UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Pedro Luíz Oliveira Braga

SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO EM UM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO: SOLUÇÃO GLOBAL FORTE E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-PA
2006

Pedro Luíz Oliveira Braga

SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO EM UM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO: SOLUÇÃO GLOBAL FORTE E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como quisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-PA

2006

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA
Presidente

Prof. Dr. xxxxxxxx xxxxx xxxxxx
wwwwwwwwwwwwwwwww, uuuu
Examinador

Prof. Dr. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
wwwwwwwwwwwwwwwwwwwww, Uuuu
Examinador

Agradecimentos

⋆ Agradeço a Deus, Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e força para chegar ao final deste trabalho;

⋆ Agradeço também a minha mãe (Aurelina Braga) e esposa (Isis Simão) pela força e encorajamento para seguir em frente, e a todos aqueles que considero família;

⋆ Ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, pela orientação, disponibilidade e atenção dispensados na elaboração deste trabalho;

⋆ Aos professores do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística;

⋆ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas;

⋆ Agradeço à Telma, secretária do mestrado, pelo carinho e paciência que sempre dedicou;

⋆ À todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

Resumo

Neste trabalho demonstramos o decaimento exponencial para o caso ($n > 2$) de soluções regulares para um sistema acoplado não linear de equações de onda com memória e damping fraco em um domínio não cilíndrico do $\mathbb{R}^{n+1}(n \geq 1)$ com convenientes hipóteses sobre as funções escalares h, g_1 e g_2 e onde α é uma constante positiva.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \quad em \quad \hat{Q} \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \quad em \quad \hat{Q} \end{aligned}$$

Mostraremos que tal dissipação é bastante forte para produzir taxa uniforme de decaimento. Além disso, o acoplamento é não linear que apresenta algumas dificuldades técnicas, tornando o problema interessante. Obtemos também existência e unicidade de soluções regulares para $n \geq 1$.

Abstract

In this work we prove the exponential decay in the case $n > 2$, as time goes to infinity, of regular solutions for a nonlinear coupled system of wave equations with memory and weak damping in a non cylindrical domains of $\mathbb{R}^{n+1}$ $(n \geq 1)$ under suitable hypothesis on the scalar functions h, g_1 and g_2, and where α is a positive constant.

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \;\; em \;\; \hat{Q}$$
$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \;\; em \;\; \hat{Q}$$

We show that such dissipation is strong enough to produce uniform rate of decay. Besides, the coupled is nonlinear which brings up some additional difficulties, which makes the problem interesting. We establish existence and uniqueness of regular solutions for any $n \geq 1$.

SUMÁRIO

Resumo **v**

Abstract **vi**

Introdução **2**

1 Preliminares **5**

1.1 Teoria das Distribuições Escalares 5

1.1.1 Espaços das Funções Testes 5

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ 6

1.1.3 Distribuições Escalares 7

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional 9

1.2 Espaços de Sobolev 10

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$ 10

1.3 Outros Resultados Importantes 12

2 Existência e Regularidade de Soluções **14**

3 Decaimento Exponencial **24**

BIBLIOGRAFIA **31**

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de soluções fortes bem como o decaimento exponencial de energia para um sistema acoplado não linear de equações de onda com memória e damping fraco, dada por:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \ \ em \ \ \hat{Q} \tag{1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \ \ em \ \ \hat{Q} \tag{2}$$

$$u = v = 0 \ \ sobre \ \ \hat{\sum}, \tag{3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \ \ (u_t(x), v_t(x)) = u_1(x), v_1(x) \ \ em \ \ \Omega_0. \tag{4}$$

onde u e v representam o deslocamento vertical e α constante positiva.

Aqui Ω é um domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^2, o qual sem perda de generalidade contém a origem do $\mathbb{R}^n$ e $\gamma : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Consideremos a família de subdomínio $\{\Omega_t\}_{0 \leq t \leq \infty}$ do $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\Omega_t = T(\Omega), \quad T : x \in \Omega \longrightarrow y = \frac{x}{\gamma(t)}$$

cujas as fronteiras são denotadas por Γ_t e $\hat{Q}$ o domínio não cilíndrico do $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\hat{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} \Omega_t \times \{t\} \text{ com fronteira lateral } \hat{\sum} = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} \Gamma_t \times \{t\}$$

O método que usaremos para provar o resultado de existência e unicidade é baseado em transformar nosso problema em outro problema de valor inicial definido sobre um domínio cilíndrico do qual as secções não são tempo-dependente. Isto será feito, usando uma mudança de variável adequada, onde mostraremos a existência e unicidade para este novo problema. Em seguida usaremos a transformação inversa para retornar ao problema original onde mostraremos a existência e unicidade para o nosso problema. A aplicação do difeomorfismo segue o que foi feito em Cunha [15].

O método acima foi introduzido por Dal Passo e Ughi [12] para estudar certas classes de equações parabólicas em domínio não cilíndrico.

Para ver as propriedades dissipativas do sistema temos que construir um funcional adequado cuja a derivada seja negativa e seja equivalente a energia de primeira ordem. Este funcional é obtido usando a técnica multiplicativa usadas por Komornik [6] ou Rivera [8]. Do ponto de vista físico, o problema (1)-(4) descreve o deslocamento transversal da membrana viscoelástica esticada e fixada em um mecanismo de fronteira móvel. A propriedade viscoelástica do material é caracterizada pelos termos de memória

$$\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds, \quad \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds.$$

Em um domínio fixo, o sistema de equações de onda com acoplamento linear e não linear foram estudados por diferentes autores, todos eles consideram essencialmente dois tipos de mecanismos dissipativos.

(a)A dissipação de energia, obtida pela imtrodução de um "termo de fricção"que pode agir sobre todo o domínio na fronteira(ou parte da fronteira) ou em alguma vizinhança localizada da fronteira.

(b)A dissipação viscoelástica dada pelo efeito memória como em [11], [13], [14] .

A dissipação de atrito é um mecanismo dissipativo simples. Ele age sobre todo o domínio Ω ou na fronteira(ou parte da fronteira) ou em alguma parte estratégica do domínio(damping localizado). Foi provado por [1], [2], [3], [6] que a energia de primeira ordem decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

Finalmente, o efeito memória sobre o tensor de tensão produz um mecanismo dissipativo satisfatório que depende da função relaxamento (veja [11], [13], [14]). Eles provaram que a energia decai uniformemente exponencialmente ou algebricamente com a mesma taxa de decaimento como a função relaxamento, isto é, quando a função relaxamento decai exponencialmente, a energia corresponddente também decai exponencialmente. Por outro lado, quando a função relaxamento decai polinomialmente então a energia correspondente também decai polinomialmente e com a mesma taxa.

As notações que usaremos neste trabalho são padrão e podem ser encontradas no livro de Lions

[8],[9]. Nas sequências C (algumas vezes $C_1, C_2, ...$) denotaremos várias constantes positivas, o qual não dependem de t ou dados iniciais.

Este trabalho foi organizado do seguinte modo: No capítulo 2 provaremos a existência, regularidade e unicidade de soluções. Usaremos aproximação de Galerkin, Teorema de Aubin-Lions, método de energia, introduzida por Lions [9] e algumas idéias técnicas para mostrar existência , regularidade e unicidade de soluções para o problema (1)-(4). Finalmente, no capítulo 3, demostraremos o decaimento exponencial de soluções regulares para o problema (1)-(4). Usaremos as técnicas multiplicativas introduzida por Kormornik [6], Lions [9] e Rivera [11] juntamente com alguns lemas técnicos e algumas idéias técnicas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Denominamos suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, temos que

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \;\text{ em }\; \Omega.$$

Usando a definição acima concluímos que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$,
2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$,
3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto contido em Ω que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \;\text{ e }\; supp(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty\,(\Omega)$ juntamente com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado espaços das funções testes.

Denota-se por $L^p(\Omega),\ 1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty,\ L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|$$

Quando $p = 2,\ L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1.2. *Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$ com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \, \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

Notemos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0. \end{aligned}$$

Para a demostração de que a imersão anterior é densa veja [8].

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o objetivo de generalizar o conceito de funções sobre Ω introduziremos o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Considere no espaço vetorial das distribuições escalares a seguinte noção de convergência:

A sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T quando a sucessão $(\langle T_\nu,\varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T,\varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.
O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência, será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. *. Temos que uma função $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K\subset\Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos*

$$u\in L^1_{loc}(\Omega)\Longleftrightarrow\int\limits_K |u(x)|\,dx<\infty,$$

para todo compacto $K\subset\Omega$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e usando o *Lema Du Bois Raymond* temos que T_u é univocamente determinada por u no seguinte sentido: $T_u=T_v$ se, e somente se, $u=v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond). *Seja $u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u=0$ se, e somente se, $u=0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: veja [18]
É importante ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$. Como pode ser visto no exemplo a seguir.

Com essa noção de convergência $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega)\hookrightarrow L^P(\Omega)\hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)\hookrightarrow D'(\Omega)\,,1\le p<\infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, por L.Schwartz. Veja [23].

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índece. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado interessante a ser mercionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$ como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.1. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$, mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$ basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato

$$< u^{'}, \varphi >= - < u, \varphi^{'} >= - \int_{0}^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^{\alpha} T_u = T_{D^{\alpha} u}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

É uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$ u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $D^{\alpha}u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados *Espaços de Sobolev.*
Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\right\}.$$

O Traço em $H^1(\Omega)$

Foi demonstrado em [18] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$ por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma,$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0 denominado operador traço é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$ cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: veja [18].

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$ tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: veja [8].

De posse destes dois resultados concluímos que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$ sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [23].

1.3 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.3.1 (Convergência Fraca). *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Temos que $u_\nu \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E^{'}.$$

Definição 1.3.2 (Convergência Fraca Estrela). *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Temos que $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco $\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

Lema 1.3.1 (Lema de Gronwall). *Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \quad \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Veja [23].

Lema 1.3.2 (Desigualdade de Yoyng). *Dados $\varepsilon > 0$ e dois números reais a e b, é válida a seguinte relação*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Demonstração. Veja [10].

Teorema 1.3.1. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca.*

Denotamos por B_0, B e B_1 espaços de Banach onde B_0 e B_1 são espaços reflexivos satisfazendo

$$B_0 \subset B \subset B_1, \text{ a imersão de } B_0 \text{ em } B \text{ é compacta.} \quad (a)$$

Demonstração. Veja [8].

Lema 1.3.3 (Aubin-Lions). . *Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$ e suponhamos que (a) seja válida. Então, a imersão de W sobre $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta, sendo W=$\{v;\ v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$.*

Demonstração. Veja [8].

Lema 1.3.4. *Sejam V, H espaços de Hilbert, com $V \hookrightarrow H$ (imersão contínua). Se $u \in L^p((0,1);V)$, $u_t \in L^p((0,1);H)$, $1 \leq p < \infty$, então $u \in C((0,1);H)$.*

Demonstração. Veja [8].

Capítulo 2

Existência e Regularidade de Soluções

Neste capítulo vamos estudar a existência e regularidade de soluções fortes para o sistema abaixo:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \ \ em \ \ \hat{Q} \tag{2.1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \ \ em \ \ \hat{Q} \tag{2.2}$$

$$u = v = 0 \ \ sobre \ \ \hat{\sum}, \tag{2.3}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \ \ (u_t(x), v_t(x)) = u_1(x), v_1(x) \ \ em \ \ \Omega_0. \tag{2.4}$$

onde u e v são deslocamento transversal e α constante positiva.

Antes, iremos transformar o problema proposto em um domínio não-cilíndrico para um domínio cilíndrico. Para isso usaremos o seguinte difeomorfismo:

$$\tau : \hat{Q} \longrightarrow Q, \ (x,t) \in \Omega_t \longrightarrow (y,t) = \left(\frac{x}{\gamma}(t), t\right) \tag{2.5}$$

e $\tau^{-1} : \hat{Q} \longrightarrow Q$ definido por

$$\tau^{-1}(y,t) = (x,t) = (\gamma(t)y, t). \tag{2.6}$$

Denotaremos por φ e ψ as funções

$$\varphi(y,t) = u \circ \tau^{-1}(y,t) = u(\gamma(t)y, t),$$

$$\psi(y,t) = v \circ \psi^{-1}(y,t) = v(\gamma(t)y, t). \tag{2.7}$$

O problema de valor inicial e de fronteira (2.1) – (2.4) transformam-se em:

$$\varphi_{tt} - \gamma^{-2}\Delta\varphi + \int_0^t g_1(t-s)\gamma^{-2}(s)\Delta\varphi(s)ds + \alpha\varphi_t$$

$$-h(\varphi-\psi) - A(t)\varphi + a_1.\nabla\partial_t\varphi + a_2.\nabla\varphi = 0 \quad em \quad Q \tag{2.8}$$

$$\psi_{tt} - \gamma^{-2}\Delta\psi + \int_0^t g_2(t-s)\gamma^{-2}(s)\Delta\psi(s)ds + \alpha\psi_t$$

$$-h(\varphi-\psi) - A(t)\psi + a_1.\nabla\partial_t\psi + a_2.\nabla\psi = 0 \quad em \quad Q \tag{2.9}$$

$$\varphi|_\Gamma = \psi|_\Gamma = 0, \tag{2.10}$$

$$(\varphi|_{t=0}, \psi|_{t=0}) = (\varphi_0, \psi_0) \quad (\varphi_t|_{t=0}, \psi_t|_{t=0}) = (\varphi_1, \psi_1) \quad em \quad \Omega, \tag{2.11}$$

onde

$$A(t)\varphi = \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_i}(a_{ij}\partial_{y_i}\varphi), \quad A(t)\psi = \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_i}(a_{ij}\partial_{y_i}\psi)$$

e

$$\begin{cases} a_{ij}(y,t) = -(\gamma'\gamma^{-1})^2 y_i y_j \quad (i,j = 1,...,n), \\ a_1(y,t) = -2\gamma'\gamma^{-1})^2 y, \\ a_2(y,t) = -\gamma^{-2}y(\gamma''\gamma + \gamma'(\alpha\gamma + (n-1)\gamma')). \end{cases} \tag{2.12}$$

Para mostrar a existência de soluções forte usaremos as seguites hipóteses.

$$\gamma' \leq 0 \quad em \quad n > 2, \quad \gamma' \geq 0 \quad se \quad n < 2, \tag{2.13}$$

$$\gamma(.) \in L^{(0,\infty)}, \inf_{0 \leq < \infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0, \tag{2.14}$$

$$\gamma' \in W^{2,\infty}(0,\infty) \cap W^{2,1}(0,\infty). \tag{2.15}$$

Note que a hipótese (2.13) significa que $\hat{Q}$ está decrescente se $n > 2$ e crescente se $n \leq 2$ no sentido que quando $t > t'$ e $n > 2$ então a projeção de Ω_t sobre o espaço $t = 0$ contém a projeção de Ω_t sobre o mesmo subespaço e contrário no caso $n \leq 2$.

Para isto consideremos o núcleo $g_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ pertencente a $W^{2,1}(0,\infty)$ e satisfazendo

$$g_i > 0, \quad -g_i' > 0, \quad \gamma_1^{-2} - \int_0^\infty g_i(s)\gamma^{-2}(s)ds = \beta_i > 0, \quad i = 1, 2 \tag{2.16}$$

onde

$$\gamma_1 = \sup_{0 \leq t < \infty} \gamma(t).$$

A hipótese acima (2.16), implica

$$\beta_i \leq \gamma(t)^{-2} - \int_0^\infty g_i(s)\gamma^{-2}(s)ds \leq \frac{1}{\gamma_0^2}.$$

Seja $h \in C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo

$$h(s)s \geq \ 0, \ \ \forall \ \ s \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, consideramos que h é superlinear, isto é:

$$h(s)s \geq (2+\delta)H(s), \quad H(z) = \int_0^z h(s)ds \ \ \forall \ \ s \in \mathbb{R},$$

para algum $\delta > 0$ com a seguinte condição de crescimento

$$|h(x) - h(y)| \leq C(1 + |x|^{\rho-1} + |y|^{\rho-1})|x - y|, \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}$$

para algum $C > 0$, $\rho \geq 1$ tal que $(n-2) \leq n$. Para simplificar nossa análise, vamos definir o operador binário

$$g\Box\frac{\nabla\phi(t)}{\gamma(t)} = \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\gamma^{-2}(s)|\nabla\phi(t) - \nabla\phi(s)|^2 dsdx.$$

Com esta notação temos a seguinte afirmação:

Lema 2.0.5. *Para $\phi \in C^1(0,T : H^1(\Omega))$ temos*

$$\int_\Omega \int_0^t g(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\phi.\nabla\phi_t dsdx = -\frac{1}{2}\frac{g(t)}{\gamma^2(0)}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx + \frac{1}{2}g'\Box\frac{\nabla\phi}{\gamma}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g\Box\frac{\nabla\phi}{\gamma} - \left(\int_0^t \frac{g(s)}{\gamma^2(s)}ds\right)\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx\right].$$

A prova deste lema segue por diferenciação ao termo $g\Box\dfrac{\nabla u(t)}{\gamma(t)}$.

Teorema 2.0.2. *Seja* $(\varphi_0, \psi_0) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$, $(\varphi_1, \psi_1) \in (H_0^1(\Omega))^2$ *e suponhamos que as hipóteses* (2.11)-(2.13) *sejam satisfeitas. Então, existe uma única solução* (φ, ψ) *do problema* (2.1)-(2.4) *satisfazendo*

$$\varphi, \psi \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

$$\varphi_t, \psi_t \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega))$$

$$\varphi_{tt}, \psi_{tt} \in L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Denotaremos por B o operador

$$Bw = -\Delta\omega, \quad D(B) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

B é um opedrador auto adjunto positivo no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$ para o qual existe sequências $\{\omega\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\lambda\}_{n\in\mathbb{N}}$ de auto funções e autovalores de B tal que o conjunto das combinações lineares de $\{\omega\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $D(B)$ e $\lambda_1 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Denotamos por:

$$\varphi_0^m = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_0, \omega_j)\omega_j, \quad \psi_0^m = \sum_{j=1}^{m} (\psi_0, \omega_j)\omega_j$$

$$\varphi_1^m = \sum_{j=1}^{m} (\varphi_1, \omega_j)\omega_j, \quad \psi_1^m = \sum_{j=1}^{m} (\psi_1, \omega_j)\omega_j$$

Note que para qualquer $\{\varphi_0, \psi_0\}$, $\{\varphi_1, \psi_1\} \in (D(B))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$, temos que $(\varphi_0^m, \psi_0^m) \to (\varphi_0, \psi_0)$ forte em $(D(B))^2$ e $(\varphi_1^m, \psi_1^m) \to (\varphi_1, \psi_1)$ forte em $(H_0^1(\Omega))^2$.

Denotando por V_m o espaço gerado por $\omega_1, ..., \omega_m$ resulta do Teorema de Picard implica a existência de solução local (φ^m, ψ^m) da forma

$$(\varphi^m(t), \psi^m(t)) = \sum_{j=1}^{m} (h_{jm}(t), f_{jm}(t))\omega_j,$$

para o sistema

$$\int_\Omega \varphi_{tt}^m \omega_j dy + \alpha \int_\Omega \varphi_t^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_\Omega \Delta\varphi^m \omega_j dy + \int_\Omega h(\varphi^m - \psi^m)\omega_j dy$$

$$+ \int_\Omega \int_0^t g_1(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\varphi^m(s).\nabla\varphi_j ds dy + \int_\Omega A(t)\varphi^m \omega_j dy$$

$$+ \int_\Omega a_1.\nabla\varphi_t^m \omega_j dy + \int_\Omega a_2.\nabla\varphi^m \omega_j dy = 0, \quad (j = 1, ..., m), \tag{2.17}$$

$$\int_\Omega \psi_{tt}^m \omega_j dy + \alpha \int_\Omega \psi_t^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_\Omega \Delta\psi^m \omega_j dy + \int_\Omega h(\varphi^m - \psi^m)\omega_j dy$$

$$+ \int_\Omega \int_0^t g_2(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\psi^m(s).\nabla\psi_j ds dy + \int_\Omega A(t)\psi^m \omega_j dy$$

$$+ \int_\Omega a_1.\nabla\psi_t^m \omega_j dy + \int_\Omega a_2.\nabla\psi^m \omega_j dy = 0, \quad (j = 1, ..., m), \tag{2.18}$$

$$(\varphi^m(x,0), \psi^m(x,0)) = (\varphi_0^m, \psi_0^m) \quad (\varphi_t^m(x,0), \psi_t^m(x,0)) = (\varphi_1^m, \psi_1^m). \tag{2.19}$$

Ver [4] para detalhes.

A extensão dessas soluções para o intervalo inteiro $[0, T]$, $0 < T < \infty$, é consequencia da primeira estimativa que vamos provar a seguir.

I ESTIMATIVA APRIORI

Multiplicando a equação (2.17)-(2.18) por $h'_{jm}(t)$ e f'_{jm}, respectivamente, somando o resultado do produto e usando o **Lema 2.0.5**, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\pounds_1^m(t, \varphi^m, \psi^m) + \alpha(\|\varphi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2) + \int_\Omega A(t)\varphi^m \varphi_t^m dy + \int_\Omega A(t)\psi^m \psi_t^m dy$$

$$+ \int_\Omega a_1.\nabla\varphi_t^m \varphi_t^m dy + \int_\Omega a_1.\nabla\psi_t^m \psi_t^m dy + \int_\Omega a_2.\nabla\varphi^m \varphi_t^m dy + \int_\Omega a_2.\nabla\psi^m \psi_t^m dy$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)}\|\nabla\varphi^m\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{g_2(t)}{\gamma^2(0)}\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}g_1'\square\frac{\nabla\varphi^m}{\gamma} + \frac{1}{2}g_2'\square\frac{\nabla\psi^m}{\gamma}$$

$$-\frac{\gamma'}{\gamma^3}\|\nabla\varphi^m\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\gamma'}{\gamma^3}\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

onde

$$\pounds_1^m(t,\varphi^m,\psi^m) = \|\varphi_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\varphi^m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+g_1\square\frac{\nabla\varphi^m}{\gamma}\|\psi_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\psi^m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+g_2\square\frac{\nabla\psi^m}{\gamma} + \int_\Omega H(\varphi^m - \psi^m)dy.$$

Considerando (2.11), (2.13) e (2.16), obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\pounds_1^m(t,\varphi^m,\psi^m) + \alpha(\|\varphi_t^m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_t^m\|^2_{L^2(\Omega)}) \le C(|\gamma'| + |\gamma''|)\pounds_1^m(t). \tag{2.20}$$

Integrando a desigualdade (2.20), usando o Lema de Gronwall e considerando (2.13) obtemos:

$$\pounds_1^m(t,\varphi^m,\psi^m) + \int_0^t(\|\varphi_s^m(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_s^m(s)\|^2_{L^2(\Omega)})ds \le C, \quad \forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.21}$$

II ESTIMATIVA APRIORI

Da equação (2.17) e (2.18) obtemos:

$$\|\varphi_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_{tt}^m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Usando as hipóteses sobre g_i e γ, e diferenciando as equações (2.17) e (2.18) em relação ao tempo, obtemos

$$\int_\Omega \varphi_{ttt}^m\omega_j dy + \alpha\int_\Omega \varphi_{tt}^m\omega_j dy - \gamma^{-2}\int_\Omega \Delta\varphi_t^m\omega_j dy + 2\frac{\gamma'}{\gamma^3}\int_\Omega \Delta\varphi^m\omega_j dy - \frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)}\int_\Omega \Delta\varphi_0^m\omega_j dy$$

$$+\int_\Omega\int_0^t g_1'(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\varphi^m(s)ds.\nabla\omega_j dy + \int_\Omega \frac{d}{dt}(A(t)\varphi^m)\omega_j dy + \int_\Omega \frac{d}{dt}(a_1.\nabla\varphi_t^m)\omega_j dy$$

$$+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_2.\nabla\varphi^m)\omega_j dy+\int_\Omega h'(\varphi^m-\psi^m)(\varphi_t^m-\psi_t^m)\omega_j dy=0 \tag{2.23}$$

$$\int_\Omega \psi_{ttt}^m\omega_j dy+\alpha\int_\Omega \psi_{tt}^m\omega_j dy-\gamma^{-2}\int_\Omega \Delta\psi_t^m\omega_j dy+2\frac{\gamma'}{\gamma^3}\int_\Omega \Delta\psi^m\omega_j dy-\frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)}\int_\Omega \Delta\psi_0^m\omega_j dy$$

$$+\int_\Omega\int_0^t g_2'(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\psi^m(s)ds.\nabla\omega_j dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(A(t)\psi^m)\omega_j dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_1.\nabla\psi_t^m)\omega_j dy$$

$$+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_2.\nabla\psi^m)\omega_j dy+\int_\Omega h'(\varphi^m-\psi^m)(\varphi_t^m-\psi_t^m)\omega_j dy=0 \tag{2.24}$$

Multiplicando (2.25) por h''_{jm} e (2.24) por f''_{jm}, e somando as equações resultantes, obtemos:

$$\int_\Omega \varphi_{ttt}^m\varphi_{tt}^m dy+\alpha\int_\Omega \varphi_{tt}^m\varphi_{tt}^m dy-\gamma^{-2}\int_\Omega \Delta\varphi_t^m\varphi_{tt}^m dy+2\frac{\gamma'}{\gamma^3}\int_\Omega \Delta\varphi^m\varphi_{tt}^m dy-\frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)}\int_\Omega \Delta\varphi_0^m\varphi_{tt}^m dy$$

$$+\int_\Omega\int_0^t g_1'(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\varphi^m(s)ds.\nabla\varphi_{tt} dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(A(t)\varphi^m)\varphi_{tt}^m dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_1.\nabla\varphi_t^m)\varphi_{tt}^m dy$$

$$+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_2.\nabla\varphi^m)\varphi_{tt}^m dy+\int_\Omega h'(\varphi^m-\psi^m)(\varphi_t^m-\psi_t^m)\varphi_{tt} dy$$

$$\int_\Omega \psi_{ttt}^m\omega_j dy+\alpha\int_\Omega \psi_{tt}^m\psi_{tt} dy-\gamma^{-2}\int_\Omega \Delta\psi_t^m\psi_{tt}^m dy+2\frac{\gamma'}{\gamma^3}\int_\Omega \Delta\psi^m\psi_{tt}^m dy-\frac{g_2(t)}{\gamma^2(0)}\int_\Omega \Delta\psi_0^m\psi_{tt}^m dy$$

$$+\int_\Omega\int_0^t g_2'(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla\psi^m(s)ds.\nabla\psi_{tt}^m dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(A(t)\psi^m)\psi_{tt}^m dy+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_1.\nabla\psi_t^m)\psi_{tt}^m dy$$

$$+\int_\Omega \frac{d}{dt}(a_2.\nabla\psi^m)\psi_{tt}^m dy-\int_\Omega h'(\varphi^m-\psi^m)(\varphi_t^m-\psi_t^m)\psi_{tt}^m dy=0. \tag{2.25}$$

Seja $p_n=\dfrac{2n}{n-2}$. Da condição de crescimento da função h e usando as imersões de Sobolev, temos:

$$\int_\Omega h'(\varphi^m-\psi^m)\varphi_t^m\varphi_{tt}^m dy\leq C\int_\Omega (1+2|\varphi^m-\varphi^m|^{\rho-1})|\varphi_t^m||\varphi_{tt}^m|dy$$

$$\leq C\left[\int_\Omega (1+2|\varphi^m-\varphi^m|^{\rho-1})^{\rho-1}dy\right]^{\frac{1}{n}}\left[\int_\Omega |\varphi_t^m|^{p_n}dy\right]^{\frac{1}{p_n}}\left[\int_\Omega |\varphi_{tt}^m|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left[\int_\Omega (1+|\nabla\varphi^m - \nabla\varphi^m|^2)dy\right]^{\frac{\rho-1}{2}}\left[\int_\Omega |\nabla\varphi_t^m|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |\varphi_{tt}^m|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Levando em consideração a primeira estimativa (2.21) e usando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$ concluímos que

$$\int_\Omega h'(\varphi^m - \psi^m)\varphi_t^m\varphi_{tt}^m dy \leq C\{\int_\Omega |\nabla\varphi_t^m|^2 dy + \int_\Omega |\varphi_{tt}^m|^2 dy\}. \tag{2.26}$$

Similarmente, temos

$$-\int_\Omega h'(\varphi^m - \psi^m)\psi_t^m\varphi_{tt}^m dy \leq C\{\int_\Omega |\nabla\psi_t^m|^2 dy + \int_\Omega |\varphi_{tt}|^2 dy\}, \tag{2.27}$$

$$\int_\Omega h'(\varphi^m - \psi^m)\varphi_t^m\psi_{tt}^m dy \leq C\{\int_\Omega |\nabla\varphi_t^m|^2 dy + \int_\Omega |\psi_{tt}|^2 dy\}, \tag{2.28}$$

$$-\int_\Omega h'(\varphi^m - \psi^m)\psi_t^m\psi_{tt}^m dy \leq C\{\int_\Omega |\nabla\psi_t^m|^2 dy + \int_\Omega |\psi_{tt}|^2 dy\}. \tag{2.29}$$

Substituindo as equações (2.26)-(2.29) em (2.25) e usando argumentos similares como em (2.21), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\pounds_2^m(t,\varphi^m,\psi^m) + \int_0^t (\|\varphi_{ss}^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{ss}^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)ds \leq C, \ \forall\ t \in [0,T] \ \ \forall\ m \in \ \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

onde

$$\pounds_2^m(t,\varphi^m,\psi^m) = \|\varphi_t^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\varphi^m\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+g_1\Box\frac{\nabla\varphi^m}{\gamma}\|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}g_2\Box\frac{\nabla\psi^m}{\gamma}.$$

As estimativas (2.21) e (2.30) permite obter subsequencias (φ^{mk},ψ^{mk}) de (φ^m,ψ^m), que será denotado por (φ^m,ψ^m) e as funções $\varphi,\psi : \Omega\times]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:

$$(\varphi^m,\psi^m) \to (\varphi,\psi) \quad \text{fraco estrela} \quad em \ \ L^\infty(0,\infty : H_0^1(\Omega)), \tag{2.31}$$

$$(\varphi_t^m,\psi_t^m) \to (\varphi_t,\psi_t) \quad \text{fraco estrela} \quad em \ \ L^\infty(0,\infty : H_0^1(\Omega)), \tag{2.32}$$

$$(\varphi_{tt}^m,\psi_{tt}^m) \to (\varphi_{tt},\psi_{tt}) \quad \text{fraco estrela} \quad em \ \ L^\infty(0,\infty : L^2(\Omega)). \tag{2.33}$$

Fazendo $m \to \infty$ nas equações (2.17)-(2.18) e usando as estimativas (2.31)-(2.33), concluímos que (φ, ψ) satisfaz (2.8)-(2.9) no sentido de $L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega))$. Logo, por regularidade elíptica, temos que:

$$\varphi, \psi \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

UNICIDADE

Suponhamos que (φ, ψ) e $(\hat{\varphi}\hat{\psi})$ são duas soluções do problema (2.8)-(2.9) nas condições do **Teorema 2.0.1**. Então

$$(\phi, \theta) = (\varphi - \hat{\varphi}, \psi - \hat{\psi})$$

satisfaz as condições e

$$(\phi(0), \theta(0)) = (0, 0), (\phi_t(0), \theta_t(0)) = (0, 0).$$

Demonstraremos que $(\phi, \theta) = (0, 0)$ sobre $\Omega \times [0, \infty[$.

Multiplicando as equações (2.8) e (2.9) por ϕ_t e θ_t, respectivamente, somando o resultado, usando o **Lema 2.0.5**, a condição de crescimento da função h e utilizando sobolev, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\pounds_1(t, \phi, \theta) + \alpha(\|\phi_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\theta_t\|^2_{L^2(\Omega)})ds \leq C(|\gamma 1| + |\gamma''|)\pounds_1(t),$$

onde

$$\pounds_1(t, \phi, \theta) = \|\phi_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+g_1\Box\frac{\nabla\phi}{\gamma}\|\theta_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s)\gamma^{-2}(s)ds\right)\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}g_2\Box\frac{\nabla\theta}{\gamma}.$$

Integrando em relação a t a inequação anterior e aplicando a desigualdade de Gronwall, vamos concluir que $(\phi, \theta) = (0, 0)$ sobre $\Omega \times [0, \infty[$.

Para mostrar a existência no domínio não cilíndrico, retornamos ao nosso problema original no domínio não cilíndrico e usamos a mudança de variável dada em (2.5) por

$$(y, t) = \tau(x, t), \ (x, t) \in \hat{Q}.$$

Seja (φ, ψ) a solução obtida do **Teorema 2.0.1** e (u, v) definida por (2.7), então (u, v) pertence a classe

$$u, v \in L^{\infty}(0, \infty : H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \tag{2.34}$$

$$u_t, v_t \in L^{\infty}(0, \infty : H_0^1(\Omega_t)) \tag{2.35}$$

$$u_{tt}, v_{tt} \in L^{\infty}(0, \infty : L^2(\Omega_t)). \tag{2.36}$$

Denotando por

$$u(x,t) = \varphi(y,t) = (\varphi \circ \tau)(x,t), \qquad v(x,t) = \psi(y,t) = (\psi \circ \tau)(x,t)$$

Segue de (2.6) que (u, v) satisfaz as equações (2.1)-(2.4) no sentido de $L^{\infty}(0, \infty : L^2(\Omega_t)$. Seja (u_1, v_1), (u_2, v_2) duas soluções de (2.1)-(2.2), e (φ_1, ψ_1), (φ_2, ψ_2) funções obtidas através do difeomorfismo τ dado por (2.5). Então (φ_1, ψ_1) e (φ_2, ψ_2) são soluções de (2.8)-(2.9). Pelo resultado de unicidade do **Teorema 2.0.1**, temos que $(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2)$ então $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Sendo assim, demonstramos o seguinte resultado.

Teorema 2.0.3. *Consideremos* $((u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2,\ (u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$ *e suponhamos que as hipóteses* (2.13)-(2.15) *e* (2.16) *sejam satisfeitas. Então existe uma única solução* (u, v) *do problema* (2.1)-(2.4) *satisfazendo* (2.34)-(2.36) *e as equações* (2.1)-(2.4) *no sentido de* $L^{\infty}(0, \infty : L^2(\Omega_t))$.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Neste capítulo vamos mostrar que a solução do sistema (2.1)-(2.2) decai exponencialmente. Para este fim, assumiremos que a memória g_i satisfaz:

$$g_i'(t) \leq -C_1 g_i(t), \tag{3.1}$$

$$\left(1 - \int_0^\infty g(s)ds\right) = \eta_i, \ \forall \ i = 1, 2 \tag{3.2}$$

para todo $t \geq 0$, com constante posistiva C_1. Adicionalmente, assumiremos que a função $\gamma(.)$, satisfaz as condições;

$$\gamma' \leq 0, \ t \geq 0, \ n > 2 \tag{3.3}$$

$$0 < \max_{0 \leq t < \infty} |\gamma'(t)| \leq \frac{1}{d} \tag{3.4}$$

onde $d = diam(\Omega)$. A condição (3.4) implica que nosso domínio é "time like"no sentido que

$$|\underline{\nu}| < |\overline{\nu}|$$

onde $\underline{\nu}$ e $\overline{\nu}$ denota a t-componente e x-componente do vetor unitário exterior normal de $\hat{\Sigma}$. Para facilitar nossos cálculos introduzimos a seguinte notação:

$$(g \Box \nabla u)(t) = \int_{\Omega_t} \int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dsdx.$$

Devido a geometria do nosso domínio não cilíndrico, o lema abaixo é bastante importante na prova do **Lema 3.0.7** e no decaimento exponencial.

Lema 3.0.6. *Seja $F(.)$ uma função regular definida em $\Omega_t \times [0,\infty[(t \in [0,\infty[)$. Então*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt}F(x,t)dx + \frac{\gamma'}{\gamma}\int_{\Gamma_t} F(x,t)(x.\overline{\nu})d\Gamma_t, \tag{3.5}$$

onde $\overline{\nu}$é a x-componente do vetor unitário exterior ν.

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $x = \gamma(t)y, \ y \in \Omega$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} F(\gamma(t)y,t)\gamma^n dx$$

$$= \int_{\Omega} (\frac{\vartheta F}{\vartheta t})\gamma^n(t)dy + \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} \frac{\gamma'}{\gamma}x_i(\frac{\vartheta F}{\vartheta t})\gamma^n(t)dy$$

$$+n\int_{\Omega} \gamma'(t)\gamma^{n-1}(t)F(\gamma(t)y,t)dy.$$

Se retornarmos a variável x, obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} F(x,t)dx = \int_{\Omega_t} \frac{\vartheta F}{\vartheta t}dx + \frac{\gamma'}{\gamma}\int_{\Omega_t} x.\nabla F(x,t)dx + n\frac{\gamma'}{\gamma}\int_{\Omega_t} F(x,t)dx.$$

Integrando por parte a última igualdade, obtemos a fórmula (3.5).

Lema 3.0.7. *Para qualquer função $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$ e $u \in C^1((0,T) : H^2(\Omega_t))$, temos que*

$$\int_{\Omega}\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds.\nabla u_t dx = -\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2}g'\Box\nabla u$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g\Box\nabla u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right]$$

$$+\frac{\gamma'}{2\gamma}\int_{\Gamma_t}\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2(\overline{\nu}.x)d\Gamma_t.$$

Demonstração. Derivando o termo $g\Box\nabla u$ e aplicando o **Lema 3.0.6** obtemos

$$\frac{d}{dt}g\Box\nabla u = \int_{\Omega_t}\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma}\int_{\Gamma_t}\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds d\Gamma_t.$$

Notando que

$$\int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dsdx = -2 \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \nabla u(s).\nabla u_t dsdx$$

$$-g(t) \int_{\Omega_t} |\nabla u(t)|^2 dx + g' \square \nabla u$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right) \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx$$

segue a conclusão do lema.

Introduzimos o funcional

$$E(t) = \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(1 - \int_0^t g_1(s)ds\right) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + g_1 \square \nabla u + \|v_t$$

$$+\left(1 - \int_0^t g_2(s)ds\right) \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + g_2 \square \nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega_t} H(u-v)dx.$$

Observe que $E(t) > 0$ desde que a hipótese (3.2) seja satisfeita.

O lema seguinte mostra a propriedade dissipativa da energia do sistema (2.1)-(2.4). Para isso as hipóteses (2.13) são cruciais.

Lema 3.0.8. *Consideremos* $(u_0, v_0) \in (H^1_0(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2$, $(u_1, v_1) \in (H^1_0(\Omega_0))^2$ *e suponha que as hipóteses* (2.11)-(2.13) *e* (2.16) *sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular* (2.1)-(2.4) *satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2\alpha(\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_t\|^2_{L^2(\Omega)}) - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma}(\overline{\nu}.x)(|u|^2 + |\nabla u|^2)d\Gamma_t$$

$$-\int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma}(\overline{\nu}.x)(|v|^2 + |\nabla v|^2)d\Gamma_t - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma}(\overline{\nu}.x) \int_0^t g_1(t-s)|\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 dsd\Gamma_t$$

$$-\int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma}(\overline{\nu}.x) \int_0^t g_2(t-s)|\nabla v(t) - \nabla v(s)|^2 dsd\Gamma_t - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma}(\overline{\nu}.x)H(u-v)d\Gamma_t$$

$$-\int_{\Omega_t} g_1(t)|\nabla u|^2 dx + g_1' \square \nabla u - \int_{\Omega_t} g_2(t)|\nabla v|^2 dx + g_2' \square \nabla v.$$

Demonstração. Multiplicando as equações 2.1 por u_t e (2.2) por v_t e fazendo integração por parte sobre Ω_t e usando o **Lema 3.0.6**, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \alpha\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - \int_{\Omega_t}\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s).\nabla u_t ds dx$$

$$-\int_{\Gamma_t}\frac{\gamma'}{2\gamma}(\overline{\nu}.x)(|u_t|^2+|\nabla u|^2)d\Gamma_t + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \alpha\|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

$$-\int_{\Omega_t}\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s).\nabla v_t ds dx - \int_{\Gamma_t}\frac{\gamma'}{2\gamma}(\overline{\nu}.x)(|v_t|^2+|\nabla v|^2)d\Gamma_t + \int_{\Omega_t}\frac{d}{dt}H(u-v)dx.$$

Levando em conta o **Lema 3.0.6** e o **Lema 3.0.7**, obtemos a conclusão do lema.
Consideremos o seguinte funcional

$$\psi(t) = 2\int_{\Omega_t}(u_t u + v_t v)dx + \alpha(\|u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega_t)}).$$

Lema 3.0.9. *Cosideremos* $(u_0, v_0) \in (H^1_0(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0))^2$, $(u_1, v_1) \in (H^1_0(\Omega_0))^2$ *e suponha que as hipóteses* (2.11)-(2.13) *e* (2.16) *sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular do sistema* (2.1)-(2.4) *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\psi(t) \le \|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - \|\nabla u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left(\int_0^t g_1(s)ds\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

$$+\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_1(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_1\Box\nabla u)^{\frac{1}{2}} + \|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - \|\nabla v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

$$+\left(\int_0^t g_2(s)ds\right)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_2\Box\nabla v)^{\frac{1}{2}}$$

$$-(2+\delta)\int_{\Omega_t}H(u-v)dx.$$

Demonstração. Multiplicando as equções (2.1) por u e (2.2) por v, e integrando sobre Ω_t, obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\psi(t) = \|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - \|\nabla u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int_{\Omega_t}\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s).\nabla udsdx$$

$$\|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - \|\nabla v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \int_{\Omega_t}\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s).\nabla vdsdx$$

$$-\int_{\Omega_t}(u-v)h(u-v)dx.$$

Notando que

$$\int_{\Omega_t}\int_0^t g_1(t-s)\nabla u(s).\nabla udsdx = \int_{\Omega_t}\int_0^t g_1(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t)).\nabla udsdx$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(\int_0^t g_1(s)ds\right)|\nabla u|^2dx,$$

$$\int_{\Omega_t}\int_0^t g_2(t-s)\nabla v(s).\nabla vdsdx = \int_{\Omega_t}\int_0^t g_2(t-s)(\nabla v(s)-\nabla v(t)).\nabla vdsdx$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(\int_0^t g_2(s)ds\right)|\nabla v|^2dx$$

e levando em conta que

$$\left|\int_{\Omega_t}\int_0^t g_1(t-s)(\nabla u(s)-\nabla u(t)).\nabla udx\right| \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_1(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_1\Box\nabla u)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\int_{\Omega_t}\int_0^t g_2(t-s)(\nabla v(s)-\nabla v(t)).\nabla vdx\right| \le \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_2\Box\nabla v)^{\frac{1}{2}},$$

$$-\int_{\Omega_t}(u-v)h(u-v)dx \le -(2+\delta)\int_{\Omega_t}H(u-v)dx$$

segue a conclusão do lema.

Consideremos o funcional

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \psi(t), \tag{3.6}$$

com $N > 0$. Usando a desigualdade de Young e a desigualdade de Poincaré temos que

$$k_0E(t) \le \mathcal{L}(t) \le k_1E(t), \tag{3.7}$$

onde k_0 e k_1 são constantes positivas.

Agora mostraremos o principal resultado desse trabalho.

Teorema 3.0.4. *Consideremos* $(u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2$, $(u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$ *e suponha que as hipóteses* (2.12)-(2.13), (2.16), (3.3) *e* (3.4) *sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular do sistema* (2.1)-(2.2) *satisfaz*

$$E(t) \leq Ce^{-\xi t}E(0), \quad \forall\ t \geq 0$$

onde C *e* ξ *são constantes positivas.*

Demonstração. Usando o **Lema 3.0.8** e o **Lema 3.0.9**, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & -2N\alpha\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - C_1Ng_1\Box\nabla u + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& -2N\alpha\|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - C_1Ng_2\Box\nabla v + \|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& -\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left(\int_0^t g_1(s)ds\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& -\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left(\int_0^t g_2(s)ds\right)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& +\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_1(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_1\Box\nabla u)^{\frac{1}{2}} \\
& +\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}\left(\int_0^t g_2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}(g_2\Box\nabla v)^{\frac{1}{2}} \\
& -(2+\delta)\int_{\Omega_t} H(u-v)dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos para $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & -2N\alpha\|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - C_1Ng_1\Box\nabla u + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& -\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left(\int_0^t g_1(s)ds\right)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} \\
& +\frac{\epsilon}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \frac{\|g_1\|_{L^1(0,\infty)}}{2\epsilon}g_1\Box\nabla u
\end{aligned}$$

$$-2N\alpha\|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)} - C_2Ng_2\Box\nabla v + \|v_t\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

$$-\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \left(\int_0^t g_2(s)ds\right)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)}$$

$$+\frac{\epsilon}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_t)} + \frac{\|g_2\|_{L^1(0,\infty)}}{2\epsilon}g_2\Box\nabla v$$

$$-(2+\delta)\int_{\Omega_t} H(u-v)dx$$

Escolhendo N suficiente grande e ϵ bastante pequeno obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda_0 E(t) \tag{3.8}$$

ondde λ_0 é uma constante posistiva independente de t. De (3.7) e (3.8) segue que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{\frac{\lambda_0}{k_t}t},\ \forall\ t \geq 0.$$

Da relação de equivalente (3.7) segue nossa conclusão.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.Assila, *A note on the boundary stabilization of a compactly coupled system of wave equations.* Apllied Mathematics Letters 12, (1999), 37-42.

[2] M.Assila, *Asymptopic stability of a compactly coupled system of wave equations.* Apllied Mathematics Letters 14, (2001), 285-290.

[3] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplès.* C. R. Acad. Sci. Paris, 328 (1999), 1015-1020.

[4] R. Benabdallah, J. Ferreira, *On hyperbolic-parabolic equations with nonlinearity of Kirchoff-Carrier type in domains with moving boundary.* Nonlinear Analysis 37, (1999), 269-287.

[5] C.M.Dafermos,J.A.Nohel, *Energy methods for nonlinear hiperbolic Volterra integro-differential equations.* Comm. Partial differential Equations, 4(1979), 219-278.

[6] V. Komornik, B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations.* Asymptotic Analysis 14 (1997), 339-359.

[7] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method,* John Wiley and Sons-Masson, Paris,(1994).

[8] J.L. Lions, *Quelques Mèthodes de resolution de problèmes aux limites non lineaires.* Dunod Gauthiers Villars, Paris, (1969).

[9] J.L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications.* Springer-Verlag, New York, Vol. I,(1972).

[10] J.Muñoz Rivera, *Energy decay rates in linear thermoelasticity.* Funkc. Ekvacioj, Vol. 35(1)(1992), 19-30.

[11] J.Muñoz Rivera, *Global solutions on a quasilinear wave equation with memry.* Bolletino Unione Matematica Italiana, 7(8-B)(1994), 289-303.

[12] R.D.Passo, M. Ughi, *Problèmes de Dirichlet our une classe d'èquations paraboliques non linéaires dans des ouverts non cylindriques.*C. R. Acad. Sc. Paris, 308(1989), 555-558.

[13] M.L. Santos, *Decay rates for solutins of a system of wave equations with memory.*Journal of Differential Equations, Vol.2002, N. 38(2002), 1-17.

[14] M.L. Santos, J. Ferreira, *Stability for a system of wave equations of Kirchhoff with coupled nonlinear and boundary conditions of memory type.* Advances in Differential Equations, Vol. 8(7) (2003), 873-896.

[15] H.S. Cunha, *Existência e unicidade de solução fraca para um sistema de EDP's em domínio tempo-dependente.* (Dissertação de mestrado. Belém-Pa, (2005), UFPa.