v\|. \end{aligned}$$

supondo que a função $t \to M(t^2)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos que $\|u\| = \|v\|$. Portanto,

$$\begin{cases} -\Delta u & = -\Delta v \quad em\ \Omega; \\ \quad u & = v \quad em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

e então $u = v$ em Ω. Logo, provamos que o problema (P_1) possui somente uma solução u se a função $t \to M(t^2)t$ é crescente para $t > 0$.

Observação 2.9. Se $M(t_0) = 0$ para algum $t_0 > 0$ e $f = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ perderemos unicidade.

De fato, seja $u \neq 0$ uma função em $C_0^2(\overline{\Omega})$ e considere $v = \sqrt{t_0}\dfrac{u}{\|u\|}$. Neste caso $\|v\|^2 = t_0$ e assim

$$\begin{cases} -M(\|v\|^2)\Delta v & = 0 \quad em\ \Omega; \\ \quad v & = 0 \quad em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

isto é, para cada função não-nula $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ a função v, definida anteriormente, é uma solução não-trivial de (2.30).

Observação 2.10. (**Um Problema Dual**) Suponha que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo
$(\widetilde{M}_1)$ Existem números positivos $\widetilde{t}_\infty$ e $\widetilde{m}_0$ tal que $M(t) \leq -\widetilde{m}_0$ para todo $t \geq \widetilde{t}_\infty$. Neste caso (P_1) possui uma solução.

De fato, suponha $f \neq 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ e considere o problema

$$\begin{cases} -\widetilde{M}(\|u\|^2)\Delta u & = f \quad em\ \Omega; \\ \quad u & = 0 \quad em\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.31}$$

onde $\widetilde{M}(t) = -M(t)$. Claramente, $\widetilde{M}$ satisfaz (M_1) e assim o problema (2.31) possui uma solução $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\widetilde{M}(\|v\|^2) > 0$. Conseqüentemente, $u = -v$ é uma solução de (P_1) com $M(\|u\|^2) < 0$.

2.4 O Problema M-linear: Um Caso Descontínuo

Nesta seção, concentraremos nosso interesse no problema (P_1) quando M possui uma descontinuidade. Mais precisamente, estudaremos o problema (P_1) com $M : \mathbb{R} \setminus \{\theta\} \to \mathbb{R}$ contínua tal que

(M_2) $\lim_{t \to \theta^+} M(t) = \lim_{t \to \theta^-} M(t) = +\infty$

(M_3) $\lim_{t \to +\infty} \sup M(t^2)t = +\infty$ e (M_1) é satisfeita para algum $t_\infty > \theta$.

Teorema 2.5. Se M satisfizer $(M_1) - (M_3)$, o problema (P_1) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$, para cada $f \neq 0 \in H^{-1}(\Omega)$.

Demonstração. Considere a seqüência de funções $M_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$M_n(t) = \begin{cases} n, & \theta - \varepsilon_n^{'} \leq t \leq \theta + \varepsilon_n^{''}, \\ M(t), & t \leq \theta - \varepsilon_n^{'} \ ou\ t \geq \theta + \varepsilon_n^{''}, \end{cases}$$

para $n > m_0$, onde $\theta - \varepsilon_n^{'}$ e $\theta + \varepsilon_n^{''}$, $\varepsilon_n^{'}$, $\varepsilon_n^{''} > 0$, são tais que

$$M(\theta - \varepsilon_n^{'}) \ = \ M(\theta + \varepsilon_n^{''}) = n.$$

Vamos considerar, neste caso, $\varepsilon_n^{'}$, $\varepsilon_n^{''} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Tome $n > m_0$ e observe que a reta $y = n$ cruza o gráfico de M. Conseqüentemente, M_n é contínua e satisfaz M_1, para cada $n > m_0$. Em vista disto, para cada n, existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$, satisfazendo

$$M_n(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla w \ = \ < f, w >, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $u_n = w$ na equação anterior, obtemos

$$M_n(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \ = \ < f, u_n >, \tag{2.32}$$

e assim

$$M_n(\|u_n\|^2)\|u_n\| \ \leq \ \|f\|_{H^{-1}}.$$

Devido a (M_3) a seqüência $(\|u_n\|)$ é limitada. Então

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \ em\ H_0^1(\Omega) \\ u_n &\to u \ em\ L^2(\Omega) \\ \|u_n\|^2 &\to \theta_0, \end{aligned}$$

para alguma subseqüência.

Suponha que

$$M_n(\|u_n\|^2) \to 0,$$

então

$$< f, w >= 0,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$, o que é impossível , pois por hipótese $f \neq 0$. Desta forma, se $(M_n(\|u_n\|^2))$ convergir o seu limite é diferente de zero. Suponha que $\|u_n\|^2 \to \theta$.

Se $\|u_n\|^2 > \theta + \varepsilon_n^{''}$ ou $\|u_n\|^2 < \theta - \varepsilon_n^{'}$, para infinitos valores de n, temos que

$$M_n(\|u_n\|^2) = M(\|u_n\|^2),$$

para tais n, e assim

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 =< f, u_n > .$$

Portanto

$$< f, u >= +\infty$$

o que é uma contradição. Por outro lado, se existem infinitos n de forma que

$$\theta - \varepsilon_n^{'} \leq \|u_n\|^2 \leq \theta + \varepsilon_n^{''}.$$

Então,

$$M_n(\|u_n\|^2) = n,$$

e assim

$$n\|u_n\|^2 =< f, u_n > .$$

Logo

$$< f, u >= \infty,$$

e nós chegamos novamente a uma contradição.

Consequentemente $\|u_n\|^2 \longrightarrow \theta_0 \neq \theta$ o que implica que para n suficientemente grande

$$\|u_n\|^2 < \theta - \varepsilon_n^{'} \;\; ou \;\; \|u_n\|^2 > \theta + \varepsilon_n^{''}$$

e assim

$$M_n(\|u_n\|^2) = M(\|u_n\|^2)$$

logo

$$M(\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla w =< f, w >, \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$M(\theta_0) \int_\Omega \nabla u \nabla w =< f, w >, \forall w \in H_0^1(\Omega) \Longrightarrow$$

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 =< f, u_n >, \tag{2.33}$$

tomando o limite em (2.33) obtemos

$$M(\theta_0)\theta_0 =< f, u > .$$

Portanto,

$$M(\theta_0)\|u\|^2 = M(\theta_0)\theta_0.$$

Concluímos que $M(\theta_0) \neq 0$ e assim $\|u\|^2 = \theta_0$ e a prova do teorema está completa. □

Capítulo 3

Problemas Sublineares

3.1 Introdução

Consideremos o problema

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -M(\| u \|^2)\Delta u = u^\alpha \;\; em \; \Omega, \\ \\ u > 0 \;\; em \; \Omega, \\ \\ u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $0 < \alpha < 1$. Quando M for igual a 1, o problema (P_3) reduz-se a

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u = u^\alpha \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ u > 0 \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Em verdade, considera-se um problema que inclui (P_4) como caso particular. Mais precisamente, considera-se

$$(P_5) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ u > 0 \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ u = 0 \;\;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

em que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^1, satisfazendo

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(x,t)}{t} > \lambda_1 \tag{3.1}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(x,t)}{t} < \lambda_1, \tag{3.2}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ sob condições de fronteira de Dirichlet. Estas duas últimas condições nos dizem que nas proximidades de 0 o gráfico da função $f(x,t)$ encontra-se acima do da reta $\lambda_1 t$, enquanto que para t suficientemente grande o gráfico da função $f(x,t)$ está abaixo do gráfico da reta $\lambda_1 t$. As condições (3.1) e (3.2) caracterizam o problema (P_5) como sendo um Problema Sublinear. Em De Figueiredo [17] é usada a técnica de sub e supersolução, e sua subjacente iteração monotônica, para mostrar a existência de solução positiva para o problema (P_5). Vejamos os conceitos de sub e de supersolução.

Definição 3.1. Diz-se que $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma supersolução para o problema (P_5) se

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} \geq f(x,\overline{u}) \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ \quad \overline{u} = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

Definição 3.2. Diz-se que $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma subsolução para o problema (P_5) se

$$\begin{cases} -\Delta\underline{u} \leq f(x,\underline{u}) \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ \quad \underline{u} = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Admitindo-se que o problema (P_5) possua uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$ ordenadas de modo que

$$\underline{u}(x) \;\; \leq \;\; \overline{u}(x), \, para \;\; todo \;\; x \in \Omega,$$

prova-se usando um método iterativo, que existe uma solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de (P_5) satisfazendo

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), para \;\; todo \;\; x \in \Omega,$$

sendo que um ingrediente essencial em tal método é o chamado **Princípio do Máximo** estabelecido a seguir:

Proposição 3.1. (**Princípio do Máximo**) Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ \quad u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $h \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = \dfrac{2N}{N+2}$, λ é um parâmetro real não-negativo e $h \geq 0 \;\; em \;\; \Omega$. Então $u \geq 0 \;\; em \;\; \Omega$. Além disso, se $h > 0$ em um conjunto de medida positiva, então $u > 0$ em Ω.

Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então a derivada normal exterior $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$, para todo $x \in \partial\Omega$.

Quando a função $t \longrightarrow \dfrac{f(x,t)}{t}$, $t > 0$, for decrescente tem-se, também, unicidade de solução para o problema (P_5).

Uma situação interessante é quando $f(x,u) = \rho(x)u^\alpha$, em que $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $\rho \geq 0$ e $\rho \not\equiv 0$ *em* Ω. Nesse caso

$$\frac{f(x,t)}{t} = \frac{\rho(x)}{t^{1-\alpha}}$$

é decrescente em $t > 0$ e

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x,t)}{t} = +\infty \ \ e \ \ \lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} = 0$$

de modo que as condições (3.1) e (3.2) são satisfeitas e a função $t \longrightarrow \dfrac{\rho(x)}{t^{1-\alpha}}, t > 0$, é decrescente e, portanto neste caso, o problema (P_5) possui uma única solução.

Os resultados descritos neste capítulo são contribuições no sentido de generalizar, para o problema (P_3), alguns resultados que foram obtidos para o problema (P_5).

3.2 Um Problema M-Homogêneo

Nesta seção estudaremos o problema sublinear

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -M(\| u \|^2)\Delta u = u^\alpha \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ u > 0 \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$. Isto será feito por comparação com o problema semilinear

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -\Delta w = w^\alpha \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ w > 0 \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ w = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

o qual, possui solução se $0 < \alpha < 1$.

Teorema 3.1. Dada $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, o problema (P_3) possui pelo menos o mesmo número de soluções da equação

$$M(t)t^{\frac{1-\alpha}{2}} = \| w \|^{1-\alpha}, t > 0, \tag{3.6}$$

onde w é solução do problema (P_4). Além disso, se M for contínua, satisfizer (M_1) e

$$\lim_{t \to 0^+} M(t)t^{\frac{1-\alpha}{2}} = 0, \tag{3.7}$$

então o problema (P_3) possui pelo menos uma solução.

Demonstração. Seja $t > 0$ uma solução de (3.6). Escrevendo

$$\begin{aligned}
s &= t^{\frac{1}{2}}\|w\|^{-1} \Longrightarrow \\
sw &= t^{\frac{1}{2}}\|w\|^{-1}w = \frac{t^{\frac{1}{2}}w}{\|w\|} \Longrightarrow \\
\|sw\| &= \left\| \frac{t^{\frac{1}{2}}w}{\|w\|} \right\| = t^{\frac{1}{2}}\frac{\|w\|}{\|w\|} = t^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \\
\|sw\|^2 &= t \Longrightarrow \\
M(\|sw\|^2) &= M(t) = \frac{\|w\|^{1-\alpha}}{t^{\frac{1-\alpha}{2}}} = \left(\frac{\|w\|}{t^{\frac{1}{2}}}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{s}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{s^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $u = sw > 0$ é uma solução de (P_3) pois

$$\begin{aligned}
-M(\|u\|^2)\Delta u &= -M(\|sw\|^2)\Delta(sw) = -M(t)\Delta\left(\frac{t^{\frac{1}{2}}w}{\|w\|}\right) \Longrightarrow \\
-M(\|u\|^2)\Delta u &= -\frac{1}{s^{1-\alpha}}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\|w\|}\Delta w = -s^{\alpha-1}\, s\, \Delta w \Longrightarrow \\
-M(\|u\|^2)\Delta u &= s^{\alpha-1+1}\, w^\alpha = s^\alpha\, w^\alpha = u^\alpha,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = u^\alpha \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ u > 0 \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ u = 0 \ \ em \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

Observe que a função

$$t \longmapsto M(t)t^{\frac{1-\alpha}{2}}, \ t \geq 0$$

é contínua e, em virtude de (M_1)

$$\lim_{t \to +\infty} M(t)t^{\frac{1-\alpha}{2}} = +\infty$$

que; juntamente com a condição (3.7) implicam, usando o Teorema do Valor Intermediário, que a equação (3.6) possui pelo menos uma solução. □

Observação 3.1. Um resultado como o Teorema 3.1 continua válido, com demonstração totalmente idêntica, para o problema (P_6) no caso superlinear, ou seja, quando $1 < \alpha < \dfrac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < \alpha < \infty$ se $N = 1, 2$.

Para tais valores de α, o problema (P_4) possui uma solução. Veja De Figueiredo [17].

Observação 3.2. Observemos que o argumento usado na demonstração do Teorema 3.1, baseou-se fortemente na α-homogeneidade da função $f(t) = t^\alpha$. Se não tivermos homogeneidade, outros métodos (Sub e Supersolução, Método de Galerkin, Métodos Variacionais,etc.) poderão ser aplicados.

3.3 Um Problema Sublinear Via Iteração Monotônica

Comecemos esta seção com duas definições.

Definição 3.3. Diz-se que $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma subsolução do problema

$$(P_6) \qquad \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = f(x,u) \;\; em \;\; \Omega \\ \\ u = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega \end{cases}$$

se

$$\begin{cases} -M(\|\underline{u}\|^2)\Delta \underline{u} \leq f(x,\underline{u}) \;\; em \;\; \Omega \\ \\ \underline{u} = 0 \;\; em \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 3.4. Diz-se que $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma supersolução do problema (P_6) se

$$\begin{cases} -M(\|\overline{u}\|^2)\Delta \overline{u} \geq f(x,\overline{u}) \;\; em \;\; \Omega, \\ \\ \overline{u} = 0 \;\; em \; \partial\Omega. \end{cases}$$

Usemos as seguintes notações: $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ e $\mathbb{R}^+_* = (0, +\infty)$. Considere,

$$(H_3) \;\; M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+_*,$$

onde M é não- crescente.

Definamos $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H(t) = M(t^2)t.$$

Teorema 3.2. (**Um Princípio de Comparação**) Suponhamos que M satisfaça (H_3) e H seja crescente. Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ funções não-negativas satisfazendo

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u \leq -M(\|v\|^2)\Delta v \quad em \quad \Omega \\ \\ u = v = 0 \quad em \ \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Então, $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Multipliquemos ambos os membros da equação em (3.8) por u, então

$$\begin{aligned} -M(\|u\|^2)\Delta u\, u &\leq -M(\|v\|^2)\Delta v\, u \Longrightarrow \\ \int_\Omega -M(\|u\|^2)\Delta u\, u &\leq \int_\Omega -M(\|v\|^2)\Delta v\, u \Longrightarrow \\ M(\|u\|^2)\int_\Omega -\Delta u\, u &\leq M(\|v\|^2)\int_\Omega -\Delta v\, u. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observe que

$$\int_\Omega -\Delta u\, u = \int_\Omega \nabla u \nabla u = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|u\|^2 \tag{3.10}$$

e

$$\int_\Omega -\Delta v\, u = \int_\Omega \nabla v \nabla u. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.10) e (3.11) em (3.9), obtemos

$$M(\|u\|^2)\|u\|^2 \leq M(\|v\|^2)\int_\Omega \nabla v \nabla u. \tag{3.12}$$

Multipliquemos ambos os membros da equação em (3.8) por v, logo

$$-M(\|u\|^2)\Delta u\, v \leq -M(\|v\|^2)\Delta v\, v \Longrightarrow$$
$$\int_\Omega -M(\|u\|^2)\Delta u\, v \leq \int_\Omega -M(\|v\|^2)\Delta v\, v \Longrightarrow$$

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega -\Delta u\, v \leq M(\|v\|^2)\int_\Omega -\Delta v\, v \tag{3.13}$$

é claro que:

$$\int_\Omega -\Delta u\, v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \tag{3.14}$$

$$\int_\Omega -\Delta v\, v = \int_\Omega \nabla v \nabla v = \int_\Omega \nabla v^2 = \|v\|^2. \tag{3.15}$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), obtemos

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v \;\leq\; M(\|v\|^2)\|v\|^2. \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.12) por $\dfrac{1}{M(\|v\|^2)}$, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{M(\|u\|^2)\|u\|^2}{M(\|v\|^2)} &\leq \frac{M(\|v\|^2)\displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla u}{M(\|v\|^2)} \Longrightarrow \\
\frac{M(\|u\|^2)\|u\|^2}{M(\|v\|^2)} &\leq \int_\Omega \nabla v \nabla u.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Multiplicando (3.16) por $\dfrac{1}{M(\|u\|^2)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{M(\|u\|^2)\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v}{M(\|u\|^2)} &\leq \frac{M(\|v\|^2)\|v\|^2}{M(\|u\|^2)} \Longrightarrow \\
\int_\Omega \nabla u \nabla v &\leq \frac{M(\|v\|^2)\|v\|^2}{M(\|u\|^2)}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

De (3.17) e (3.18), temos

$$\begin{aligned}
\frac{M(\|u\|^2)\|u\|^2}{M(\|v\|^2)} &\leq \int_\Omega \nabla v \nabla u \leq \frac{M(\|v\|^2)\|v\|^2}{M(\|u\|^2)} \Longrightarrow \\
M(\|u\|^2)\|u\|^2 &\leq M(\|v\|^2)\|v\|^2 \Longrightarrow \\
M(\|u\|^2)\|u\| &\leq M(\|v\|^2)\|v\|.
\end{aligned}$$

Desde que $H(t) = M(t^2)t$ é crescente, obtem-se

$$\|u\| \leq \|v\|$$

e como M é não-crescente

$$M(\|u\|^2) \;\geq\; M(\|v\|^2). \tag{3.19}$$

Usando o Princípio do Máximo em (3.8), conseguimos

$$M(\|u\|^2)u \;\leq\; M(\|v\|^2)v \; em \; \Omega. \tag{3.20}$$

De (3.20) e (3.19), obtém-se $u \leq v$ em Ω. $\square$

Teorema 3.3. Suponhamos que M satisfaça (H_3), H seja crescente e $H(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$, respectivamente, sub e supersolução do problema (P_6) satisfazendo

$$0 \leq \underline{u} \leq \overline{u} \text{ } em \text{ } \Omega. \tag{3.21}$$

Além disso, suponhamos que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ seja crescente na variável t, para cada $x \in \overline{\Omega}$ fixado, isto é,

$$t_1 \leq t_2 \longrightarrow f(x, t_1) \leq f(x, t_2).$$

Então existem $U, V \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$\begin{cases} -M(\| U \|^2)\Delta U = f(x, U) \quad em \quad \Omega, \\ \\ \qquad\qquad U = 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} -M(\| V \|^2)\Delta V = f(x, V) \quad em \quad \Omega, \\ \\ \qquad\qquad V = 0 \quad em \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.23}$$

e $\underline{u} \leq U \leq V \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Como $\underline{u} \in C^2(\Omega)$ tem-se que $f(\cdot, \underline{u}(\cdot)) \in L^2(\Omega)$. Consideremos o problema M-linear

$$\begin{cases} -M(\|v\|^2)\Delta v &= f(x, \underline{u}) \text{ } em \text{ } \Omega \\ \qquad\qquad v &= 0 \qquad em \text{ } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

e usando o Teorema 2.1, segue-se que existe uma única solução $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ do problema (3.24). Tem-se, também, que

$$-M(\|u_1\|^2)\Delta u_1 = f(x, \underline{u}) \geq -M(\|\underline{u}\|^2)\Delta \underline{u} \text{ } em \text{ } \Omega$$

e, pelo Teorema 3.2, obtemos

$$\underline{u} \leq u_1 \text{ } em \text{ } \Omega.$$

Observe que

$$-M(\|u_1\|^2)\Delta u_1 \leq -M(\|\overline{u}\|^2)\Delta \overline{u} \text{ } em \text{ } \Omega$$

e usando novamente o Princípio de Comparação tem-se que $u_1 \leq \overline{u}$ em Ω e, consequentemente,

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq \overline{u} \text{ } em \text{ } \Omega.$$

Analogamente, obtemos $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -M(\|v_1\|^2)\Delta v_1 &= f(x, \overline{u}) \text{ } em \text{ } \Omega \\ \qquad\qquad v_1 &= 0 \qquad em \text{ } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

e satisfaz

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq v_1 \leq \overline{u} \text{ } em \text{ } \overline{\Omega}.$$

Repetindo este argumento, encontramos duas seqüências (u_n) e (v_n) satisfazendo

$$0 \leq \underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq \overline{u} = v_0 \ em\ \Omega, \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} -M(\|u_n\|^2)\Delta u_n &= f(x, u_{n-1}) \ em\ \Omega \\ u_n &= 0 \qquad\qquad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.27}$$

e

$$\begin{cases} -M(\|v_n\|^2)\Delta v_n &= f(x, v_{n-1}) \ em\ \Omega \\ v_n &= 0 \qquad\qquad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.28}$$

Mostraremos que a seqüência (u_n) converge para uma solução U de (3.22). Multiplicando ambos os membros da equação (3.27) por u_n e integrando por partes, obtemos

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega f(x, u_{n-1}(x))u_n(x)\,dx$$

o que implica

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\| \leq C.$$

Desde que H é crescente com $H(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ concluímos, da última desigualdade, que $(\|u_n\|)$ é limitada. Assim, para alguma subseqüência, existe $U \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup U \ em\ H_0^1(\Omega)$$

e usando a compacidade das imersões de Sobolev, obtém-se

$$u_n \to U \ em\ L^p(\Omega)$$

para $p \in [1, p^*)$, se $N \geq 3$, ou para $p \in [1, \infty)$ se $N = 1, 2$. Observe que existe $k_1 > 0$ tal que $\|u_n\|_\infty \leq k_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, com $p > N$, e conseqüentemente $(u_n) \subset C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ com

$$\|u_n\|_{1,\alpha} \leq k_2 \ para\ algum\ k_2 > 0.$$

Portanto, usando a imersão compacta de Schauder, conseguimos

$$\|u_n\|^2 \to \|U\|^2$$

e pela continuidade da função M, segue que

$$M(\|u_n\|^2) \ \to \ M(\|U\|^2). \tag{3.29}$$

Além disso, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle u_n, \varphi\rangle \ \to \ \langle U, \varphi\rangle \tag{3.30}$$

e

$$\int_\Omega f(x, u_n(x))\varphi\,dx \ \to \ \int_\Omega f(x, U(x))\varphi\,dx. \tag{3.31}$$

De (3.29)-(3.31)

$$-M(\|U\|^2)\int_\Omega \nabla U\cdot\nabla\varphi=\int_\Omega f(x,U))\varphi,\ para\ \ toda\ \ \varphi\in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\begin{cases} -M(\| \ U \ \|^2)\triangle U = f(x,U) \quad em \quad \Omega, \\ \\ \qquad\qquad\qquad U=0 \qquad em \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.32}$$

com

$$0\leq \underline{u}\leq U\leq \overline{u}\ em\ \overline{\Omega}.$$

Do mesmo modo, encontramos V como o limite da seqüência (v_n) tal que

$$\begin{cases} -M(\|V\|^2)\Delta V &= \quad f(x,V)\ em\ \Omega \\ \qquad\qquad V &= \quad 0 \qquad\quad em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.33}$$

com

$$0\leq \underline{u}\leq U\leq V\leq \overline{u}\ em\ \overline{\Omega}$$

e a demonstração do teorema está completa. □

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] C.O.Alves & F.J.S.A.Corrêa, On Existence of Solutions for a Class of Problem Involving a Nonlinear Operator, Comm. on Applied Nonlinear Analysis 8 (2001), N.2, 43-56.

[3] A. Arosio & S. Panizzi, On the Well-Posedness of the Kirchhoff String, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996), 305-330.

[4] Brezis, H., Analyse Functionelle, Thérie et Applications, Dunod, Paris, 2005.

[5] J.A. Carrillo, On a Nonlocal Elliptic Equation with Decreasing Nonlinearity Arising in Plasma Physics and heat Conduction, Nonlinear Analysis, 32(1998) 97-115.

[6] M. Chipot, & B. Lovat, Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems, Nonlinear Anal., T.M.A. vol. 30, 4619-4627.

[7] M. Chipot,& J.F. Rodrigues, On a Class of Nonlocal Nonlinear Problems, RAIRO Modélisation Math. Anal. Num. Vol 26, 447-467, (1997).

[8] Corrêa, F.J.S.A., On Positive Solutions of Nonlocal and Nonvariational Elliptic Problems, Nonlineal Anal., Vol.59, Issue 7,December 2004,1147-1155.

[9] Corrêa, F.J.S.A., Sobre Problemas Elípticos Não-Locais e Algumas Técnicas de Análise Funcional não-Linear, Seminário Brasileiro de Análise, Ed. N°62, (2005).

[10] Corrêa, F.J.S.A., Silvano D.B. Menezes & J. Ferreira, On a Class of Problems Involving a Nonlocal Operator, Applied Math. and Comp. 147 (2004) 475489.

[11] Corrêa, F.J.S.A. & D.C. de Morais Filho, On a Class of Nonlocal Elliptic Problems Via Galerkin Method, Journal Of Mathematical Analysis and Applications, 310(2005) 177- 187.

[12] Corrêa, F.J.S.A. & Silvano D.B.Menezes, Existence of Solutions to Nonlocal and Singular Elliptic Problems Via Galerkin Method, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004(2004), No.19,pp.1-10.

[13] Corrêa, F.J.S.A. & Lopes, F.P.M., Communications on Applied Nonlinear Analysis, vol. (2006),pp.

[14] A.T. Cousin, C.L. Frota, N.A. Larkin L.A. Medeiros, On the Abstract Model of the Kirchhoff-Carrier Equation , Comm. Appl. Anal. 1(1997), 389-404.

[15] W.Deng, Y.Li & C.Xie, Existence and Nonexistence of Global Solutions of Some Nonlocal Degenerate Parabolic Equations, Applied Mathematics Letters, 16(2003)803-808.

[16] W.Deng, Y.Li & C.Xie, Blow-up and Global Existence for a Nonlocal Degenerate Parabolic System, J.Math.Anal.end Appl.277(2003)199-217.

[17] De Figueiredo D.G., Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Lecture Notes in Mathematics, Nº957, Springer- Verlag, New York (1982), pp.34-87.

[18] D.Gilbarg-N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.

[19] G. Kirchhof, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[20] J.L. Lions, On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics,, em G. de La Penha, L.A. Medeiros(Eds), International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1977), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284-346.

[21] P.L.Lions, On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations, SIAM Review, Vol. 24, N.4, October(1982)441-467.

[22] L.A. Medeiros & M. Mila Miranda, Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, 1993.

[23] K. Ono, On Global Solutions and Blow-up Solutions of Nonlinear Kirchhoff Strings with Nonlinear Dissipation , J. Math. Anal. Appl. 216(1997), 321-342.

[24] T.F.,Ma, Remarks on an Elliptic Equation of Kirchhoff type, Nonlinear Anal. Vol 63(2005), 1967-1977.

[25] R. Stańczy, Nonlocal Elliptic Equations, Nonlinear Analysis, 47 (2001), 3579-3584.

[26] D.E. Tzanetis & P.M. Vlamos, A nonlocal Problem Modelling Ohmic Heating with Variable Thermal Conductivity, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2(2001) 443-454.