

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

p-subespaços em álgebras de Bernstein

Pablo Salermo Monteiro do Nascimento

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva.

BELÉM

2006

Pablo Salermo Monteiro do Nascimento

p-subespaços em álgebras de Bernstein

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

Departamento de Matemática, UFPA - Orientador

Prof^a. Dr^a. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra

Departamento de Matemática, UFPA

Prof^a. Dr^a. Lúcia Satie Ikemoto Murakami

Departamento de Matemática, IME-USP

DATA DE AVALIAÇÃO: ____/____/____

CONCEITO: _____

À Ava e à minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido a vida e a capacidade de realizar este trabalho.

À Universidade Federal do Pará.

Ao meu orientador, Professor Juaci Picanço da Silva, integrante do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, pela orientação competente e paciente, dedicando-se de forma marcante na elaboração deste trabalho.

À Professora Maria de Nazaré Carvalho Bezerra, professora da Universidade Federal do Pará, pela contribuição ao longo deste curso de Mestrado.

Aos demais professores e à coordenação deste programa que em muito contribuíram para a conclusão do mesmo.

A todos os colegas do curso que contribuíram nas horas de estudo e de descontração.

À minha Família, pela paciência e confiança atribuída à minha pessoa.

À Ava Natássia pelo amor, compreensão, dedicados a mim em todos os momentos.

Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Em uma álgebra de Bernstein A , os subespaços U_e e V_e originados da decomposição de Peirce desta álgebra em relação ao idempotente e , quando substituídos em um polinômio de duas variáveis não associativas p dá origem a um novo subespaço p_e , subespaços obtidos desta forma são chamados de p -subespaços.

Alguns polinômios tem a propriedade de darem origem a p -subespaços com mesma dimensão independentemente do idempotente escolhido para fazer a decomposição de Peirce. Estes polinômios são ditos com dimensão invariante pela troca do idempotente. Existem também polinômios que dão origem sempre aos mesmos subespaços independentemente da escolha do idempotente, estes são chamados de polinômios invariantes. Certas álgebras de Bernstein apresentam a propriedade de que todos os polinômios têm dimensão invariante.

Sumário

Introdução	3
1 Preliminares	4
1.1 Álgebras de Bernstein	4
1.2 Álgebras de Bernstein-Jordan	12
2 p-subespaços	16
2.1 p-subespaços	16
2.2 Invariância de p-subespaços	17
2.3 p-subespaços em álgebras de Bernstein-Jordan	25
3 Álgebras de Bernstein n-excepcionais	28
3.1 As subclasses n -excepcionais	28
3.2 Sobre álgebras 2-excepcionais	31
3.3 Sobre álgebras 3-excepcionais	33
3.4 O p-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras 0-excepcionais e 1-excepcionais . . .	34
Bibliografia	42

Introdução

Uma álgebra bária é um par (A, ω) na qual A é uma álgebra sobre um corpo K e ω é um homomorfismo não nulo de álgebras de A em K . Uma álgebra de Bernstein é uma álgebra bária que satisfaz, para todos seus elementos, a seguinte identidade

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$$

Denotamos por N o núcleo de ω , também chamado núcleo de A .

As álgebras de Bernstein pertencem à classe das álgebras não associativas e surgiram a partir de estudos sobre a formalização matemática das leis da genética de Mendel, tal estudo foi iniciado por I.M.H. Etherington na década de 30 e, posteriormente, desenvolvido por Y.Lyubich e P.Holgate na década de 70.

Entre as características especiais das álgebras de Bernstein está o fato destas álgebras sempre possuírem idempotentes não nulos, isto é, um elemento e que satisfaz $e^2 = e$. Fato este sobre o qual desenvolve-se muito da teoria sobre as álgebras de Bernstein. Em uma álgebra de Bernstein A , para cada idempotente não-nulo e , podemos associar uma decomposição $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$, chamada decomposição de Peirce de A associada ao idempotente e , em que Ke é o subespaço gerado por e , e U_e e V_e são subespaços de A tais que $N = U_e \oplus V_e$.

Podemos obter outros subespaços por produtos consecutivos dos subespaços U_e e V_e , os chamados p-monômios e a partir de somas finitas de p-monômios, formar os chamados p-subespaços. Y.Lyubich provou que os p-subespaços U_e e V_e , apesar de variarem quando

se troca o idempotente, suas dimensões permanecem invariantes. Existem p -subespaços que além de terem dimensão invariante, também são eles próprios invariantes quando se troca o idempotente.

Em [4] é feito um estudo completo sobre os p -subespaços de grau menor que quatro que são invariantes e sobre os que possuem dimensão invariante quando se troca o idempotente. Em [1] faz-se um estudo sobre a máxima variação da dimensão de certos p -subespaços, bem como das implicações destas variações na estrutura da álgebra de Bernstein.

O objetivo deste trabalho é revisar os principais resultados acerca do estudo dos p -subespaços no que diz respeito às suas variações e também no que se refere às variações da dimensão.

No Capítulo 1 introduzimos o conceito de álgebra de Bernstein, deduzimos a decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein relativa ao idempotente e e obtemos uma importante caracterização das álgebras de Bernstein que também são álgebras de Jordan, além de outros conceitos e resultados necessários aos capítulos posteriores.

No Capítulo 2 desenvolvemos os principais resultados sobre p -subespaços invariantes e vemos que o problema é totalmente resolvido em uma certa classe de álgebras de Bernstein.

No Capítulo 3 estudamos a maneira como certos p -subespaços variam pela troca do idempotente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos a definição do nosso principal objeto de estudo, a saber, as álgebras de Bernstein, bem como deduzimos suas principais propriedades, as quais serão necessárias ao desenvolvimento dos demais capítulos.

1.1 Álgebras de Bernstein

Uma *álgebra* sobre um corpo K é uma estrutura formada por um par (A, \cdot) , onde A é um espaço vetorial sobre K e \cdot é uma operação binária em A que satisfaz as propriedades distributivas em relação à adição e a propriedade da homogeneidade, isto é,

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$$

para quaisquer x, y em A e α em K .

Neste trabalho consideraremos apenas álgebras que provém de espaços vetoriais de dimensão finita.

Denotaremos (A, \cdot) apenas por A quando ficar claro qual produto está sendo utilizado. Indicaremos $x \cdot y$ apenas por xy , $x \cdot x$ por x^2 , $(x \cdot x) \cdot x$ por x^3 , e de modo geral, definimos recursivamente: $x^n = x^{n-1} \cdot x$ se $n > 1$ e $x^1 = x$.

Sejam A e B álgebras sobre K , um *homomorfismo* de A em B é uma função linear f de A em B tal que $f(xy) = f(x)f(y)$. Uma *álgebra bária* sobre um corpo K é um par (A, ω) onde A é uma álgebra sobre K e ω é um homomorfismo não nulo de A em K , chamado *caracter* de A ou *função peso* de A . Se x é um elemento de A , dizemos que $\omega(x)$ é o *peso* de x . Convém ressaltar que nem toda álgebra pode ser vista como uma álgebra bária, pois existem álgebras que não possuem caracter, como exemplo citamos a álgebra onde A é um espaço vetorial e o produto é definido por $xy = 0$ para quaisquer x e y em A . De fato, se f é um homomorfismo de A em K , então $f(x)^2 = f(x^2) = f(0)$ e portanto $f(x) = 0$, para qualquer x em A , logo $f \equiv 0$.

Seja (A, ω) uma álgebra bária, então A pode ser decomposta na forma $A = Kx \oplus N$, onde $N = \ker \omega$, $x \notin N$ e Kx é o subespaço gerado por x . De fato, seja $y \in A$, temos que $y = \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x + (y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x)$ onde $\frac{\omega(y)}{\omega(x)}x \in Kx$ e $y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x \in N$. Seja agora $y' \in Kx \cap N$ então existe α em K tal que $y' = \alpha x$ e $0 = \omega(y') = \omega(\alpha x) = \alpha \omega(x)$ o que implica em $\alpha = 0$ já que $\omega(x) \neq 0$ e portanto $y' = 0$.

Uma álgebra é *comutativa* quando seu produto satisfaz

$$xy = yx$$

para quaisquer $x, y \in A$.

Uma *álgebra de Bernstein* é uma álgebra bária comutativa (A, ω) que satisfaz a identidade

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \tag{1.1}$$

para qualquer x em A .

A seguinte proposição afirma que nas álgebras de Bernstein existe apenas um caracter.

Proposição 1. *Em uma álgebra de Bernstein existe apenas um caracter.*

Demonstração

Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e ω' um caracter de A . Para qualquer $n \in N$ tem-se $(n^2)^2 = \omega(n)^2 n^2 = 0n^2 = 0$. Assim $\omega'(n)^4 = \omega'((n^2)^2) = \omega'(0) = 0$. Como ω é caracter de A , existe x_0 em A tal que $\omega(x_0) \neq 0$ e $A = Kx_0 + N$, assim, para qualquer x em A , existem e são únicos $\alpha \in K$ e $n \in N$ tais que $x = \alpha x_0 + n$. Para $\lambda = \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$ temos que $\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha \omega'(x_0) = \alpha \lambda \omega(x_0) = \lambda \omega(\alpha x_0 + n) = \lambda \omega(x)$. Portanto $\omega' = \lambda \omega$ com $\lambda \neq 0$ já que ω' é caracter. Tem-se também $\lambda \omega(x_0)^2 = \lambda \omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = [\lambda \omega(x_0)]^2 = \lambda^2 \omega(x_0)^2$ assim $(\lambda - \lambda^2) \omega(x_0)^2 = 0$ e como $\lambda \omega(x_0)^2 \neq 0$ então $\lambda = 1$ e $\omega' = \omega$. \square

De acordo com a proposição anterior não existe ambigüidade ao referir-se a uma álgebra de Bernstein (A, ω) apenas por A .

A partir deste ponto consideraremos apenas corpos com característica diferente de 2. Tal fato será usado como hipótese nos enunciados posteriores.

No seguinte lema generalizaremos a equação (1.1) com uma técnica chamada linearização que será bastante utilizada posteriormente.

Lema 1. *Seja K um corpo que tem característica diferente de 2 e possui mais de 3 elementos. Então, para uma álgebra de Bernstein A sobre esse corpo, tem-se*

$$2x^2(xy) = \omega(x)^2 xy + \omega(x)\omega(y)x^2 \quad (1.2)$$

para quaisquer x, y em A .

Demonstração

Substituindo x por $\alpha x + y$ em (1.1) temos então $((\alpha x + y)^2)^2 = \omega(\alpha x + y)^2 (\alpha x + y)^2$.

Segue daí que

$$\begin{aligned} & \alpha^4(x^2)^2 + 4\alpha^3x^2(xy) + 4\alpha^2(xy)^2 + 4\alpha y^2(xy) + (y^2)^2 + 2\alpha^2x^2y^2 \\ &= \alpha^4\omega(x)^2x^2 + 2\alpha^3\omega(x)^2xy + \alpha^2\omega(x)^2y^2 + 2\alpha^3\omega(x)\omega(y)x^2 + 4\alpha^2\omega(x)\omega(y)xy \\ & \quad + 2\alpha\omega(x)\omega(y)y^2 + \alpha^2\omega(y)^2x^2 + 2\alpha\omega(y)^2xy + \omega(y)^2y^2 \end{aligned}$$

aplicando novamente (1.1) e reordenando as parcelas temos

$$\begin{aligned} & \alpha^3(4x^2(xy) - 2\omega(x)^2xy + 2\omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha^2(4(xy)^2 + 2x^2y^2 - \omega(x)^2y^2 \\ & - 4\omega(x)\omega(y)xy - \omega(y)^2x^2) + \alpha(4y^2(xy) - 2\omega(x)\omega(y)y^2 - 2\omega(y)^2xy) = 0 \end{aligned}$$

substituindo α por $-\alpha$, subtraindo da anterior e multiplicando por $\frac{1}{4}$ temos

$$\alpha^3(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + \alpha(2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2(xy)) = 0.$$

Como K tem característica diferente de 2 e tem mais de 3 elementos então $1 \neq -1$ e existe β em K tal que $\beta \notin \{0, 1, -1\}$ então na equação anterior substituindo α por β e multiplicando por $\frac{1}{\beta}$ temos

$$\beta^2(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2(xy)) = 0$$

substituindo α por 1

$$(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) + (2y^2(xy) - \omega(x)\omega(y)y^2 - \omega(y)^2(xy)) = 0$$

subtraindo essas duas equações

$$(\beta^2 - 1)(2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2) = 0$$

como $\beta^2 \neq 1$ então concluímos que

$$2x^2(xy) - \omega(x)^2xy - \omega(x)\omega(y)x^2 = 0 \quad \square$$

Quando um elemento $e \in A$ satisfaz $e^2 = e$ diz-se que ele é um *idempotente* de A . O conjunto dos idempotentes de uma álgebra de Bernstein A é dado por $\text{Id}(A) = \{x^2; \omega(x) =$

$1\} \cup 0$. De fato, se x é um idempotente então $\omega(x)^2 = \omega(x)$ portanto $\omega(x) = 0$ ou $\omega(x) = 1$. Substituindo em (1.1), no primeiro caso temos que $x = x^2 = (x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 = 0$, por outro lado é claro que 0 é um idempotente e se $\omega(x) = 1$ então $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 = x^2$. Denotamos por $\text{Id}_1(A) = \{x^2; \omega(x) = 1\}$ o conjunto dos idempotentes não nulos de A . Observamos que, como ω é um caracter, $\text{Id}_1(A) \neq \emptyset$.

Proposição 2. *Sejam A uma álgebra de Bernstein, e um idempotente não nulo e e $y \in N$. Então*

$$2e(2ey) = 2ey \quad (1.3)$$

$$(2ey)y^2 = 0 \quad (1.4)$$

$$2ey^2 + (2ey)^2 = y^2 \quad (1.5)$$

$$(y^2)^2 = 0 \quad (1.6)$$

Demonstração

Em (1.2) fazendo $x = e$ e $y \in N$ segue (1.3). Também em (1.2) substituímos x por $y \in N$ e y por e temos (1.4). Substituindo x por $e + y$ e y por e em (1.2) temos (1.5). Já (1.6) decorre diretamente da substituição de x por y em (1.1).

Consideremos agora o seguinte operador $M_e : N \rightarrow N$ definido por $M_e(y) = 2ey$. Em primeiro lugar observemos que M_e está bem definido, pois N é um ideal, por causa de (1.3) temos que $M_e^2 = M_e$. Assim M_e é uma projecção, logo, denotando $\text{Im}(M_e)$ por U_e e $\ker(M_e)$ por V_e , temos que

$$N = U_e \oplus V_e \quad (1.7)$$

$$U_e = \{u \in N; eu = \frac{1}{2}u\} \quad (1.8)$$

$$V_e = \{v \in N; ev = 0\} \quad (1.9)$$

Dados X_1, X_2 subespaços de A denotamos por $X_1 X_2$ o subespaço gerado pelos produtos

de elementos de X_1 por elementos de X_2 . Quando $X_1 = X_2 = X$ escrevemos X^2 no lugar de XX . Para álgebras comutativas temos que $X^2 = \langle x^2; x \in X \rangle$, pois para $x_1, x_2 \in X$ tem-se que $x_1x_2 = \frac{1}{4}[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2] \in \langle x^2; x \in X \rangle$.

A seguinte proposição estabelece importantes propriedades dos subespaços U_e^2 , U_eV_e e V_e^2 .

Proposição 3. *Em uma álgebra de Bernstein valem as seguintes inclusões*

$$U_e^2 \subset V_e \quad V_e^2 \subset U_e \quad U_eV_e \subset U_e \quad (1.10)$$

Demonstração

Usando a identidade (1.5) temos que $M_e(y^2) + M_e(y)^2 = y^2$. Agora, usando a mesma técnica empregada na demonstração do Lema 1, temos $M_e(y_1y_2) + M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1y_2$ assim $M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1y_2 - M_e(y_1y_2) \in V_e$, portanto $U_e^2 \subset V_e$. Se y_1 ou y_2 está em V_e então $y_1y_2 = M_e(y_1y_2)$, logo $U_eV_e \subset U_e$ e $V_e^2 \subset U_e$. \square

Seja A uma álgebra de Bernstein e e um idempotente não nulo de A , segue de (1.7) que A pode ser decomposta na forma $A = K_e \oplus U_e \oplus V_e$. A esta decomposição dar-se-á o nome de *decomposição de Peirce* A relativamente ao idempotente e .

Proposição 4. *Em uma álgebra de Bernstein as seguintes identidades valem para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$*

$$u^3 = 0 \quad u(uv) = 0 \quad uv^2 = 0 \quad (1.11)$$

$$(u^2)^2 = 0 \quad (uv)^2 = 0 \quad (1.12)$$

Demonstração

Fazendo $y = u$ em (1.4) temos que $0 = (2eu)u^2 = u^3$. Agora, fazendo $y = u + v$ também em (1.4) e aplicando o resultado anterior temos $0 = [2e(u + v)](u + v)^2 = u(uv) + uv^2$, substituindo v por $-v$ nesta equação temos $uv^2 - u(uv) = 0$. Somando estas duas equações

e multiplicando por $\frac{1}{2}$ temos $uv^2 = 0$ e $u(uv) = 0$. Tomando $x = u$ em (1.1) temos que $(u^2)^2 = 0$ e para $x = v$ temos $(v^2)^2 = 0$. Para $x = u$ e $y = v$ em (1.2) temos $u^2(uv) = 0$. Para $x = v$ e $y = u$ temos $v^2(uv) = 0$ para $x = u + v$ e $y = u$ também em (1.2) e usando as equações que acabamos de deduzir temos que $2(uv)^2 + u^2v^2 = 0$ e como $(uv)^2 \in V_e$ e $u^2v^2 \in V_e$ e $N = U_e \oplus V_e$ concluímos que $(uv)^2 = u^2v^2 = 0$. \square

Linearizando as igualdades da proposição anterior obtemos as identidades da seguinte proposição.

Proposição 5. *Em uma álgebra de Bernstein valem as seguintes identidades para quaisquer $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ $v, v_1, v_2 \in V_e$*

$$u_1^2 u_2 + 2u_1(u_1 u_2) = 0, \quad u_1(u_2 u_3) + u_2(u_1 u_3) + u_3(u_1 u_2) = 0 \quad (1.13)$$

$$u_1(u_2 v) + u_2(u_1 v) = 0 \quad (1.14)$$

$$u(v_1 v_2) = 0 \quad (1.15)$$

$$u_1^2(u_1 u_2) = 0 \quad (1.16)$$

$$(uv_1)(uv_2) = (u_1 v)(u_2 v) = 0 \quad (1.17)$$

A proposição seguinte mostra que o conjunto dos idempotentes não nulos de A pode ser parametrizado pelo subespaço U_e .

Proposição 6. *Seja e um idempotente não nulo de uma álgebra de Bernstein A . Então a aplicação φ de U_e em $\text{Id}_1(A)$ definida por $\varphi(u) = e + u + u^2$ é uma bijeção.*

Demonstração

Sejam $e \in \text{Id}_1(A)$ e $u, u_1, u_2 \in U_e, v \in V_e$. De fato $e + u + u^2$ é um idempotente, pois usando (1.10) e (1.11) temos que $(e + u + u^2)^2 = e + u^2 + (u^2)^2 + 2eu + 2eu^2 + 2u^3 = e + u + u^2$. Se $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$ temos então que $e + u_1 + u_1^2 = e + u_2 + u_2^2$. Pela decomposição de Peirce concluímos que $u_1 = u_2$. Seja $f = e + u + v$ um idempotente, como $f = f^2$ temos então $e + u + v = (e + u + v)^2 = e + u^2 + v^2 + 2eu + 2ev + 2uv = e + (u + 2uv + v^2) + u^2$ e, novamente pela decomposição de Peirce, conclui-se que $v = u^2$ e portanto $\varphi(u) = f$. \square

Proposição 7. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce da álgebra de Bernstein A relativa ao idempotente e e $u_0 \in U_e$. As aplicações $\sigma : U_e \rightarrow U_{e+u_0+u_0^2}$, $\tau : V_e \rightarrow V_{e+u_0+u_0^2}$ e $\psi : U_e \rightarrow U_e$ definidas, respectivamente, por $\sigma(u) = u + 2uu_0$, $\tau(v) = v - 2vu_0 - 2vu_0^2$ e $\psi(u) = u - 2uu_0^2$ são isomorfismos de espaços vetoriais.*

Demonstração

Mostremos inicialmente que σ está bem definida. Com efeito, utilizando (1.13), (1.10) e (1.16) temos que

$$\begin{aligned} 2(e + u_0 + u_0^2)(u + 2uu_0) &= 2eu + 4e(uu_0) + 2uu_0 + 4u_0(uu_0) + 2u_0^2u + 4u_0^2(u_0u) \\ &= u + 2uu_0 \end{aligned}$$

e portanto $(u + 2uu_0) \in U_{e+u_0+u_0^2}$. Claramente σ é linear e segue da decomposição de Peirce de A que σ é injetora. Seja agora $y \in U_{e+u_0+u_0^2} \subset N$ então existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $y = u + v$. Por definição $u + v = 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) = u + 2uu_0 + 2u_0v + 2uu_0^2 + 2u_0^2v$. Novamente segue da decomposição de Peirce que $2u_0v + 2uu_0^2 + 2u_0^2v = 0$ e $v = 2uu_0$. Logo $\sigma(u) = u + v$.

Mostremos agora que τ está bem definida. De fato seja $v \in V_e$. Então utilizando (1.2), (1.5), (1.8), (1.10), (1.11), (1.13) tem-se

$$\begin{aligned} (e + u_0 + u_0^2)(v - 2vu_0 - 2vu_0^2) &= ev - 2e(vu_0) - 2e(vu_0^2) + u_0v - 2u_0(u_0v) \\ &\quad - 2u_0(vu_0^2) + u_0^2v - 2u_0^2(vu_0) - 2u_0^2(vu_0^2) \\ &= 4u_0(u_0(vu_0^2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

portanto $\tau(v) \in V_{e+u_0+u_0^2}$. Claramente τ é linear. Pela decomposição de Peirce vê-se que τ

é injetora. Sejam $u \in U_e$ e $v \in V_e$ suponhamos que $u + v \in V_{e+u_0+u_0^2}$. Deste modo,

$$\begin{aligned} 0 &= 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) \\ &= u + 2u_0u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v \\ &= (u + 2u_0v + 2u_0v + 2u_0^2u) + (2uu_0) \end{aligned}$$

como $N = U_e \oplus V_e$ concluímos que $u + 2u_0v + 2u_0^2v + 2u_0^2u = uu_0 = 0$ e como $u_0^2u = -2u_0(u_0u)$ segue que $\tau(v) = v - 2u_0v - 2u_0^2v = u + v$, assim τ é sobrejetora.

A função ψ também é linear e como estamos trabalhando com álgebras de dimensão finita, basta mostrar que a mesma é injetora. Seja $u \in U_e$ tal que $\psi(u) = 0$ então $u - 2uu_0^2 = 0$. Segue desta igualdade e de (1.11), (1.13) e (1.14) que $uu_0^2 = 2(uu_0^2)u_0^2 = -4u_0(u_0(uu_0^2)) = 4u_0(uu_0^3) = 0$ e portanto $u = 0$. \square

Uma consequência da proposição anterior é que os subespaços U_e e V_e têm dimensão invariante com relação à troca do idempotente. Denomina-se *tipo* da álgebra A ao par $(1 + r, s)$ onde $r = \dim U_e$ e $s = \dim V_e$. Por causa da mencionada invariância da dimensão de U_e e V_e com relação a mudança do idempotente, esta definição independe do particular idempotente.

1.2 Álgebras de Bernstein-Jordan

Uma álgebra comutativa A é chamada *álgebra de Jordan* quando quaisquer elementos $x, y \in A$ satisfazem a seguinte identidade

$$x^2(yx) = (x^2y)x \tag{1.18}$$

A proposição seguinte estabelece propriedades para uma álgebra de Bernstein quando esta é também uma álgebra de Jordan.

Proposição 8. *Em uma álgebra de Bernstein A as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) A é uma álgebra de Jordan;
- (b) $V_e^2 = 0$, para qualquer $e \in Id_1(A)$;
- (c) $V_e^2 = 0$, para algum $e \in Id_1(A)$ e $(uv)v=0$ para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$;
- (d) qualquer elemento $x \in A$ satisfaz a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$.

Demonstração

Para mostrar que (a) implica (b) comecemos fazendo $x = e + v$ e $y = e$ em (1.18), daí obtemos $\frac{1}{4}v^2 - v^3 = 0$, substituindo nesta v por $(-v)$ o resultado é obtido pela soma destas duas últimas equações.

Mostremos agora que (b) implica (c), para tanto tomemos $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma decomposição de Peirce de A relativa a um idempotente e . Para cada $u \in U_e$ consideremos o idempotente $f = e + u + u^2$. Por hipótese $V_f^2 = 0$, logo para todo $v \in V_e$, segue de (1.10) e (1.12) que

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(v)^2 \\
&= (v - 2uv - 2u^2v)^2 \\
&= (v - 2uv)^2 \\
&= v^2 - 4(uv)v + 4(uv)^2 \\
&= -4(uv)v
\end{aligned}$$

Portanto $(uv)v = 0$. Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce relativa ao idempotente e para o qual $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Todo elemento x de A pode ser decomposto na forma $x = \omega(x)e + u + v$ onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Assim, por (1.8),

(1.9) e (1.18), temos

$$\begin{aligned}
x^3 &= (\omega(x)e + u + v)^2 (\omega(x)e + u + v) \\
&= (\omega(x)^2 e + \omega(x)u + 2uv + u^2) (\omega(x)e + u + v) \\
&= \omega(x)^3 e + \omega(x)^2 u + 2\omega(x)uv + \omega(x)u^2 \\
&= \omega(x)(\omega(x)e + u + v)^2 \\
&= \omega(x)x^2
\end{aligned}$$

portanto (c) implica (d). Finalmente para provar que (d) em implica (a) linearizamos a equação $x^3 = \omega(x)x^2$ e obtemos

$$x^2 y + 2x(xy) = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy$$

Nesta equação substituindo y por xy , obtemos

$$x^2(xy) + 2x(x(xy)) = \omega(x)\omega(y)x^2 + 2\omega(x)x(xy)$$

e multiplicando por x a equação usada para obter a anterior temos

$$(x^2 y)x + 2x(x(xy)) = \omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(xy)$$

subtraindo essas duas equações obtemos o resultado. \square

Uma álgebra de Bernstein que satisfaça uma das condições da proposição anterior é chamada de álgebra de *Bernstein-Jordan*.

O próximo corolário decorre diretamente do ítem (c) da proposição anterior.

Corolário 1. *Em uma álgebra de Bernstein-Jordan valem as seguintes identidades*

$$v_1 v_2 = 0 \tag{1.19}$$

$$(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = 0 \tag{1.20}$$

para $e \in Id_1(A)$, $u \in U_e$, $v_1, v_2 \in V_e$.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, mostremos que o conjunto $L = \{u \in U_e; uU_e = 0\}$ é um ideal de A . De fato, sejam $\alpha \in K$, $u_1, u_2 \in L$ e $u \in U_e$ temos que $(u_1 + \alpha u_2)u = u_1 + \alpha u_2 u = 0 + \alpha 0 = 0$, portanto $(u_1 + \alpha u_2) \in L$. Seja agora $x = \omega(x)e + u' + v$ um elemento genérico de A com $u' \in U_e$ e $v \in V_e$, observamos que $xu_1 = \frac{1}{2}\omega(x)u_1 + u_1v \in U_e$ e usando (1.14), temos $(xu_1)u = \frac{1}{2}\omega(x)u_1u + (u_1v)u = -(uv)u_1 = 0$, portanto $xu_1 \in L$.

Verifiquemos que $(A/L, \bar{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein, com as operações usualmente definidas para quocientes e $\bar{\omega}$ é definida por $\bar{\omega}(\bar{x}) = \omega(x)$. Como $L \subset \ker \omega$ então para $\bar{x} = \bar{y}$ temos que $x - y \in \ker \omega$ e portanto $\omega(x) = \omega(y)$, assim $\bar{\omega}$ está bem definida, facilmente vemos que é um caracter, além disso para $\bar{x} \in A/L$ temos $(\bar{x}^2)^2 = \overline{(x^2)^2} = \overline{\omega(x)^2 x^2} = \omega(x)^2 \bar{x}^2 = \bar{\omega}(\bar{x})^2 \bar{x}^2$, logo A/L é uma álgebra de Bernstein. Se $\bar{y} \in \ker \bar{\omega}$ então $0 = \bar{\omega}(\bar{y}) = \omega(y)$ o que implica que $y \in \ker \omega$. Se e é um idempotente não nulo de A segue daí que \bar{e} é um idempotente de A/L . Seja $\bar{y} \in U_{\bar{e}}$, decorre que existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $\bar{u} + \bar{v} = \bar{y} = \overline{u+v}$ e $\bar{u} + \bar{v} = \bar{y} = 2\bar{e}\bar{y} = \overline{2ey} = \bar{u}$ então $v \in L$, conseqüentemente, $v = 0$. Concluimos que $U_{\bar{e}} = \{\bar{u}; u \in U_e\} = (U_e + L)/L$ e analogamente $V_{\bar{e}} = \{\bar{u} + \bar{v}; u \in L, v \in V_e\} = \{\bar{v}; v \in V_e\} = (V \oplus L)/L$, para quaisquer $u, u_1 \in U_e$. Se $v \in V_e$ então $uv^2 = 0$, $u_1((uv)v) = -(u_1v)(uv) = 0$, assim $v^2 \in L$ e $(uv)v \in L$ e portanto $\bar{v}^2 = \bar{0}$ e $(\bar{u}\bar{v})\bar{v} = \bar{0}$, logo A/L é uma álgebra de Bernstein-Jordan.

A próxima proposição mostra que o ideal L independe do idempotente escolhido para fazer a decomposição de Peirce.

Proposição 9. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma Álgebra de Bernstein então $L = \bigcap_{u_0 \in U_e} U_{e+u_0+u_0^2}$.*

Demonstração

Sejam $u \in L$, então, para todo $u_0 \in U_e$ temos, $u = u + 2uu_0 = \sigma(u) \in U_{e+u_0+u_0^2}$. Por outro lado, seja $u \in \bigcap_{u_0 \in U_e} U_{e+u_0+u_0^2}$ então, para qualquer $u_0 \in U_e$ existe $u_1 \in U_e$ tal que $u = \sigma(u_1) = u_1 + 2u_1u_0$ e portanto $u = u_1$ e $u_1u_0 = 0$ assim $uu_0 = 0$ para qualquer $u_0 \in U_e$. \square

Capítulo 2

p-subespaços

Neste capítulo trataremos de subespaços oriundos da decomposição de Peirce de uma Álgebra de Bernstein relativa a um idempotente e sobre as variações dos mesmos pela mudança do idempotente.

2.1 p-subespaços

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de uma álgebra de Bernstein relativa ao idempotente e . A partir dos subespaços U_e e V_e podemos construir outros subespaços por produtos sucessivos destes dois subespaços, como por exemplo $U_e^2, V_e^2, U_eV_e, (U_eV_e)V_e, U_e^2V_e$, etc. Estes subespaços serão chamados de *p-monômios*. Também podemos construir outros subespaços pela soma de p-monômios, como por exemplo $U_eV_e + V_e^2, U_e + V_e, U_eV_e + V_e^3$, etc. Tais subespaços são chamados de *p-subespaços*. Em geral se $p(U, V)$ é um polinômio de duas variáveis não associativas, então denotamos por p_e o p-subespaço formado a partir da substituição de U por U_e e V por V_e .

Por conta das inclusões em (1.10) concluímos que todo p-monômio está contido em U_e ou em V_e .

2.2 Invariância de p-subespaços

Dizemos que o polinômio p tem *dimensão invariante* com relação a mudança do idempotente, quando $\dim p_e = \dim p_f$, para quaisquer e e f idempotentes não nulos de A . Também dizemos que o polinômio p é *invariante* quando $p_e = p_f$, para quaisquer e e f idempotentes não nulos de A .

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar que em uma certa classe das álgebras de Bernstein que contém as álgebras de Bernstein-Jordan, todos os p-subespaços têm dimensão invariante e obter uma condição necessária e suficiente para que um p-subespaço seja invariante.

Provaremos agora que os seguintes polinômios são invariantes.

$$N = U \oplus V \tag{2.1}$$

$$M = U \oplus U^2 \tag{2.2}$$

$$P = (UV + V^2) \oplus V \tag{2.3}$$

O subespaço N é o núcleo de ω , assim N não depende da escolha de um particular idempotente.

Para mostrar que M e P são invariantes é suficiente mostrar que $M_f \subset M_e$ e $P_f \subset P_e$, para qualquer par de idempotentes não nulos de A . Para tanto, sejam e, f idempotentes não nulos de A , existe $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$, temos que $M_f = \langle \sigma(u_1) + \sigma(u_2)^2; u_1, u_2 \in U_e \rangle$, em que σ é o isomorfismo entre os subespaços U_e e U_f na Proposição 7 e definido por $\sigma(u) = u + 2uu_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} M_f &= \langle u_1 + 2u_0u_1 + (u_2 + 2u_0u_2)^2; u_1, u_2 \in U_e \rangle \\ &= \langle u_1 + 2u_0u_1 + u_2^2 + 4u_2(u_0u_2) + 4(u_0u_2)^2; u_1, u_2 \in U_e \rangle \subset U_e + U_e^2 \\ &= M_e \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
P_f &= \langle \sigma(u_1)\tau(v_1) + \tau(v_2)^2 + \tau(v_3); u_1 \in U_e, v_1, v_2, v_3 \in V_e \rangle \\
&= \langle (u_1 + 2u_1u_0)(v_1 - 2u_0v_1 - 2u_0^2v_1) + (v_2 - 2u_0v_2 - 2u_0^2v_2)^2 + v_3 - 2u_0v_3 \\
&\quad - 2u_0^2v_3; u_1 \in U_e, v_1, v_2, v_3 \in V_e \rangle \\
&= \langle u_1v_1 - 2u_1(u_0v_1) - 2u_1(u_0^2v_1) + 2(u_0u_1)v_1 - 4(u_0u_1)(u_0v_1) - 4(u_0u_1)(u_0^2v_1) \\
&\quad + v_2^2 - 4(u_0v_2)v_2 + 4(u_0v_2)^2 + 8(u_0v_2)(u_0^2v_2) + 4(u_0^2v_2)^2 - 4(u_0^2v_2)v_2 + v_3 \\
&\quad - 2u_0v_3 - 2u_0^2v_3; u_1 \in U_e, v_1, v_2, v_3 \in V_e \rangle \subset (U_eV_e + V_e^2) \oplus V_e = P_e
\end{aligned}$$

Como M e P são invariantes, temos que tais subespaços possuem dimensão invariante e foi visto anteriormente que U e V têm dimensão invariante, assim U^2 e $(UV + V^2)$ têm dimensão invariante. Também podemos obter outros p-subespaços invariantes por produtos de N , M e P .

$$N^2 = (UV + V^2) \oplus U^2 \quad (2.4)$$

$$NM = (UV + U^2V) \oplus U^2 \quad (2.5)$$

$$NP = (UV + V^2) \oplus U(UV) \quad (2.6)$$

$$M^2 + P^2 = ((UV)V + U^3 + V^3 + V^2) \oplus U^2 \quad (2.7)$$

$$N^3 = ((UV)V + U^3 + V^3 + U^2V) \oplus U(UV) \quad (2.8)$$

Desta forma, concluímos também que $UV + U^2V$, $U(UV)$, $(UV)V + U^3 + V^3 + V^2$ e $(UV)V + U^3 + V^3 + U^2V$ têm dimensão invariante.

Diz-se que uma álgebra de Bernstein A é *nuclear* quando $A = A^2$. Neste caso temos $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e = Ke \oplus (U_e + V_e^2) \oplus U_e^2 = A^2$ e portanto $N = M \cap P$, $U_e = U_eV_e + V_e^2$ e $V_e = U_e^2$.

Uma álgebra de Bernstein A é dita *normal* se $P \cap U = 0$ desta forma temos que V é invariante já que $\tau(V_e) \subset V_e$ e τ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Doravante, se p e q são polinômios, dizemos que $p \subset q$ quando $p_e \subset q_e$ para qualquer idempotente não nulo e .

Se m é um monômio não-nulo de grau $k \geq 2$ então existem dois monômios m_1 e m_2 de grau $\leq k$ tais que $m = m_1 m_2$. Se $m \subset V$ então $m_1, m_2 \subset U$, se $m \subset U$ então ou $m_1 \subset U$ e $m_2 \subset V$ ou $m_1, m_2 \subset V_e$. Se A é uma álgebra de Bernstein-Jordan, o último caso resume-se a $m = 0$.

Lema 2. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$. Se m é um monômio de grau $k \geq 3$ com $m \subset V_e^2$ então $m_e = 0$.*

Demonstração

Seja m um monômio de grau $k \geq 3$, existem ν_1 e ν_2 contidos em V tais que o grau de $\nu_1 \geq 2$ e $m = \nu_1 \nu_2$, vimos anteriormente que existem $\mu_1, \mu_2 \subset U$ tal que $\nu_1 = \mu_1 \mu_2$, portanto $m = (\mu_1 \mu_2) \nu_2 \subset U^2 V = 0$. \square

A próxima proposição apresenta propriedades das funções σ , τ e ψ em uma certa classe de álgebras de Bernstein, a saber, as álgebras de Bernstein $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ que satisfazem $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Observemos que esta classe de álgebras de Bernstein contém a classe das álgebras de Bernstein-Jordan.

Observação 1: Nas álgebras de Bernstein que satisfazem $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$, vale a identidade (1.20).

Proposição 10. *Se em uma álgebra de Bernstein existe um idempotente e tal que para a decomposição de Peirce $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ se tenha $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$ então*

$$(a) \quad \sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(u_1 u_2)$$

$$(b) \quad \sigma(u)\tau(v) = \sigma(\psi(u)v)$$

$$(c) \quad \tau(v_1)\tau(v_2) = \sigma(v_1 v_2) = v_1 v_2$$

$$(d) \quad \psi(\psi(u)v) = uv$$

para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $v, v_1, v_2 \in V_e$.

Demonstração

(a) Usando (1.2) e (1.13) concluimos que em toda álgebra de Bernstein tem-se

$$\begin{aligned} \sigma(u_1)\sigma(u_2) &= (u_1 + 2u_1u_0)(u_2 + 2u_2u_0) \\ &= u_1u_2 + 2u_1(u_2u_0) + 2u_2(u_1u_0) + 4(u_1u_0)(u_2u_0) \\ &= u_1u_2 - 2u_0(u_1u_2) - 2u_0^2(u_1u_2) \\ &= \tau(u_1u_2) \end{aligned}$$

(b) Usando (1.2), (1.14) e (1.17) temos que

$$u_0((uu_0^2)v) = -(uu_0^2)(u_0v) = 2(u_0(u_0u))(u_0v) = 0$$

usando (1.2), (1.14), a identidade acima e a Observação 1, temos que

$$\begin{aligned} \sigma(u)\tau(v) &= (u + 2uu_0)(v - 2vu_0) \\ &= uv - 2u(vu_0) + 2(uu_0)v - 4(uu_0)(vu_0) \\ &= uv + 2(uv)u_0 + 2u_0^2(uv) \\ &= uv + 2(uv)u_0 - 2(u_0^2u)v \\ &= uv - 2(uu_0^2)v + 2(uv)u_0 - 4((uu_0^2)v)u_0 \\ &= \sigma[uv - 2(uu_0^2)v] \\ &= \sigma(\psi(u)v) \end{aligned}$$

(c) De acordo com (1.17) e a Observação 1, segue que

$$\begin{aligned} \tau(v_1)\tau(v_2) &= (v_1 - 2u_0v_1)(v_2 - 2u_0v_2) \\ &= v_1v_2 - 2(u_0v_1)v_2 - 2(u_0v_2)v_1 + 4(u_0v_1)(u_0v_2) \\ &= v_1v_2 \end{aligned}$$

de acordo com (1.15)

$$\sigma(v_1v_2) = v_1v_2 + 2u_0(v_1v_2) = v_1v_2$$

(d) Usando a identidade auxiliar do ítem (b) e (1.2) temos que

$$((u_0^2u)v)u_0^2 = -2u_0(u_0((u_0^2u)v)) = 0$$

usando (1.20) temos então

$$\begin{aligned} \psi(\psi(u)v) &= \psi(uv - 2(u_0^2u)v) \\ &= uv - 2(u_0^2u)v - 2(uv)u_0^2 + 4((u_0^2u)v)u_0^2 \\ &= uv \end{aligned} \quad \square$$

Mostraremos no próximo corolário que a condição $U_e^2V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$, não depende da escolha de um particular idempotente.

Corolário 2. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein então as seguintes condições são equivalentes.*

- (a) *Existe um idempotente $e \in A$ tal que $U_e^2V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$.*
- (b) *Para todo idempotente $e \in A$ vale $U_e^2V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$.*

Demonstração

Mostremos que (a) implica em (b). Seja $f = e + u_0 + u_0^2$ com $u_0 \in U_e$. Temos então $U_f^2V_f = \langle (\sigma(u_1)\sigma(u_2))\tau(v); u_1, u_2 \in U_e, v \in V_e \rangle = \langle \tau(u_1u_2)\tau(v); u_1, u_2 \in U_e, v \in V_e \rangle =$

$\langle (u_1 u_2)v; u_1, u_2 \in U_e, v \in V_e \rangle = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(\sigma(u)\tau(v))\tau(v) &= \sigma(\psi(u)v)\tau(v) \\
&= \sigma\left(\psi(\psi(u)v)v\right) \\
&= \sigma((uv)v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

A identidade (1.14) e as identidades dos ítems (a), (b) e (c) da proposição 10 podem ser generalizadas para subespaços de U e V , tal como mostra o próximo corolário.

Corolário 3. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Se $X, X_1, X_2 \subset U_e$ e $W, W_1, W_2 \subset V_e$ são subespaços de A então*

- (a) $(XW_1)W_2 = (XW_1)W_2$
- (b) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(X_1X_2)$
- (c) $\sigma(X)\tau(W) = \sigma(\psi(X)W)$
- (d) $\tau(W_1)\tau(W_2) = \sigma(W_1W_2)$

Demonstração

O ítem (a) decorre da Observação 1 aos geradores dos subespaços, os ítems restantes seguem da proposição anterior aplicadas aos geradores dos subespaços em questão. \square

O próximo lema mostra que nas álgebras de Bernstein-Jordan os p-subespaços absorvem produtos por V_e , isto é, $V_e p_e \subset p_e$. Já nas álgebras que satisfazem $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$ os p-subespaços absorvem o produto U_e^2 .

Lema 3. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein então*

- (a) *A é uma álgebra de Bernstein-Jordan, então $V_e p_e \subset p_e$ para todo p -subespaço de p_e de A ;*
- (b) *Se $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$ para quaisquer $u \in U_e, v \in V_e$ então $U_e^2 p_e \subset p_e$ para todo p -subespaço p_e de A .*

Demonstração

(a) Primeiro consideremos o caso em que $p = m$ é um monômio e façamos indução sobre o grau k do mesmo. Se $k = 1$ então $m_e = U_e$ ou $m_e = V_e$. No primeiro caso $V_e m_e = U_e V_e \subset U_e = m_e$ e, no segundo caso, $V_e m_e = V_e^2 = 0 \subset m_e$. Suponhamos que o lema é válido para monômios de grau $\leq k$, seja m um monômio de grau $k+1$, então existem monômios m_1, m_2 tais que o grau de m_1 e de m_2 são menores que k e $m = m_1 m_2$. Foi visto anteriormente que ou $m_1 \subset U_e$ e $m_2 \subset V_e$ ou $m_1, m_2 \subset U_e$. No primeiro caso usamos o ítem (a) da proposição anterior e a hipótese de indução para concluir que

$$V_e m_e = V_e(m_{1e} m_{2e}) = m_{2e}(m_{1e} V_e) \subset m_{2e} m_{1e} = m_e$$

no segundo caso

$$V_e m_e \subset V_e^2 = 0 \subset m_e$$

Agora suponhamos que p é um polinômio, então existem m_1, m_2, \dots, m_l monômios tais que

$$p = \sum_{i=1}^l m_i, \text{ assim temos}$$

$$V_e p_e = V_e \sum_{i=1}^l m_{ie} = \sum_{i=1}^l V_e m_{ie} \subset \sum_{i=1}^l m_{ie} = p_e$$

A prova do ítem (b) é análoga a prova do ítem (a). □

Mostraremos no próximo lema que nas álgebras de Bernstein que satisfazem $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, os p -subespaços contidos em U_e são deixados fixos pela função ψ .

Lema 4. *Se $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$ então $\psi(g_e) = g_e$ para todo p -subespaço $g_e \subset U_e$.*

Demonstração

Como ψ é um isomorfismo, basta mostrar que $\psi(g_e) \subset g_e$ já que $\psi(g_e)$ é isomorfo a g_e . Seja $u \in g_e$ então, de acordo com a proposição anterior, $\psi(u) = u - 2uu_0^2 \in g_e + U_e^2 g_e = g_e$. \square

Provemos agora um dos principais resultados deste trabalho.

Teorema 1. *Se $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ é uma álgebra de Bernstein tal que $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e, v \in V_e$, então todos os p -subespaços de A têm dimensão invariante.*

Demonstração

Sejam e, f idempotentes não nulos de A e seja $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$. Primeiro mostraremos que, para quaisquer monômios g e h tais que $g \subset U$ e $h \subset V$, tem-se $g_f = \sigma(g_e)$ e $h_f = \tau(h_e)$. Para isto usaremos indução sobre o grau k de g e h . Se $k = 1$ então $g_e = U_e$ ou $h_e = V_e$ e $g_f = \sigma(u_e)$ ou $h_f = \tau(h_e)$. Suponhamos que, para quaisquer monômios de grau $\leq k$, a afirmação seja válida. Sejam g e h monômios com grau $k + 1$ tais que $g \subset U$ e $h \subset V$, logo existem monômios g_1, g_2, h_1, h_2 de grau $\leq k$ tais que $g = g_1 g_2$ e $h = h_1 h_2$. Se $g_1 \subset U$ e $g_2 \subset V$ então usando a hipótese de indução e os lema e corolários anteriores temos que $g_f = g_{1f} g_{2f} = \sigma(g_{1e}) \tau(g_{2e}) = \sigma(\psi(g_{1e}) g_{2e}) = \sigma(g_{1e} g_{2e}) = \sigma(g_e)$. Se $g_1, g_2 \subset U$ então $g_f = g_{1f} g_{2f} = \sigma(g_{1e}) \sigma(g_{2e}) = \sigma(g_{1e} g_{2e}) = \sigma(g_e)$. Se $h_1, h_2 \subset V$ então $h_f = h_{1f} h_{2f} = \tau(h_{1e}) \tau(h_{2e}) = \tau(h_{1e} h_{2e}) = \tau(h_e)$.

Se g é polinômio tal que $g \subset U$ existem monômios $m_1, m_2, \dots, m_l \subset U$ tais que $g = \sum_{i=1}^l m_i$

e portanto $g_f = \sum_{i=1}^l m_{if} = \sum_{i=1}^l \sigma(m_{ie}) = \sigma(\sum_{i=1}^l m_{ie}) = \sigma(g_e)$. Analogamente concluímos que, para qualquer polinômio $h \subset V$, tem-se $h_f = \tau(h_e)$. Se p é um polinômio então existem polinômios g, h tais que $p = g + h$ e $g \subset U$ e $h \subset V$ assim $\dim p_f = \dim (g_f \oplus h_f) = \dim g_f + \dim h_f = \dim \sigma(g_e) + \dim \tau(h_e) = \dim g_e + \dim h_e = \dim (g_e \oplus h_e) = \dim p_e$. \square

2.3 p-subespaços em álgebras de Bernstein-Jordan

O próximo corolário segue do fato da classe das álgebras de Bernstein-Jordan estarem contidas na classe das álgebras de Bernstein que satisfazem $U_e^2 V_e = 0$ e $(uv)v = 0$.

Corolário 4. *Todo p-subespaço de uma álgebra de Bernstein-Jordan tem dimensão invariante.*

Corolário 5. *Todo p-subespaço de uma álgebra de Bernstein contido em V tem dimensão invariante.*

Demonstração

Sejam e, f idempotentes não nulos de A , $Ke \oplus U_e \oplus V_e$ a decomposição de Peirce relacionada ao idempotente e , $\bar{A} = A/L$ a álgebra quociente e h um polinômio contido em V . Do mesmo modo usado para concluir que $U_{\bar{e}} = (U + L)/L$ e $V_{\bar{e}} = (V_e \oplus L)/L$, conclui-se que $h_{\bar{e}} = (h_e \oplus L)/L$. Seja $\theta : h_e \rightarrow h_{\bar{e}}$ definida por $\theta(v) = \bar{v}$, para todo $v \in h_e$. A função θ está bem definida e é claramente linear e sobrejetora. Se $\theta(v) = \bar{0}$ então $v \in L$ e portanto $v = 0$. Assim, θ é injetora e conclui-se que $\dim h_e = \dim h_{\bar{e}}$. Analogamente, conclui-se que $\dim h_f = \dim h_{\bar{f}}$. Como A/L é uma álgebra de Bernstein então todos seus p-subespaços têm dimensão invariante de acordo com o teorema anterior e portanto

$$\dim h_e = \dim h_{\bar{e}} = \dim h_{\bar{f}} = \dim h_f \quad \square$$

O próximo corolário é uma consequência imediata do corolário anterior.

Corolário 6. *Seja um $p = g \oplus h$ um polinômio tal que $g \subset U$ e $h \subset V$ então p tem dimensão invariante se e somente se g tem dimensão invariante.*

O lema seguinte será utilizado na demonstração do Teorema 2.

Lema 5. *Sejam $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, $u_0 \in U_e$, X, W subespaços de A tais que $X \subset U_e$ e $W \subset V_e$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $u_0W \subset X$ e $u_0X \subset W$;

(b) para quaisquer $x \in X$, $w \in W$ existem $x' \in X$ e $w' \in W$ tais que $u_0x = \frac{1}{2}(w' - w)$ e $u_0w = \frac{1}{2}(x - x')$.

Demonstração

Mostremos que (a) implica (b). Seja $x \in X$ e $w \in W$ basta tomar $w' = 2u_0x + w \in W$ e $x' = x - 2u_0w \in X$ por (a). Mostremos que (b) implica (a), analisemos os geradores de u_0W e u_0X . Temos que $u_0w = \frac{1}{2}(x - x') \in X$ e $u_0x = \frac{1}{2}(w' - w) \in W$. \square

Demonstraremos agora o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein-Jordan e p um polinômio então as seguintes condições são equivalentes*

(a) p é invariante;

(b) $U_e p_e \subset p_e$;

(c) p_e é um ideal de A .

Demonstração

Para todo $u_0 \in U_e$ seja $f_{u_0} = e + u_0 + u_0^2$ e σ e τ os isomorfismos definidos anteriormente. Seja p um polinômio, logo existem g e h polinômios tais que $g \subset U$ e $h \subset V$ com $p = g + h$. Temos então de acordo com o Teorema 1, que

$$\begin{aligned} pf_{u_0} &= gf_{u_0} \oplus hf_{u_0} \\ &= \sigma(g_e) \oplus \tau(h_e) \\ &= \{\sigma(x); x \in g_e\} \oplus \{\tau(w); w \in h_e\} \\ &= \{(x - 2u_0w) + (w + 2u_0x); u \in X, w \in W\} \end{aligned}$$

de acordo com o Teorema 1 p tem dimensão invariante, então $\dim p_{f_{u_0}} = \dim p_e$, para qualquer $u_0 \in U_e$. Supondo que p é invariante então $p_{f_{u_0}} = p_e$, para qualquer $u_0 \in U_e$, ou seja,

$$p_{f_{u_0}} \subset p_e$$

Por causa de $N = U_e \oplus V_e$ e $p_e = g_e \oplus h_e$ isto é equivalente a dizer que

$$x' = x - 2u_0w \in g_e$$

$$w' = w + 2u_0x \in h_e$$

De acordo com o lema anterior essas equações equivalem a dizer que

$$u_0g_e \subset h_e$$

$$u_0h_e \subset g_e$$

para qualquer $u_0 \in U_e$, e isto é o mesmo que

$$U_e g_e \subset h_e$$

$$U_e h_e \subset g_e$$

Estas inclusões ocorrem se, e somente se,

$$U_e p_e \subset p_e$$

o que é equivalente a

$$A p_e \subset p_e$$

já que $(Ke)p_e = g_e \subset p_e$ por definição e $V_e p_e \subset p_e$ pelo Lema 3. □

Capítulo 3

Álgebras de Bernstein n -excepcionais

Neste capítulo estudaremos o conceito de grau de excepcionalidade de uma álgebra de Bernstein, e como esse conceito influencia na dimensão de certos subespaços nas álgebras de Bernstein.

3.1 As subclasses n -excepcionais

Sejam $X_1, X_2 \subset A$ subespaços, definamos recursivamente o subespaço $X_1X_2^{(n)}$, como sendo: $X_1X_2^{(1)} = X_1X_2$ e $X_1X_2^{(n)} = (X_1X_2^{(n-1)})X_2$ se $n \geq 2$.

Diz-se que uma álgebra de Bernstein é n -*excepcional* se $n \geq 0$ é o menor inteiro para o qual se tem $U_e(U_eV_e^{(n)}) = 0$, para todo idempotente não nulo e de A . O inteiro n será chamado de *grau de excepcionalidade* de A . Este conceito generaliza o de álgebras de Bernstein excepcionais que são aquelas em que se tem $U_e = 0$ para todo idempotente não nulo e .

Proposição 11. *Seja A uma álgebra de Bernstein e $p \subset U$ um p -subespaço de A . Então as seguintes proposições são equivalentes.*

(a) existe um idempotente e tal que $p_e \subset L$;

(b) para todo idempotente e tem-se $p_e \subset L$.

Demonstração

Mostremos que (a) implica em (b). Seja e um idempotente de A tal que $p_e \subset L$ e seja f um idempotente qualquer de A . Como $p_e \subset L$, temos $g_e = U_e p_e = 0$. Observemos que $g \subset V$, assim g tem dimensão invariante e portanto $0 = \dim g_e = \dim g_f$, logo $0 = g_f = U_f p_f$, portanto $p_f \subset L$. É óbvio que (b) implica em (a).

O lema que demonstramos a seguir será muito importante para provarmos que toda álgebra de Bernstein de dimensão finita é n -excepcional para algum n .

Lema 6. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, $u \in U_e$ e $v, v_i \in V_e (i = 1, 2, \dots)$. Para todo inteiro $k \geq 2$ tem-se*

(i) $R_v^k(u) \in L$;

(ii) $\sum_{\sigma \in S_k} R_{v_{\sigma(1)}} R_{v_{\sigma(2)}} \dots R_{v_{\sigma(k)}}(u) \in L$;

(iii) $R_{v_1} R_{v_k} R_{v_{k-1}} \dots R_{v_2} R_{v_1}(u) \in L$.

Demonstração

Seja $u' \in U_e$. Demonstramos (i). Por (1.14) e (1.17) temos

$$u_1 R_v^2(u) = u_1((uv)v) = -(u_1 v)(uv) = 0$$

e portanto (i) é válida para $k = 2$. Suponhamos que $R_v^k(u) \in L$, então

$$R_v^{k+1}(u) = R_v(R_v^k(u)) = R_v^k(u)v \in LV \subset L$$

e (i) é válida para $k + 1$.

A demonstração de (ii) decorre diretamente da $(k - 1)$ -ésima linearização de (i) na variável v .

Demonstremos (iii). Fazendo $k = 2$ em (ii) temos $R_{v_1}R_{v_2}(u) + R_{v_2}R_{v_1}(u) = l \in L$. Assim

$$(uv_2)v_1 = l - (uv_1)v_2 \quad (3.1)$$

substituindo u por uv_1 temos $((uv_1)v_2)v_1 = l - ((uv_1)v_1)v_2$. Logo

$$R_{v_1}R_{v_2}R_{v_1}(u) = l - R_{v_1}^2(u)v_2 \in L + LV_e = L$$

e portanto (iii) vale para $k = 2$. Suponhamos que $l' = R_{v_1}R_{v_k}R_{v_{k-1}}\dots R_{v_2}R_{v_1}(u) \in L$.

Substituindo v_2 por v_{k+1} em (3.1) e substituindo u por $((\dots(uv_1)v_2)\dots)v_k$ tem-se

$$((((uv_1)v_2\dots)v_k)v_{k+1})v_1 = l - (((uv_1)v_2)\dots v_k)v_1)v_{k+1}$$

$$R_{v_1}R_{v_{k+1}}R_{v_k}\dots R_{v_2}R_{v_1}(u) = l - l'v_{k+1} \in L + LV_e = L$$

assim (iii) é válido para $k + 1$. □

Usaremos o próximo resultado na demonstração do Teorema 3 a seguir.

Lema 7. *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$, então para todo idempotente $e \in A$ tem-se $U_e V_e^{(s+k)} \subset L$ para $k \geq 1$.*

Demonstração

O resultado é válido para $r = 0$ ou $s = 0$. Suponhamos então que $r, s \geq 1$, sejam $\{u_i\}_{1 \leq i \leq r}$ e $\{v_j\}_{1 \leq j \leq s}$ bases de U_e e V_e , respectivamente. Mostremos primeiramente o resultado pra $k = 1$. Seja $u = (\dots((u_i v_{j_1})v_{j_2})\dots)v_{j_{s+1}}$ com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_{s+1} \leq s$ um gerador de $U_e V_e^{(s+1)}$, existem $l < k$, índices tais que $j_l = j_k = j$ e portanto, aplicando o ítem (iii) do resultado anterior para $u' = (\dots(u_i v_{j_1})\dots)v_{j-1}$, temos

$$u' = (((uv_j)v_{j_{l+1}}\dots v_{j_{k-1}})v_j)v_{j_{k+1}}\dots v_{j_{s+1}} \in L$$

Portanto $U_e V_e^{(s+1)} \subset L$. Como L é um ideal conclui-se facilmente que $U_e V_e^{(s+k)} \subset L$, para qualquer inteiro $k \geq 2$. □

O resultado seguinte mostra que toda álgebra de Bernstein de dimensão finita tem um grau de excepcionalidade.

Teorema 3. *Toda álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$ é n -excepcional para algum inteiro n com $0 \leq n \leq s+1$.*

Demonstração

Decorre diretamente do lema anterior. Com efeito, já que $U_e V_e^{(s+1)} \subset L$, então $U_e(U_e V_e^{(s+1)}) = 0$ e portanto o grau de excepcionalidade de A é $\leq s+1$. \square

Uma conseqüência do teorema anterior é que o grau de excepcionalidade de uma álgebra de Bernstein A é limitado em função da dimensão de A conforme veremos no próximo corolário.

Corolário 7. *Seja A uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade n . Se $\dim A \geq 2$, então $n \leq \dim A - 2$.*

Demonstração

Seja A uma álgebra de Bernstein do tipo $(1+r, s)$ então $\dim A = 1+r+s$. Se $U_e^2 = 0$ então $n = 0 \leq \dim A - 2$. Se $U_e^2 \neq 0$ então $r \geq 1$ e $s \geq 1$. Se $r = 1$ temos $U_e = \langle u \rangle$ e $U_e(U_e V_e) = \langle u(uv); v \in V_e \rangle = 0$ por (1.11), então $n = 1 \leq \dim A - 2$. Se $r \geq 2$ então $n \leq s+1 = \dim A - r \leq \dim A - 2$. \square

3.2 Sobre álgebras 2-excepcionais

Nesta seção estudaremos os efeitos sobre a dimensão de certos subespaços quando o grau de excepcionalidade n for maior ou igual a 2.

Proposição 12. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, se $U_e(U_e V_e) \neq 0$ então $r \geq 4$, $s \geq 2$ e $\dim L \leq r - 4$.*

Demonstração

Como $U_e(U_e V_e) \subset V_e$ então $\dim U_e(U_e V_e) = \dim \overline{U_e(U_e V_e)} \neq 0$, existem $u_1, u_2 \in U_e, v \in V_e$ tais que $\overline{u_1(u_2 v)} \neq 0$, mostremos agora que $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_1 v}, \overline{u_2 v}\}$ e $\{\overline{v}, \overline{u_1(u_2 v)}\}$ são conjuntos linearmente independentes. De fato, sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in K$ tais que $\alpha_1 \overline{u_1} + \alpha_2 \overline{u_2} + \alpha_3 \overline{u_1 v} + \alpha_4 \overline{u_2 v} = \overline{0}$. Multiplicando esta combinação linear por $\overline{u_2 v}$, usando (1.11) e (1.17), e como por (1.14) temos que $\overline{u_2(u_1 v)} = -\overline{u_1(u_2 v)} \neq \overline{0}$, concluímos que $\alpha_1 = 0$. Analogamente multiplicando-se por $\overline{u_1 v}$, conclui-se que $\alpha_2 = 0$. Agora multiplicando a mesma combinação linear por $\overline{u_2}$ conclui-se que $\alpha_3 = 0$. Procedendo do mesmo modo para $\overline{u_1}$ conclui-se que $\alpha_4 = 0$.

Sejam β_1 e β_2 tais que $\beta_1 \overline{v} + \beta_2 \overline{u_1(u_2 v)} = \overline{0}$. Multiplicando-se esta igualdade por $\overline{u_1}$, segue de (1.2) e da proposição 8, que $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Portanto $\dim U_e \geq \dim \overline{U_e} \geq 4$ e $\dim V_e = \dim \overline{V_e} \geq 2$ e como $\dim \overline{U_e} = \dim U_e - \dim L$ então $\dim L \leq r - 4$. \square

O corolário seguinte é uma conseqüência imediata da proposição anterior e de sua demonstração.

Corolário 8. *Seja A uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 2$, então $\dim A \geq 7$ e $\dim \overline{UV} \geq 2$.*

O corolário seguinte mostra que para álgebras de Bernstein de dimensões maiores a limitação para o grau de excepcionalidade das mesmas pode ser melhorada.

Corolário 9. *Se A é uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade n e $\dim A \geq 5$ então $n \leq \dim A - 4$.*

Demonstração

Se $r \leq 3$ então pela proposição anterior $n \leq 1 \leq \dim A - 4$.

Se $r \geq 4$ então $n \leq s + 1 = \dim A - r \leq \dim A - 4$. \square

3.3 Sobre álgebras 3-excepcionais

Nesta seção estudaremos as influências sobre a dimensão da álgebra e de alguns de seus subespaços quando $n \geq 3$.

Proposição 13. *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$. Se $U_e(U_e V_e^{(2)}) \neq 0$ então $r \geq 8$, $s \geq 3$ e $\dim L \leq r - 8$.*

Demonstração

Como $U_e(U_e V_e^{(2)}) \subset V$ então $\dim \overline{U_e(U_e V_e^{(2)})} = \dim U_e(U_e V_e^{(2)}) \neq 0$ logo existem $u_1, u_2 \in U_e$ e $v_1, v_2 \in V_e$ tais que

$$\overline{u_1((u_2 v_1) v_2)} \neq \bar{0}$$

Para provarmos nossa proposição é suficiente mostrar que os conjuntos

$$\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_1 v_1}, \overline{u_1 v_2}, \overline{u_2 v_1}, \overline{u_2 v_2}, \overline{(u_1 v_1) v_2}, \overline{(u_2 v_1) v_2}\}$$

$$\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{(u_1 v_1)(u_2 v_2)}\}$$

são linearmente independentes.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8 \in K$ tais que

$$\alpha_1 \overline{u_1} + \alpha_2 \overline{u_2} + \alpha_3 \overline{u_1 v_1} + \alpha_4 \overline{u_1 v_2} + \alpha_5 \overline{u_2 v_1} + \alpha_6 \overline{u_2 v_2} + \alpha_7 \overline{(u_1 v_1) v_2} + \alpha_8 \overline{(u_2 v_1) v_2} = \bar{0}$$

multiplicando esta combinação linear por $(u_2 v_1) v_2$, lembrando que $U_e V_e \subset V_e$ e usando (1.14), (1.17) e como $\overline{u_1((u_2 v_1) v_2)} \neq \bar{0}$ então $\alpha_1 = 0$. Analogamente multiplicando esta mesma combinação linear, sucessivamente, por $\overline{(u_1 v_1) v_2}$, $\overline{u_2 v_2}$, $\overline{u_2 v_1}$, $\overline{u_1 v_2}$, $\overline{u_1 v_1}$, $\overline{u_2}$, $\overline{u_1}$ conclui-se, respectivamente, que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$.

Sejam $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in K$ tais que

$$\beta_1 \overline{v_1} + \beta_2 \overline{v_2} + \beta_3 \overline{(u_1 v_1)(u_2 v_2)} = 0$$

multiplicando-se esta igualdade por $\overline{(u_2 v_2)}$ e usando (1.11), (1.13) concluímos que $\beta_1 = 0$.

Agora multiplicando-se por $\overline{(u_1 v_1)}$ temos que $\beta_2 = 0$ e como $\overline{(u_1 v_1)(u_2 v_2)} \neq \bar{0}$ então $\beta_3 = 0$. \square

Corolário 10. *Em uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 3$ tem-se $\dim \overline{UV} \geq 6$ e $\dim \overline{(UV)V} \geq 2$.*

O próximo resultado nos dá uma cota superior para o grau de excepcionalidade de álgebras de Bernstein com dimensão maior que 9.

Corolário 11. *Seja A uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade n , e dimensão maior que 9 então $n \leq \dim A - 8$.*

Demonstração

Se $r \leq 7$ então $n \leq 2 \leq \dim A - 8$. Se $r \geq 8$ então $n \leq s + 1 = \dim A - r \leq \dim A - 8$. \square

3.4 O p-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras 0-excepcionais e 1-excepcionais

Nesta seção veremos como o grau de excepcionalidade n de uma álgebra de Bernstein influi sobre o p-subespaço $UV + V^2$ quando $n \leq 1$.

Definamos as seguintes funções a serem usadas posteriormente nesta seção $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ e $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $R(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8z}}{2}$ e $\phi(x)$ representa o inteiro tal que $\phi(x) - 1 < x \leq \phi(x)$.

A próxima proposição dá um limitante para dimensão de L nas álgebras de Bernstein que satisfazem $\dim U, \dim V \geq 1$.

Proposição 14. *Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$, então $\dim L \leq r - \phi \circ R(\dim U_e^2)$.*

Demonstração

Seja M_e um subespaço complementar de L em U_e , como $U_e = L + M_e$ então M_e tem dimensão invariante, já que U_e e L têm dimensão invariante. Seja $z = \dim U_e^2$ e $k =$

$\dim M_e$. Tem-se que $U_e^2 = M_e^2$ e portanto $z = \dim U_e^2 = \dim M_e^2 \leq \frac{k(k+1)}{2}$. Resolvendo esta inequação, conclui-se que $k \geq R(z)$. Tomando as soluções inteiras desta, temos que $\phi(R(z)) \leq k \leq r$, assim $\dim L = r - k \leq r - \phi(R(\dim U_e^2))$. \square

Como conseqüência da proposição anterior temos o seguinte corolário, no qual obtemos um majorante para a dimensão do p-subespaço $UV + V^2$ nas álgebras de Bernstein que satisfazem $\dim U, \dim V \geq 1$.

Corolário 12. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$, então $\dim (U_e V_e + V_e^2) \leq r - \phi(R(\dim U_e^2))$.*

Demonstração

Como $n \leq 1$ temos $U_e(U_e V_e) = 0$. Portanto $U_e V_e \subset L$. Por (1.15) tem-se que $V^2 \subset L$, assim $U_e V_e + V_e^2 \subset L$, logo $\dim (U_e V_e + V_e^2) \leq \dim L \leq r - \phi(R(\dim U_e^2))$. \square

Temos a seguir um limitante para a dimensão do p-subespaço $(U_e V_e + V_e^2) \oplus V_e$.

Corolário 13. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$ então $\dim ((U_e V_e + V_e^2) \oplus V_e) \leq \dim N - \phi(R(\dim U_e^2))$.*

Corolário 14. *Seja uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $r, s \geq 1$ e grau de excepcionalidade $n \leq 1$. Se $\dim U_e^2 > \frac{r(r-1)}{2}$ então $U_e V_e + V_e^2 = 0$.*

Demonstração

Para $z = \dim U_e^2$, temos $z > \frac{r(r-1)}{2}$. Resolvendo esta inequação temos que $0 < r < \frac{1+\sqrt{1+8z}}{2} = 1 + R(z)$. Sabe-se que $z \leq \frac{r(r+1)}{2}$ então $r \geq R(z)$, logo $r-1 < R(z) \leq r$ e portanto $\phi(R(z)) = r$. De acordo com o Corolário 12, $\dim (U_e V_e + V_e^2) \leq r - \phi(R(\dim U_e^2)) = r - r = 0$. \square

Sejam k_1, k_2, \dots, k_n inteiros distintos pertencentes a $\{1, 2, \dots, p\}$, a seguir usaremos a notação $o(k_1, k_2, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_n) = x$ que indica que k_i é o x -ésimo elemento quando k_1, k_2, \dots, k_n são ordenados de forma crescente.

Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, $M \subset U_e$ um subespaço com dimensão $p > 0$ e $\{u_i\}_{1 \leq i \leq p}$ uma base arbitrária de M . Definiremos os seguintes subespaços.

(i) Para $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2, 3\}$ distintos:

$$M_{(n_1 n_2) n_3} = \langle (u_i^2 u_j) u_k; 1 \leq i, j, k \leq p, o(\hat{i} j k) = n_1, o(i \hat{j} k) = n_2, o(i j \hat{k}) = n_3 \rangle;$$

$$M_{n_1 (n_2 n_3)} = \langle u_i^2 (u_j u_k); 1 \leq i, j, k \leq p, o(\hat{i} j k) = n_1, o(i \hat{j} k) = n_2, o(i j \hat{k}) = n_3 \rangle;$$

(ii) Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ distintos:

$$M_{n_1 n_2 n_3 n_4} = \langle ((u_i u_j) u_k) u_l; 1 \leq i, j, k, l \leq p, o(\hat{i} j k l) = n_1, o(i \hat{j} k l) = n_2, o(i j \hat{k} l) = n_3, o(i j k \hat{l}) = n_4 \rangle;$$

$$M_{(n_1 n_2) (n_3 n_4)} = \langle (u_i u_j) (u_k u_l); 1 \leq i, j, k, l \leq p, o(\hat{i} j k l) = n_1, o(i \hat{j} k l) = n_2, o(i j \hat{k} l) = n_3, o(i j k \hat{l}) = n_4 \rangle.$$

Daqui em diante C_p, k representará o número binomial $\frac{p!}{k!(p-k)!}$ que é o número de combinações de p elementos tomados em grupos de k elementos.

Por exemplo:

$$M_{(21)3} = \langle (u_i^2 u_j) u_k; 1 \leq j < i < k \leq p \rangle \text{ e } \dim M_{(21)3} \leq C_{p,3}$$

$$M_{1342} = \langle ((u_i u_j) u_k) u_l; 1 \leq i < l < j < k \leq p \rangle \text{ e } \dim M_{1342} \leq C_{p,4}$$

Por causa de (1.10), (1.14), da linearização duas vezes de (1.16) e por causa da comuta-

tividade temos que

$$\begin{aligned}
(u_i^2 u_j) u_k &= -(u_i^2 u_k) u_j \\
((u_i u_j) u_k) u_l &= -((u_i u_j) u_l) u_k \\
((u_i u_j) u_k) u_l &= -((u_k u_i) u_j) u_l - ((u_k u_j) u_i) u_l \\
(u_i u_j) (u_k u_l) &= -(u_i u_k) (u_j u_l) - (u_i u_l) (u_j u_k) \\
((u_i u_j) u_k) u_l &= ((u_j u_i) u_k) u_l \\
u_i^2 (u_j u_k) &= u_i^2 (u_k u_j) \\
(u_i u_j) (u_k u_l) &= (u_i u_j) (u_l u_k) = (u_k u_l) (u_i u_j)
\end{aligned}$$

logo para $n_1, n_2, n_3 \in \{1, 2, 3\}$ distintos

$$\begin{aligned}
M_{(n_1 n_2) n_3} &= M_{(n_1 n_3) n_2} \\
M_{n_1 (n_2 n_3)} &= M_{n_1 (n_3 n_2)}
\end{aligned}$$

e para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ distintos

$$\begin{aligned}
M_{n_1 n_2 n_3 n_4} &= M_{n_1 n_2 n_4 n_3} = M_{n_2 n_1 n_3 n_4} \\
M_{n_1 n_2 n_3 n_4} &\subset M_{n_3 n_1 n_2 n_4} + M_{n_3 n_2 n_1 n_4} \\
M_{n_1 (n_2 n_3)} &= M_{n_1 (n_3 n_2)} \\
M_{(n_1 n_2) (n_3 n_4)} &= M_{(n_1 n_2) (n_4 n_3)} = M_{(n_3 n_4) (n_1 n_2)} \\
M_{(n_1 n_2) (n_3 n_4)} &\subset M_{(n_1 n_3) (n_2 n_4)} + M_{(n_1 n_4) (n_2 n_3)}
\end{aligned}$$

Lema 8. *Seja A uma álgebra n -excepcional com $n \geq 1$ então $U_e^3 \not\subset U_e$ e $(U_e^2)^2 \not\subset U_e$.*

Demonstração

Suponhamos que $(U_e^2)^2 = U_e$ então $(U_e)^2 = (U_e^2)^2 (U_e^2)^2 \subset U_e V_e^2 = 0$ por (1.15). Suponhamos que $U_e^3 = U_e$ logo $U_e^2 = U_e U_e^3 = U_e (U_e (U_e^2)) = U_e ((U_e (U_e^2)) U_e^2) = \dots = U_e (U_e U_e^{(s+1)}) \subset U_e (U_e V_e^{(s+1)}) = 0$. \square

Na próxima proposição encontramos limitantes superiores para a dimensão de M^3 , M^4 e $(M^2)^2$ em que $M \subset U$ é um subespaço de uma álgebra de Bernstein.

Proposição 15. *Seja $A = Ke \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, $M \subset U_e$ um subespaço de dimensão p então*

- (i) $\dim M^3 \leq \min\{r - 1, \frac{p(p^2-1)}{3}\};$
- (ii) $\dim M^4 \leq \min\{s, \frac{(p-2)(p-1)p(p+1)}{8}\};$
- (iii) $\dim (M^2)^2 \leq \min\{r - 1, \frac{p^2(p^2-1)}{12}\}.$

Demonstração

Seja $\{u_i\}_{1 \leq i \leq p}$ uma base arbitrária de M . Demonstremos (i). Pelo lema anterior, $M^3 \subset U_e^3 \subsetneq U_e$, assim $\dim M^3 \leq r - 1$. Consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \langle u_i^2; 1 \leq i \leq p \rangle \\ B &= \langle u_i u_j; 1 \leq i < j \leq p \rangle \\ M_1 &= \langle u_i^2 u_j; 1 \leq i < j \leq p \rangle \\ M_2 &= \langle u_i^2 u_j; 1 \leq j < i \leq p \rangle \\ M_3 &= \langle (u_i u_j) u_k; 1 \leq i < j < k \leq p \rangle \\ M_4 &= \langle (u_i u_j) u_k; 1 \leq i < k < j \leq p \rangle \\ M_5 &= \langle (u_i u_j) u_k; 1 \leq k < i < j \leq p \rangle \end{aligned}$$

É claro que $M^2 = A + B$. Logo $M^3 = (A + B)M = AM + BM$. Temos que $AM = \langle u_i^2 u_j; 1 \leq i, j \leq p \rangle = M_1 + M_2$ e $BM = \langle (u_i u_j) u_k; 1 \leq i < j \leq p, 1 \leq k \leq p \rangle = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$. Segue de (1.13) que $(u_i u_j) u_k = -(u_k u_i) u_j - (u_k u_j) u_i$. Portanto $M_5 \subset M_3 + M_4$ logo $M^3 = AM + BM = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$. Assim, $\dim M^3 \leq 2C_{p,2} + 2C_{p,3}$.

Mostremos agora (ii). Segue do ítem anterior que $M^4 = M^3 M = (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)M = M_1 M + M_2 M + M_3 M + M_4 M$ De acordo com as definições dos mesmos tem-se

que

$$\begin{aligned}
M_1M &= M_{(12)3} + M_{(13)2} + M_{(23)1} \\
M_2M &= M_{(21)3} + M_{(31)2} + M_{(32)1} \\
M_3M &= M_{1234} + M_{1243} + M_{(21)3} + M_{1342} + M_{(12)3} + M_{2341} \\
M_4M &= M_{1324} + M_{1423} + M_{(31)2} + M_{1432} + M_{(13)2} + M_{2431}
\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}
M_{(13)2} &= M_{(12)3} \\
M_{(23)1} &= M_{(21)3} \\
M_{(32)1} &= M_{(31)2} \\
M_{1243} &= M_{1234} \\
M_{1342} &= M_{1324} \subset M_{2134} + M_{2314} = M_{1234} + M_{2341} \\
M_{1432} &= M_{1423} \subset M_{2143} + M_{2413} = M_{1234} + M_{2431}
\end{aligned}$$

tem-se que

$$M^4 = M_{(12)3} + M_{(21)3} + M_{(31)2} + M_{1234} + M_{2341} + M_{2431}$$

portanto

$$\dim M^4 \leq C_{p,3} + C_{p,4}$$

Por fim demonstremos (iii). De acordo com os ítems anteriores temos que

$$M^2 = A + B$$

então

$$(M^2)^2 = (A + B)^2 = A^2 + AB + B^2$$

$$A^2 = \langle u_i^2 u_j^2; 1 \leq i, j \leq p, i \neq p \rangle$$

$$AB = \langle u_i^2 (u_j u_k; 1 \leq i, j \leq p, 1 \leq k \leq p) \rangle = M_{1(23)} M_{2(13)} M_{3(12)}$$

$$\begin{aligned}
B^2 &= \langle (u_i u_j)(u_k u_l); 1 \leq i < j; 1 \leq k < l \leq p \leq p \rangle \\
&= A^2 + M_{(12)(34)} + M_{2(13)} + M_{(13)(24)} + M_{1(23)} + M_{(23)(14)} + M_{3(12)} + M_{(14)(23)} \\
&\quad + M_{1(23)} + M_{(24)(13)} + M_{2(13)} + M_{(34)(12)}
\end{aligned}$$

pelo visto anteriormente temos que

$$\begin{aligned}
M_{1(32)} &= M_{1(23)} \\
M_{2(31)} &= M_{2(13)} \\
M_{3(21)} &= M_{3(12)} \\
M_{(34)(12)} &= M_{(12)(34)} \\
M_{(24)(13)} &= M_{(13)(24)} \subset M_{(12)(34)} + M_{(14)(23)}
\end{aligned}$$

logo

$$(M^2)^2 = A^2 + M_{1(23)} + M_{2(13)} + M_{3(12)} + M_{(12)(34)} + M_{(14)(23)}$$

daí

$$\dim (M^2)^2 \leq C_{p,2} + 3C_{p,3} + 2C_{p,4}.$$

□

A partir deste ponto tentaremos generalizar a proposição anterior.

Lema 9. *Nas condições da proposição anterior para $p \geq 2$. Se $\dim M^3 = \frac{p(p^2-1)}{3}$ então $\dim M^2 = \frac{p(p+1)}{2}$*

Demonstração

Como a dimensão de M^3 é máxima, então o conjunto gerador $B = \{u_i^2 u_j; 1 \leq i, j \leq p\} \cup \{(u_i u_j) u_k; 1 \leq i < j \leq p, 1 \leq i < k \leq p, j \neq k\}$ é linearmente independente. Provaremos agora que o conjunto $A = \{u_i u_j; 1 \leq i \leq j \leq p\}$ é linearmente independente.

De fato: tomemos uma combinação linear nula desses elementos

$$\sum_{i=1}^p \alpha_{ii} u_i^2 + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{i+1}^p \alpha_{ij} u_i u_j = 0$$

multiplicando esta equação por u_1 temos

$$\sum_{i=2}^p \alpha_{ii} u_i^2 u_1 + \sum_{j=2}^p \alpha_{1j} (u_1 u_i) u_1 + \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p \alpha_{ij} (u_i u_j) u_1 = 0$$

daí segue que

$$\sum_{i=2}^p \alpha_{ii} u_i^2 u_1 + \sum_{j=2}^p -\frac{1}{2} \alpha_{1j} u_1^2 u_j + \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p -\alpha_{ij} (u_1 u_i) u_j + \sum_{i=2}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p -\alpha_{ij} (u_1 u_i) u_j = 0$$

Como B é linearmente independente então $\alpha_{ii} = 0$ para $i \geq 2$, $\alpha_{1j} = 0$ para $j \geq 2$ e $\alpha_{ij} = 0$ para $2 \leq i < j \leq p$, então $\alpha_{11} u_1^2 = 0$. Multiplicando isto por u_2 , concluímos que $\alpha_{11} = 0$, e portanto A é uma base de M^2 . \square

Neste exemplo temos $A = Ke \oplus U \oplus V$ onde $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ com caracter ω definido por $\omega(e) = 1$, $\omega(u_i) = \omega(v_j) = 0$ e os produtos definidos por $ee = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i, i = 1, 2, 3$, $ev_j = 0, j = 1, 2$ e os produtos restantes definidos por

	u_1	u_2	u_3		v_1	v_2
u_1	$2v_1$	$v_1 + v_2$				u_3
u_2	$v_1 + v_2$	$2v_2$			$-u_3$	
u_3						

	v_1	v_2
v_1		
v_2		

Para o subespaço $M = \langle u_1, u_2 \rangle$ temos $p = 2$, $\dim M^2 = 2 = \frac{p(p+1)}{2} - 1$ e $\dim M^3 = 1 = \frac{p(p^2-1)}{3} - 1$.

Referências Bibliográficas

- [1] BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. *Sobre os subtipos nas álgebras de Bernstein n -excepcionais*, Tese de Doutorado- IME-USP, 2003.
- [2] MURAKAMI, Lucia Satie Ikemoto . *Algebras de Bernstein: Resultados Recentes*, Dissertação de Mestrado- IME-USP, 1995.
- [3] LYUBICH, Y.I., *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995.
- [4] PICANÇO, J. ; COSTA, R. *Invariance of dimension of p -subspaces in Bernstein algebras*. Communications in Algebra, New York, v. 27, n. 8, p. 4039-4055, 1999.
- [5] PICANÇO, J. *Supespaços invariantes em algumas álgebras Béricas*, Tese de Doutorado - IME-USP, 1998.
- [6] SHAFER, R.D., *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press , 1966.
- [7] WÖRZ-BUSEKROS, A., *Algebras in Genetics*, Lectures Notes in Biomathematics, 36, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1980.
- [8] WÖRZ-BUSEKROS, A., *Bernstein Algebras*, Arch, Math., 48, 388 – 398, (1989).
- [9] WÖRZ-BUSEKROS, A., *Further remarks on Bernstein Algebras*, J. Landon, Math. soc., 58, 69 – 73, (1989).