



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Edney Luís Oliveira Fernandes

DETERMINAÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL ATRAVÉS  
DE UM TESTE DE SIGNIFICÂNCIA BAYESIANO

Orientadora: Profa. Dra. Maria Regina Madruga Tavares

Belém  
2007

Edney Luís Oliveira Fernandes

**DETERMINAÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL ATRAVÉS  
DE UM TESTE DE SIGNIFICÂNCIA BAYESIANO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática e Estatística.

Área de Concentração: Inferência Estatística  
Orientadora: Profa. Dra. Maria Regina Madruga Tavares

Belém  
2007

Edney Luís Oliveira Fernandes

# DETERMINAÇÃO DO TAMANHO AMOSTRAL ATRAVÉS DE UM TESTE DE SIGNIFICÂNCIA BAYESIANO

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do grau de Mestre em Matemática e Estatística no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

Belém, 30 de Agosto de 2007

---

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha  
(Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA)

Banca Examinadora

---

Profª. Dra. Maria Regina Madruga Tavares  
Universidade Federal do Pará  
**Orientadora**

---

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha  
Universidade Federal do Pará  
**Examinador**

---

Profª. Dra. Terezinha Ferreira de Oliveira  
Universidade Federal do Pará  
**Examinadora**

*À minha família  
e meus amigos.*

# Agradecimentos

- ★ À Deus todo Poderoso, que me proporcionou momentos felizes e me ajudou a superar dificuldades;
- ★ À minha família pelo apoio e por mostrar a importância do estudo;
- ★ À Profa. Regina Tavares pela excelente orientação neste trabalho;
- ★ Aos professores Edson Ramos, Sílvia Almeida, Joaquim Queiroz e Héilton Tavares que ajudaram, de alguma forma, na minha formação estatística. Além de outros professores que também contribuíram na minha formação;
- ★ À Universidade Federal do Pará (UFPA);
- ★ Ao Departamento de Estatística, representado pela pessoa da Profa. Dra. Regina Tavares;
- ★ Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME), representado pela pessoa do Prof. Dr. Marcus Rocha;
- ★ À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro destinado à este trabalho;
- ★ À todos os alunos e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Em especial aos alunos Dennison, Raquel, Ulisses, Marco Pollo, Luiz Otávio, Pedro e a funcionária Telma;
- ★ Ao meu amigo Nilson pela grande amizade;
- ★ À todos os meus amigos que desejam que a minha vida seja repleta de boas realizações;
- ★ Finalmente, a todos que, de alguma forma, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

*“O que é desconhecido é incerto, e toda  
incerteza deve ser quantificada em  
termos de probabilidade.”*

Thomas Bayes (1702-1776)

---

# Resumo

---

FERNANDES, E. L. O. Determinação do tamanho amostral através de um teste de significância Bayesiano. 2007. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, Belém - PA, Brasil).

Neste trabalho foram apresentados os conceitos básicos associados à Inferência Bayesiana, enfatizando o problema de determinação do tamanho amostral em teste de hipóteses. Para a determinação do tamanho amostral foi utilizada a proposta de De Santis (2004) usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999). De acordo com De Santis (2004), o critério de determinação do tamanho amostral considera o procedimento de teste em duas fases: *Fase pré-experimental* e *Fase pós-experimental*. Na *fase pré-experimental* obtém-se o menor valor do tamanho amostral tal que a probabilidade de obter uma evidência decisiva e correta (com base no *Fator de Bayes*), em favor da hipótese verdadeira, seja suficientemente “grande”, e na *fase pós-experimental* coleta-se a amostra de tamanho obtido na fase pré-experimental e, com base na evidência obtida, toma-se a decisão de rejeitar ou aceitar a hipótese nula. Foram apresentadas as medidas de evidência usuais para teste de hipóteses Bayesiano, bem como a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999). Também foram apresentados alguns resultados comparativos utilizando outras propostas presentes na literatura para determinação do tamanho amostral. Tais resultados indicaram que a proposta de De Santis (2004) adequou-se bem com a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), produzindo o valor do tamanho amostral menor em comparação com o tamanho amostral das outras propostas.

Palavras Chaves: Evidência, Tamanho amostral e Teste de Hipóteses.

---

# Abstract

---

FERNANDES, E. L. O. Determination of the sample size through an Bayesian significance test. 2007. Dissertation of Master's degree (Graduate Program in Mathematics and Statistics - UFPA, Belem - Para, Brazil).

Basic concepts associated with Bayesian Inference are presented, emphasizing the problem of determination of the sample size in test of hypotheses. For the determination of the sample size was used the proposal of De Santis (2004) using the measure of Bayesian evidence proposed by Pereira and Stern (1999). In accordance with De Santis (2004), the criterion of determination of the sample size considers the proceeding of test in two phases: Phase pre-experimental and Phase post-experimental. In the phase pre-experimental obtains the least value of the sample size such that the probability of obtaining a decisive and correct evidence (with base in the Bayes Factor), on behalf of the true hypothesis, is sufficiently large, and in the phase post-experimental collect the sample of size obtained in the phase pre-experimental, on basis of the obtained evidence, the decision is taken of rejecting or accepting the null hypothesis. The usual measures of evidence were presented for test of Bayesian hypotheses, as well as the measure of Bayesian evidence proposed by Pereira and Stern (1999). Also some comparative results were presented using other present proposals in the literature to determination of the sample size. Such results indicated what the proposal of De Santis (2004) adapted well with the measure of Bayesian evidence proposed by Pereira and Stern (1999), producing a sample size smaller than that of other proposals.

Words Key: Evidence, Sample size and Test of hypotheses.

---

# Sumário

---

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Aspectos Gerais . . . . .	1
1.2 Justificativa e Importância do Trabalho . . . . .	2
1.3 Objetivos . . . . .	3
1.3.1 Objetivo Geral . . . . .	3
1.3.2 Objetivos Específicos . . . . .	3
1.4 Estrutura do Trabalho . . . . .	3
<b>2 Inferência Bayesiana</b>	<b>5</b>
2.1 Teorema de Bayes . . . . .	5
2.2 Princípio da Verossimilhança . . . . .	6
2.3 Distribuições <i>a priori</i> . . . . .	7
2.3.1 Distribuições <i>a priori</i> Conjugadas . . . . .	7
2.3.2 Distribuições <i>a priori</i> Não-informativas . . . . .	8
2.4 Aspectos Computacionais . . . . .	9
2.4.1 Método de Monte Carlo . . . . .	9
2.4.2 Método da Rejeição . . . . .	10
2.4.3 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) . . . . .	11
<b>3 Teste de Hipóteses Bayesiano</b>	<b>14</b>
3.1 Medidas Usuais de Evidência Bayesiana . . . . .	14
3.1.1 Fator de Bayes . . . . .	14
3.1.2 Probabilidade Posterior de $H_0$ . . . . .	15
3.2 O Procedimento FBST ( <i>Full Bayesian Significance Test</i> ) . . . . .	15
3.2.1 Implementação da $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$ . . . . .	16
<b>4 Determinação do tamanho amostral</b>	<b>18</b>
4.1 Aspectos Computacionais . . . . .	23

<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>24</b>
5.1	Teste para a média da distribuição Normal com variância conhecida . . . . .	24
5.1.1	Construção da $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$ usando o procedimento FBST . . . . .	25
5.1.2	Determinação do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST .	26
5.1.3	Comparação entre os tamanhos amostrais . . . . .	27
5.2	Teste para a comparação das médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida . . . . .	32
5.2.1	Construção da $EV(\Theta_0; \mathbf{d})$ usando o procedimento FBST . . . . .	33
5.2.2	Determinação do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST .	34
5.2.3	Comparação entre os tamanhos amostrais . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Conclusão e Recomendações</b>	<b>40</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>42</b>

---

# Lista de Tabelas

---

5.1	<i>Valores do tamanho amostral para o teste bilateral da média da distribuição Normal com variância conhecida, adotando <math>\sigma = 1</math>, <math>\theta_0 = 0</math>, <math>\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5</math> e <math>\zeta = 0,8</math>.</i>	28
5.2	<i>Pontos de corte para a <math>EV(\Theta_0; \bar{x})</math> e o <math>FB_{01}(\bar{x})</math>.</i>	31
5.3	<i>Valores do tamanho amostral para o teste bilateral acerca da média da distribuição Normal com variância conhecida.</i>	32
5.4	<i>Valores do tamanho amostral para o teste bilateral comparando as médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida, adotando <math>\sigma = 1</math>, <math>\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5</math> e <math>\zeta = 0,8</math>.</i>	36
5.5	<i>Pontos de corte para a <math>EV(\Theta_0; \bar{d})</math> e o <math>FB_{01}(\bar{d})</math>.</i>	38
5.6	<i>Valores do tamanho amostral para o teste bilateral acerca das médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida.</i>	39

---

# Lista de Figuras

---

- 5.1 Probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  
 $\sigma = c = 1$ ,  $\theta_0 = \mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ . Neste caso,  $n = 167$ . . . . . 29
- 5.2 Gráfico de dispersão entre a  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  e o  $FB_{01}(\bar{x})$ . . . . . 31
- 5.3 Probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  
 $\sigma = c = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ . Neste caso,  $n = 333$ . . . . . 35
- 5.4 Gráfico de dispersão entre a  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  e o  $FB_{01}(\bar{d})$ . . . . . 39

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

### 1.1 Aspectos Gerais

A Inferência Estatística tem por objetivo fazer afirmações sobre características de uma população com base em afirmações obtidas por dados amostrais. Em geral, essas afirmações traduzem-se em dois problemas básicos da inferência estatística: *estimação* e *teste de hipóteses*.

Neste trabalho, será abordado o problema estatístico de determinação do tamanho amostral para *Teste de Hipóteses* sob a abordagem estatística *Bayesiana*.

A determinação do tamanho amostral ( $n$ ) é um dos problemas mais simples e mais estudado em *Teste de Hipóteses*, sendo largamente estudado nas abordagens *Clássica* e *Bayesiana*. Na abordagem *Clássica*, a determinação do tamanho amostral depende da probabilidade de cometer o *Erro Tipo I* (ou *Nível de Significância*) pré-fixado, do *Nível de Confiança* e do *Erro Amostral*. Neste contexto, determina-se o menor valor de  $n$  tal que, para um *Nível de Significância* fixado, a probabilidade de aceitar a *Hipótese Nula*, supondo esta verdadeira, seja suficientemente “*grande*”. Maiores detalhes podem ser vistos, por exemplo, em Bussab e Bolfarine (2005). Na abordagem *Bayesiana*, alguns autores [Weiss (1997), Adcock (1997) e De Santis (2004)] avaliam a determinação do tamanho amostral sob vários aspectos. Adcock (1997) mostra alguns critérios Bayesianos para determinar o tamanho amostral baseados nos *Intervalos de Credibilidade Posterior*.

Weiss (1997) mostra que o tamanho amostral é determinado tomando por base uma medida usual de evidência Bayesiana denominada *Fator de Bayes* utilizando o logaritmo desta medida como *estatística de teste*. Esse logaritmo deve ser menor que um *ponto de corte* (obtido através de um *critério absoluto* ou de um *critério relativo*), permitindo a

obtenção da “*função poder Bayesiana*” com a qual o tamanho amostral é determinado quando o poder do teste é igual ou próximo ao valor pré-fixado pelo pesquisador.

Royall (1997, 2000) sugere que a inferência estatística deve ser baseada em uma medida de evidência obtida dos dados através da *Razão de Verossimilhanças*. De Santis (2004), baseado na sugestão de Royall (1997, 2000), propõe que o valor de  $n$  deve ser tal que a *Probabilidade de obter uma Evidência Decisiva e Correta* seja suficientemente “*grande*”. De Santis (2004) baseia-se no *Fator de Bayes* para a determinação do tamanho amostral.

Este trabalho é baseado na determinação do tamanho amostral usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), seguindo a proposta de De Santis (2004) e a sugestão de Royall (1997, 2000).

## 1.2 Justificativa e Importância do Trabalho

No problema estatístico de *Teste de Hipóteses*, a determinação do tamanho amostral é um dos pontos de fundamental importância para a pesquisa estatística com o intuito de reduzir, ao máximo, custos na pesquisa estatística.

Essa determinação é realizada antes do pesquisador realizar a pesquisa e, conseqüentemente, aplicar qualquer técnica estatística, principalmente a técnica de *Teste de Hipóteses*. Existem muitos estudos realizados que mostram como se deve determinar o tamanho amostral na abordagem *Clássica* [Bussab e Bolfarine (2005)]. Recentemente, pesquisadores têm mostrado a determinação do tamanho amostral na abordagem *Bayesiana* que pode ser visto, por exemplo, em De Santis (2004).

Os métodos Bayesianos não eram muito usados devido a falta de recursos computacionais, pois a maioria desses recursos eram desenvolvidos somente para a Inferência Clássica.

Devido ao grande e recente desenvolvimento tecnológico, houve o surgimento de aplicativos estatísticos Bayesianos e o desenvolvimento de métodos numéricos apropriados.

A principal diferença entre as duas abordagens (*Clássica* e *Bayesiana*) reside em um fator subjetivo, que está presente na inferência Bayesiana, representando a opinião *a priori* do pesquisador (antes de observar os dados amostrais) sobre o parâmetro a ser inferido. Esta opinião é incorporada à análise inferencial através de um modelo de probabilidades.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é determinar o tamanho amostral utilizando a abordagem estatística *Bayesiana*.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Apresentar os conceitos associados à Inferência Bayesiana, principalmente associados a *Testes de Hipóteses*;
- determinar o tamanho amostral usando a medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999), obtida através do procedimento **FBST** (*Full Bayesian Significance Test*), tal que a *Probabilidade de obter uma Evidência Decisiva e Correta* seja suficientemente “*grande*”;
- fazer implementações computacionais para determinação do tamanho amostral em alguns problemas usuais de *Teste de Hipóteses*;
- Comparar os resultados obtidos com os resultados apresentados em Adcock (1997), Weiss (1997) e De Santis (2004) que utiliza o *Fator de Bayes* como medida de evidência.

## 1.4 Estrutura do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, a saber:

- Capítulo 1: refere-se à introdução do trabalho, contendo a justificativa e importância do trabalho, objetivo geral e objetivos específicos;
- Capítulo 2: serão apresentados os principais conceitos e métodos computacionais utilizados na Inferência Bayesiana;
- Capítulo 3: serão apresentadas as medidas de evidência Bayesianas usuais para *Teste de Hipóteses*, bem como a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999);

- Capítulo 4: serão apresentadas as propostas de Adcock (1997), Weiss (1997), De Santis (2004) utilizando o *Fator de Bayes* e a proposta de De Santis (2004), através da sugestão de Royall (1997, 2000), para a determinação do tamanho amostral usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999);
- Capítulo 5: serão apresentadas aplicações da proposta de De Santis (2004) usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999) em alguns problemas usuais de *Teste de Hipóteses* para determinar o tamanho amostral e também, para efeito de comparação, serão apresentados, em cada caso, resultados das propostas de Adcock (1997), Weiss (1997) e De Santis (2004) utilizando o *Fator de Bayes*;
- Capítulo 6: serão apresentadas a conclusão e recomendações para trabalhos futuros.

---

## Capítulo 2

# Inferência Bayesiana

---

A informação que se tem sobre o *parâmetro*  $\theta$  (característica populacional na qual obtêm-se conclusões a partir de dados amostrais) é de fundamental importância na ciência Estatística. O seu verdadeiro valor é desconhecido, apenas se sabe que este pertence ao conjunto  $\Theta$  denominado *Espaço Paramétrico* (conjunto que contém todos os possíveis valores de  $\theta$ ), ou seja,  $\theta \in \Theta$ . A idéia principal é reduzir este desconhecimento sobre  $\theta$ .

Na Inferência Bayesiana, ao contrário da Inferência Clássica, consiste em tratar o parâmetro a ser inferido como uma *variável aleatória* e, com isso, o parâmetro é passível de possuir propriedades de uma variável aleatória. Nessa abordagem, o pesquisador atribui, antes de observar os dados amostrais, sua opinião acerca do parâmetro através de uma *distribuição de probabilidade*. Por ser *subjetiva*, cada pesquisador atribui sua opinião pessoal para o parâmetro. Assim, essas opiniões são denominadas de *graus de incerteza* acerca do parâmetro.

Após o pesquisador atribuir sua opinião para o parâmetro, atualiza sua opinião depois da observação da amostra que foi efetivamente observada. Essa atualização de informação acerca do parâmetro é feita através de um resultado probabilístico denominado *Teorema de Bayes* mostrado na próxima seção.

## 2.1 Teorema de Bayes

Seja uma variável aleatória  $X$  e, após observar um valor particular dessa variável aleatória dito  $x$ , ou seja,  $X = x$ , obtêm-se a *função de probabilidade* (f.p) (caso discreto) ou a *função densidade de probabilidade* (f.d.p) (caso contínuo) de  $X$  dada por  $f(x|\theta)$ . Sabendo também que a opinião probabilística do pesquisador acerca do parâmetro antes de observar o valor  $x$  é representada por  $\pi(\theta)$ , então a opinião atualizada do pesquisador

após a observação do valor  $x$  é dada por

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) é exatamente o Teorema de Bayes. Neste,  $\pi(\theta)$  é a distribuição de probabilidade *a priori* de  $\theta$  e  $\pi(\theta|x)$  é a distribuição de probabilidade *a posteriori* de  $\theta$  após a observação de  $x$ . Assim,  $\pi(\theta|x)$  será a opinião atualizada do pesquisador após a observação de  $x$ .

A expressão dada em (2.1) pode ser estendida para  $n$  observações de  $X$ , ou seja, dada uma amostra aleatória  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  com observações *independentes indenticamente distribuídas* (i.i.d) de tamanho  $n$  tem-se

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (2.2)$$

Na expressão (2.2)  $L(\mathbf{x}|\theta)$  representa a distribuição de probabilidade conjunta de  $\mathbf{x}$ , ou seja, representa a *Função de Verossimilhança* de  $\mathbf{x}$ . Usando o simbolo de proporcionalidade ( $\propto$ ), pode-se representar a distribuição de probabilidade *a posteriori* de  $\theta$  por

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) \propto L(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta) \quad (2.3)$$

A expressão (2.3) representa somente o *núcleo* (parte que depende somente de  $\theta$ ) da distribuição de probabilidade *a posteriori* de  $\theta$ .

Na Inferência Bayesiana,  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  deve ser própria (f.p ou f.d.p) e todas as conclusões acerca do parâmetro  $\theta$  é tomada a partir da  $\pi(\theta|\mathbf{x})$  através de medidas-resumo tais como a média *a posteriori* ( $E(\theta|\mathbf{x})$ ) e a variância *a posteriori* ( $Var(\theta|\mathbf{x})$ ).

## 2.2 Princípio da Verossimilhança

O Princípio da Verossimilhança (Paulino *et al.* [2003]) sustenta que:

*“Toda a informação dada pela amostra está contida somente na função de verossimilhança.”*

Esse princípio estabelece que, se tem-se duas observações  $x_1$  e  $x_2$  de  $X$  tais que

$$f(x_1|\theta) = K(x_1, x_2)f(x_2|\theta), \quad \forall \theta \in \Theta,$$

com  $K$  independente de  $\theta$ , então as inferências para  $\theta$  são as mesmas para ambas as observações  $x_1$  e  $x_2$  de  $X$ .

Alguns autores [Paulino *et al.* (2003), Fernandes (2005), entre outros], mostram um exemplo clássico de violação deste princípio na abordagem Clássica, sendo essa contraditória a esse princípio.

Esse princípio é de fundamental importância na abordagem Bayesiana devido ao fato de que o pesquisador utiliza somente a amostra que foi realmente observada, enquanto que na abordagem Clássica o pesquisador observa todas as possíveis amostras que poderiam ter sido observadas mas não foram.

## 2.3 Distribuições *a priori*

Na abordagem Bayesiana um dos pontos de maior dificuldade na sua implementação é a especificação da distribuição *a priori*  $\pi(\theta)$  que representa (probabilisticamente) a opinião do pesquisador acerca do parâmetro  $\theta$  antes de observar os dados amostrais  $\mathbf{x}$ .

Com isso, existem vários métodos para especificar esta distribuição que podem ser vistos, por exemplo, em Box e Tiao (1973), O'Hagan (1994) e Paulino *et al.* (2003). Nesta seção serão apresentados os métodos mais usados para a especificação da distribuição *a priori* que são as *Distribuições a priori Conjugadas* e as *Distribuições a priori Não-informativas*.

### 2.3.1 Distribuições *a priori* Conjugadas

Neste caso, a distribuição de probabilidade *a priori* e a distribuição de probabilidade *a posteriori* pertencem a mesma classe de distribuições de probabilidade, na chamada *Classe de Distribuições Conjugadas*, envolvendo apenas uma mudança nos hiperparâmetros (parâmetros indexadores da classe de distribuições *a priori*). Com isso, diz-se que a distribuição *a priori* é *conjugada* para a distribuição de probabilidade que originou os dados amostrais, assim define-se,

**Definição 1.** Diz-se que  $\mathcal{H}$  é uma família de distribuições conjugadas de  $f(x|\theta)$ , se

$$\pi(\theta) \in \mathcal{H} \Rightarrow \pi(\theta|\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$$

Em geral, a distribuição *a priori* conjugada é própria e informativa. Paulino *et al.* (2003) e Fernandes (2005) mostram alguns exemplos de aplicação das distribuições *a priori* conjugadas. Por exemplo, Fernandes (2005) mostra que:

- A distribuição de probabilidade Gama é conjugada para a distribuição de probabilidade Poisson.
- A distribuição de probabilidade Beta é conjugada para a distribuição de probabilidade Bernoulli.
- A distribuição de probabilidade Normal Gama Inversa é conjugada para a distribuição de probabilidade Normal com ambos os parâmetros (média e variância populacionais) desconhecidos.

### 2.3.2 Distribuições *a priori* Não-informativas

Neste caso, o pesquisador não possui conhecimento acerca do parâmetro  $\theta$  antes de observar os dados amostrais. Com isso, o pesquisador atribui uma opinião probabilística “vaga” para o parâmetro  $\theta$ . Esta distribuição assume que todo valor de  $\theta \in \Theta$  ocorre com igual probabilidade em todo  $\Theta$ . Quando  $\Theta$  é finito tem-se que a distribuição *a priori* Não-informativa é própria. Quando  $\Theta$  é infinito diz-se que a distribuição *a priori* Não-informativa é imprópria (não é uma f.p ou f.d.p). Para  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$  finito, tem-se

$$\pi(\theta) = \frac{1}{s}; \quad \theta \in \Theta, \quad (2.4)$$

ou seja, (2.4) representa a distribuição de probabilidade *Uniforme Discreta*. No caso onde  $\Theta$  é infinito, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta) d\theta = \infty,$$

sendo uma distribuição imprópria. Agora, se  $\phi = g(\theta)$  é uma reparametrização não linear monótona de  $\theta$  então  $\pi(\phi)$  é não uniforme.

A distribuição *a priori* Não-informativa permite a comparação entre as abordagens Clássica e Bayesiana, pois utiliza somente a informação dos dados amostrais representada pela *Função de Verossimilhança*.

Como a abordagem Bayesiana baseia-se na distribuição *a posteriori*, não deve-se dar importância à impropriedade da distribuição *a priori*. No entanto, deve-se ter em mente que a distribuição *a posteriori* deve ser própria antes de fazer qualquer inferência.

## 2.4 Aspectos Computacionais

Nesta seção serão vistos alguns métodos computacionais para resolver tais integrais quando estas não podem ser resolvidas analiticamente. Já que em muitas situações o cálculo de integrais em Inferência Bayesiana não possui solução analítica, sendo necessário o uso de algum procedimento numérico para resolver a integral envolvida. É muito comum aparecer integrais do tipo

$$E[g(\theta)|\mathbf{x}] = \int_{\Theta} g(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta \quad (2.5)$$

onde  $g(\theta)$  é alguma função particular do parâmetro  $\theta$ . Podem existir casos na qual o pesquisador esteja interessado em obter a distribuição de probabilidade marginal de algum parâmetro desconhecido a partir do vetor de parâmetros desconhecidos  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ , tal distribuição pode ser dada, por exemplo, por

$$\pi(\theta_1|\mathbf{x}) = \int \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\theta_2.$$

Os métodos computacionais mais utilizados são o *Método de Monte Carlo*, o *Método da Rejeição* e os *Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (Monte Carlo Markov Chain - MCMC)*.

Todos os métodos precisam da simulação de números aleatórios de alguma distribuição de probabilidade. Estas simulações podem ser feitas em qualquer aplicativo que simule números aleatórios de alguma distribuição de probabilidade. Além destes métodos que serão mostrados nesta seção, existem inúmeros outros que podem ser encontrados, por exemplo, em O'Hagan (1994) e Paulino *et al.* (2003).

### 2.4.1 Método de Monte Carlo

A idéia principal deste método é aproximar a integral (2.5) como uma média empírica. Primeiramente, o pesquisador simula uma amostra aleatória  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  com observações i.i.d de tamanho  $N$  da distribuição  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  e aproxima a integral por (2.6)

$$\hat{E}[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\theta_i). \quad (2.6)$$

O método pode ser resumido pelos seguintes passos:

1. Simular uma amostra aleatória  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  i.i.d da  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ ;

2. Substituir cada valor simulado no passo 1 na função  $g(\boldsymbol{\theta})$ , obtendo  $(g(\theta_1), \dots, g(\theta_N))$ ;
3. Calcular  $\widehat{E}[g(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x}]$ .

De acordo com a *Lei Forte dos Grandes Números* (James (2002)), (2.6) converge quase certamente para (2.5).

### 2.4.2 Método da Rejeição

No método anterior é possível a obtenção da amostra aleatória da distribuição de probabilidade posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ . Mas, quando não é possível obter essa amostra diretamente da distribuição posterior, faz-se uso do *Método da Rejeição*. Neste método, o pesquisador utiliza uma função auxiliar  $q(\theta)$  da qual seja possível ser amostrada e que tenha o mesmo *suporte* (domínio) da distribuição posterior.

Considere que exista uma constante  $Q$ , tal que

$$\frac{\pi(\theta|\mathbf{x})}{q(\theta)} \leq Q, \quad (2.7)$$

ou seja,  $\pi(\theta|\mathbf{x})/q(\theta)$  é limitada, onde  $Q > 1$ .

Este método consiste nos seguintes passos:

1. Simular  $\theta$  da distribuição auxiliar  $q(\theta)$  e  $g$  da *Distribuição Uniforme Contínua* no intervalo  $[0; 1]$ , ou seja,  $g \sim U(0, 1)$ ;
2. Se  $Qg \leq \{\pi(\theta|\mathbf{x})/q(\theta)\}$  aceita-se o valor de  $\theta$  como sendo da distribuição  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ , caso contrário, retorna-se ao passo 1.

Após obter a amostra aleatória da distribuição de probabilidade posterior, aplica-se o *Método de Monte Carlo* para obter o resultado aproximado da integral (2.5).

Na procura da especificação da distribuição auxiliar  $q(\theta)$ , Paulino *et al.* (2003) sugerem que:

- $q(\theta)$  deve possuir caudas mais pesadas do que a distribuição posterior;
- a distribuição posterior seja inspecionada de forma analítica com o intuito de obter a distribuição  $q(\theta)$ ;

- deve-se usar técnicas de otimização para a localização do supremo da distribuição posterior.

Na prática, é muito comum utilizar a distribuição *a priori*  $\pi(\theta)$  como distribuição auxiliar.

### 2.4.3 Métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)

A amostra aleatória da distribuição posterior obtida nos métodos descritos nas seções anteriores (*Método de Monte Carlo* e o *Método da Rejeição*) é uma amostra com observações i.i.d. Existem casos que é praticamente impossível obter uma amostra com observações i.i.d da distribuição posterior talvez por que a distribuição posterior tem forma analítica muito complicada de modo que as distribuições marginais são impraticáveis de serem obtidas analiticamente, dentre outros motivos.

Nestes casos, é muito comum utilizar os métodos MCMC que são baseados em *Cadeias de Markov* [Ross (1995)] e assim as observações simuladas da distribuição posterior não serão mais independentes pois cada observação obtida no passo seguinte dependerá da observação obtida no passo anterior. Os passos são realizados várias vezes até obter a convergência para a distribuição posterior. Os métodos MCMC mais utilizados na abordagem Bayesiana são o *Algoritmo de Metropolis-Hastings* e o *Amostrador de Gibbs* que serão vistos nas próximas seções.

#### a) Algoritmo de Metropolis-Hastings

Neste método um valor é gerado de uma *distribuição proposta* e aceito com uma dada probabilidade, isso garante a convergência da cadeia para a distribuição posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$ . Suponha que a cadeia esteja no estado  $\theta^t$  e um valor  $\theta'$  é gerado de uma distribuição proposta  $q(\cdot|\theta^t)$ . O novo valor  $\theta'$  é aceito com probabilidade

$$\alpha(\theta^t, \theta') = \min \left( 1, \frac{\pi(\theta')q(\theta^t|\theta')}{\pi(\theta^t)q(\theta'|\theta^t)} \right) \quad (2.8)$$

onde  $\pi$  é o núcleo da distribuição posterior  $\pi(\theta|\mathbf{x})$ . O Algoritmo de Metropolis-Hastings é dado pelos seguintes passos:

1. Inicialize a iteração com  $t = 0$  e especifique um valor inicial  $\theta^{(0)}$ .
2. Gere um novo valor  $\theta'$  da distribuição  $q(\cdot|\theta^t)$ .

3. Calcule a probabilidade de aceitação  $\alpha(\theta^t, \theta')$  e simule  $h$  da *Distribuição Uniforme Contínua* no intervalo  $[0; 1]$ , ou seja,  $h \sim U(0, 1)$ .
4. Se  $h \leq \alpha(\theta^t, \theta')$  aceite o novo valor  $\theta'$ , faça  $t = t + 1$  e  $\theta^{(t)} = \theta'$ . Caso contrário, a cadeia permanece em  $\theta^t$  e reinicie o processo a partir do passo 2.

O'Hagan (1994) sugere que se pode escolher a distribuição proposta  $q(\cdot|\theta^t)$  como sendo uma distribuição Normal ou uma distribuição  $t$  de Student com caudas pesadas e, devido à simetria dessas distribuições,  $\alpha(\theta^t, \theta')$  se reduzirá a

$$\alpha(\theta^t, \theta') = \min \left( 1, \frac{\pi(\theta')}{\pi(\theta^t)} \right). \quad (2.9)$$

#### b) Amostrador de Gibbs

Este método é usado quando a distribuição posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  tem dimensão elevada, ou seja, vários parâmetros de interesse. Suponha que seja difícil retirar uma amostra da distribuição posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ , mas sabe-se que essa distribuição é positiva em  $\Theta_1, \dots, \Theta_m$  com  $\Theta_i$  representando o suporte da distribuição de  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Contudo, a obtenção da amostra da distribuição posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  consiste em gerar valores para cada  $\theta$  a partir das *distribuições condicionais completas* conhecidas representadas por  $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}(-i))$ , onde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  e  $\boldsymbol{\theta}(-i) = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_m)$  é o vetor  $\boldsymbol{\theta}$  sem o  $i$ -ésimo componente. A distribuição  $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}(-i))$  é a distribuição do  $i$ -ésimo componente de  $\boldsymbol{\theta}$  condicionada a todos os outros componentes, e obtida pela seguinte expressão:

$$\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}(-i)) = \frac{\pi(\theta_i; \boldsymbol{\theta}(-i))}{\int \pi(\theta_i; \boldsymbol{\theta}(-i)) d\theta_i}; \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

O método pode ser descrito pelo seguinte algoritmo:

1. Especificar um valor arbitrário  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$  para o vetor  $\boldsymbol{\theta}$ ;
2. Obter um novo valor  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$  a partir de  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  através da seguinte geração de números aleatórios:

$$\theta_1^{(1)} \sim \pi(\theta_1|\theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$$

$$\theta_2^{(1)} \sim \pi(\theta_2|\theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_m^{(0)})$$

$$\theta_3^{(1)} \sim \pi(\theta_3|\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_m^{(0)})$$

$$\vdots$$

$$\theta_m^{(1)} \sim \pi(\theta_m | \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{m-1}^{(1)}).$$

Obtendo, assim, o vetor  $\boldsymbol{\theta}^{(1)} = (\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \theta_3^{(1)}, \dots, \theta_m^{(1)})$ .

3. O vetor  $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$  é obtido a partir de  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$ , o vetor  $\boldsymbol{\theta}^{(3)}$  é obtido a partir de  $\boldsymbol{\theta}^{(2)}$  e, assim, sucessivamente.

Esse procedimento é repetido várias vezes, obtendo a amostra aleatória  $(\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(q)})$ . Quando  $q \rightarrow \infty$ , a amostra aleatória  $(\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(q)})$  tende em distribuição para a distribuição posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{x})$ .

---

## Capítulo 3

# Teste de Hipóteses Bayesiano

---

O problema estatístico de *Teste de Hipóteses*, no contexto Bayesiano, acerca do valor de um parâmetro desconhecido,  $\theta \in \Theta$ , consiste em decidir sobre a rejeição ou não de uma hipótese com base na informação da amostra.

Sejam  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  e  $H_1 : \theta \in \Theta_1$  as hipóteses a serem testadas com  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ ,  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ ,  $\Theta_0 \neq \emptyset$  e  $\Theta_1 \neq \emptyset$  onde  $H_0$  é denominada *Hipótese nula* e  $H_1$  é denominada *Hipótese alternativa*, o pesquisador necessita, ao final de um Teste de Hipóteses, obter uma medida de evidência em favor de  $H_0$ . Na abordagem Clássica é muito usada uma medida de evidência conhecida como *p*-valor (cujo cálculo se baseia na distribuição amostral da estatística do teste). Na abordagem Bayesiana, as medidas de evidência usuais para teste de hipóteses são o *Fator de Bayes* e a *Probabilidade Posterior de  $H_0$* .

No caso em que  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$  diz-se que  $H_0$  é *simples*. Caso contrário, diz-se que  $H_0$  é *composta*. O mesmo vale para a hipótese alternativa  $H_1$ .

Nas próximas seções serão apresentadas as medidas usuais de evidência Bayesiana, bem como a medida de evidência alternativa proposta por Pereira e Stern (1999) cujo cálculo é feito através do procedimento **FBST** (*Full Bayesian Significance Test*).

## 3.1 Medidas Usuais de Evidência Bayesiana

### 3.1.1 Fator de Bayes

**Definição 2.** Seja  $\pi_i(\boldsymbol{\theta})$  ( $i = 0; 1$ ) a distribuição a priori para  $\boldsymbol{\theta}$  sob  $H_i$ . O Fator de Bayes em favor da hipótese  $H_0$  é dado por

$$FB_{01}(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|H_0)}{p(\mathbf{x}|H_1)}, \quad (3.1)$$

onde  $p(\mathbf{x}|H_i) = \int_{\Theta_i} L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\pi_i(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$  representa a distribuição de probabilidade marginal dos dados amostrais sob a hipótese  $H_i$  e  $L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$  a função de verossimilhança.

Sendo que aceita-se a hipótese nula sempre que  $FB_{01}(\mathbf{x})$  é “grande”, significando que os dados observados favorecem a hipótese nula. Quando a hipótese  $H_0$  é simples, o Fator de Bayes é dado por:

$$FB_{01}(\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x}|\theta_0)}{p(\mathbf{x}|H_1)}, \quad (3.2)$$

onde  $L(\mathbf{x}|\theta_0)$  representa a função de verossimilhança sob a hipótese  $H_0$ . Geralmente quando o Fator de Bayes é maior que 1, ou seja,  $p(\mathbf{x}|H_0) > p(\mathbf{x}|H_1)$ , não rejeita-se a hipótese nula (Paulino *et al.* [2003]).

### 3.1.2 Probabilidade Posterior de $H_0$

**Definição 3.** *Seja  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  as probabilidades a priori das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ , respectivamente, então a Probabilidade Posterior de  $H_0$  é dada por*

$$P(H_0|\mathbf{x}) = \frac{\Pi_0 FB_{01}(\mathbf{x})}{\Pi_1 + \Pi_0 FB_{01}(\mathbf{x})}. \quad (3.3)$$

Sendo que aceita-se a hipótese nula sempre que  $P(H_0|\mathbf{x})$  é “grande”, significando que os dados observados favorecem a hipótese nula.

Alguns autores [Berger e Selke (1987) e Berger e Delampady (1987)] apresentam e discutem o conflito entre o  $p$ -valor e as medidas usuais Bayesianas (*Fator de Bayes e Probabilidade Posterior de  $H_0$* ), alertando para o fato de que, em algumas situações, o  $p$ -valor pode não ser uma boa medida de evidência para uma hipótese precisa (hipótese com dimensão estritamente menor que a dimensão do espaço paramétrico, ou seja, tem-se pelo menos uma restrição de igualdade na hipótese nula). Por conta disso, surgiram propostas de novas medidas de evidência, uma delas foi o procedimento proposto por Pereira e Stern (1999) denominado **FBST**. O procedimento FBST será mostrado na próxima seção.

## 3.2 O Procedimento FBST (*Full Bayesian Significance Test*)

Pereira e Stern (1999) introduziram o novo procedimento definido a seguir:

**Definição 4.** *Seja  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  uma densidade posterior de  $\boldsymbol{\theta}$ , dada a amostra aleatória observada  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , e considere o seguinte conjunto definido no espaço paramétrico*

$T(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta : \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) > \sup_{\Theta_0} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})\}$ . A medida de evidência Bayesiana de Pereira-Stern é definida como

$$EV(\Theta_0; \mathbf{x}) = 1 - P(\boldsymbol{\theta} \in T(\mathbf{x})|\mathbf{x})$$

e o procedimento FBST consiste em aceitar  $H_0$  sempre que a  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  é “grande”.

Madruga (2002) mostra propriedades do procedimento FBST que o torna um legítimo procedimento Bayesiano. Baseando-se nas idéias de De Santis (2004), pode-se estabelecer uma escala de evidência em termos da  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$ . Portanto, as regras de decisão do procedimento FBST são:

- se  $EV(\Theta_0; \mathbf{x}) < \omega_1$ , rejeita-se  $H_0$  (evidência decisiva)
- se  $\omega_1 \leq EV(\Theta_0; \mathbf{x}) \leq \omega_0$ , não decisão (evidência fraca)
- se  $EV(\Theta_0; \mathbf{x}) > \omega_0$ , aceita-se  $H_0$  (evidência decisiva)

com  $\omega_i \in [0; 1]$  ( $i = 0; 1$ ) representando os *pontos de corte* da  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$ .

### 3.2.1 Implementação da $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$

Para determinar esta medida é necessário as duas etapas descritas a seguir:

- **1ª Etapa - Etapa de Otimização:** Consiste em maximizar a densidade posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  sob  $H_0$ , em outras palavras, consiste em obter o valor  $\boldsymbol{\theta}^*$  que maximiza a densidade posterior, ou seja,

$$\pi(\boldsymbol{\theta}^*|\mathbf{x}) = \sup_{\Theta_0} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}).$$

- **2ª Etapa - Etapa de Integração:** Consiste em integrar a densidade posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  sob o conjunto  $T^c(\mathbf{x})$ , ou seja,

$$I = \int_{T^c(\mathbf{x})} \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}. \quad (3.4)$$

Com  $T^c(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta : \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) \leq \pi(\boldsymbol{\theta}^*|\mathbf{x})\}$ .

Em alguns problemas não é possível a realização dessas etapas de forma analítica, sendo necessário a utilização de métodos numéricos. Os métodos numéricos mais utilizados para obter a  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  são o Método de Monte Carlo (nos casos de baixa dimensão do espaço paramétrico) e os Métodos MCMC (nos casos de alta dimensão do espaço paramétrico).

### Método de Monte Carlo

A integral dada em (3.4) pode ser expressa como a esperança posterior da função indicadora,  $h(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{1}(\boldsymbol{\theta} \in T^c(\mathbf{x}))$ , ou seja,

$$I = E(h(\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x}) = \int_{\Theta} \mathbf{1}(\boldsymbol{\theta} \in T^c(\mathbf{x}))\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta} \quad (3.5)$$

que pode ser resolvida através do Método de Monte Carlo. Para isso, retira-se uma amostra aleatória  $(\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_M)$  da densidade posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$  e aproxima-se a integral dada em (3.5) por:

$$\hat{I} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M h(\boldsymbol{\theta}_j). \quad (3.6)$$

---

## Capítulo 4

# Determinação do tamanho amostral

---

A determinação do tamanho amostral é, sem dúvida, um dos problemas mais importantes na ciência Estatística. O pesquisador necessita, na prática, obter o menor tamanho amostral com a finalidade de reduzir custos e obter resultados confiáveis.

Neste contexto, na abordagem *Bayesiana*, estão surgindo e ainda surgem alguns trabalhos científicos e propostas tratando deste problema.

Adcock (1997) sugere vários critérios para a determinação do tamanho amostral numa abordagem *Bayesiana*. Os critérios são baseados nos *Intervalos de Credibilidade Posterior*. Os critérios tomam uso, além da distribuição posterior, da *distribuição preditiva dos dados amostrais*  $p(\mathbf{x})$ . Os critérios propostos são:

- **ACC** (*Average Coverage Criterion*): Neste critério, é necessário que a distribuição posterior esteja contida num intervalo especificado  $R(\mathbf{x})$  com uma certa probabilidade  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  representando o erro tipo I pré-fixado) sob todos os possíveis valores amostrais, isto é,  $S(\mathbf{x}) = P(\theta \in R(\mathbf{x})|\mathbf{x})$ . Então, determina-se o tamanho amostral tal que

$$\int \left\{ \int_{R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \right\} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 - \alpha, \quad (4.1)$$

com  $p(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} L(\mathbf{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta$ . O caso mais simples é onde  $R(\mathbf{x})$  é um intervalo simétrico em torno da média posterior  $E(\theta|\mathbf{x})$  da forma  $R(\mathbf{x}) = E(\theta|\mathbf{x}) \pm l/2$  onde  $l$  é um comprimento especificado. Quando a distribuição posterior é simétrica em torno da média, então é razoável a escolha deste intervalo. Agora, para distribuições posterior assimétricas Joseph *et al.* (1995) sugerem o intervalo  $R(\mathbf{x}) = [a; a+l]$  onde  $l$  é dado e  $a$  é determinado tal que este intervalo seja o intervalo de *alta densidade posterior*, ou seja, o intervalo **HPD** (*Highest Posterior Density*).

- **ALC** (*Average Length Criterion*): Este critério é semelhante ao critério ACC, a única distinção é que, em média,  $l$  é o comprimento do intervalo HPD.

- **WOC** (*Worst Outcome Criterion*): Há críticas aos critérios ACC e ALC pelo fato de utilizarem a distribuição  $p(\mathbf{x})$ . Pham-Gia e Turkkan (1992) propuseram o WOC que, posteriormente, foi aperfeiçoado por Joseph *et al.* (1995). A determinação do tamanho amostral é dada pela seguinte desigualdade

$$\min(n) \text{ tal que } \inf_{\mathbf{x}} \left\{ \int_{R(\mathbf{x})} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \right\} \geq 1 - \alpha. \quad (4.2)$$

Weiss (1997) usa o *Fator de Bayes* para a determinação do tamanho amostral no caso envolvendo a distribuição Normal com variância populacional conhecida. O método proposto por Weiss (1997) primeiramente determina o *logaritmo do Fator de Bayes* em favor da *hipótese nula* e, logo em seguida, o tamanho amostral é encontrado resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P(b < k|H_0) = \alpha \\ P(b < k|H_1) = 1 - \beta \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  (*Erro tipo II*) são pré-fixados pelo pesquisador,  $b$  representa o *logaritmo do Fator de Bayes* em favor da *hipótese nula* e  $k$  o *ponto de corte*. Um valor positivo de  $b$  favorece a *hipótese nula* e um valor negativo de  $b$  a desfavorece. Nota-se, neste sistema de equações, que  $b$  é utilizado como, na visão clássica de *Teste de Hipóteses*, uma *estatística de teste*. O ponto de corte ( $k$ ) é determinado de duas maneiras: o pesquisador pode fixá-lo (*critério relativo*) ou determiná-lo (*critério absoluto*). Para determinar o valor de  $k$  toma-se como base a distribuição de  $b$  sob a *hipótese nula* e  $\alpha$ , semelhante ao procedimento clássico. Em outras palavras, dado  $n$  encontra-se  $k$  tal que  $P(b < k|H_0) = \alpha$  e, logo em seguida, determina-se  $P(b < k|H_1) = 1 - \beta$  denominado “*poder do teste*”. Então o valor de  $n$  é tomado satisfazendo o sistema de equações.

Joseph e Bélisle (1997) utilizam os mesmos critérios de Adcock (1997) para a determinação do tamanho amostral nos casos envolvendo a distribuição Normal. Eles consideram os casos onde a variância populacional é conhecida e também quando a variância populacional é desconhecida.

De Santis (2004), baseado na sugestão de Royall (1997, 2000), sugere que o valor de  $n$ , no problema de *Teste de Hipóteses*, deve ser tal que a *Probabilidade de obter uma Evidência Decisiva e Correta* seja suficientemente “*grande*”. De Santis (2004) usa o *Fator de Bayes* para determinar o valor de  $n$ . A idéia é controlar a probabilidade dos seguintes eventos:

- *Evidência Enganosa*: ocorre quando o *Fator de Bayes* está em favor da hipótese incorreta.
- *Evidência Fraca*: ocorre quando o *Fator de Bayes* não favorece nenhuma das hipóteses.
- *Evidência Decisiva e Correta*: ocorre quando o *Fator de Bayes* está em favor da hipótese correta.

Com isso, quando a hipótese  $H_i$  ( $i = 0; 1$ ) é verdadeira, determina-se a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor de  $H_i$ , dada por

$$p_i^{DC}(k_i, n) = \int_{D_i(k_i, n)} p(\mathbf{x}|H_i)d\mathbf{x}, \quad i = 0; 1,$$

com  $D_i(k_i, n) = \{\mathbf{x} : FB_{ij}(\mathbf{x}) > k_i\}$  ( $i \neq j \quad j = 0; 1$ ) representando o subconjunto dos pontos do espaço amostral que produzem uma evidência em favor da hipótese  $H_i$  e  $k_i$  representando o ponto de corte do *Fator de Bayes*. Logo em seguida, determina-se a probabilidade de obter uma *Evidência Decisiva e Correta* dada por

$$p^{DC}(k_0, k_1, n) = \Pi_0 p_0^{DC}(k_0, n) + \Pi_1 p_1^{DC}(k_1, n), \quad (4.4)$$

com  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  representando, respectivamente, as probabilidades *a priori* das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ .

Portanto, De Santis (2004) sugere o seguinte procedimento em duas fases:

1. *Fase Pré-experimental*: Escolhidos  $\zeta \in [0; 1]$  e  $k_i > 0$ , determinar  $n$  tal que

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} : p^{DC}(k_0, k_1, n) \geq \zeta\},$$

sendo  $\mathbb{N}$  representando o conjunto dos números naturais.

2. *Fase Pós-experimental*: Coletar a amostra de tamanho  $n$  e realizar o *Teste de Hipóteses* com as seguintes regras de decisão:

- Se  $FB_{01}(\mathbf{x}) < k_1^{-1}$ , rejeita-se  $H_0$
- Se  $k_1^{-1} \leq FB_{01}(\mathbf{x}) \leq k_0$ , não decisão
- Se  $FB_{01}(\mathbf{x}) > k_0$ , aceita-se  $H_0$ .

Neste trabalho, será apresentada a proposta de De Santis (2004), através da sugestão de Royall (1997, 2000), para a determinação do tamanho amostral para *Teste de Hipóteses* usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), assim o interesse é controlar a probabilidade dos seguintes eventos:

- *Evidência Enganosa*: ocorre quando a medida de evidência Bayesiana está em favor da hipótese incorreta.
- *Evidência Fraca*: ocorre quando a medida de evidência Bayesiana não favorece nenhuma das hipóteses.
- *Evidência Decisiva e Correta*: ocorre quando a medida de evidência Bayesiana está em favor da hipótese correta.

Sejam três subconjuntos do espaço amostral,  $D_0(\omega_0, n)$ ,  $D_1(\omega_1, n)$  e  $W(\omega_0, \omega_1, n)$  onde

$$D_0(\omega_0, n) = \{\mathbf{x} : EV(\Theta_0; \mathbf{x}) > \omega_0\}$$

é o subconjunto dos pontos do espaço amostral que produzem uma evidência Bayesiana em favor da hipótese  $H_0$ ,

$$D_1(\omega_1, n) = \{\mathbf{x} : EV(\Theta_0; \mathbf{x}) < \omega_1\}$$

é o subconjunto dos pontos do espaço amostral que produzem uma evidência Bayesiana em favor da hipótese  $H_1$  e

$$W(\omega_0, \omega_1, n) = \{\mathbf{x} : \omega_1 \leq EV(\Theta_0; \mathbf{x}) \leq \omega_0\}$$

é o subconjunto dos pontos do espaço amostral que produz uma evidência Bayesiana fraca em favor das duas hipóteses.

Com isso, quando a hipótese  $H_i$  ( $i = 0; 1$ ) é verdadeira, definem-se as probabilidades do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* e uma *Evidência Fraca* em favor de  $H_i$ , dadas respectivamente, por

$$p_i^{DC}(\omega_i, n) = \int_{D_i(\omega_i, n)} p(\mathbf{x}|H_i) d\mathbf{x}, \quad (4.5)$$

e

$$p_i^W(\omega_0, \omega_1, n) = \int_{W(\omega_0, \omega_1, n)} p(\mathbf{x}|H_i) d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Pode-se também definir, quando a hipótese  $H_i$  é verdadeira, a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Enganosa* dada por

$$p_i^M(\omega_j, n) = \int_{D_j(\omega_j, n)} p(\mathbf{x}|H_i) d\mathbf{x}, \quad i = 0; 1, \quad j = 0; 1, \quad i \neq j. \quad (4.7)$$

Das expressões dadas em (4.5), (4.6) e (4.7), nota-se obviamente que

$$p_i^W(\omega_0, \omega_1, n) = 1 - p_i^{DC}(\omega_i, n) - p_i^M(\omega_j, n), \quad i = 0; 1, \quad j = 0; 1, \quad i \neq j.$$

Levando-se em conta a incerteza da hipótese verdadeira, pode-se definir as seguintes probabilidades:

- A probabilidade de obter uma *Evidência Decisiva e Correta* dada por

$$p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n) = \Pi_0 p_0^{DC}(\omega_0, n) + \Pi_1 p_1^{DC}(\omega_1, n).$$

- A probabilidade de obter uma *Evidência Fraca* dada por

$$p^W(\omega_0, \omega_1, n) = \Pi_0 p_0^W(\omega_0, \omega_1, n) + \Pi_1 p_1^W(\omega_0, \omega_1, n).$$

- A probabilidade de obter uma *Evidência Enganosa* dada por

$$p^M(\omega_0, \omega_1, n) = \Pi_0 p_0^M(\omega_1, n) + \Pi_1 p_1^M(\omega_0, n).$$

Com  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  representando, respectivamente, as probabilidades *a priori* das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ .

A intenção é determinar o menor tamanho amostral tal que  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  seja suficientemente “grande”. Portanto, De Santis (2004) sugere o seguinte procedimento dado em duas fases:

1. *Fase Pré-experimental*: Escolhidos  $\zeta \in [0; 1]$  e  $\omega_i \in [0; 1]$ , determinar  $n$  tal que

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} : p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n) \geq \zeta\},$$

sendo  $\mathbb{N}$  representando o conjunto dos números naturais.

2. *Fase Pós-experimental*: Coletar a amostra de tamanho  $n$  e realizar o Teste de Hipóteses com as seguintes regras de decisão:

- Se  $EV(\Theta_0; \mathbf{x}) < \omega_1$ , rejeita-se  $H_0$
- Se  $\omega_1 \leq EV(\Theta_0; \mathbf{x}) \leq \omega_0$ , não decisão
- Se  $EV(\Theta_0; \mathbf{x}) > \omega_0$ , aceita-se  $H_0$ .

## 4.1 Aspectos Computacionais

Os aspectos computacionais envolvidos neste trabalho envolvem dois problemas: a obtenção da  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  e do valor de  $n$ . As etapas para a obtenção da  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  são duas, uma de *otimização* e uma de *integração*, que, em alguns casos, não podem ser obtidas de forma analítica, sendo necessário o uso de algum procedimento numérico para as suas obtenções. Para a determinação do valor de  $n$ , tem-se outro problema de *otimização* a ser implementado computacionalmente. As implementações computacionais para obter a  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  e  $n$  serão feitas no aplicativo MATLAB (The Mathworks, Inc. (1999)).

---

## Capítulo 5

# Resultados

---

Neste capítulo serão apresentadas aplicações da proposta de De Santis (2004) para a determinação do tamanho amostral usando a medida de evidência Bayesiana do procedimento FBST e, para verificar se a proposta utilizada produz resultados satisfatórios, será feita a comparação de tais resultados com os resultados obtidos utilizando as propostas de Weiss (1997), Adcock (1997) e De Santis (2004) utilizando o *Fator de Bayes*. Na Seção 5.1 será considerado o problema de determinação do tamanho amostral para o Teste de Hipóteses acerca da média de uma população com distribuição Normal com variância conhecida, enquanto que na Seção 5.2 será considerado o problema de determinação do tamanho amostral para o Teste de Hipóteses acerca das médias de duas populações Normais com variância comum e conhecida.

Para prosseguir com esse estudo comparativo, define-se a seguinte medida empírica:

**Definição 5.** *O nível de significância empírico de um teste,  $\alpha$ , é dado pela proporção de vezes que a hipótese nula é rejeitada quando ela é verdadeira.*

Utilizando a Definição 5, pode-se obter valores equivalentes para os *pontos de corte* da  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  e do  $FB_{01}(\mathbf{x})$ . Mostra-se também, graficamente, uma possível relação empírica entre a  $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$  e o  $FB_{01}(\mathbf{x})$  nos testes considerados.

### 5.1 Teste para a média da distribuição Normal com variância conhecida

Seja  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da variável aleatória  $X$  tendo distribuição Normal com média  $\theta$  desconhecida e variância  $\sigma^2$  conhecida, ou seja,  $X \sim N(\theta; \sigma^2)$ , o interesse é testar

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0.$$

A função de verossimilhança da amostra  $\mathbf{x}$  é dada por

$$L(\mathbf{x}|\theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(n-1)S^2 + n(\theta - \bar{x})^2]\right\} \quad (5.1)$$

com  $\theta \in \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}$  representando o conjunto dos números reais),  $\sigma^2 > 0$ ,  $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$  representando a média amostral e  $S^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  representando a variância amostral.

De acordo com o *Critério da Fatoração de Neyman* (Bolfarine e Sandoval [2001]), para a obtenção da *estatística suficiente*, pode-se notar que de acordo com (5.1), a estatística suficiente é dada pela média amostral, ou seja,  $\bar{X}$ . Mas, a distribuição de  $\bar{X}$  é Normal com média  $\theta$  e variância  $\sigma^2/n$ , ou seja,  $\bar{X} \sim N(\theta; \sigma^2/n)$  e sua f.d.p é dada por

$$f(\bar{x}|\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \theta)^2\right\}. \quad (5.2)$$

Suponha que, sob  $H_1$ ,  $\theta$  tem distribuição *a priori* conjugada dada por  $\theta|H_1 \sim N(\mu; \tau^2)$  onde  $\tau^2 = c\sigma^2$ , com f.d.p dada por

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{c}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2c\sigma^2}(\theta - \mu)^2\right\} \quad (5.3)$$

com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ . Tem-se que, de (2.3), (5.2) e (5.3), a distribuição posterior  $\pi(\theta|\bar{x})$  é proporcional a

$$\pi(\theta|\bar{x}) \propto \exp\left\{-\frac{1+nc}{2c\sigma^2}(\theta - c^*)^2\right\}$$

representando o núcleo de uma distribuição Normal com média  $c^*$  e variância  $c\sigma^2/(1+nc)$ , ou seja,

$$\theta|\bar{x} \sim N\left(c^*; \frac{c\sigma^2}{1+nc}\right)$$

com  $c^* = (\mu + nc\bar{x})/(1+nc)$ .

### 5.1.1 Construção da $EV(\Theta_0; \mathbf{x})$ usando o procedimento FBST

Primeiramente, maximiza-se a distribuição posterior  $\pi(\theta|\bar{x})$  sob a hipótese nula, obtendo

$$\pi(\theta_0|\bar{x}) \propto \exp\left\{-\frac{1+nc}{2c\sigma^2}(\theta_0 - c^*)^2\right\}.$$

Em seguida, integra-se  $\pi(\theta|\bar{x})$  sob o conjunto  $T^c(\bar{x}) = \{\theta \in \Theta : \pi(\theta|\bar{x}) \leq \pi(\theta_0|\bar{x})\}$ , ou seja,

$$I = \int_{T^c(\bar{x})} \pi(\theta|\bar{x}) d\theta$$

com  $T^c(\bar{x}) = \{\theta \in \Theta : \theta \leq 2c^* - \theta_0 \text{ ou } \theta \geq \theta_0\}$ . Logo, supondo  $(\theta_0 - c^*) > 0$ , a medida de evidência Bayesiana do procedimento FBST é dada por

$$\begin{aligned} EV(\Theta_0; \bar{x}) &= P[\theta \leq 2c^* - \theta_0 | \bar{x}] + P[\theta \geq \theta_0 | \bar{x}] \\ &= \Phi \left[ \frac{(c^* - \theta_0)\sqrt{1 + nc}}{\sigma\sqrt{c}} \right] + \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{(\theta_0 - c^*)\sqrt{1 + nc}}{\sigma\sqrt{c}} \right] \right\} \\ &= 2\Phi \left[ \frac{(c^* - \theta_0)\sqrt{1 + nc}}{\sigma\sqrt{c}} \right] \end{aligned}$$

com  $\Phi[\cdot]$  representando a *função de distribuição acumulada* (f.d.a.) da distribuição *Normal Padrão*.

### 5.1.2 Determinação do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST

Para a determinação do tamanho amostral, primeiramente determinam-se as distribuições de probabilidades marginais da média amostral sob as hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ , dadas, respectivamente, por

$$p(\bar{x}|H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \theta_0)^2 \right\},$$

ou seja,

$$\bar{x}|H_0 \sim N(\theta_0; \sigma^2/n) \Rightarrow u = \frac{(\bar{x} - \theta_0)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

e

$$\begin{aligned} p(\bar{x}|H_1) &= \int_{\theta \neq \theta_0} \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2} (\bar{x} - \theta)^2 \right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{c}\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2c\sigma^2} (\theta - \mu)^2 \right\} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{1 + nc}\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{2\sigma^2(1 + nc)} (\bar{x} - \mu)^2 \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{x}|H_1 \sim N \left( \mu; \frac{\sigma^2(1 + nc)}{n} \right) \Rightarrow v = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{1 + nc}} \sim N(0, 1).$$

Reescrevendo a  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  em função das variáveis aleatórias  $u$  e  $v$  tem-se, respectivamente,

$$EV(\Theta_0; \bar{x}) = 2\Phi \left[ \frac{c\sigma u\sqrt{n} + \mu - \theta_0}{\sigma\sqrt{c(1 + nc)}} \right]$$

e

$$EV(\Theta_0; \bar{x}) = 2\Phi \left[ \frac{(\mu - \theta_0)\sqrt{1 + nc} + c\sigma v\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{c}} \right].$$

Em seguida, se determina a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor da hipótese  $H_0$ , dada por

$$p_0^{DC}(\omega_0, n) = \int_{D_0(\omega_0, n)} p(\bar{x}|H_0) d\bar{x} = \int_{D_0(\omega_0, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du,$$

com  $D_0(\omega_0, n) = \{\bar{x} : EV(\Theta_0; \bar{x}) > \omega_0\}$ . Logo,

$$p_0^{DC}(\omega_0, n) = \Phi\left[\frac{-z_{\omega_0/2}\sigma\sqrt{c(1+nc)} + \theta_0 - \mu}{c\sigma\sqrt{n}}\right] - \Phi\left[\frac{z_{\omega_0/2}\sigma\sqrt{c(1+nc)} + \theta_0 - \mu}{c\sigma\sqrt{n}}\right]$$

com  $z_\alpha$  representando o  $\alpha$ -nível percentílico da distribuição Normal Padrão. Também se determina a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor da hipótese  $H_1$ , dada por

$$p_1^{DC}(\omega_1, n) = \int_{D_1(\omega_1, n)} p(\bar{x}|H_1) d\bar{x} = \int_{D_1(\omega_1, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\} dv,$$

com  $D_1(\omega_1, n) = \{\bar{x} : EV(\Theta_0; \bar{x}) < \omega_1\}$ . Logo,

$$p_1^{DC}(\omega_1, n) = \Phi\left[\frac{z_{\omega_1/2}\sigma\sqrt{c} - (\mu - \theta_0)\sqrt{1+nc}}{c\sigma\sqrt{n}}\right] + \left\{1 - \Phi\left[\frac{-z_{\omega_1/2}\sigma\sqrt{c} - (\mu - \theta_0)\sqrt{1+nc}}{c\sigma\sqrt{n}}\right]\right\}.$$

A probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  depende de  $n$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\sigma$ ,  $c$ ,  $\theta_0$  e  $\mu$ . A Tabela 5.1 mostra os valores do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST, sendo que os valores de  $n$  foram obtidos adotando  $\sigma = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$ ,  $\zeta = 0,8$  e vários valores para  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $c$  e  $\mu$ . A Figura 5.1 mostra  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) em função de  $n$ , adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\theta_0 = \mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ .

Intuitivamente, quando  $\theta_0 = \mu = 0$  o pesquisador necessita de uma grande quantidade de observações para que o teste tenha um bom poder de discriminação entre as duas hipóteses, e quando  $\mu$  afasta-se do valor 0, ainda com  $\theta_0 = 0$ , o pesquisador não necessita de uma amostra tão grande para que o teste discrimine as duas hipóteses.

### 5.1.3 Comparação entre os tamanhos amostrais

Para efeito de comparação, foi determinado o tamanho amostral usando as propostas de Adcock (1997), Weiss (1997), De Santis (2004) utilizando o *Fator de Bayes* e De Santis (2004) utilizando a medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999). Os critérios de Adcock (1997) (ACC, ALC e WOC) produzem, neste caso, o mesmo resultado.

Tabela 5.1 Valores do tamanho amostral para o teste bilateral da média da distribuição Normal com variância conhecida, adotando  $\sigma = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ .

$\mu$	$\omega_0 = 0,3$ e $\omega_1 = 0,1$		$\omega_0 = 0,3$ e $\omega_1 = 0,2$		$\omega_0 = 0,35$ e $\omega_1 = 0,15$		$\omega_0 = 0,35$ e $\omega_1 = 0,25$	
	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$
-2	13	14	11	9	31	40	27	27
-1,5	23	28	16	17	66	86	46	55
-1	63	51	38	31	193	157	123	100
-0,5	130	74	77	44	402	228	254	144
0	167	84	99	50	516	258	326	163
0,5	130	74	77	44	402	228	254	144
1	63	51	38	31	193	157	123	100
1,5	23	28	16	17	66	86	46	55
2	13	14	11	9	31	40	27	27

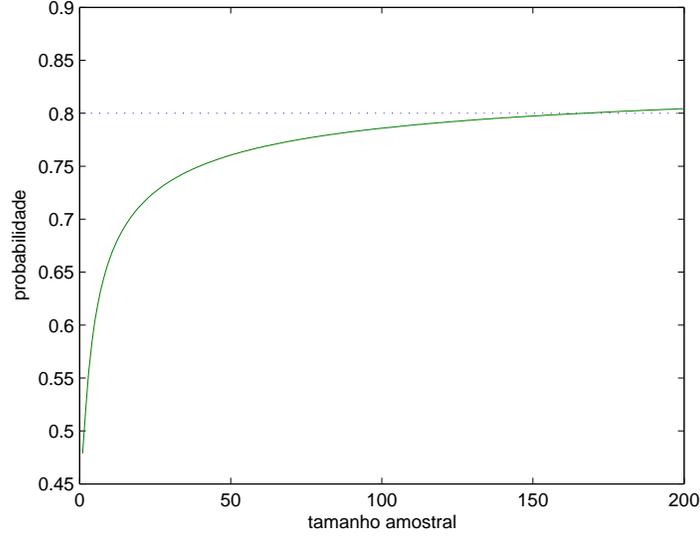


Figura 5.1 Probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  $\sigma = c = 1$ ,  $\theta_0 = \mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ . Neste caso,  $n = 167$ .

Especificando o intervalo HPD dado por

$$R(\mathbf{x}) = \left[ c^* \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{1+nc}} \right]$$

com  $c^* = (\mu + nc\bar{x})/(1+nc)$  representando a média *a posteriori* e  $z_{\alpha/2}$  representando o *ponto crítico* da distribuição Normal padrão dependente de  $\alpha$ , então

$$S(\mathbf{x}) = P \left( |\theta - c^*| \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{c}}{\sqrt{1+nc}} \mid \mathbf{x} \right) \geq 1 - \alpha,$$

concluindo que o tamanho amostral é dado por

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2 c - \varepsilon^2}{\varepsilon^2 c},$$

onde  $\varepsilon$  representa o *erro amostral* pré-fixado pelo pesquisador.

De acordo com a proposta de De Santis (2004), o *Fator de Bayes* em função de  $n$ ,  $c$  e da média amostral  $\bar{x}$  é dado por

$$FB_{01}(\bar{x}) = \sqrt{1+nc} \exp \left\{ -\frac{nc}{2(1+nc)} \left( u - \frac{\Delta}{\sqrt{nc}} \right)^2 + \frac{\Delta^2}{2} \right\},$$

com  $\Delta = (\theta_0 - \mu)/\sqrt{c}\sigma$  representando a diferença padronizada entre  $\theta_0$  e  $\mu$ . As probabilidades do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$  são dadas, respectivamente, por:

$$p_0^{DC}(k_0, n) = \Phi \left[ \frac{\Delta}{\sqrt{nc}} + W(n, c, k_0) \right] - \Phi \left[ \frac{\Delta}{\sqrt{nc}} - W(n, c, k_0) \right]$$

e

$$p_1^{DC}(k_1, n) = \Phi \left\{ \left[ \Delta \left( \frac{1+nc}{\sqrt{nc}} \right) - W(n, c, k_1^{-1}) \right] (1+nc)^{-1/2} \right\} \\ + \Phi \left\{ - \left[ \Delta \left( \frac{1+nc}{\sqrt{nc}} \right) + W(n, c, k_1^{-1}) \right] (1+nc)^{-1/2} \right\}$$

com

$$W(n, c, \omega) = \sqrt{\frac{2(1+nc)}{nc} \left[ \frac{\Delta^2}{2} - \ln \frac{\omega}{\sqrt{1+nc}} \right]}.$$

A probabilidade  $p^{DC}(k_0, k_1, n)$  depende de  $n$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $\Delta$  e  $c$ .

De acordo com a proposta de Weiss (1997) o valor de  $n$  é encontrado resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P(b < k | H_0) = \Phi[A] + 1 - \Phi[B] = \alpha \\ P(b < k | H_1) = \Phi[C] + 1 - \Phi[D] = 1 - \beta \end{cases},$$

com

$$A = \frac{\Delta}{\sqrt{nc}} - \sqrt{\frac{(1+nc)[-2k + \log(1+nc) + \Delta^2]}{nc}},$$

$$B = \sqrt{\frac{(1+nc)[-2k + \log(1+nc) + \Delta^2]}{nc}} + \frac{\Delta}{\sqrt{nc}},$$

$$C = \frac{\Delta\sqrt{1+nc}}{\sqrt{nc}} - \sqrt{\frac{-2k + \log(1+nc) + \Delta^2}{nc}}$$

e

$$D = \sqrt{\frac{-2k + \log(1+nc) + \Delta^2}{nc}} + \frac{\Delta\sqrt{1+nc}}{\sqrt{nc}}.$$

A Tabela 5.2 mostra valores equivalentes para os pontos de corte da  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  e do  $FB_{01}(\bar{x})$ . Os pontos de corte apresentados baseiam-se em 1000 amostras ordenadas da variável aleatória  $X$  com  $n = 40$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\mu = -1$ ,  $\sigma = c = 1$  e, dessas 1000 amostras, somente 539 amostras foram utilizadas satisfazendo a condição  $(\theta_0 - c^*) > 0$ . Dessas 539 amostras, foram utilizados os níveis de significância empíricos  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 20\%$ , de forma que a região de não decisão contemple 15% dos valores. Com isso, na Tabela 5.2, o valor  $\omega_1$  é equivalente ao valor  $k_1^{-1}$  e o valor  $\omega_0$  é equivalente ao valor  $k_0$ . Tomando

Tabela 5.2 Pontos de corte para a  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  e o  $FB_{01}(\bar{x})$ .

$EV(\Theta_0; \bar{x})$	$FB_{01}(\bar{x})$
$\omega_1 = 0,0598$ ( $\alpha = 5\%$ )	$k_1^{-1} = 1,7953$ ( $\alpha = 5\%$ )
$\omega_0 = 0,1575$ ( $\alpha = 20\%$ )	$k_0 = 3,8874$ ( $\alpha = 20\%$ )

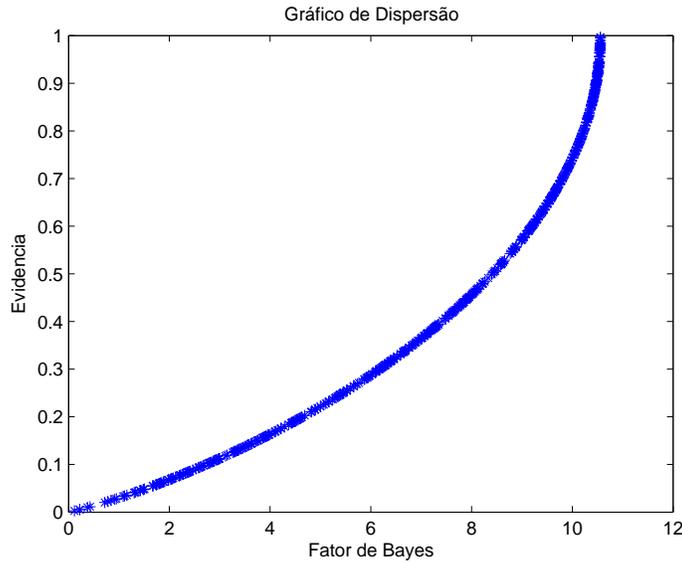


Figura 5.2 Gráfico de dispersão entre a  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  e o  $FB_{01}(\bar{x})$ .

como base as 539 amostras que foram utilizadas, a Figura 5.2 mostra, graficamente, uma possível relação funcional entre a  $EV(\Theta_0; \bar{x})$  e o  $FB_{01}(\bar{x})$ .

A Tabela 5.3 apresenta valores para o tamanho amostral de acordo com cada proposta apresentada utilizando os critérios de Adcock (1997) com  $\varepsilon = 0,2$ , a proposta de Weiss (1997), a proposta de De Santis (2004) com base no *Fator de Bayes* e a proposta de De Santis (2004) com base na medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999). Os resultados apresentados na Tabela 5.3 foram obtidos adotando  $\theta_0 = 0$ ,  $\mu = -1$ ,  $\sigma = c = 1$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$ ,  $\zeta = 0,8$  e os pontos de corte apresentados na Tabela 5.2. Nota-se na Tabela 5.3 que os valores de  $k$  e  $k_0$  são equivalentes, ou seja,  $k$  foi obtido através do logaritmo de  $k_0$ .

Comparando os resultados da Tabela 5.3 nota-se que a proposta de De Santis (2004) utilizando a medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999) fornece o menor valor do tamanho amostral em comparação com os tamanhos amostrais das outras propostas,

Tabela 5.3 Valores do tamanho amostral para o teste bilateral acerca da média da distribuição Normal com variância conhecida.

Propostas	$n$
Adcock (1997)	40 ( $\alpha = 20\%$ )
Weiss (1997)	27 ( $k = 1, 3577, \alpha = 20\%$ e $\beta = 11, 63\%$ )
De Santis (2004) [ $FB_{01}(\bar{x})$ ]	23
De Santis (2004) [ $EV(\Theta_0; \bar{x})$ ]	14

reduzindo o valor de  $n$  em 39% quando comparado com a proposta de De Santis (2004) usando o *Fator de Bayes*.

## 5.2 Teste para a comparação das médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida

Sejam  $X \sim N(\theta_x; \sigma^2)$  e  $Y \sim N(\theta_y; \sigma^2)$  variáveis aleatórias independentes. Com base nas amostras aleatórias  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  de tamanho  $n$  das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , respectivamente, o interesse é testar:

$$H_0 : \theta_x = \theta_y \quad \text{contra} \quad H_1 : \theta_x \neq \theta_y. \quad (5.4)$$

Com base na amostra aleatória  $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$  da variável aleatória  $D = X - Y$ , tem-se que  $D \sim N(\theta_x - \theta_y; 2\sigma^2)$ . Com isso, as hipóteses dadas em (5.4) podem ser reescritas como sendo

$$H_0 : \lambda = 0 \quad \text{contra} \quad H_1 : \lambda \neq 0$$

com  $\lambda = \theta_x - \theta_y$ .

A função de verossimilhança da amostra  $\mathbf{d}$  é dada por

$$L(\mathbf{d}|\lambda) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{4\sigma^2} [(n-1)S_d^2 + n(\lambda - \bar{d})^2] \right\} \quad (5.5)$$

com  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2 > 0$ ,  $S_d^2 = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$  representando a variância amostral e  $\bar{d} = (1/n) \sum_{i=1}^n d_i$  representando a média amostral.

De acordo com o *Critério da Fatoração de Neyman* (Bolfarine e Sandoval [2001]), para a obtenção da *estatística suficiente*, pode-se notar que de acordo com (5.5), a estatística

suficiente é dada pela média amostral, ou seja,  $\bar{D}$ . Mas, a distribuição de  $\bar{D}$  é Normal com média  $\lambda$  e variância  $(2\sigma^2)/n$ , ou seja,  $\bar{D} \sim N(\lambda; (2\sigma^2)/n)$  e sua f.d.p é dada por

$$f(\bar{d}|\lambda) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp \left\{ -\frac{n}{4\sigma^2}(\bar{d} - \lambda)^2 \right\}. \quad (5.6)$$

Suponha que, sob  $H_1$ ,  $\lambda$  tem distribuição *a priori* conjugada dada por  $\lambda|H_1 \sim N(\mu; \tau^2)$  onde  $\tau^2 = c\sigma^2$ , com f.d.p dada por

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{\sigma\sqrt{c}\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2c\sigma^2}(\lambda - \mu)^2 \right\} \quad (5.7)$$

com  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $c > 0$ . Tem-se que, de (2.3), (5.6) e (5.7), a distribuição posterior  $\pi(\lambda|\bar{d})$  é proporcional a

$$\pi(\lambda|\bar{d}) \propto \exp \left\{ -\frac{2+nc}{4c\sigma^2}(\lambda - c^{**})^2 \right\}$$

representando o núcleo de uma distribuição Normal com média  $c^{**}$  e variância  $(2c\sigma^2)/(2+nc)$ , ou seja,

$$\lambda|\bar{d} \sim N \left( c^{**}; \frac{2c\sigma^2}{2+nc} \right)$$

com  $c^{**} = (2\mu + nc\bar{d})/(2+nc)$ .

### 5.2.1 Construção da $EV(\Theta_0; \bar{d})$ usando o procedimento FBST

Primeiramente, maximiza-se a distribuição posterior  $\pi(\lambda|\bar{d})$  sob a hipótese nula, obtendo

$$\pi(\lambda_0|\bar{d}) \propto \exp \left\{ -\frac{2+nc}{4c\sigma^2}(c^{**})^2 \right\}.$$

Em seguida, integra-se  $\pi(\lambda|\bar{d})$  sob o conjunto  $T^c(\bar{d}) = \{\lambda \in \Theta : \pi(\lambda|\bar{d}) \leq \pi(\lambda_0|\bar{d})\}$ , ou seja,

$$I = \int_{T^c(\bar{d})} \pi(\lambda|\bar{d})d\lambda$$

com  $T^c(\bar{d}) = \{\lambda \in \Theta : \lambda \leq 0 \text{ ou } \lambda \geq 2c^{**}\}$ . Logo, supondo  $c^{**} > 0$ , a medida de evidência Bayesiana do procedimento FBST é dada por

$$\begin{aligned} EV(\Theta_0; \bar{d}) &= P[\lambda \leq 0|\bar{d}] + P[\lambda \geq 2c^{**}|\bar{d}] \\ &= \Phi \left[ \frac{-c^{**}\sqrt{2+nc}}{\sigma\sqrt{2c}} \right] + \left\{ 1 - \Phi \left[ \frac{c^{**}\sqrt{2+nc}}{\sigma\sqrt{2c}} \right] \right\} \\ &= 2\Phi \left[ -\frac{c^{**}\sqrt{2+nc}}{\sigma\sqrt{2c}} \right] \end{aligned}$$

com  $\Phi[\cdot]$  representando a f.d.a. da distribuição *Normal Padrão*.

### 5.2.2 Determinação do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST

Para a determinação do tamanho amostral, primeiramente determinam-se as distribuições de probabilidades marginais da média amostral sob as hipóteses  $H_0$  e  $H_1$ , dadas, respectivamente, por

$$p(\bar{d}|H_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{4\sigma^2}(\bar{d})^2\right\},$$

ou seja,

$$\bar{d}|H_0 \sim N(0; (2\sigma^2)/n) \Rightarrow u_1 = \frac{\bar{d}\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$$

e

$$\begin{aligned} p(\bar{d}|H_1) &= \int_{\lambda \neq 0} \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{4\sigma^2}(\bar{d} - \lambda)^2\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{c}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2c\sigma^2}(\lambda - \mu)^2\right\} d\lambda \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2+nc}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2(2+nc)}(\bar{d} - \mu)^2\right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{d}|H_1 \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2(2+nc)}{n}\right) \Rightarrow v_1 = \frac{(\bar{d} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2+nc}} \sim N(0, 1).$$

Reescrevendo a  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  em função das variáveis aleatórias  $u_1$  e  $v_1$  tem-se, respectivamente,

$$EV(\Theta_0; \bar{d}) = 2\Phi\left[-\frac{c\sigma u_1\sqrt{n} + \mu\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{c(2+nc)}}\right]$$

e

$$EV(\Theta_0; \bar{d}) = 2\Phi\left[-\frac{c\sigma v_1\sqrt{n} + \mu\sqrt{2+nc}}{\sigma\sqrt{2c}}\right].$$

Em seguida, se determina a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor da hipótese  $H_0$ , dada por

$$p_0^{DC}(\omega_0, n) = \int_{D_0(\omega_0, n)} p(\bar{d}|H_0) d\bar{d} = \int_{D_0(\omega_0, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u_1^2}{2}\right\} du_1,$$

com  $D_0(\omega_0, n) = \{\bar{d} : EV(\Theta_0; \bar{d}) > \omega_0\}$ . Logo,

$$p_0^{DC}(\omega_0, n) = \Phi\left[\frac{-z_{\omega_0/2}\sigma\sqrt{c(2+nc)} - \mu\sqrt{2}}{c\sigma\sqrt{n}}\right] - \Phi\left[\frac{z_{\omega_0/2}\sigma\sqrt{c(2+nc)} - \mu\sqrt{2}}{c\sigma\sqrt{n}}\right].$$

Também se determina a probabilidade do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor da hipótese  $H_1$ , dada por

$$p_1^{DC}(\omega_1, n) = \int_{D_1(\omega_1, n)} p(\bar{d}|H_1)d\bar{d} = \int_{D_1(\omega_1, n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{v_1^2}{2}\right\} dv_1,$$

com  $D_1(\omega_1, n) = \{\bar{d} : EV(\Theta_0; \bar{d}) < \omega_1\}$ . Logo,

$$p_1^{DC}(\omega_1, n) = \Phi\left[\frac{z_{\omega_1/2}\sigma\sqrt{2c} - \mu\sqrt{2+nc}}{c\sigma\sqrt{n}}\right] + \left\{1 - \Phi\left[\frac{-z_{\omega_1/2}\sigma\sqrt{2c} - \mu\sqrt{2+nc}}{c\sigma\sqrt{n}}\right]\right\}.$$

A probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  depende de  $n$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\sigma$ ,  $c$  e  $\mu$ . A Tabela 5.4 mostra os valores do tamanho amostral utilizando o procedimento FBST, sendo que os valores de  $n$  foram obtidos adotando  $\sigma = 1$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$ ,  $\zeta = 0,8$  e vários valores para  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $c$  e  $\mu$ . A Figura 5.3 mostra  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) em função de  $n$ , adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ .

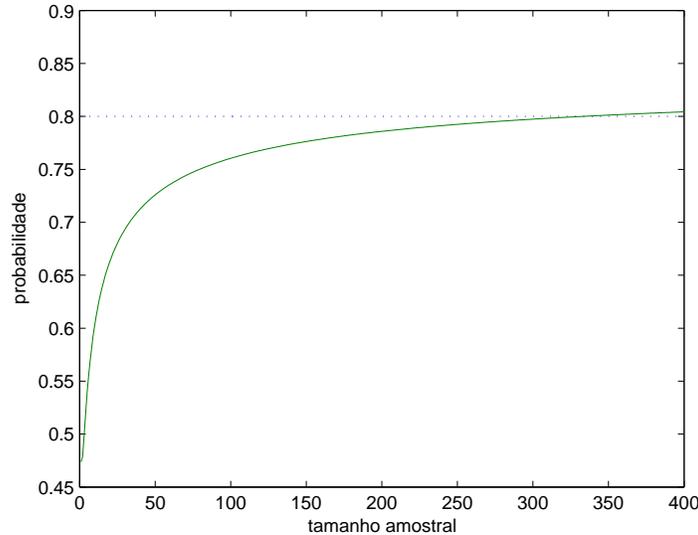


Figura 5.3 Probabilidade  $p^{DC}(\omega_0, \omega_1, n)$  (linha cheia) adotando  $\omega_0 = 0,3$ ,  $\omega_1 = 0,1$ ,  $\sigma = c = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ . Neste caso,  $n = 333$ .

### 5.2.3 Comparação entre os tamanhos amostrais

Para efeito de comparação, foi determinado o tamanho amostral usando as propostas de Adcock (1997), Weiss (1997), De Santis (2004) utilizando o *Fator de Bayes* e De Santis (2004) utilizando a medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999). Os

Tabela 5.4 Valores do tamanho amostral para o teste bilateral comparando as médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida, adotando  $\sigma = 1$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$  e  $\zeta = 0,8$ .

$\mu$	$\omega_0 = 0,3$ e $\omega_1 = 0,1$		$\omega_0 = 0,3$ e $\omega_1 = 0,2$		$\omega_0 = 0,35$ e $\omega_1 = 0,15$		$\omega_0 = 0,35$ e $\omega_1 = 0,25$	
	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$	$c = 1$	$c = 2$
-2	26	27	22	18	62	80	53	54
-1,5	46	56	31	34	132	171	91	110
-1	125	101	75	61	385	314	245	199
-0,5	259	147	154	88	803	455	508	288
0	333	167	198	99	1035	516	652	326
0,5	259	147	154	88	803	455	508	288
1	125	101	75	61	385	314	245	199
1,5	46	56	31	34	132	171	91	110
2	26	27	22	18	62	80	53	54

critérios de Adcock (1997) (ACC, ALC e WOC) produzem, neste caso, o mesmo resultado. Especificando o intervalo HPD dado por

$$R(\mathbf{x}) = \left[ c^{**} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{2c}}{\sqrt{2+nc}} \right]$$

com  $c^{**} = (2\mu + n\bar{d})/(2 + nc)$  representando a média *a posteriori*, então

$$S(\mathbf{x}) = P \left( |\lambda - c^{**}| \leq z_{\alpha/2} \frac{\sigma\sqrt{2c}}{\sqrt{2+nc}} \mid \mathbf{d} \right) \geq 1 - \alpha,$$

concluindo que o tamanho amostral é dado por

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \sigma^2 2c - 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 c}.$$

De acordo com a proposta de De Santis (2004), o *Fator de Bayes* em função de  $n$ ,  $c$  e da média amostral  $\bar{d}$  é dado por

$$FB_{01}(\bar{d}) = \sqrt{\frac{2+nc}{2}} \exp \left\{ -\frac{nc}{2(2+nc)} \left( u_1 - \frac{\Delta_1\sqrt{2}}{\sqrt{nc}} \right)^2 + \frac{\Delta_1^2}{2} \right\},$$

com  $\Delta_1 = (-\mu)/(\sigma\sqrt{c})$  representando a diferença padronizada entre  $\lambda$ , sob  $H_0$ , e  $\mu$ . As probabilidades do experimento produzir uma *Evidência Decisiva e Correta* em favor das hipóteses  $H_0$  e  $H_1$  são dadas, respectivamente, por:

$$p_0^{DC}(k_0, n) = \Phi \left[ \frac{\Delta_1\sqrt{2}}{\sqrt{nc}} + W_1(n, c, k_0) \right] - \Phi \left[ \frac{\Delta_1\sqrt{2}}{\sqrt{nc}} - W_1(n, c, k_0) \right]$$

e

$$p_1^{DC}(k_1, n) = \Phi \left\{ \left[ \Delta_1 \left( \frac{2+nc}{\sqrt{2nc}} \right) - W_1(n, c, k_1^{-1}) \right] \sqrt{\frac{2}{2+nc}} \right\} + \Phi \left\{ - \left[ \Delta_1 \left( \frac{2+nc}{\sqrt{2nc}} \right) + W_1(n, c, k_1^{-1}) \right] \sqrt{\frac{2}{2+nc}} \right\}$$

com

$$W_1(n, c, \omega) = \sqrt{\frac{2(2+nc)}{nc} \left[ \frac{\Delta_1^2}{2} - \ln \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{2+nc}} \right]}.$$

A probabilidade  $p^{DC}(k_0, k_1, n)$  depende de  $n$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $\Delta_1$  e  $c$ .

De acordo com a proposta de Weiss (1997) o valor de  $n$  é encontrado resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} P(b < k|H_0) = \Phi[A_1] + 1 - \Phi[B_1] = \alpha \\ P(b < k|H_1) = \Phi[C_1] + 1 - \Phi[D_1] = 1 - \beta \end{cases},$$

com

$$A_1 = \frac{\Delta_1\sqrt{2}}{\sqrt{nc}} - \sqrt{\frac{(2+nc)[-2k + \log((2+nc)/2) + \Delta_1^2]}{nc}},$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{(2+nc)[-2k + \log((2+nc)/2) + \Delta_1^2]}{nc}} + \frac{\Delta_1\sqrt{2}}{\sqrt{nc}},$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1\sqrt{2+nc}}{\sqrt{nc}} - \sqrt{\frac{2[-2k + \log((2+nc)/2) + \Delta_1^2]}{nc}}$$

e

$$D_1 = \sqrt{\frac{2[-2k + \log((2+nc)/2) + \Delta_1^2]}{nc}} + \frac{\Delta_1\sqrt{2+nc}}{\sqrt{nc}}.$$

A Tabela 5.5 mostra valores equivalentes para os pontos de corte da  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  e do  $FB_{01}(\bar{d})$ . Os pontos de corte apresentados baseiam-se em 1000 amostras ordenadas da variável aleatória  $D$  com  $n = 80$ ,  $\mu = -1$  e  $\sigma = c = 1$  e, dessas 1000 amostras, somente 420 amostras foram utilizadas satisfazendo a condição  $c^{**} > 0$ . Dessas 420 amostras, foram utilizados os níveis de significância empíricos  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 10\%$ , de forma que a região de não decisão contemple 5% dos valores. Com isso, na Tabela 5.5, o valor  $\omega_1$  é equivalente ao valor  $k_1^{-1}$  e o valor  $\omega_0$  é equivalente ao valor  $k_0$ . Tomando como base as 420 amostras que foram utilizadas, a Figura 5.4 mostra, graficamente, uma possível relação funcional entre a  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  e o  $FB_{01}(\bar{d})$ .

Tabela 5.5 Pontos de corte para a  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  e o  $FB_{01}(\bar{d})$ .

$EV(\Theta_0; \bar{d})$	$FB_{01}(\bar{d})$
$\omega_1 = 0,1982$ ( $\alpha = 5\%$ )	$k_1^{-1} = 4,6131$ ( $\alpha = 5\%$ )
$\omega_0 = 0,2544$ ( $\alpha = 10\%$ )	$k_0 = 5,5144$ ( $\alpha = 10\%$ )

A Tabela 5.6 apresenta valores para o tamanho amostral de acordo com cada proposta apresentada utilizando os critérios de Adcock (1997) com  $\varepsilon = 0,2$ , a proposta de Weiss (1997), a proposta de De Santis (2004) com base no *Fator de Bayes* e a proposta de De Santis (2004) com base na medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999).

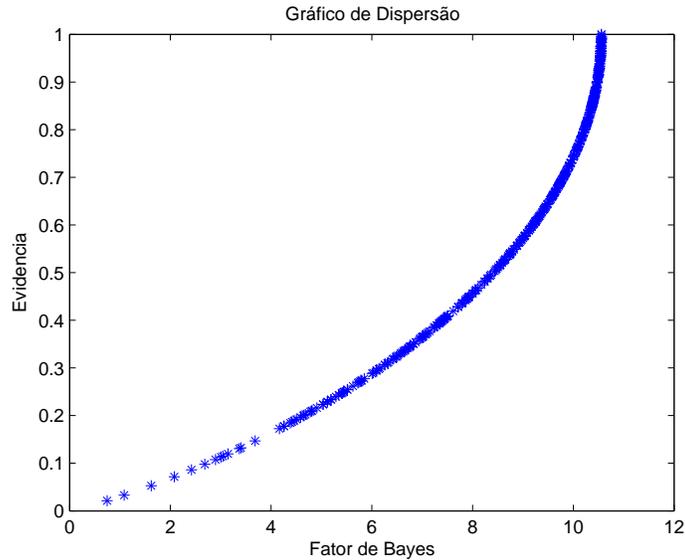


Figura 5.4 Gráfico de dispersão entre a  $EV(\Theta_0; \bar{d})$  e o  $FB_{01}(\bar{d})$ .

Os resultados apresentados na Tabela 5.6 foram obtidos adotando  $\mu = -1$ ,  $\sigma = c = 1$ ,  $\Pi_0 = \Pi_1 = 0,5$ ,  $\zeta = 0,8$  e os pontos de corte apresentados na Tabela 5.5. Nota-se na Tabela 5.6 que os valores de  $k$  e  $k_0$  são equivalentes, ou seja,  $k$  foi obtido através do logaritmo de  $k_0$ .

Tabela 5.6 Valores do tamanho amostral para o teste bilateral acerca das médias de duas distribuições Normais com variância comum conhecida.

Propostas	$n$
Adcock (1997)	133 ( $\alpha = 10\%$ )
Weiss (1997)	333 ( $k = 1,7074$ , $\alpha = 10\%$ e $\beta = 6,15\%$ )
De Santis (2004) [ $FB_{01}(\bar{d})$ ]	64
De Santis (2004) [ $EV(\Theta_0; \bar{d})$ ]	35

Comparando os resultados da Tabela 5.6 nota-se que a proposta de De Santis (2004) utilizando a medida de evidência proposta por Pereira e Stern (1999) fornece o menor valor do tamanho amostral em comparação com os tamanhos amostrais das outras propostas, reduzindo o valor de  $n$  em 45% quando comparado com a proposta de De Santis (2004) usando o *Fator de Bayes*.

---

## Capítulo 6

# Conclusão e Recomendações

---

Neste trabalho foram apresentadas algumas aplicações da proposta de De Santis (2004) para a determinação do tamanho amostral em Teste de Hipóteses, usando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), comparando com propostas já existentes na literatura.

A determinação do tamanho amostral utilizando a proposta de De Santis (2004), tomando como medida de evidência estatística a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), produziu valores do tamanho amostral menores em comparação com o tamanho amostral obtido utilizando as outras propostas presentes na literatura, reduzindo o tamanho amostral em até 45% quando comparado àquele menor valor obtido das outras propostas. Significando que a determinação do tamanho amostral, utilizando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), é mais vantajosa para o pesquisador pois reduz custos na pesquisa estatística e fornece resultados inferenciais bastante confiáveis.

Pôde-se concluir que a proposta de De Santis (2004) adequou-se bem com a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), nos exemplos abordados, fornecendo resultados bastante satisfatórios.

Com isso, os objetivos deste trabalho foram alcançados com êxito. Como recomendações para trabalhos futuros, podem-se destacar:

- o uso da proposta de De Santis (2004), utilizando a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999), para a obtenção do tamanho amostral em Teste de Hipóteses para a distribuição Normal quando a variância populacional é desconhecida;
- o uso da proposta de De Santis (2004), utilizando a medida de evidência Bayesiana

proposta por Pereira e Stern (1999), para a obtenção do tamanho amostral em Teste de Hipóteses para outras distribuições de probabilidade;

- investigar a possível relação funcional existente entre a medida de evidência Bayesiana proposta por Pereira e Stern (1999) e o *Fator de Bayes* nos testes de hipóteses considerados.

---

# Bibliografia

---

- ADCOCK, C. J. Sample size determination: a review. **The Statistician**, 2, 261-283, 1997.
- BERGER, J. O.; SELKE, T. Testing a Point Null Hypothesis: The Irreconcilability of P values and Evidence. **Journal of the American Statistical Association**, 1987, 82, 112-139.
- BERGER, J. O.; DELAMPADY, M. Testing Precise Hypotheses. **Statistical Science**, 2, 317-352, 1987.
- BOLFARINE, H.; SANDOVAL, M. C. **Introdução à Inferência Estatística**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. **Bayesian Inference in Statistical Analysis**. London: Addison Wesley Pub., 1973.
- BUSSAB, W. O.; BOLFARINE, H. **Elementos de Amostragem**. São Paulo: Edgar Blücher, 2005.
- De SANTIS, F. Statistical evidence and sample size determination for Bayesian hypothesis testing. **Journal of the Statistical Planning and Inference**, 2004, 124, 121-144.
- FERNANDES, E. L. O. Teste de Hipóteses Bayesiano. 2005. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) - Departamento de Estatística, Universidade Federal do Pará, Pará.
- JAMES, Barry R. **Probabilidade: Um curso em nível intermediário**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- JOSEPH, L.; BÉLISLE, P. Bayesian sample size determination for normal means and differences between normal means. **The Statistician**, 2, 209-226, 1997.
- JOSEPH, L.; WOLFSON, D. B.; BERGER, R. Sample size calculations for binomial proportions via highest posterior density intervals. **Statistician**, 44, 143-154, 1995.
- MADRUGA, M. R. Teste de Significância: uma proposta genuinamente Bayesiana. 2002. 77 f. Tese (Doutorado em Estatística) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- O'HAGAN, A. **Kendall's Advanced Theory of Statistics 2B: Bayesian Inference**. London: Edward Arnold, 1994.

- PAULINO, C. D.; TURKMAN, M. A. A.; MURTEIRA, B. **Estatística Bayesiana**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2003.
- PEREIRA, C. A. de B.; STERN, J. Evidence and Credibility: a full Bayesian test of precise hypothesis. **Entropy**, 1, 99-110, 1999.
- PHAM-GIA, T; TURKKAN, N. Sample size determination in Bayesian analysis. **Statistician**, 41, 389-397, 1992.
- ROSS, S. M. **Stochastic Processes**. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, 1995.
- ROYALL, M. R. **Statistical Evidence**: a Likelihood paradigm. London: Chapman & Hall, 1997.
- ROYALL, M. R. On the Probability of Observing Misleading Statistical Evidence. **Journal of the American Statistical Association**, 2000, 451, 760-780.
- THE MATHWORKS, Inc. **MATLAB**: The Language of Technical Computing. Version 5.3.0.10183(R11). 1999.
- WEISS, R. Bayesian sample size calculations for hypothesis testing. **The Statistician**, 2, 185-191, 1997.