UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Sílvia Helen Ferreira dos Santos

SOLUÇÃO GLOBAL E ESTABILIZAÇÃO DA ENERGIA DE UM SISTEMA DO TIPO EULER-BERNOULLI COM ACOPLAMENTO NÃO LINEAR E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA VISCOELÁSTICAS

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-PA
2006

Sílvia Helen Ferreira dos Santos

SOLUÇÃO GLOBAL E ESTABILIZAÇÃO DA ENERGIA DE UM SISTEMA DO TIPO EULER-BERNOULLI COM ACOPLAMENTO NÃO LINEAR E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA VISCOELÁSTICAS

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como requisito final para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-PA

2006

Sílvia Helen Ferreira dos Santos

Estabilização da energia
de um sistema do tipo Euler-Bernoulli com
acoplamento não linear e condições
de fronteira viscoélasticas

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 22 de Setembro de 2006

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA
Orientador

Prof. Dr. Farid Ammar Khodja
Université de Franche-Comté
Examinador

Prof. Dr. João dos Santos Protázio
Universidade Federal do Pará, UFPA
Examinador

Aos meus pais e irmãos.

Agradecimentos

⋆ Agradeço inicialmente a Deus Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e força para chegar ao final deste trabalho;

⋆ Agradeço também infinitamente aos meus pais, pelo encorajamento e apoio;

⋆ Aos meus irmãos, pela alegria com a minha vitória;

⋆ Ao meu orientador, Mauro de Lima Santos, pela orientação, disponibilidade e atenção dispensados na elaboração deste trabalho;

⋆ Aos professores do programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística, em especial ao Prof. Jorge Ferreira;

⋆ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas, em especial: Sebastião, Alessandro, Paula, Lindomar, Reiville, Antenor, Helena, Luiz, Renato e Aubedir;

⋆ Agradeço à Telma secretária do mestrado pelo carinho e paciência que sempre dedicou;

⋆ À todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

Viver é um desafio, mas os desafios nos levam a descobrir coisas que nunca havíamos percebido sobre nós mesmos. São eles que exercitam nosso mecanismo e nos induzem a ultrapassar os limites habituais.

RESUMO

Neste trabalho provamos o decaimento exponencial e polinomial de soluções regulares associadas ao sistema do tipo Euler-Bernoulli com acoplamento não linear e condições de fronteira do tipo memória

$$\begin{aligned}
u_{tt} + \Delta^2 u + f(u-v) = 0 \quad &em \;\; \Omega \times (0,\infty),\\
v_{tt} + \Delta^2 v - f(u-v) = 0 \quad &em \;\; \Omega \times (0,\infty),\\
u = v = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad &em \;\; \Sigma_1,\\
u - \int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad &em \;\; \Sigma_0,\\
v - \int_0^t g_2(t-s)\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad &em \;\; \Sigma_0,\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_3(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \quad &em \;\; \Sigma_0,\\
\frac{\partial v}{\partial \nu} + \int_0^t g_4(t-s)\Delta v(s)ds = 0 \quad &em \;\; \Sigma_0,\\
(u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad &em \;\; \Omega,\\
(u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad &em \;\; \Omega.
\end{aligned}$$

com convenientes hipoteses sobre as funções escalares f e g_i. Mostramos que tal dissipação é bastante forte para produzir taxa uniforme de decaimento. Além disso, o acoplamento é não linear que apresenta algumas dificuldades técnicas, tornando o problema interessante. Estabelecemos, também, existência e unidade de soluções.

Abstract

In this work we prove the exponential and polynomial decays, as time goes to infinity, of regular solutions for a nonlinear coupled system of Euler-Bernoulli type with boundary memory conditions

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + \Delta^2 u + f(u-v) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty), \\
v_{tt} + \Delta^2 v - f(u-v) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty), \\
u = v = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad em \;\; \Sigma_1, \\
u - \int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \\
v - \int_0^t g_2(t-s)\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_3(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \\
\frac{\partial v}{\partial \nu} + \int_0^t g_4(t-s)\Delta v(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \\
(u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad em \;\; \Omega, \\
(u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad em \;\; \Omega.
\end{aligned}
$$

under suitable hypothesis on the scalar functions f and g_i. We show that such dissipation is strong enough to produce uniform rate of decay. Besides, the coupled is nonlinear which brings up some additional difficulties, which makes the problem interesting. We establish existence and uniqueness of regular solutions.

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho discutimos a existência e unicidade de soluções fracas e fortes bem como o decaimento exponencial e polinomial da energia associada ao sistema de equações do tipo Euler-Bernoulli com acoplamento não linear e condições de fronteira do tipo memória dado por

$$u_{tt} + \Delta^2 u + f(u-v) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty), \tag{1}$$

$$v_{tt} + \Delta^2 v - f(u-v) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad em \;\; \Sigma_1, \tag{3}$$

$$u - \int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \tag{4}$$

$$v - \int_0^t g_2(t-s)\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_3(t-s)\Delta u(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + \int_0^t g_4(t-s)\Delta v(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0, \tag{7}$$

$$(u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad em \;\; \Omega, \tag{8}$$

$$(u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad em \;\; \Omega. \tag{9}$$

Aqui Ω denota um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, Γ_0,Γ_1 ambas com medidas positiva e $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0,\infty)(i = 0,1)$. As equações (4)- (7) são as não local condições de fronteira responsáveis pelo efeito memória. Aqui u e v representam o deslocamento transversal da placa. As funções relaxamento $g_i \in C^1(0,\infty), i = 1,...,4$, são funções positivas e não decrescentes. Denotaremos por ν o vetor unitário normal exterior a Γ. A função $f \in C^1(\mathbb{R})$ satifaz

$$f(s)s \geq 0 \quad \forall s \in \; \mathbb{R}. \tag{10}$$

Adicionalmente, supomos que f é superlinear, isto é

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s), \quad F(z) = \int_0^z f(s)ds, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \qquad (11)$$

para algum $\delta > 0$, com a seguinte condição de crescimento

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{\rho-1} + |y|^{\rho-1})|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad (12)$$

para algum $C > 0$ e $\rho \geq 1$ tal que (n-2)$\rho \leq n$.

Notemos que pela condição (2.3) a solução do sistema $(2.1) - (2.9)$ pertence ao espaço

$$W := \{w \in H^2(\Omega) : w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1\}.$$

Das imersões de Sobolev e do teorema do traço existem $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ pequenas constantes positivas satisfazendo

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma_1 \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma_2 \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq \gamma_3 \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in W.$$

RESULTADOS ANTERIORES ASSOCIADOS AO SISTEMA (1)-(9)

A equação de Euler-Bernoulli foi estudada por diferentes autores. Todos eles consideram essencialmente dois mecanismos dissipativos (ou combinação deles):

a)A dissipação de atrito, obtida pela introdução de um "termo de fricção"que pode agir sobre todo o domínio, na fronteira (ou parte da fronteira) ou em alguma vizinhança localizada da fronteira;

b)A dissipação viscoelástica dada pelo efeito memória como em [12, 16].

A dissipação de atrito é o mecanismo dissipativo mais usual. Ele age sobre todo o domínio Ω ou em na fronteira (ou parte da fronteira) ou em alguma parte estratégica do domínio (damping localizado). Foi provado por [1, 6, 8, 10, 18] que a energia de primeira ordem decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para infinito.

Finalmente, o feito memória sobre o tensor de tensão produz um mecanismo dissipativo satisfatório que depende da função relaxamento (veja [11, 16]). Eles provaram que a energia decai uniformemente exponecialmente ou algebricamente com a mesma taxa de decaimento como a função relaxamento, isto é, quando a função relaxamento decai exponencialmente, a energia correspondente também decai exponencialmente. Por outro lado, quando a função relaxamento decai polinomialmente então a energia correspondente também decai polinomialmente e com a mesma taxa.

Objetivo principal deste trabalho é completar os resultados anteriores, isto é, mostrar que o efeito memória, produzido pelas funções relaxamento agindo sobre uma parte da fronteira produz taxa uniforme de decaimento exponencial ou polinomial.

As notações usadas neste trabalho são padrões e seguem as encontradas no livro de J. L. Lions [2]. Este trabalho foi organizado do seguinte modo: no Capítulo 1 são enunciados alguns teoremas de compacidade e algumas desigualdades que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Alguns desses resultados serão demonstrados e outros sua demonstração será omitida porém indicada a bibliografia adequada. No capítulo 2, estabeleceremos a existência, unicidade e regularidade de soluções fortes para o problema $(1)-(9)$. Para isso usaremos o método das aproximações de Galerkin, seguindo as idéias introduzidas por J. L. Lions [2]. Finalmente no capítulo 3, estudaremos a estabilidade das soluções fortes para o sistema $(1)-(9)$. Mais precisamente, mostraremos que a dissipação dada pelo efeito memória é forte o suficiente para produzir decaimento uniforme exponencial ou polinomial, desde que as funçoes relaxamento k_1, k_2, k_3, k_4 também decaiam exponencialmente ou polinomialmente. Usaremos a técnica dos multiplicadores introduzida por Komornik [6] e Lions [2] juntamente com alguns lemas técnicos e algumas idéias técnicas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos os quais serão utilizados nos capítulos posteriores

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, temos que

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \;\text{ em }\; \Omega.$$

Usando a definição concluímos que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$
2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$
3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denotamos por* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial, de ordem* $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, *temos por definição* $D^0\varphi = \varphi$.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \ \text{ e } \ supp(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Denota-se por $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis e tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty,\ L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|$$

Quando $p = 2,\ L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1.2. *Sendo* Ω *limitado, obtemos* $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, para todo* p*, tal que* $1 \leq p < \infty$*, com imersão contínua e densa. De fato, dado* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, temos que*

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \, \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Mostraremos que*

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

Notemos que,

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_{K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n \to \infty} \int_{K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_{K} \lim_{n \to \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [7]

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$.

A sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu,\varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T,\varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. . *Temos que uma função $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K\subset\Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos*

$$u\in L^1_{loc}(\Omega)\Longleftrightarrow\int_K|u(x)|\,dx<\infty$$

para todo compacto $K\subset\Omega$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, temos que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u=T_v$ se, e somente se, $u=v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond)**.** *Seja $u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u=0$ se, e somente se, $u=0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: ver [7]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega)\hookrightarrow L^P(\Omega)\hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)\hookrightarrow D'(\Omega)\,,1\le p<\infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, por L.Schwartz, Veja [1].

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índece. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

tal que

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado interessante a ser mercionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.1. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato

$$< u^{'}, \varphi >= - < u, \varphi^{'} >= - \int_0^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^{\alpha}T_u = T_{D^{\alpha}u}, \quad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

É uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $D^{\alpha}u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados *Espaços de Sobolev.*
Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\right\}.$$

O Traço em $H^1(\Omega)$

Foi demonstrado em [7] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|_{\overline{\Omega}}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma,$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0, denominado operador traço, que é contínuo, linear cujo o núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples, escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|_\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|_\Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: ver [2]

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$)**.** *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: ver [2]

De posse destes dois resultados concluímos que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [1].

1.3 Equações de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações integrais de Volterra.

Definição 1.3.1. *Uma equação integral de Volterra linear de primeira ordem é toda equação da forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s) f(s) ds, \tag{1.1}$$

sendo $g(t)$ e $k(t,s)$ funções dadas.

Teorema 1.3.1. *Seja $k(t,s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T$, $T > 0$ e $g(t)$ uma função contínua em $0 \leq t \leq T$. Então existe uma única função contínua $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo,*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s) f(s) ds.$$

Demonstração: **Existência**

A prova é baseada nas aproximações sucessivas de Picard. Para isto, seja a seguinte sequência de funções

$$\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}.$$

Sendo

$$\begin{aligned} f_0(t) &= g(t), \\ f_1(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)g(s)ds, \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds, \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, \ldots$ Desta forma

$$f_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds,$$

$$f_{n-1}(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-2}(s)ds.$$

Portanto

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = \int_0^t k(t,s)[f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)]ds.$$

Definindo a sequência $\varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$ com $\varphi_0(t) = g(t)$ temos

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Logo

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t).$$

Sejam $G,\ K$ constantes positivas tais que

$$|g(t)| \leq G \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k(s,t)| \leq K \quad 0 \leq s \leq \ t \leq T.$$

Mostraremos que

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{G(Kt)^n}{n!} \quad 0 \leq t \leq T,\ n = 0, 1, \ldots.$$

A demonstração será feita por indução. Para $n = 0$ temos

$$|\varphi_0(t)| = |g(t)| \leq G = \frac{G(Kt)^0}{0!}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para $n = l$. Resta mostrar que é válida para $n = l+1$. Por hipótese, temos

$$|\varphi_l(t)| \leq \frac{G(Kt)^l}{l!}.$$

Para $n = l + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_{l+1}(t)| &= |\int_0^t k(t,s)\varphi_l(s)ds| \\ &\leq \int_0^t |k(t,s)|\ |\varphi_l(s)|ds \\ &\leq \int_0^t K\frac{G(Ks)^l}{l!}ds \\ &\leq \frac{GK^{l+1}}{l!}\int_0^t s^l ds. \end{aligned}$$

Assim

$$|\varphi_{l+1}(t)| \leq \frac{G(Kt)^{l+1}}{(l+1)!}.$$

O que conclui a demonstração.

Portanto, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{G(Kt)^i}{i!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(KT)^n}{n!} = Ge^{KT}.$$

Desta forma, pelo teste M de Weirstrass, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$ é absoluta e uniformemente convergente. Denotando $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$, concluímos que f é contínua. De fato, seja $t_0 \in [0,T]$. Então

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to t_0} (\varphi_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t_0) = f(t_0).$$

o que mostra a continuidade de f. A função f é solução da equação integral de Volterra dada em (1.1). Com efeito,

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\left(\sum_{n=1}^{m} \varphi_{n-1}(s)\right) ds.$$

Fazendo $m \to \infty$ e usando a convergência uniforme, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\lim_{m\to\infty}(\varphi_{n-1}(s))\,ds,$$

ou

$$f(t) - g(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)ds,$$

isto é,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

Unicidade

Suponha que existam funções $f_1,\ f_2$ contínuas satisfazendo (1.1). Portanto

$$|f_1(t) - f_2(t)| = |\int_0^t k(t,s)(f_1(s) - f_2(s)ds|. \tag{1.2}$$

Pela continuidade de f_1 e f_2, existe $C > 0$ tal que

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq C \quad \forall\ 0 \leq t \leq T.$$

Logo, substituindo em (1.2) vem

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq KCt, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Repetindo esse processo n-vezes em (1.2), obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{C(Kt)^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo $n \to \infty$ vem que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C(Kt)^n}{n!} = 0$. Assim, concluímos que

$$f_1(t) = f_2(t).$$

1.4 Equação Resolvente

Vimos pelo teorema anterior que dada $g \in C[0,T]$ existe uma única $f \in C[0,T]$, tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds = g(t)$$

Desta forma, podemos considerar o seguinte operador

$$K : C[0,T] \longrightarrow C[0,T]$$
$$f \longmapsto K[f] = f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

O operador K é linear e bijetivo. De fato,

K é linear.

$$\begin{aligned} K[f_1 + \lambda f_2] &= f_1(t) + \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s)(f_1(s) + \lambda f_2(s))ds \\ &= f_1(t) + \lambda f_2(t) + \int_0^t k(t,s)f_1(s)ds + \lambda \int_0^t k(t,s)f_2(s))ds \\ &= f_1(t) + \int_0^t k(t,s)f_1(s)ds + \lambda(f_2(t) + \int_0^t k(t,s)f_2(s)ds) \\ &= K[f_1] + \lambda K[f_2] \end{aligned}$$

K é bijetivo.

A sobrejetividade segue do fato que, dada $g \in C[0,T]$, pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0,T]$ tal que $K[f] = g$. Concluimos a injetividade de maneira análoga, pois $K[f] = 0$ pode ser, interpretada como a equação $K[f] = g$ sendo, $g \equiv 0$ e pelo teorema de existência e unicidade existe uma única $f \in C[0,T]$ que satisfaz essa equação, a saber $f(x) = 0$. A função $k(t,s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra. Notemos que, como foi definido $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_0(s)ds$, vem que

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \int_0^t k(t,s)\varphi_1(s)ds \\ &= \int_0^t k(t,s) \int_0^s k(s,\tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t \int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)dsg(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em $0 \leq \tau \leq s \leq t$. Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t,\tau)g(\tau)d\tau,$$

sendo

$$k_2(t,\tau) = \int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)ds.$$

Indutivamente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t,s)g(s)ds \quad \forall n \geq 1,$$

sendo $k_1(t,s) = k(t,s)$, $\quad k_n(t,s) = \displaystyle\int_s^t k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)d\tau$ para $n \geq 2$. Como $f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t)$ temos

$$f_n(t) = \int_0^t r_n(t,s)g(s)ds,$$

sendo $r_n(t,s) = \displaystyle\sum_{i=1}^n k_i(t,s)$. Usando a continuidade da função k temos, $|k(t,s)| \leq K$ analogamente podemos mostrar que $|k_n(t,s)| \leq \dfrac{K^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Daí segue que a série $r(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty k_n(t,s)$ é absoluta e, portanto, uniformemente convergente. A função $r(t,s)$ é chamada o núcleo resolvente de $k(t,s)$.

Teorema 1.4.1. *Se $k(t,s)$ e $g(t)$ são contínuas, então a única solução contínua de* (1.1) *é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

Demonstração: Das relações anteriores

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^\infty k_i(t,s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente pode-se permutar a ordem da soma com integração, obtendo

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^\infty \int_0^t k_i(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

Observação 1.4.1. *O teorema anterior mostra que o operador inverso K^{-1} tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja*

$$K^{-1} : C[0,T] \longrightarrow C[0,T]$$
$$g \mapsto K^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m_K(t)$, para todo $(t,x) \in D$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathcal{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.5.1 (Carathéodory)**.** *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases}$$

Demonstração: ver [21]

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Temos que $u_\nu \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E'.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela)**.** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E'. Temos que $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco $\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

Lema 1.5.1. *Seja f uma função real positiva de classe C^1. Se existem constantes positivas c_0, c_1 e γ tais que*

$$f'(t) \leq -c_0 f(t) + c_1 e^{-\gamma t},$$

então

$$f(t) \leq c e^{-\gamma_0 t}.$$

Demonstração: Definindo

$$F(t) = f(t) + \frac{2c_1}{\gamma} e^{-\gamma t}$$

temos que

$$F'(t) = f'(t) - 2c_1 e^{-\gamma t} \leq -c_0 f(t) - c_1 e^{-\gamma t}.$$

Tomando $\gamma_0 = \min\{c_0, \frac{\gamma}{2}.\}$, Obtemos

$$\gamma_0 F(t) \leq c_1 f(t) + c_1 e^{-\gamma t}.$$

Segue que

$$F'(t) \leq -\gamma_0 F(t).$$

Logo

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq -\gamma_0.$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\frac{F(t)}{F(0)} \leq e^{-\gamma_0 t} \implies F(t) \leq F(0) e^{-\gamma_0 t}.$$

Como $F(0) = f(0) + \dfrac{2c_1}{\gamma}$ e $f(t) \leq F(t)$

$$f(t) \leq c e^{-\gamma_0 t},$$

com $c = f(0) + \dfrac{2c_1}{\gamma}$.

Lema 1.5.2. *Seja f uma função real positiva de classe C^1 satisfazendo*

$$f'(t) \leq -k_0 [f(1)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}},$$

com $p > 1$ e $k_0, k_1 > 0$. Então, existe uma constante $k_2 > 0$, tal que

$$f(t) \leq k_2 \frac{p f(0) + 2k_1}{(1+t)^p}.$$

Demonstração: Tomamos $h(t) = \frac{2k_1}{p(1+t)^p}$ e $g(t) = f(t) + g(t)$. Nestas condições temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t) - \frac{2k_1}{(1+t)^{p+1}} \leq -k_0\Big\{[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{k_0(1+t)^{p+1}}\Big\} \\ &\leq k_0\Big\{[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + (\frac{p}{2})^{1+\frac{1}{p}}\frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}}[h(t)]^{1+\frac{1}{p}}\Big\}. \end{aligned}$$

Seja $a_0 = min\Big\{1, (\frac{p}{2})^{1+\frac{1}{p}}\frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}}\Big\}$. Assim,

$$g'(t) \leq -k_0 a_0\Big\{[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}}\Big\}.$$

Como existe uma constante positiva a_1, tal que

$$[f(t) + h(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq a_1\Big\{[f(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [h(t)]^{1+\frac{1}{p}}\Big\},$$

concluímos

$$g'(t) \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1}[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}, \Rightarrow \frac{g'(t)}{[g(t)]^{1+\frac{1}{p}}} \leq -\frac{k_0 a_0}{a_1}.$$

Integrando de 0 a t, temos

$$g(t) \leq \frac{p^p g(0)}{\Big\{p + \frac{k_0 a_0}{a_1}[g(0)]^{\frac{1}{p}}t\Big\}} \leq \frac{p^{p-1}[pf(0) + 2k_1]}{a_2^p(1+t)^p},$$

em que $a_2 = min\Big\{p, \frac{k_0 a_0}{a_1}[g(0)]^{\frac{1}{p}}\Big\}$. Tomando $k_2 = \frac{1}{a_2}(\frac{p}{a_2})^{p-1}$, segue o resultado

Lema 1.5.3 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam* $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e não-negativas,* $\alpha \geq 0$. *Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \quad \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\psi(t)$ *é limitada e se* $\alpha = 0$, *então* $\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Veja [1].

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Neste capítulo estabeleceremos existência e unicidade para as soluções do sistema (1)-(9), bem como provaremos que a solução é regular desde que os dados iniciais também sejam regulares. Para melhor análise introduziremos os operadores binários

$$\begin{aligned}(g * \varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s)\varphi(s)ds,\\ (g\Box\varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s)|\varphi(t)-\varphi(s)|^2 ds\end{aligned}$$

onde $*$ denota a convolução. Uma importante relação entre esses dois operadores é dado pelo seguinte Lema.

Lema 2.0.4. *Sejam* $f, \varphi \in C^1([0,\infty[;\mathbb{R})$. *Então*

$$\begin{aligned}\int_0^t f(t-s)\varphi(s)ds\varphi_t &= -\frac{1}{2}f(t)|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}f'\Box\varphi\\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[f\Box\varphi - (\int_0^t f(s)ds)|\varphi|^2\right].\end{aligned}$$

Demonstração: Diferenciando o termo $(f\Box\varphi)(t)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\Box\varphi)(t) &= (f'\Box\varphi)(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-s)ds|\varphi(t)|^2\\ &\quad -2\int_0^t f(t-s)\varphi(s)ds\varphi_t\end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t-s)ds|\varphi(t)|^2 = \frac{d}{dt}\int_0^t f(s)ds|\varphi(t)|^2 - f(t)|\varphi(t)|^2$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t f(t-s)\varphi(s)ds\varphi_t &= -\frac{1}{2}f(t)|\varphi(t)|^2+\frac{1}{2}f'\Box\varphi \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[f\Box\varphi-(\int_0^t f(s)ds)|\varphi|^2\right].\end{aligned}$$

$\Box$

Para obtenção da solução forte do sistema (1)-(9) vamos substituir as condições de fronteira (4)-(7) por condições de fronteiras equivalentes.

Derivando as equações (4)-(7), em relação ao tempo temos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}(t)=\frac{1}{g_1(0)}u_t(t)-\frac{1}{g_1(0)}\int_0^t g_1'(t-s)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}(s)ds,\\ &\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}(t)=\frac{1}{g_2(0)}v_t(t)-\frac{1}{g_2(0)}\int_0^t g_2'(t-s)\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}(s)ds,\\ &\Delta u(t)=-\frac{1}{g_3(0)}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-\int_0^t g_3'(t-s)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}(s)ds,\\ &\Delta v(t)=-\frac{1}{g_4(0)}\frac{\partial v_t}{\partial\nu}-\int_0^t g_4'(t-s)\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}(s)ds,\end{aligned}$$

Aplicando o operador inverso de Volterra, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}(t)=\frac{1}{g_1(0)}\{u_t+k_1*u_t(t)\},\\ &\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu}=\frac{1}{g_2(0)}\{v_t+k_2*v_t(t)\},\\ &\Delta u=-\frac{1}{g_3(0)}\{\frac{\partial u_t}{\partial\nu}+k_3*\frac{\partial u_t}{\partial\nu}(t)\},\\ &\Delta v=-\frac{1}{g_4(0)}\{\frac{\partial v_t}{\partial\nu}+k_4*\frac{\partial v_t}{\partial\nu}(t)\}.\end{aligned}$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
k_1 * u_t(t) &= \int_0^t k_1(t-s)u_t(s)ds,\\
&= k_1(t-s)u(s)\Big|_0^t - \int_0^t k_1'(s)u(s)ds\\
&= k_1(0)u(t) - k_1(t)u_0 + \int_0^t k_1'(t-s)u(s)ds\\
k_3 * \frac{\partial u_t}{\partial \nu}(t) &= \int_0^t k_3(t-s)\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(s)ds,\\
&= k_3(t-s)\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(s)\Big|_0^t - \int_0^t k_3'(s)\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(s)ds\\
&= k_3(0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(t) - k_3(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \int_0^t k_3'(t-s)\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(s)ds.
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos que

$$
\begin{aligned}
k_2 * v_t(t) &= k_2(0)v(t) - k_2(t)v_0 + \int_0^t k_2'(t-s)v(s)ds\\
k_4 * \frac{\partial v_t}{\partial \nu}(t) &= k_4(0)\frac{\partial v}{\partial \nu}(t) - k_4(t)\frac{\partial v_0}{\partial \nu} + \int_0^t k_4'(t-s)\frac{\partial v_t}{\partial \nu}(s)ds
\end{aligned}
$$

onde o núcleo resolvente satisfaz

$$
k_i + \frac{1}{g_i(0)}g_i' * k_i = -\frac{1}{g_i(0)}g_i', \quad \forall i = 1,2,3,4.
$$

Denontando por $\eta_i = \dfrac{1}{g_i(0)}$, $i = 1,2,3,4$ e usando as identidades acima, obtemos

$$
\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \eta_1\{u_t + k_1(0)u - k_1(t)u_0 + k_1' * u\} \tag{2.1}
$$

$$
\frac{\partial \Delta v}{\partial \nu} = \eta_2\{v_t + k_2(0)v - k_2(t)v_0 + k_2' * v\} \tag{2.2}
$$

$$
\Delta u = \eta_3\{ -\frac{\partial u_t}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u}{\partial \nu}\} \tag{2.3}
$$

$$
\Delta v = \eta_4\{ -\frac{\partial v_t}{\partial \nu} - k_4(0)\frac{\partial v}{\partial \nu} + k_4(t)\frac{\partial v_0}{\partial \nu} - k_4' * \frac{\partial v}{\partial \nu}\} \tag{2.4}
$$

Reciprocamente, tomando $u(x,0) = v(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,0) = \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x,0) = 0$ em Γ_0, segue que as identidades (2.1)-(2.4) acima implicam em (4)-(7). Como estamos interessados nas funções relaxamento do tipo exponencial ou polinomial, e as identidades (2.1)-(2.4) envolvem os núcleos resolutivos, seria interessante saber se os núcleos k_i, tem as mesmas propriedades. Essa questão é respondida pelo lema abaixo. Sejam h uma função relaxamento e k seu núcleo resolvente tal que

$$k(t) - k * h(t) = h(t). \tag{2.5}$$

Lema 2.0.5. *Seja h uma função contínua e positiva, então k também é uma função contínua e positiva. Além disso:*

1. Se existem constantes positiva c_0 e γ com $c_0 \leq \gamma$, tal que

$$h(t) \leq c_0 e^{-\gamma t},$$

então, a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{c_0(\gamma - \epsilon)}{\gamma - \epsilon - c_0} e^{-\epsilon t},$$

$\forall \ \ 0 < \epsilon < \gamma - c_0$.

2. Se $p > 1$,denotando por c_p:= $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t (1+t)^p (1+t-s)^{-p}(1+s)^{-p} ds$ existe c_0, constante positiva com $c_0 c_p < 1$ satisfazendo

$$h(t) \leq c_0 (1+t)^{-p},$$

então, a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{c_0}{1 - c_0 c_p}(1+t)^{-p}.$$

Demonstração: A continuidade da função k segue de imediato da identidade (2.5). Suponha que k não seja estritamente positiva , ou seja, existe pelo menos um $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $k(t) \leq 0$. Fazendo $t = 0$ na equação (2.5), temos que

$$k(0) = h(0) > 0.$$

Devido a continuidade de k, existe um intervalo $I = (0, \delta)$ de modo que $k(t) > 0$ para todo $t \in (0, \delta)$. Assim existe

$$t_1 = inf\{t \in \mathbb{R}^+ : k(t) = 0\}$$

com $k(t) > 0$ para todo $t \in [0, t_1]$. Se $t_1 \in \mathbb{R}^+$, pela equação (2.5) temos

$$-k * h(t_1) = h(t_1)$$

isto é contraditório, visto que, $h(t_1) > 0$. Portanto, $k(t) > 0, \forall\ t \in \mathbb{R}^+$. Seja ϵ uma constante fixa, tal que $0 < \epsilon < \gamma - c_0$ e definimos

$$k_\epsilon(t) = e^{\epsilon t}k(t), \quad h_\epsilon(t) = e^{\epsilon t}h(t) \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.5) por $e^{\epsilon t}$, obtemos

$$k_\epsilon(t) \quad = \quad h_\epsilon(t) + e^{\epsilon t}(k * h(t)). \tag{2.7}$$

Multiplicando (2.6) por $e^{\epsilon t}$, obtemos

$$h_\epsilon(t) \leq c_0 e^{t(\epsilon-\gamma)}. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8)

$$k_\epsilon(t) \leq h_\epsilon(t) + \int_0^t k_\epsilon(t-s)c_0 e^{s(\epsilon-\gamma)}ds. \tag{2.9}$$

Tomando o sup em (2.9) com $s \in [0,t]$ obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(t) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_\epsilon(s) + \int_0^\infty c_0 e^{s(\epsilon-\gamma)}ds \sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s). \tag{2.10}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty c_0 e^{s(\epsilon-\gamma)}ds &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda c_0 e^{\alpha s}ds \\
&= c_0 \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{e^{(\epsilon-\gamma)\lambda}}{\epsilon-\gamma} - \frac{1}{\epsilon-\gamma}\right) \\
&= \frac{c_0}{\gamma-\epsilon}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Daí, substituindo (2.11) em (2.10), obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_\epsilon(s) + \frac{c_0}{\gamma-\epsilon}\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s),$$

ou seja,

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s)\frac{(\gamma-\epsilon-c_0)}{\gamma-\epsilon} \leq \sup_{s\in[0,t]} h_\epsilon(s). \tag{2.12}$$

Substituindo (2.8) em (2.12)

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s) \leq \frac{c_0(\gamma-\epsilon)}{\gamma-\epsilon-c_0}e^{t(\epsilon-\gamma)}.$$

Portanto,

$$k_\epsilon \leq \frac{c_0(\gamma-\epsilon)}{\gamma-\epsilon-c_0}e^{t(\epsilon-\gamma)}.$$

Para demonstrar a outra parte, sejam

$$k_p(t) = (1+t)^p k(t) \quad e \quad h_p(t) = (1+t)^p h(t).$$

Multiplicando a equação (2.5) por $(1+t)^p$, obtemos

$$k_p(t) = h_p(t) + \int_0^t k(t-s)h(s)ds(1+t)^p,$$

ou seja,

$$k_p(t) = h_p(t) + \int_0^t k_p(t-s)(1+t-s)^{-p}(1+t)^p(1-s)^{-p}h_p(s)ds, \tag{2.13}$$

pois,

$$k(t-s) = (1+t-s)^{-p}k_p(t) \quad e \quad h(s) = (1+s)^{-p}h_p(s).$$

Multiplicando, $h(t) \leq c_0(1+t)^{-p}$ por $(1+t)^p$

$$h_p(t) \leq c_0. \tag{2.14}$$

Assim, tomando o sup em (2.13), com $s \in [0,t]$, obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) + \sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) \int_0^t (1+t-s)^{-p}(1+t)^p(1-s)^{-p}ds.$$

Devido a condição para c_0, obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) + c_0c_p \sup_{s\in[0,t]} k_p(s),$$

isto é,

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s)(1-c_0c_p) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s). \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) em (2.15) encontramos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \frac{c_0}{1-c_0c_p}.$$

Portanto,

$$k_p(t) \leq \frac{c_0}{1 - c_0 c_p}.$$

□

Temos assim, que para obtenção da solução do sistema (1)-(9) podemos utilizar as condições de fronteira equivalentes, pois as funções k_i preservam as mesmas propriedades das g_i.

A energia de primeira ordem do sistema (1)-(9) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) = E(t;u;v) = \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |v_t|^2 + |\Delta u|^2 + |\Delta v|^2)dx \\ & + \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0} (k_1(t)|u|^2 - k_1' \Box u) d\Gamma_0 \\ & + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0} (k_2(t)|v|^2 - k_2' \Box v) d\Gamma_0 \\ & + \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0} (k_3(t) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid^2 - k_3' \Box \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\Gamma_0 \\ & + \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0} (k_4(t) \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} \mid^2 - k_4' \Box \frac{\partial v}{\partial \nu}) d\Gamma_0 \\ & + \int_\Omega F(u-v)dx. \end{aligned}$$

A seguir será enunciado o principal teorema desse capítulo.

Teorema 2.0.2. *Seja $k_i \in C^2(\mathbb{R})$ tal que*

$$k_i, -k_i', k_i'' \geq 0; \quad \forall i = 1, ..., 4.$$

Se (10)-(12) são satisfeitas, $(u_0, v_0) \in (H^4(\Omega) \cap W)^2$ e $(u_1, v_1) \in W^2$ satisfazem as condições de compatibilidade

$$\frac{\partial \Delta u_0}{\partial \nu} = \eta_1 u_1, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \Delta v_0}{\partial \nu} = \eta_2 v_1, \tag{2.17}$$

$$\Delta u_0 = -\eta_3 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, \tag{2.18}$$

$$\Delta v_0 = -\eta_4 \frac{\partial v_1}{\partial \nu}. \tag{2.19}$$

Então existe somente uma única solução (u,v) do sistema (1)-(9) satisfazendo

$$
\begin{aligned}
&(u,v) \in L^\infty_{loc}(0,\infty : W) \times L^\infty_{loc}(0,\infty : W)\\
&(u_t,v_t) \in L^\infty_{loc}(0,\infty : W) \times L^\infty_{loc}(0,\infty : W)\\
&(u_{tt},v_{tt}) \in L^\infty_{loc}(0,\infty : L^2(\Omega)) \times L^\infty_{loc}(0,\infty : L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Demonstração: A demonstração é baseada no método das aproximações de Faedo-Galerkin. Seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de $H^4(\Omega)\cap W$ que é ortonormal completo em W. Seja W_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores desta base

$$W_m = [w_1, w_2, ..., w_m].$$

Nosso objetivo é determinar $(u_m(t), v_m(t)) \in W_m^2$, tais que

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} h_j w_j, \quad v_m(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j w_j,$$

satisfazendo,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u^m_{tt}(t) w dx + \int_\Omega \Delta u^m(t)\Delta w(t) dx\\
&+\eta_1 \int_{\Gamma 0} \{u^m_t + k_1(0)u^m - k_1(t)u^m_0 + k_1' * u\} w d\Gamma_0\\
&-\eta_3 \int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u^m}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u^m_0}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\}\frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_0\\
&+\int_\Omega f(u^m - v^m) w dx = 0, \quad \forall w \in W_m,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega v^m_{tt}(t) w dx + \int_\Omega \Delta v^m(t)\Delta w(t) dx\\
&+\eta_2 \int_{\Gamma 0} \{v^m_t + k_2(0)v^m - k_2(t)v^m_0 + k_2' * v^m\} w d\Gamma_0\\
&-\eta_4 \int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial v^m_t}{\partial \nu} - k_4(0)\frac{\partial v^m}{\partial \nu} + k_4(t)\frac{\partial v^m_0}{\partial \nu} - k_4' * \frac{\partial v^m}{\partial \nu}\}\frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_0\\
&-\int_\Omega f(u^m - v^m) w dx = 0, \quad \forall w \in W_m.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

com as seguintes condições inicias

$$
\begin{aligned}
&(u_0^m, v_0^m) = (u^m(0), v^m(0)) \longrightarrow (u_0, v_0) \;\; em \;\; (H^4(\Omega) \cap W)^2, \\
&(u_1^m, v_1^m) = (u_t^m(0), v_t^m(0)) \longrightarrow (u_1, v_1) \;\; em \;\; W \times W.
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Notemos que (2.20)-(2.22) são de fato sistema de EDO'S $m \times n$ na variável t, satisfazendo as condições do teorema de existência de *Carathéodory*. Portanto, possui solução $(u^m(t), v^m(t))$ no intervalo $[0, t_m[$, $t_m < T$. As estimativas a *priori*, obtidas a seguir, nos permitirão prolongar a solução $(u^m(t), v^m(t))$ ao intervalo $[0, T]$, para $T > 0$.

Estimativa a priori I- Fazendo $w = u_t^m(t)$ e $w = v_t^m(t)$ em (2.20) e (2.21), respectivamente, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u_t^m(t)|^2 dx \\
&+\eta_1 \int_{\Gamma_0} |u_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \eta_1 \int_{\Gamma_0} k_1(t) u_0^m u_t^m(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_1 \int_{\Gamma_0} \{k_1(0)u^m(t) + k_1' * u^m\} u_t^m(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_3 \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu(t)} \mid^2 d\Gamma_0 - \eta_3 \int_{\Gamma_0} k_3(t) \frac{\partial u_0^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_3 \int_{\Gamma_0} \{\; k_3(0)\frac{\partial u^m}{\partial \nu}(t) + k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\} \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}(t) d\Gamma_0 \\
&+ \int_\Omega f(u^m(t) - v^m(t)) u_t^m(t) dx = 0,
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_t^m(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v_t^m(t)|^2 dx \\
&+\eta_2 \int_{\Gamma_0} |v_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \eta_2 \int_{\Gamma_0} k_2(t) v_0^m v_t^m(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_2 \int_{\Gamma_0} \{k_2(0)v^m(t) + k_2' * v^m\} v_t^m(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_4 \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu(t)} \mid^2 d\Gamma_0 - \eta_4 \int_{\Gamma_0} k_4(t) \frac{\partial v_0^m}{\partial \nu}\frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}(t) d\Gamma_0 \\
&+\eta_4 \int_{\Gamma_0} \{\; k_4(0)\frac{\partial v^m}{\partial \nu}(t) + k_4' * \frac{\partial v^m}{\partial \nu}\} \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}(t) d\Gamma_0 \\
&- \int_\Omega f(u^m(t) - v^m(t)) v_t^m(t) dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Do lema 2.0.1, obtemos

$$\int_{\Gamma_0}(k_1' * u^m)u_t^m d\Gamma_0 = -\frac{1}{2}k_1'(t)\int_{\Gamma_0}|u_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 + +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} k_1''\Box u^m d\Gamma_0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}\left[k_1'\Box u^m - \left(\int_0^s k_1'(s)ds\right)|u^m(t)|^2\right]d\Gamma_0, \tag{2.25}$$
$$\int_{\Gamma_0}(k_2' * v^m)v_t^m d\Gamma_0 = -\frac{1}{2}k_2'(t)\int_{\Gamma_0}|v_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 + +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} k_2''\Box v^m d\Gamma_0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}\left[k_2'\Box v^m - \left(\int_0^s k_2'(s)ds\right)|v^m(t)|^2\right]d\Gamma_0, \tag{2.26}$$
$$\int_{\Gamma_0}(k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu})\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} d\Gamma_0 = -\frac{1}{2}k_3'(t)\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2 d\Gamma_0 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} k_3''\Box \mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2 d\Gamma_0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}\left[k_3'\Box \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu(t)} - \left(\int_0^s k_3'(s)ds\right)\mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2\right]d\Gamma_0, \tag{2.27}$$
$$\int_{\Gamma_0}(k_4' * \frac{\partial v^m}{\partial \nu})\frac{\partial v_t^m}{\partial \nu} d\Gamma_0 = -\frac{1}{2}k_4'(t)\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2 d\Gamma_0 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} k_4''\Box \mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2 d\Gamma_0$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}\left[k_4'\Box \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu(t)} - \left(\int_0^s k_4'(s)ds\right)\mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu(t)}\mid^2\right]d\Gamma_0. \tag{2.28}$$

Substituindo as equações (2.25)-(2.28) em (2.23) e (2.24), respectivamente, e usando a hipótese (11), obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t, u^m(t), v^m(t)) = -\eta_1\int_{\Gamma_0}|u_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \eta_3\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}(t)\mid^2 d\Gamma_0$$
$$-\eta_2\int_{\Gamma_0}|v_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \eta_4\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}(t)\mid^2 d\Gamma_0$$
$$\eta_1\int_{\Gamma_0}k_1(t)u_0^m u_t^m(t)d\Gamma_0 + \eta_2\int_{\Gamma_0}k_2(t)v_0^m v_t^m(t)d\Gamma_0$$
$$+\eta_3\int_{\Gamma_0}k_3(t)\frac{\partial u_0^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}(t)d\Gamma_0 + \eta_4\int_{\Gamma_0}k_4(t)\frac{\partial v_0^m}{\partial \nu}\frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}(t)d\Gamma_0$$
$$+\frac{\eta_1}{2}k_1'(t)\int_{\Gamma_0}|u_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1''\Box u^m d\Gamma_0$$
$$+\frac{\eta_2}{2}k_2'(t)\int_{\Gamma_0}|v_t^m(t)|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2''\Box v^m d\Gamma_0$$
$$+\frac{\eta_3}{2}k_3'(t)\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}(t)\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3''\Box \frac{\partial u^m}{\partial \nu}(t)d\Gamma_0$$
$$+\frac{\eta_4}{2}k_4'(t)\int_{\Gamma_0}\mid \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}(t)\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4''\Box \frac{\partial v^m}{\partial \nu}(t)d\Gamma_0.$$

Usando a desigualdade elementar, obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t,u^m(t),v^m(t)) \leq C_0E(0,u^m(t),v^m(t))$$

Onde $E(0,u^m(t),v^m(t))$ é energia em $t=0$. Integrando de 0 a $t<t_m$ e usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} E(t,u^m(t),v^m(t)) &\leq E(0,u^m(t),v^m(t)) + C_0TE(0,u^m(t),v^m(t)) \\ &\leq CE(0,u^m(t),v^m(t)) \leq C_2, \end{aligned}$$

onde C_2 é constante positiva independente de m e t. Desta forma, pelo teorema de prolongamento de soluções podemos estender a solução aproximada (u^m,v^m) para todo intervalo $[0,T]$, com $T>0$. Em particular, existe $M_1>0$ tal que

$$E(t,u^m(t),v^m(t)) \leq M_1, \quad \forall t\in[0,T] \;\; e\ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{2.29}$$

Logo:

$$\begin{array}{cccc} (u^m,v^m) & \text{é limitada} & \text{em} & L^\infty_{loc}(0,\infty;W) \\ (u^m_t,v^m_t) & \text{é limitada} & \text{em} & L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ (\Delta u^m,\Delta v^m) & \text{é limitada} & \text{em} & L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \\ (\dfrac{\partial u^m}{\partial\nu},\dfrac{\partial v^m}{\partial\nu}) & \text{é limitada} & \text{em} & L^2((0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \end{array}$$

Estimativa a priori II- Primeiramente, vamos estimar $u_{tt}^m(0)$ e $v_{tt}^m(0)$, em $L^2(\Omega)$. Substituindo w por $u_{tt}^m(0)$ na equação (2.20), considerando $t=0$ e usando as condições de compatibilidade (2.16) e (2.18), obtemos

$$\int_\Omega |u_{tt}^m(0)|^2dx + \int_\Omega \Delta^2 u_0^m u_{tt}^m(0)dx + \int_\Omega f(u_0^m - v_0^m)u_{tt}^m(0)dx = 0.$$

Usando desigualdade elementar, obtemos

$$\|u_{tt}^m(0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|\Delta^2 u_0^m(0)\|_{L_2(\Omega)}\|u_{tt}^m(0)\|_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega f|u_0^m - v_0^m||u_{tt}^m(0)|dx.$$

Como $(u_0^m, v_0^m) \longrightarrow (u^0, v^0)$ em $H^4(\Omega)\cap W \times H^4(\Omega)\cap W$, considerando a hipótese de crescimento para a função f e as imersões de Sobolev temos que $f(u_0^m - v_0^m) \in L^2(\Omega)$. Então

$$\|u_{tt}^m(0)\|_{L_2(\Omega)} \leq M_2, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Similarmente, obtemos

$$\|v_{tt}^m(0)\|_{L_2(\Omega)} \leq M_2, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Estimativa a priori III- Agora vamos estimar os termos $u_{tt}^m, v_{tt}^m, \Delta u_t^m$ e Δv_t^m, em $L^2(\Omega)$. Diferenciando a equação (2.20) com relação ao tempo e substituindo w por u_{tt}^m, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_{tt}^m(t)|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u_t^m(t)|^2dx \\
&+\frac{\eta_1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}(k_1|u_t^m(t)|^2 - k_1'\Box u_t^m)d\Gamma_0 \\
&\frac{\eta_3}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}(k_3 \mid \frac{\partial u_t^m}{\partial\nu} \mid^2 - k_3'\Box\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0 \\
&= -\int_\Omega f'(u^m - v^m)(u_t^m - v_t^m)u_{tt}^m dx - \eta_1\int_{\Gamma_0}|u_{tt}^m|^2 d\Gamma_0 \\
&+\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}(k_1'|u_t^m(t)|^2 - k_1''\Box u_t^m)d\Gamma_0 - \eta_1\int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial\nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
&+\frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}(k_3' \mid \frac{\partial u_t^m}{\partial\nu} \mid^2 - k_3''\Box\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Similarmente, usando (2.21) em vez de (2.20) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|v_{tt}^{m}(t)|^{2}dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\Delta v_{t}^{m}(t)|^{2}dx\\
&+\frac{\eta_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}(k_2|v_t^m(t)|^2-k_2'\square v_t^m)d\Gamma_0\\
&\frac{\eta_4}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0}(k_4\mid\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_4'\square\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0\\
&=-\int_{\Omega}f'(u^m-v^m)(u_t^m-v_t^m)v_{tt}^m dx-\eta_2\int_{\Gamma_0}|v_{tt}^m|^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}(k_2'|v_t^m(t)|^2-k_2''\square v_t^m)d\Gamma_0-\eta_2\int_{\Gamma_0}\mid\frac{\partial v_{tt}^m}{\partial\nu}\mid^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}(k_4'\mid\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_4''\square\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Somando as equações (2.32) e (2.33) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}E_0(t,u^m(t),v^m(t))=-\int_{\Omega}f'(u^m-v^m)(u_t^m-v_t^m)u_{tt}^m dx-\eta_1\int_{\Gamma_0}|u_{tt}^m|^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}(k_1'|u_t^m(t)|^2-k_1''\square u_t^m)d\Gamma_0-\eta_1\int_{\Gamma_0}\mid\frac{\partial u_{tt}^m}{\partial\nu}\mid^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}(k_3'\mid\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_3''\square\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0\\
&\int_{\Omega}f'(u^m-v^m)(u_t^m-v_t^m)v_{tt}^m dx-\eta_2\int_{\Gamma_0}|v_{tt}^m|^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}(k_2'|v_t^m(t)|^2-k_2''\square v_t^m)d\Gamma_0-\eta_2\int_{\Gamma_0}\mid\frac{\partial v_{tt}^m}{\partial\nu}\mid^2d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}(k_4'\mid\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_4''\square\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0,
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
E_0(t,u^m(t),v^m(t)) \;=\;& \frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_{tt}^m(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\Delta u_t^m(t)|^2dx\\
&+\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}(k_1|u_t^m(t)|^2-k_1'\square u_t^m)d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}(k_3\mid\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_3'\square\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|v_{tt}^m(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\Delta v_t^m(t)|^2dx\\
&+\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}(k_2|v_t^m(t)|^2-k_2'\square v_t^m)d\Gamma_0\\
&+\frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}(k_4\mid\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu}\mid^2-k_4'\square\frac{\partial v_t^m}{\partial\nu})d\Gamma_0.
\end{aligned}
$$

Analizaremos alguns termos de (2.34). Consideremos $p_n = \dfrac{2n}{n-2}$. Da hipótese (11) e das imersões de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(u^m - v^m) u_t^m u_{tt}^m dx &\leq C \int_\Omega (1 + 2 \mid u^m - v^m \mid^{\rho-1}) \mid u_t^m \mid\mid u_{tt}^m \mid dx \\
&\leq C \left[\int_\Omega (1 + 2 \mid u^m - v^m \mid^{\rho-1})^n dx\right]^{\frac{1}{n}} \left[\int_\Omega |u_t^m|^{p_n} dx\right]^{\frac{1}{p_n}} \cdot \left[\int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left[\int_\Omega (1 + \mid \nabla u^m - \nabla v^m \mid^2) dx\right]^{\frac{\rho-1}{2}} \cdot \left[\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Da estimativa (2.29) concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f'(u^m - v^m) u_t^m u_{tt}^m dx &\leq C \left[\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left\{\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx\right\}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Similarmente, obtemos

$$-\int_\Omega f'(u^m - v^m) v_t^m u_{tt}^m dx \leq C \left\{\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx\right\}, \qquad (2.36)$$

$$\int_\Omega f'(u^m - v^m) u_t^m v_{tt}^m dx \leq C \left\{\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_\Omega |v_{tt}^m|^2 dx\right\}, \qquad (2.37)$$

$$-\int_\Omega f'(u^m - v^m) v_t^m v_{tt}^m dx \leq C \left\{\int_\Omega |\nabla v_t^m|^2 dx + \int_\Omega |v_{tt}^m|^2 dx\right\}. \qquad (2.38)$$

Substituindo as inequações (2.36)-(2.38) em (2.34) obtemos

$$\frac{d}{dt} E_0(t, u^m(t), v^m(t)) \leq \left\{\int_\Omega |\nabla u_t^m|^2 dx + \int_\Omega |u_{tt}^m|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_t^m|^2 dx + \int_\Omega |v_{tt}^m|^2 dx\right\}.$$

Integrando com relação ao tempo e aplicando a desigualdade de Gronwall, concluímos que

$$E_0(t, u^m(t), v^m(t)) \leq C, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (2.39)$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
(u_{tt}^m, v_{tt}^m) \quad &\text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty_{loc}(0, \infty; L_2(\Omega)) \\
(\Delta u_t^m, \Delta v_t^m) \quad &\text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty_{loc}(0, \infty; L_2(\Omega)) \\
\left(\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}, \frac{\partial v_t^m}{\partial \nu}\right) \quad &\text{é} \quad \text{limitada} \quad \text{em} \quad L^2((0, \infty; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))
\end{aligned}$$

Das estimativas (2.29), (2.30) e (2.39) obtemos

$$\begin{array}{llll}
(u^m, v^m) & \text{limitada} & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;W) \\
(u^m_t, v^m_t) & \text{limitada} & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;W) \\
(u^m_{tt}, v^m_{tt}) & \text{limitada} & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega)) \\
(\Delta u^m, \Delta v^m) & \text{limitada} & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega)) \\
(\Delta u^m_t, \Delta v^m_t) & \text{limitada} & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega)) \\
(\frac{\partial u^m}{\partial \nu}, \frac{\partial v^m}{\partial \nu}) & \text{limitada} & \text{em} & L^2((0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \\
(\frac{\partial u^m_t}{\partial \nu}, \frac{\partial v^m_t}{\partial \nu}) & \text{limitada} & \text{em} & L^2((0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \\
(u^m_t, v^m_t) & \text{limitada} & \text{em} & L^2(0,T)
\end{array} \tag{2.40}$$

Assim, devido às estimativas $(2.40)_1, (2.40)_2$ e $(2.40)_3$ e as definições 1.5.1 e 1.5.2, concluimos que existe uma subsequência, que será representada por (u^m, v^m), satisfazendo

$$\begin{array}{lll}
(u^m, v^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;W) \\
(u^m_t, v^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;W) \\
(u^m_{tt}, v^m_{tt}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_{tt}, v_{tt}) & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega)) \\
(\Delta u^m, \Delta v^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (\Delta u, \Delta v) & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega)) \\
(\Delta u^m_t, \Delta v^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (\Delta u_t, \Delta v_t) & \text{em} & L^{\infty}_{loc}(0,\infty;L_2(\Omega) \\
(\frac{\partial u^m}{\partial \nu}, \frac{\partial v^m}{\partial \nu}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu}) & \text{em} & L^2((0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \\
(\frac{\partial u^m_t}{\partial \nu}, \frac{\partial v^m_t}{\partial \nu}) \overset{*}{\rightharpoonup} (\frac{\partial u_t}{\partial \nu}, \frac{\partial v_t}{\partial \nu}) & \text{em} & L^2((0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)) \\
(u^m_t, v^m_t) \rightharpoonup (\chi, \psi) & \text{em} & L^2(0,T)
\end{array} \tag{2.41}$$

Passagem ao limite

Do problema aproximado temos

$$
\begin{aligned}
&(u_{tt}^m, w) + (\Delta u^m, w) + \eta_1 \int_{\Gamma_0} \{u_t^m + k_1(0)u^m - k_1(t)u_0^m(1) + k_1' * u^m\} w d\Gamma_0 \\
&-\eta_3 \int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u^m}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0^m}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\} w d\Gamma_0 \\
&(f(u^m - v^m), w) = 0
\end{aligned}
$$

$\forall w \in W_m$.

Multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0, \infty)$ e integrando de 0 a T encontramos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (u_{tt}^m, w)\theta dt + \int_0^T (\Delta u^m, w)\theta dt + \eta_1 \int_0^T [\int_{\Gamma_0} \{u_t^m + k_1(0)u^m - k_1(t)u_0^m(1) + k_1' * u^m\} w d\Gamma_0]\theta dt \\
&-\eta_3 \int_0^T [\int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u^m}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0^m}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\} w d\Gamma_0]\theta dt \\
&\int_0^T (f(u^m - v^m), w)\theta dt = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, $(2.41)_1$ e $(2.41)_3$

$$\int_0^T (u^m, w)\theta dt \to \int_0^T (u, v)\theta dt \text{ pois, } v\theta \in L^1(0, T; W'),$$

$$\int_0^T (u_{tt}^m, w)\theta dt \to \int_0^T (u_{tt}, w)\theta dt \text{ pois, } v\theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $L^\infty(0, T; W) \hookrightarrow L^2(0, T; W)$. Segue que

$$(u^m, v^m) \text{ é limitada em } L^2(0, T, W).$$

Usando o mesmo raciocínio, concluímos que

$$(u_t^m, v_t^m) \text{ é limitada em } L^2(0, T, W).$$

Logo, pelo lema de Aubin-Lions, vem que

$$(u^m, v^m) \longrightarrow (u, v) \text{ forte em } L^2(0, T; W),$$

ou seja,

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^T |u^m(t) - u(t)|_W^2 dt = 0.$$

Pela continuidade da imersão de $H^1(0,T)$ em $C[0,T]$, segue da igualdade acima que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T |u^m(t)-u(t)|^2 dt = 0,$$

ou seja, $u^m(t) \to u(t)$ forte em $L^2(0,T)$. Assim, $u(t)$ define uma distribuição em $\mathcal{D}(0,\infty)$ definida por

$$< u(t), \theta >= \int_0^T u(t)\theta(t)dt.$$

Deste modo, faz sentido falar em derivada no sentido distribucional. Decorre daí que

$$\begin{aligned} < \frac{d}{dt}u^m(t), \theta > &= -< u^m(t), \frac{d}{dt}\theta > \\ &\to -< u(t), \frac{d}{dt}\theta > \\ &= < \frac{d}{dt}u(t), \theta >, \end{aligned}$$

ou seja, $u_t^m(t) \to u_t(t)$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$. Por outro lado, $u_t^m(t) \rightharpoonup \chi$ em $L^2(0,\infty)$ implicando que $u_t^m(t) \to \chi$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$. Da unicidade do limite segue que

$$\chi = u_t(t).$$

e analogamente, temos que

$$\psi = v_t(t).$$

Análise do termo não linear

Pelas convergências $(2.41)_1$ e $(2.41)_2$ segue do teorema de Aubin-Lions

$$(u^m, v^m) \longrightarrow (u,v) \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q).$$

Assim, existe uma subsequência de (u^m, v^m) que continuaremos a representar por (u^m, v^m) tal que

$$\begin{aligned} &u^m \longrightarrow u \quad q.s \quad em \quad \Omega \\ &v^m \longrightarrow v \quad q.s \quad em \quad \Omega \\ &u^m - v^m \longrightarrow u - v \quad q.s \quad em \quad \Omega. \end{aligned}$$

Como f é contínua , temos que

$$f(u^m - v^m) \longrightarrow f(u-v) \;\; q.s \;\; em \;\; \mathbb{R}.$$

Usando a hipótese de crescimento sobre a f e as imersões de Sobolev, obtemos que

$$f(u^m - v^m) \longrightarrow f(u-v) \;\; em \;\; L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Desta forma, passando ao limite quando m tende ao infinito, concluímos que

$$\int_0^T \{(u_{tt}^m, w) + (\Delta u^m, w) + \eta_1[\int_{\Gamma_0} \{u_t^m + k_1(0)u^m - k_1(t)u_0^m(1) + k_1' * u^m\} w d\Gamma_0]$$
$$-\eta_3[\int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u^m}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0^m}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\} w d\Gamma_0] + (f(u^m - v^m), w)\}\theta dt = 0 \rightharpoonup$$
$$\int_0^T \{(u_{tt}, w) + (\Delta u, w) + \eta_1[\int_{\Gamma_0} \{u_t + k_1(0)u - k_1(t)u_0(1) + k_1' * u\} w d\Gamma_0]$$
$$-\eta_3[\int_{\Gamma_0} \{-\frac{\partial u_t}{\partial \nu} - k_3(0)\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - k_3' * \frac{\partial u}{\partial \nu}\} w d\Gamma_0] - (f(u-v), w)\}\theta dt = 0 \quad em \quad L^2(Q).$$

Substituindo as condições de fronteira (2.1) e (2.4) temos

$$\int_0^T \{(u_{tt}, w) + (\Delta u, \Delta w) + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} w d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \Delta u \frac{\partial w}{\partial \nu} d\Gamma_0 + (f(u-v), w)\}\theta dt = 0$$

$\forall w \in W_m$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,\infty)$. Como W_m é denso em $W \cap H^4(\Omega)$, a igualdade acima é válida para todo $w \in W \cap H^4(\Omega)$.

Da fórmula de Green, temos que

$$\int_0^T \{(u_{tt}, w) + (\Delta^2 u, w) + (f(u-v), w)\}\theta dt = 0.$$

Voltando à equação original, segue que

$$\int_0^T \{u_{tt} + (\Delta^2 u + f(u-v)\}\theta dt = 0 \;\; \forall \theta \in \mathcal{D}(0,\infty).$$

Pelo lema de DuBois-Reymond, temos que

$$u_{tt} + \Delta^2 u + f(u-v) = 0.$$

Analogamente, obtemos

$$v_{tt} + \Delta^2 v - f(u-v) = 0.$$

Condições iniciais

Aqui, será mostrado que

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0).$$

Notemos que de $(u, v) \in C(0, T; W)$ faz sentido calcular $(u(0), v(0))$

De $(2.41)_2$ temos que, para $w \in W$ e $\theta \in C(0, T; \mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$:

$$\int_0^T (u_t^m, w)\theta dt \to \int_0^T (u_t, w)\theta dt,$$

ou seja,

$$\lim_{m\to\infty} \left| \int_0^T (u_t^m, w)\theta dt - \int_0^T (u_t, w)\theta dt \right| = 0.$$

Integrando por partes

$$\lim_{m\to\infty} \left| (u^m(0), w) + \int_0^T (u^m, w)\theta' dt - (u(0), w) - \int_0^T (u, w)\theta' dt \right| = 0,$$

de onde

$$\lim_{m\to\infty} \left| |(u^m(0), w) - (u(0), w)| - |\int_0^T (u^m, w)\theta' dt - \int_0^T (u, w)\theta' dt| \right| = 0.$$

Usando $(2.41)_1$, segue que:

$$(u^m(0), w) \to (u(0), w).$$

Como u_0^m converge forte para u_0 em $W \cap H^4(\Omega)$, também converge forte em W. Consequentemente, converge fraco em W. Desta forma,

$$(u_0^m, w) \to (u_0, w).$$

Da unicidade dos limites segue que

$$(u(0), w) = (u_0, w) \;\; \forall \; w \in W,$$

e, portanto

$$u(0) = u_0.$$

Analogamente, temos

$$v(0) = v_0.$$

Agora, será mostrado que

$$(u_t(0), v_1(0)) = (u_1, v_1).$$

De $(2.41)_3$ temos que, para todo $w \in L^2(0,1)$ e $\theta \in C(0,T;\mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$

$$\int_0^T (u_{tt}^m, w)\theta dt \to \int_0^T (u_{tt}, w)\theta dt.$$

Integrando por partes, e notando que $u_t \in C(0,T;W)$

$$-(u_t^m(0), w) - \int_0^T (u_t^m, w)\theta' dt \longrightarrow -(u_t(0), w) - \int_0^T (u_t, w)\theta' dt. \tag{2.42}$$

De $(2.41)_2$ e usando o mesmo raciocínio anterior, concluimos que

$$(u_t^m(0), w) \to (u_t(0), w), \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Como $u_t^m(0)$ converge forte para u_1 em W, também converge forte em $L^2(\Omega)$. Consequentemente, converge fraco em $L^2(\Omega)$. Desta forma

$$(u_t^m(0), w) \to (u_1, w) \quad \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

Da unicidade dos limites segue que

$$(u_t(0), w) = (u_1, w). \;\; \forall\, w \in L^2(\Omega),$$

e portanto

$$u_t(0) = u_1.$$

Analogamente, temos

$$v_t(0) = v_1.$$

Unicidade

Seja u^1, u^2, v^1 e v^2 soluções para o sistema (1)-(9) com os mesmos dados iniciais. Então $\phi = u^1 - u^2$ e $\varphi = v^1 - v^2$ satisfazem

$$
\begin{aligned}
\phi_{tt} + \Delta^2\phi + f(u^1 - v^1) - f(u^2 - v^2) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty),\\
\varphi_{tt} + \Delta^2\varphi - f(u^1 - v^1) + f(u^2 - v^2) = 0 \quad em \;\; \Omega \times (0,\infty),\\
\phi = \varphi = \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad em \;\; \Sigma_1,\\
\phi - \int_0^t g_1(t-s)\frac{\partial\Delta\phi}{\partial\nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0,\\
\varphi - \int_0^t g_2(t-s)\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0,\\
\frac{\partial\phi}{\partial\nu} + \int_0^t g_3(t-s)\Delta\phi(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + \int_0^t g_4(t-s)\Delta\varphi(s)ds = 0 \quad em \;\; \Sigma_0,\\
(\phi(0,x), \varphi(0,x)) = (0,0) \quad em \;\; \Omega,\\
(\phi_t(0,x), \varphi_t(0,x)) = (0,0) \quad em \;\; \Omega.
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira equação por ϕ_t, integrando em Ω e usando a fórmula de Green, segue que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta\phi|^2 + \int_{\Gamma_0} \phi_t \frac{\partial\Delta\phi}{\partial\nu} d\Gamma_0\\
&- \int_{\Gamma_0} \Delta\phi \frac{\partial\phi_t}{\partial\nu} d\Gamma_0 + \int_\Omega f(u^1 - v^1)\phi_t dx - \int_\Omega f(u^2 - v^2)\phi_t dx = 0
\end{aligned}
$$

Analogamente, multiplicando a segunda equação por φ_t, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta\varphi|^2 + \int_{\Gamma_0} \varphi_t \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} d\Gamma_0\\
&- \int_{\Gamma_0} \Delta\varphi \frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu} d\Gamma_0 - \int_\Omega f(u^1 - v^1)\varphi_t dx + \int_\Omega f(u^2 - v^2)\varphi_t dx = 0
\end{aligned}
$$

Somando as equações acima, vemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\}\\
&+ \int_{\Gamma_0} \left\{\phi_t \frac{\partial\Delta\phi}{\partial\nu} - \Delta\phi\frac{\partial\phi_t}{\partial\nu} + \varphi_t\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} - \Delta\varphi\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_0\\
&+ \int_\Omega \left\{[f(u^1 - v^1) - f(u^2 - v^2)](\phi_t - \varphi_t)\right\} dx = 0
\end{aligned}
$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R})$, usando as imersões de Sobolev, segue que

$$\int_\Omega \left\{[f(u^1 - v^1) - f(u^2 - v^2)](\phi_t - \varphi_t)\right\} dx \leq C\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\} \tag{2.43}$$

Substituindo (2.43) e as condições fronteira, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\} + \int_{\Gamma_0}\left\{\phi_t\frac{\partial\Delta\phi}{\partial\nu} - \Delta\phi\frac{\partial\phi_t}{\partial\nu} + \varphi_t\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu} - \Delta\varphi\frac{\partial\varphi_t}{\partial\nu}\right\} d\Gamma_0$$
$$\leq C\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\}$$

Da estimativa (2.29) concluimos que

$$\frac{d}{dt}\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\} \leq C\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\}$$

Integrando de 0 à T, temos

$$\left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\} \leq C\int_0^T \left\{|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right\}$$

Usando o lema de Gronwall concluimos que

$$|\phi_t|^2 + |\Delta\phi|^2 + |\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2 = 0$$

e consequentemente $\phi(t) = \varphi(t)$=0.

Isto conclui a prova da unicidade.

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

Neste capítulo será mostrado que a solução do sistema (1)-(9) decai exponencialmente e polinomialmente quando o tempo vai ao infinito, com uma taxa de decaimento explícita, dependendo da taxa de decaimento dos núcleos resolventes $k_1, k_2, k_3,\ e\ k_4$.

3.1 Decaimento Exponencial

Nesta seção demonstra-se que a solução do sistema (1)-(9) decai exponencialmente quando os núcleos resolventes $k_1, k_2, k_3,\ e\ k_4$ decaem exponencialmente, isto é, existem constantes positivas b_1, b_2 tal que

$$k_i(0) > 0, \quad k_i'(t) \leq -b_1 k_i(t), \quad k_i''(t) \geq -b_2 k_i'(t) \quad para \quad i = 1, ..., 4, . \tag{3.1}$$

Notando que esta condição implica em

$$k_i(t) \leq k_i(0) e^{-b_1 t} \quad para \quad i = 1, ..., 4.$$

A seguir enunciaremos três lemas que serão fundamentais para o estudo do decaimento exponencial da solução.

Lema 3.1.1. *Para qualquer solução forte (u, v) do sistema (1)-(9), temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) \leq\ & -\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}|u_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}k_1^2(t)\int_{\Gamma_0}|u_0|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}|\ \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\ |^2\ d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_3}{2}k_3^2(t)\int_{\Gamma_0}|\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\ |^2\ d\Gamma_0 - \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}|v_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}k_2^2(t)\int_{\Gamma_0}|v_0|^2 d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_4}{2}k_4^2(t)\int_{\Gamma_0}|\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu}\ |^2\ d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1'(t)|u|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1''\Box u d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3'(t)\ |\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\ |^2\ d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3''\Box\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2'(t)|v|^2 d\Gamma_0 \\
& - \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2''\Box v d\Gamma_0 + \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4'(t)\ |\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\ |^2\ d\Gamma_0 - \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4''\Box\frac{\partial v}{\partial \nu}d\Gamma_0.
\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando a equação (1) por u_t, integrando em Ω e usando a fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u_t|^2dx + \int_\Omega f(u-v)u_tdx\\ &= \int_{\Gamma_0} \Delta u\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0}\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu}u_td\Gamma_0.\end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (2.1) e (2.3), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u_t|^2dx + \int_\Omega f(u-v)u_tdx\\ &= -\eta_1\int_{\Gamma_0}\{u_t + k_1(0)u - k_1(t)u_0 + k_1' * u\}u_td\Gamma_0\\ &+\eta_3\int_{\Gamma_0}\{-\frac{\partial u_t}{\partial\nu} - k_3(0)\frac{\partial u}{\partial\nu} + k_3(t)\frac{\partial u_0}{\partial\nu} - k_3' * \frac{\partial u}{\partial\nu}\}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_0.\end{aligned}$$

Usando o lema 2.0.1 obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u_t|^2dx + \int_\Omega f(u-v)u_tdx\\ &+\frac{\eta_1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_1(t)|u|^2d\Gamma_0 - \frac{\eta_1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_1'(t)\Box u d\Gamma_0\\ &+\frac{\eta_3}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_3(t)\mid\frac{\partial u}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_3'(t)\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0\\ &= -\eta_1\int_{\Gamma_0}|u_t|^2d\Gamma_0 + \eta_1k_1(t)\int_{\Gamma_0}u_0u_td\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1'(t)|u|^2d\Gamma_0\\ &-\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1''\Box u d\Gamma_0 - \eta_3\int_{\Gamma_0}\mid\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 + \eta_3k_3(t)\int_{\Gamma_0}\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\frac{\partial u_t}{\partial\nu}d\Gamma_0\\ &+\frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3'(t)\mid\frac{\partial u}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3''(t)\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Similarmente, usando a equação (2) em vez de (1) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |v_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta v_t|^2dx + \int_\Omega f(u-v)v_tdx\\ &+\frac{\eta_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_2(t)|v|^2d\Gamma_0 - \frac{\eta_2}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_2'(t)\Box v d\Gamma_0\\ &+\frac{\eta_4}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_4(t)\mid\frac{\partial v}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_4}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} k_4'(t)\Box\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0\\ &= -\eta_2\int_{\Gamma_0}|v_t|^2d\Gamma_0 + \eta_2k_2(t)\int_{\Gamma_0}v_0v_td\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2'(t)|v|^2d\Gamma_0\\ &-\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2''\Box v d\Gamma_0 - \eta_4\int_{\Gamma_0}\mid\frac{\partial v_t}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 + \eta_4k_4(t)\int_{\Gamma_0}\frac{\partial v_0}{\partial\nu}\frac{\partial v_t}{\partial\nu}d\Gamma_0\\ &+\frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4'(t)\mid\frac{\partial v}{\partial\nu}\mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4''(t)\Box\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Somando as equações (3.2) e (3.3), considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, obtemos a conclusão do Lema. $\square$

Introduzimos o seguinte funcional

$$\Phi(t) = \int_\Omega (u_t u - v_t v) dx.$$

O lema a seguir é de fundamental importância para a construção do funcional desejado.

Lema 3.1.2. *Para qualquer solução forte do sistema (1)-(9), temos*

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq \int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |v_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u|^2 dx \\
&- \int_\Omega |\Delta v|^2 dx - (2+\delta)\int_\Omega F(u-v) u dx \\
&+ \frac{\eta_1}{k_1(0)} \int_{\Gamma_0} |u_t|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_1 k_1(0)}{2} \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1 k_1^2(t)}{k_1(0)} \int_{\Gamma_0} |u_0|^2 d\Gamma_0 \\
&+ \|u\|_{L^2(\Gamma_0)} \left| \int_0^t k_1'(s) ds \right|^{\frac{1}{2}} (|k_1'|\Box u)^{\frac{1}{2}} + C k_1(t) \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0 \\
&- \frac{\eta_3 k_3(0)}{2} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_3 k_3^2(t)}{k_3(0)} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
&+ \|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|_{L^2(\Gamma_0)} \left| \int_0^t k_3'(s) ds \right|^{\frac{1}{2}} (|k_3'|\Box \frac{\partial u}{\partial \nu})^{\frac{1}{2}} + C k_3(t) \int_{\Gamma_0} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 d\Gamma_0 \\
&+ \frac{\eta_2}{k_2(0)} \int_{\Gamma_0} |v_t|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_2 k_2(0)}{2} \int_{\Gamma_0} |v|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_2 k_2^2(t)}{k_2(0)} \int_{\Gamma_0} |v_0|^2 d\Gamma_0 \\
&+ \|v\|_{L^2(\Gamma_0)} \left| \int_0^t k_2'(s) ds \right|^{\frac{1}{2}} (|k_2'|\Box u)^{\frac{1}{2}} + C k_2(t) \int_{\Gamma_0} |v|^2 d\Gamma_0 \\
&- \frac{\eta_4 k_4(0)}{2} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_4 k_4^2(t)}{k_4(0)} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial v_0}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
&+ \|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|_{L^2(\Gamma_0)} \left| \int_0^t k_4'(s) ds \right|^{\frac{1}{2}} (|k_4'|\Box \frac{\partial v}{\partial \nu})^{\frac{1}{2}} + C k_4(t) \int_{\Gamma_0} |\frac{\partial v}{\partial \nu}|^2 d\Gamma_0,
\end{aligned}$$

para alguma constante positiva C.

Demonstração. Multiplicando a equação (1) por u, integrando em Ω e usando a fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx &= \int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \int_\Omega f(u-v) u dx \\
&+ \int_{\Gamma_0} \Delta u \frac{\partial u_t}{\partial \nu} d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} u_t d\Gamma_0.
\end{aligned}$$

Usando as condições de fronteira (2.1) e (2.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx &= \int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u|^2 dx - \int_\Omega f(u-v) u dx \\
&-\eta_1 \int_{\Gamma_0} u_t u d\Gamma_0 - \eta_1 k_1(0) \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0 \\
&+\eta_1 k_1(t) \int_{\Gamma_0} u_0 u d\Gamma_0 - \eta_1 \int_{\Gamma_0} k_1' * u u d\Gamma_0 \\
&-\eta_3 \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0 - \eta_3 k_3(0) \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
&-\eta_3 k_3(t) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0 - \eta_3 \int_{\Gamma_0} k_3' * \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx &\leq \int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dx - \int_\Omega f(u-v) u dx \\
&+\frac{\eta_1}{k_1(0)} \int_{\Gamma_0} |u_t|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_1 k_1(0)}{2} \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0 \\
&+\frac{\eta_1 k_1^2(t)}{k_1(0)} \int_{\Gamma_0} |u_0|^2 d\Gamma_0 - \eta_1 \int_{\Gamma_0} k_1' * u u d\Gamma_0 \\
&-\frac{\eta_3 k_3(0)}{2} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_3}{k_3(0)} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
&+\frac{\eta_3 k_3^2(t)}{k_3(0)} \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 - \eta_3 \int_{\Gamma_0} k_3' * \frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0
\end{aligned}
$$

Notando que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0}\int_0^t k_1'(t-s) u(t) ds d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_0}\int_0^t k_1'(t-s)(u(s)-u(t)) u(t) ds d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^t k_1'(s) ds\right) |u|^2 d\Gamma_0 \leq \|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \left(\int_0^t |k_1'(s)| ds\right)^{\frac{1}{2}} (|k_1'|\Box u)^{\frac{1}{2}} \\
&+|k_1(t) - k_1(0)| \|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_0}\int_0^t k_3'(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) ds d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_0}\int_0^t k_3'(t-s) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(t)\right) \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) ds d\Gamma_0 \\
&+ \int_{\Gamma_0} \left(\int_0^t k_3'(s) ds\right) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \leq \|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \left(\int_0^t |k_3'(s)| ds\right)^{\frac{1}{2}} (|k_3'|\Box \frac{\partial u}{\partial \nu})^{\frac{1}{2}} \\
&+|k_3(t) - k_3(0)| \|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)}
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx \leq \int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dx - \int_\Omega f(u-v)udx \\
&+\frac{\eta_1}{k_1(0)}\int_{\Gamma_0}|u_t|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_1 k_1(0)}{2}\int_{\Gamma_0}|u|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1 k_1^2(t)}{k_1(0)}\int_{\Gamma_0}|u_0|^2 d\Gamma_0 \\
&+\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\left|\int_0^t |k_1'(s)ds\right|^{\frac{1}{2}}(|k_1'|\Box u)^{\frac{1}{2}} + Ck_1(t)\int_{\Gamma_0}|u|^2 d\Gamma_0 \\
&-\frac{\eta_3 k_3(0)}{2}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 + \frac{\eta_3 k_3^2(t)}{k_3(0)}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 \\
&+\|\frac{\partial u}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\left|\int_0^t |k_3'(s)|ds\right|^{\frac{1}{2}}(|k_3'|\Box\frac{\partial u}{\partial\nu})^{\frac{1}{2}} + Ck_3(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Similarmente, usando a equação (2) em vez de (1) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega v_t v dx \leq \int_\Omega |v_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta v_t|^2 dx - \int_\Omega f(u-v)vdx \\
&+\frac{\eta_2}{k_2(0)}\int_{\Gamma_0}|v_t|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_2 k_2(0)}{2}\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_2 k_2^2(t)}{k_2(0)}\int_{\Gamma_0}|v_0|^2 d\Gamma_0 \\
&+\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\left|\int_0^t |k_2'(s)ds\right|^{\frac{1}{2}}(|k_2'|\Box v)^{\frac{1}{2}} + Ck_2(t)\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma_0 \\
&-\frac{\eta_4 k_4(0)}{2}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v_t}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 + \frac{\eta_4 k_4^2(t)}{k_3(0)}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 \\
&+\|\frac{\partial v}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\left|\int_0^t |k_4'(s)|ds\right|^{\frac{1}{2}}(|k_4'|\Box\frac{\partial v}{\partial\nu})^{\frac{1}{2}} + Ck_4(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Somando as desigualdades (3.4) e (3.5) e usando a hipótese (11) concluímos a demonstração do Lema. □

Lema 3.1.3. *Seja f uma função real positiva de classe C^1. Se existem constantes positivas γ_0, γ_1 e c_0 tal que*

$$f'(t) \leq -\gamma_0 f(t) + c_0 e^{-\gamma_1 t},$$

Então existem constantes positivas γ e c tal que

$$f(t) \leq (f(0)+c)e^{-\gamma t}$$

Teorema 3.1.1. *Considere* $(u_0, v_0) \in W^2$ *e suponhamos que os núcleos resolventes* $k_1,\ k_2,\ k_3$ *e* k_4 *satisfaçam* (3.1). *Então existem constantes* α_1 *e* α_2 *tal que*

$$E(t) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Provaremos este resultado para soluções fortes, isto é, para soluções com condições inciais $(u_0, v_0) \in (H^4(0, L) \cap W)^2$ e $(u_1, v_1) \in W^2$ satisfazendo as condições de compatibilidade. Nossa conclusão segue por argumentos padrão de densidade. Usando hipotése (3.1) e as imersões de Sobolev no Lema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) \quad \leq \quad & -\frac{\eta_1}{4}\int_{\Gamma_0} |u_t|^2 d\Gamma_0 - \theta \int_\Omega |u_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}k_1^2 \int_{\Gamma_0} |u_0|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_t}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_3}{2} k_3^2(t) \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_2}{4}\int_{\Gamma_0} |v_t|^2 d\Gamma_0 - \theta \int_\Omega |v_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2} k_2^2(t) \int_{\Gamma_0} |v_0|^2 d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_4}{2} k_4^2(t) \int_{\Gamma_0} \mid \frac{\partial v_0}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0} k_1'(t)|u|^2 d\Gamma_0 - \frac{C\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0} k_1' \Box u d\Gamma_0 \\
& + \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0} k_3'(t) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 - \frac{C\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0} k_3' \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0} k_2'(t)|v|^2 d\Gamma_0 \\
& - \frac{C\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0} k_2' \Box v d\Gamma_0 + \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0} k_4'(t) \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} \mid^2 d\Gamma_0 - \frac{C\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0} k_4' \Box \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_0,
\end{aligned}$$

onde θ é uma pequena constante positiva.
Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{L}(t) := NE(t) + \Phi(t) \tag{3.6}$$

com $N > 0$. Considerando N grande, as desigualdades anteriores implicam que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\theta}{2}E(t) + 2NR^2(t)E(0),$$

onde $R(t) = k_1(t) + k_2(t) + k_3(t) + k_4(t)$. Além disso, usando a desigualdade elementar e considerando N grande concluímos que

$$\frac{N}{2}E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq 2NE(t). \tag{3.7}$$

Desta desigualdade concluimos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\theta}{2}\mathcal{L}(t) + 2NR^2(t)E(0).$$

Do Lema 3.1.3 e do decaimento exponencial de k_i, segue que

$$\mathcal{L}(t) \leq \{\mathcal{L}(0) + C\}e^{-\zeta t}$$

para algumas constantes positivas C e ζ. Da desigualdade (3.7) segue nossa conclusão. $\square$

3.2 Decaimento Polinomial

Nossa atenção será focada na taxa de decaimento uniforme quando o núcleo resolvente k_1, k_2, k_3 *e* k_4 decai polinomialmente com taxa $(1+t)^{-p}$. Neste caso, mostraremos que a solução também decai polinomialmente na mesma taxa. Assumiremos as seguintes hipóteses

$$k_i(0) > 0, \quad k_i'(t) \leq -b_1 k_i(t)^{1+\frac{1}{p}}, \quad k_i''(t) \geq b_2[-k_i'(t)]^{1+\frac{1}{p+1}} \quad para \quad i = 1, ..., 4 \tag{3.8}$$

Sendo $p > 1$, b_i e b_2 constantes positivas. Os lemas a seguir serão de fundamental importância

Lema 3.2.1. *Seja (u, v) a solução do sistema (2.1)-(2.9) e denotamos por $(\phi_1, \phi_3) = (u_x(L, t), u(L, t))$ e $(\psi_2, \psi_4) = (v_x(L, t), v(L, t))$. Então,para $p > 1,\ 0 < r < 1$ e $t \geq 0$, temos*

$$(|k_i'|\square\phi_i)^{\frac{1+(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)}} \leq \left(2\int_0^t |k_i'(s)|^r ds \|u\|^2_{L^\infty(0,t;H^2(0,L))}{}^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right) |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\square\phi_i d\Gamma_1,$$
$\forall i = 1, 3$
$$(|k_i'|\square\psi_i)^{\frac{1+(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)}} \leq \left(2\int_0^t |k_i'(s)|^r ds \|v\|^2_{L^\infty(0,t;H^2(0,L))}{}^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right) |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\square\psi_i d\Gamma_1,$$
$\forall i = 2, 4$

Para r=0 temos

$$(|k_i'|\square\phi_i d\Gamma_1)^{\frac{(p+2)}{(p+1)}} \leq \left(2\int_0^t \|u(s,.)\|^2_{H^2(0,1)} ds + t\|u(s,.)\|^2_{H^2(0,L)}\right)^{p+1} |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\square\phi_i d\Gamma_1,$$
$\forall i = 1, 3$
$$(|k_i'|\square\psi_i d\Gamma_1)^{\frac{(p+2)}{(p+1)}} \leq \left(2\int_0^t \|v(s,.)\|^2_{H^2(0,1)} ds + t\|v(s,.)\|^2_{H^2(0,L)}\right)^{p+1} |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\square\psi_i d\Gamma_1,$$
$\forall i = 2, 4$

Demonstração: Ver [18].

Teorema 3.2.1. *Considere* $(u_0, v_0) \in W$ *e* $(u_1, v_1) \in L^2(0, L)$. *Se o núcleo resolvente* k_i *satisfaz a condição (3.8), então existe uma constante positiva* C *tal que*

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{p+1}} E(0).$$

Demonstração. Provaremos este resultado para soluções fortes, isto é, para soluções com condição incial $(u_0, v_0) \in (H^4(0, L) \cap W)^2$ e $(u_1, v_1) \in W^2$ satisfazendo as condições de compatibilidade. Nossa conclusão segue por argumentos padrão de densidade. Usando hipótese (3.8) no Lema 3.1.1 temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) \quad \leq \quad & -\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}|u_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}k_1^2\int_{\Gamma_0}|u_0|^2 d\Gamma_0 - \frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 \\
& +\frac{\eta_3}{2}k_3^2(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 - \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}|v_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}k_2^2(t)\int_{\Gamma_0}|v_0|^2 d\Gamma_0 \\
& +\frac{\eta_4}{2}k_4^2(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 + \frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}k_1'(t)|u|^2 d\Gamma_0 - \frac{b_2\eta_1}{2}\int_{\Gamma_0}[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u d\Gamma_0 \\
& +\frac{\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}k_3'(t)\,|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 - \frac{b_2\eta_3}{2}\int_{\Gamma_0}[-k_3']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}k_2'(t)|v|^2 d\Gamma_0 \\
& -\frac{b_2\eta_2}{2}\int_{\Gamma_0}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box v d\Gamma_0 + \frac{\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}k_4'(t)\,|\frac{\partial v}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 - \frac{b_2\eta_4}{2}\int_{\Gamma_0}[-k_4']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade elementar e usando hipótese (3.8) no Lema 3.1.2 encontramos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\Phi(t) \leq \int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |v_t|^2 dx - \int_\Omega |\Delta u|^2 dx \\
& -\int_\Omega |\Delta v|^2 dx - (2+\delta)\int_\Omega F(u-v)u dx \\
& +\frac{\eta_1}{k_1(0)}\int_{\Gamma_0}|u_t|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_1 k_1^2(t)}{k_1(0)}\int_{\Gamma_0}|u_0|^2 d\Gamma_0 \\
& +C\int_{\Gamma_0}k_1^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u d\Gamma_0 + Ck_1(t)\int_{\Gamma_0}|u|^2 d\Gamma_0 \\
& +\frac{\eta_3 k_3^2(t)}{k_3(0)}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 + C\int_{\Gamma_0}k_3^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0 \\
& +Ck_3(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 + \frac{\eta_2}{k_2(0)}\int_{\Gamma_0}|v_t|^2 d\Gamma_0 \\
& +\frac{\eta_2 k_2^2(t)}{k_2(0)}\int_{\Gamma_0}|v_0|^2 d\Gamma_0 + C\int_{\Gamma_0}k_2^{1+\frac{1}{p+1}}\Box v d\Gamma_0 \\
& +Ck_2(t)\int_{\Gamma_0}|v|^2 d\Gamma_0 + \frac{\eta_4 k_4^2(t)}{k_4(0)}\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v_0}{\partial\nu}|^2\, d\Gamma_0 \\
& +C\int_{\Gamma_0}k_4^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0 + Ck_4(t)\int_{\Gamma_0}|\frac{\partial v}{\partial\nu}|^2 d\Gamma_0.
\end{aligned}$$

Considerando N grande e usando as imersões de Sobolev o funcional definido em (3.6) satifaz

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & -\frac{\theta}{2}\mathcal{N}(t) + 2NR^2(t)E(0) \\
& -\frac{NC_2}{2}\{\int_{\Gamma_0}[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square v d\Gamma_0\} \\
& + \int_{\Gamma_0}[-k_3']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_0}[-k_4']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

onde

$$
\mathcal{N}(t) = -\int_{\Omega}\{|u_t|^2 + |v_t|^2 + |\Delta u|^2 + |\Delta v|^2 + F(u-v)\}dx.
$$

Fixando $0 < r < 1$ tal que $\frac{1}{p+1} < r < \frac{p}{p+1}$, temos que

$$
\int_0^\infty |k_i'|^r \leq C\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{r(p+1)}} < \infty \quad para \quad i = 1, ..., 4.
$$

Usando esta estimativa no Lema 3.2.1 obtemos

$$
\int_{\Gamma_0}[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u d\Gamma_0 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_1']\square u d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}, \tag{3.10}
$$

$$
\int_{\Gamma_0}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square v d\Gamma_0 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_2']\square v d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}, \tag{3.11}
$$

$$
\int_{\Gamma_0}[-k_3']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_3']\square\frac{\partial u}{\partial\nu}d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}, \tag{3.12}
$$

$$
\int_{\Gamma_0}[-k_4']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_4']\square\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}. \tag{3.13}
$$

Por outro lado, usando o teorema do Traço encontramos

$$
E(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}} \leq CE(0)^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\mathcal{N}(t). \tag{3.14}
$$

Substituindo(3.10)-(3.14) em (3.9) resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}E(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}} + 2NR^2(t)E(0)\\ &\quad -CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left\{\left(\int_{\Gamma_0}[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right\}\\ &\quad -CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left\{\left(\int_{\Gamma_0}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box v d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right\}\\ &\quad -CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left\{\left(\int_{\Gamma_0}[-k_3']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right\}\\ &\quad -CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\left\{\left(\int_{\Gamma_0}[-k_4']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\right\}\end{aligned}$$

Considerando a desigualdade (3.7) concluímos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{C}{\mathcal{L}(0)^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}}}\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}} + 2NR^2(t)E(0),$$

para algum $C > 0$, de onde segue, aplicando o Lema3.2.2 que

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{(1-r)(p+1)}}\mathcal{L}(0).$$

Visto que $(1-r)(p+1) > 1$ obtemos, para $t \geq 0$, as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}&t\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + t\|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq Ct\mathcal{L}(t) < \infty,\\ &t\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + t\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq Ct\mathcal{L}(t) < \infty,\\ &\int_0^t \{\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\}ds \leq C\int_0^t \mathcal{L}(s)ds < \infty,\\ &\int_0^t \{\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|^2_{L^2(\Gamma_0)}\}ds \leq C\int_0^t \mathcal{L}(s)ds < \infty.\end{aligned}$$

Usando as estimativas acima no Lema 3.2.1 com $r = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_0}[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u d\Gamma_0 \geq \frac{C}{E(0)^{\frac{1}{p+1}}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_1']\Box u d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{p+1}},\\ &\int_{\Gamma_0}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box v d\Gamma_0 \geq \frac{C}{E(0)^{\frac{1}{p+1}}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_2']\Box v d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{p+1}},\\ &\int_{\Gamma_0}[-k_3']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0 \geq \frac{C}{E(0)^{\frac{1}{p+1}}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_3']\Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{p+1}},\\ &\int_{\Gamma_0}[-k_4']^{1+\frac{1}{p+1}}\Box \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_0 \geq \frac{C}{E(0)^{\frac{1}{p+1}}}\left(\int_{\Gamma_0}[-k_4']\Box \frac{\partial v}{\partial \nu} d\Gamma_0\right)^{1+\frac{1}{p+1}}.\end{aligned}$$

Usando estas desigualdades em vez (3.10)-(3.13) e o mesmo raciocínio anterior resulta que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{C}{\mathcal{L}(0)^{\frac{1}{p+1}}}\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{p+1}} + 2NR^2(t)E(0).$$

Aplicando outra vez o Lema (3.2.2), obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{p+1}}\mathcal{L}(0).$$

Finalmente, de (3.7) concluímos

$$E(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{p+1}}E(0).$$

$\square$

O que conclui a demonstração.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, (1984).

[2] LIONS, J. L. *Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, (1969).

[3] CAVALCANTI, M. M , CAVALCANTI, V . N. D. & Ma, T.F. *Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains,* Diff. Integral Equations , 17, (5-6), (2004), 495-510.

[4] CAVALCANTI, M. M. *Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal dissipation,* Discrete Contin. Dynam. System, 8 (3), (2002), 675-695.

[5] GUESMIA, A. *Energy decay for a damped nonlinear coupled system,* J. Math. Anal. Appl. 239, (1999), 38-48.

[6] KORMONIK, V. *Exact controllability and Stabilization.* The Multiplier Method, John Wiley and Sons-Masson, Paris (1994).

[7] MIRANDA, M. M. & MEDEIROS, L. A. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Métodos Matemáticos No. 25, IM-UFRJ, 1993.

[8] LANG, H. & MENZALA, G. P. *Rates of decay of a nonlocal equation,* Diff. Integral Equations, 10 (1997), 1075-1092.

[9] RIVERA, J. E. M. *Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais,* IM-UFRJ, 2004.

[10] RIVERA, J. E. M. *Energy decay rates in linear thermoelasticity.* Func. Ekvacioj, 1992, 35 (1):19-30.

[11] SANTOS, M. L. *Asympototic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary,* Electron.J. Diff. Eqns. 2001, 73, (2001), 1-11.

[12] PATCHEU, S. K. *On a global solution and asymptotic behavior for the generalized damped extensible beam equation,* J. Differential equations, 135, (1997), 299-314.

[13] LAGNESE, J. E. *Asympotic energy estimates for Kirchhoff plates subject to weak viscoelastic damping,* Control and Estimation of Distributed Paramater System, 4th Int. Conf. Varou/Austria 1988, International Series Of Numerical Mathematics 91, Birkhäuser, Basel, 1989, 211-236.

[14] MA, T. F. *Boundary stabilization for a non-linear beam on elastic bearings,* Math. Meth. Appl.Sci, 24, (2001), 583-594.

[15] J. E. M, LAPA, E. C. & BARRETO, R. *Decay rates for viscoelastic plates with memory,* J. of Elasticity, 44, (1996), 61-87.

[16] PARK, J. Y. & PARK, S. H. *On uniform decay for the coupled Euler- Bernoulli vicoelastic system with boundary damping,* Discrete Contin. Dynam. Systems, 12(3), (2005), 425-436.

[17] PAZOTO, A. F. & MENZALA, G. P. *Uniform stabilization beam model with thermal effects and nonlinear boundary dissipation,* Funkcialaj Ekvacioj, 43, 2, (2000), 1-11.

[18] SANTOS, M. L. & JUNIOR, F. *A boundary condition with memory for Kirchhoff plates eqautions,* Applied Mathematics and Computations, 148 (2004), 475-496.

[19] RACKE, R. *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems.* Aspect of Mathematics E19. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1992).

[20] TUCSNAK, M. *Semi-internal stabilization for a nonlinear Euler-Bernoulli equation,* Math. Meth. Appl. Sci, 19, (1996), 897-907.

[21] MEDEIROS, L . A. & Melo, E .A. *A integral de Lebesgue,* Textos de Médotos Matemáticos. IM-UFRJ, 1989.