SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

PROBLEMA UNILATERAL PARA UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DEGENERADA DE VIBRAÇÕES DA VIGA

Por: Hercio da Siva Ferreira

Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira

Belém

2006

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

PROBLEMA UNILATERAL PARA UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DEGENERADA DE VIBRAÇÕES DA VIGA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada

HERCIO DA SILVA FERREIRA

PROBLEMA UNILATERAL PARA UMA EQUAÇÃO NÃO LINEAR DEGENERADA DE VIBRAÇÕES DA VIGA

Essa dissertação, foi julgada e aprovada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada pelo Corpo Docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

Conceito:

Belém, 11 de Abril de 2006

.....

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha

Coordenador do PPGME-UFPA

Banca Examinadora

.....

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira

FACI/IESAM

Orientador

.....

Prof. Dr. Jorge Ferreira

Universidade Federal de São João Del Rei

Examinador

.....

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

UFPA

Examinador

Aos meus pais José Marques e Maria Helena

Aos meus filhos Júlia e Pedro

“Procurarei sonhar , mas não farei dos sonhos os meus senhores ; antes , procurarei torná-los realidade com o meu poder criador e o meu trabalho sincero , honesto e altruístico.”

”Caruso Samel”

Resumo

Estudaremos neste trabalho a existência e unicidade de solução fraca global para a inequação variacional não linear degenerada

$$\left|\begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ \\ u(0) = u_0 \\ \\ u'(0) = u_1 \\ \\ u\mid_{\Sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\mid_{\Sigma} = 0 \end{array}\right.$$

Onde $K(x,t)$ é uma função definida em $Q = \Omega\times]0,T[$,$K(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in Q$, M uma função real contínua com certas propriedades e f pertence a classe de funções $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

Palavras chave: operador projeção , operador de penalização , operador monótono , operador lipschitziano , problema perturbado aproximado , problema penalizado , soluções global fracas , unicidade de soluções fracas.

Abstract

We will study in this work the existence and uniquenesse of global weak solution for the degenerated nonlinear variational inequality

$$\left|\begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ u\mid_{\Sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\mid_{\Sigma} = 0 \end{array}\right.$$

where $K(x,t)$ is a function defined on $Q = \Omega \times]0,T[$, $K(x,t) \geq 0$ for all $(x,t) \in Q$, M is a real continuous function and $f \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$

Key words: projector operator , penalty operator , monotone operator , lipschitzian operator , approximated perturbed problem , penalized problem , global weak solutions , uniqueness of weak solutions.

Agradecimentos

- Ao Grande Foco, Força Criadora, Vida do Universo, que muitos chamam de Deus.

- Ao professor Ducival Carvalho Pereira, por sua valiosa orientação e dedicação a este trabalho.

- Ao professor Juaci Picansso da Silva, pelo grande incentivo para que eu ingressasse neste curso.

- Ao professor Geraldo, pela grande ajuda e incentivo.

- Ao professor Jorge Ferreira por ter acreditado na minha capacidade de concluir este trabalho.

- Aos professores: Marcus Pinto da Costa da Rocha , Mauro de Lima Santos e João dos Santos Protázio , pela grande colaboração nas disciplinas básicas deste curso.

- Aos colegas do PPGME Sebastião, Silvia, Paula, Reiville, Rosinha, Carlos Alessandro, Heleno, Gracildo, Antenor, Pedrão, Baena, Aubedir, Márcio, Elizardo, Gizelle, pela amizade, ajuda e apoio, em especial: Pablo, Helena, Leandro e Renato.

Conteúdo

Introdução

O movimento transversal de viga extensível de comprimento L, com extremos presos a uma certa distância fixa pode ser modelado pela equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left(\sigma + \int_0^L u_\xi^2(\xi, t) d\xi\right)\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{1}$$

que foi proposto por Woinowsky-Krieger[15], onde ρ é uma constante positiva, σ uma constante não necessariamente positiva e o termo não-linear representa a mudança na tensão da viga devido a sua extensibilidade.

A formulação abstrata de (1) é dada pela equação

$$u'' + \rho A^2 u + M(|A^{\frac{1}{2}} u|^2) A u = 0 \tag{2}$$

Onde A é um operador auto-adjunto não limitado de um espaço de Hilbert H e M uma função real.

Encontramos no capítulo III de Pereira, D.C. [9] o estudo da existência e unicidade de solução do problema misto no cilindro finito $Q = \Omega \times]0, T[$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, para a equação

$$k(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)(-\Delta u) + u' = 0 \tag{3}$$

Onde $K(x,t)$ é uma função definida em Q ,$K(x,t) \geq 0$ para todo $(x,t) \in Q$, M uma função contínua e outras propriedades , o qual é um problema relacionado com a equação (1).

O objetivo principal deste trabalho é estudar a existência e unicidade de soluções fracas globais para o problema (P), abaixo:

$$(P) \left\| \begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ em\ Q \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1\ em\ \Omega \\ u|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Sigma = 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Trata-se de uma desigualdade variacional baseada na equação (3) , onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ regular. Para cada número real fixo, porém arbitrário

$T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $K(x,t) \geq 0$ é uma função definida em Q, M é uma função real com certas propriedades e $f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

O estudo das desigualdades variacionais foi iniciado por Stampacchia[10] , Lions-Stampacchia[11] , Brezis[1] e também por Kinderlehrer-Stampacchia[12] . Em Lions[8] , nós podemos encontrar o mesmo tipo de problema para um operador não linear do tipo hiperbólico , elíptico , e parabólico mas em um caso não degenerado. A degeneração de equação hiperbólica não linear traz dificuldades no caso de domínio cilíndrico , pois a geometria do domínio afeta a exatidão do problema. A existência e unicidade de soluções fracas regulares local e global em domínios cilíndricos para outros modelos encontramos em vários trabalhos , por exemplo [3], [4], [10] , [11] , [12] , [13] e [14].

Dividiremos nosso trabalho em três capítulos :

O capítulo I é dedicado às notações e resultados da Análise Matemática que serão utilizados nos demais capítulos.

No capítulo II encontramos a demonstração do Lema (2.1) , que nos leva a uma solução $u_{\varepsilon\delta}$ do Problema Aproximado Perturbado e Penalizado referente ao problema inicial (P).Para isso , utilizaremos o Método de Faedo-Galerkin e as estimativas a priori , para que posteriormente possamos fazer a passagem ao limite e a verificação das condições iniciais , concluindo assim a demonstração do Lema (2.1).

O capítulo III é destinado à demonstração do Teorema (2.1) , que trata da existência e unicidade de solução fraca global para a desigualdade variacional

$$\int_0^T (k(x,t)u'', v - u')dt + \int_0^T (-\Delta u, -\Delta(v - u'))dt + \int_0^T M(\|u\|^2)(-\Delta u, v - u')dt +$$
$$\int_0^T (u', v - u')dt \geq \int_0^T (f, v - u')dt.$$

Para isso , utilizaremos o Lema (2.1) e resultados do capítulo I.

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que utilizaremos no decorrer deste trabalho e no que se segue, Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ dotado da medida de Lebesgue dx.

Definição 1.1: Define-se por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis sobre Ω com valores em $\mathbb{R}$. Nesse espaço , define-se uma norma dada por

$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|dx$

Definição 1.2: Seja $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$. Define-se

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $|u|^p \in L^1(\Omega)\}$

Em $L^p(\Omega)$ considera-se a norma : $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$

Definição 1.3: Define-se

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ u$ é mensurável e $\exists\ C$ tal que $|u(x)| \leq C$ q.s em $\Omega\}$, com a norma

$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C;\ |u(x)| \leq C$ q.s em $\Omega\}$

Definição 1.4: Denomina-se espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω representando-o por $H^m(\Omega)$ ao espaço das funções reais u em Ω tais que $u \in L^2(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, para todo $|\alpha| \leq m$, onde $m \in \mathbb{N}$, com as derivadas D^α no sentido das distribuições

Em $H^m(\Omega)$ considera-se a seguinte estrutura hilbertiana :

- **Produto Escalar em** $H^m(\Omega)$

$((u,v)) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx\ \forall\ u, v \in H^m(\Omega)$

• **Norma Induzida por Este Produto Escalar**

$$\|u\| = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha}u)^2 \, dx$$

Representa-se por $H_0^m(\Omega)$ o fecho em $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, onde $\mathcal{D}(\Omega)$ denota o espaço das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. O produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ será representado por $((\ ,\ ))$ e $\|\cdot\|$, respectivamente. Além disso, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ será representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Definição 1.5: Seja X um espaço de Banach. Representa-se por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$ o espaço de Banach das (classes) de funções a valores vetoriais $u :]0,T[\longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$ com norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

Definição 1.6: Seja X um espaço de Banach. Representa-se por $L^{\infty}(0,T;X)$ o espaço de Banach das (classes) de funções a valores vetoriais $u :]0,T[\longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X \in L^{\infty}(0,T)$ com norma

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} ess\|u(t)\|_X$$

Noção de convergência em $C_0^{\infty}(0,T)$: Diz-se que uma sucessão f_n converge para f em $C_0^{\infty}(0,T)$, quando forem satisfeitas as condições :

i) todas as f_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de]0,T[;

ii) a sucessão f_n converge para f uniformemente em K , juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

Definição 1.7: Representa-se por $\mathcal{D}(0,T)$ o espaço vetorial $C_0^{\infty}(0,T)$, munido da noção de convergência acima.

Definição 1.8: Denomina-se distribuição sobre]0,T[, a toda forma linear contínua sobre $\mathcal{D}(0,T)$.

Notação : O valor da distribuição T em f representa-se por $\langle T, f\rangle$.

Noção de convergência das distribuições : Considere-se o espaço vetorial de todas as distribuições sobre (0,T). Neste espaço , diz-se que a sucessão T_n converge para T , quando a sucessão $\langle T_n, f\rangle$ converge para $\langle T, f\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda f em $\mathcal{D}(0,T)$.

Definição 1.9: Representa-se por $\mathcal{D}'(0,T)$ o espaço das distribuiççoes sobre (0,T) , com a noção de convergência acima.

Definição 1.10: Representa-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre (0,T) com valores em X.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Gronwall):

Se $g : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas tais que $g(t) \geq 0$; $h(t) \geq 0$ e $g(t) \leq C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds$, $\forall\ t \in [t_0, t_1]$ com $C_0 \geq 0$ e $C > 0$, então $g(t) \leq C_0 e^{C\int_{t_0}^{t} h(s)ds}$.

Dem.: $g(t) \leq C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds \Longleftrightarrow \frac{g(t)}{C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds} \leq 1 \Longleftrightarrow$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{Ch(s)g(s)}{C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds} ds \leq \int_{t_0}^{t} Ch(s)ds \Longleftrightarrow \left[\ln\left(C_0 + C\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds\right)\right]_{t_0}^{t} \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} Ch(s)ds \Longleftrightarrow \ln\left(C_0 + C\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds\right) - \ln\left(C_0 + C\int_{t_0}^{t_0} h(s)g(s)ds\right) \leq$$

$$C\int_{t_0}^{t} h(s)ds \Longleftrightarrow \ln\left(C_0 + C\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds\right) \leq \ln C_0 + C\int_{t_0}^{t} h(s)ds \Longleftrightarrow$$

$C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds \leq e^{\ln C_0} e^{C\int_{t_0}^{t} h(s)ds}$. Mas por hipótese $g(t) \leq C_0 + C\displaystyle\int_{t_0}^{t} h(s)g(s)ds$. Portanto,

$g(t) \leq C_0 e^{C\int_{t_0}^{t} h(s)ds}$.

Corolário 1.1: No teorema (1.1), se $h(s) = 1$ e $t_0 = 0$, pode se afirmar que $g(t) \leq C_0 + C\displaystyle\int_{0}^{t} g(s)ds \Longrightarrow g(t) \leq C_0 e^{Ct}$

Teorema 1.2 - (Banach - Steinhaus):

Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F. Suponhamos que $\sup\limits_{i\in I}\|T_iX\| < \infty$, $\forall$ $x \in E$. Então

$\sup\limits_{i\in I}\|T_iX\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})} < \infty$

ou seja, existe uma constante positiva C tal que $\|T_ix\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$ e $\forall\ i \in I$

Dem.: Veja [1]

Proposição 1.1- Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Se verifica:

(I) $[x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')]$ $[\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ f \in E']$

(II) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$

(III) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

(IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E'(isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Demonstração: Veja [1]

Observação 1.1- A parte (III) da proposição (1.1) é uma consequência do teorema de Banach-Steinhaus.

Proposição 1.2 - Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E'. Se verifica:

(I) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f\ \ em\ \ \sigma(E', E)] \Longleftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall\ \ x \in E]$

(II) Se $f_n \to f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$

(III) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$

(IV) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ esta limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(V) Se Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \to x$ fortemente em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1]

Teorema (1.3)- Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sucessão limitada em E'. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.

Dem.: Veja [1]

Corolário 1.1- (Compacidade de Aubin-Lions): Sejam $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e B_0, B, B_1 espaços de Banach sendo que B_0 e B_1 são reflexivos tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ ($\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta). Para $0 < T < \infty$, consideremos o espaço

$W = \{w;\ \ w \in L^{p_0}(0, T; B_0)\ \ e\ \ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$, com a norma

$\|w\|_W = \|w\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{P_1}(0,T;B_1)}$.

Então:

(I) W é um espaço de Banach

(II) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{P_0}(0, T; B)$

Dem.: Ver [8]

Lema 1.2- Seja g: $I\!R \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana e não decrescente , com $g(0) = 0$ então

$$(g(u), -\Delta u) \geq 0\ ,\ \forall\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

Dem : Ver [1] e [2]

Proposição 1.3: Seja $N = \{v \in L^2(\Omega);\ \ v \geq 0\ \ q.s\ \ em\ \ \Omega\}$ um convexo fechado do $L^2(\Omega)$. Portanto, se $w \in L^2(\Omega)$, então existe um único $P_N w \in N$ tal que

i) $|w - P_N w| \leq |w - v|$, $\forall\ v \in N$.

A desigualdade i) é equivalente a

ii) $P_N w \in N$

$(w - P_N w, v - P_N w) \leq 0$, $\forall\ v \in N$

Onde $P_N w$ é a projeção de w sobre N.

Dem.: Ver [1]

1.1 Operador de Penalização

Seja $N = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \ q.s \ em \ \Omega\}$ o conjunto fechado e convexo de $L^2(\Omega)$ com $0 \in N$ o qual tem a seguinte propriedade:

Existe uma contração $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, $|\rho(y_1) - \rho(y_2)| \leq |y_1 - y_2|$, com $\rho(0) = 0$, tal que $(P_N v)(x) = \rho(v(x))$, $\forall \ v \in L^2(\Omega)$, onde P_N é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ em N.

Exemplo de contração :

Consideremos $N = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \ q.s \ em \ \Omega\}$ .Existe uma contração $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $\rho(0) = 0$, tal que$(P_N v)(x) = \rho(v(x))$, $\forall \ v \in L^2(\Omega)$, onde P_N é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ em N.

De fato , basta tomar $\rho(\lambda) = max\{0, \lambda\} = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$.

Note que ,

$|\rho(y_1) - \rho(y_2)| = \frac{1}{2}||y_1| - |y_2| + y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2}(||y_1| - |y_2|| + |y_1 - y_2|) \leq \frac{1}{2}(|y_1 - y_2| + |y_1 - y_2|) = |y_1 - y_2|$
Logo ρ é uma contração.

Pela proposição(1.3) temos que: $(w - P_N w, v - P_N w) \leq 0$, $\forall \ v \in N$

Em particular , tomando $v = \varphi + P_N w$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, obtemos

$(w - P_N w, (\varphi + P_N w) - P_N w) = (w - P_N w, \varphi) \leq 0$, $\forall \ \varphi \geq 0$.

E isto implica dizer que

$$w - P_N w \leq 0 \text{ , ou ainda , } (w - P_N w, P_N w) \leq 0 \text{ , desde que } P_N w \in N.$$

Agora , tomando $v = 0$, temos $(w - P_N w, 0 - P_N w) \leq 0$, ou ainda , $(w - P_N w, P_N w) \geq 0$.

$(w - P_N w, P_N w) \leq 0$ e $(w - P_N w, P_N w) \geq 0 \Rightarrow$(w-P$_N w, P_N w) = 0$ q.s. em Ω.

Então , $P_N w = 0$ ou $P_N w = w$. Portanto ,

$P_N w = w$ se $w \geq 0$ e $P_N w = 0$ se $w < 0$. E isto equivale a dizer que $P_N w = max\{0, w\}$, ou ainda , $(P_N w)(x) = \rho(w(x))$.

Definição 1.11: Definimos o operador de penalização $\beta : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, por $\beta = I - P_N$, isto é, $\beta v = v - P_N v$, $\forall \ v \in L^2(\Omega)$, ou ainda , $(\beta v)(x) = v(x) - \rho(v(x))$

Proposição 1.4: Afirmamos que β é monótono, ou seja,$(\beta u - \beta v, u - v) \geq 0$ e Lipschitziano , isto é , $|\beta(u) - \beta(v)| \leq \alpha |u - v|$.

Demonstração :

i) β é monótono. De fato,

$(\beta u - \beta v, u - v) = \int_\Omega [(\beta u)x - (\beta v)x][u(x) - v(x)]dx = \int_\Omega [u(x) - \rho(u(x)) - v(x) + \rho(v(x))][u(x) - v(x)]dx.$

- Se $u(x) - v(x) \geq 0$, então

$\rho(u(x)) - \rho(v(x)) \leq |\rho(u(x)) - \rho(v(x))| \leq |u(x) - v(x)| = u(x) - v(x).$

Logo, $u(x) - \rho(u(x)) - v(x) + \rho(v(x))][u(x) - v(x) \geq 0$

- Se $u(x) - v(x) \leq 0, então$

$-\rho(u(x)) + \rho(v(x)) \leq |\rho(u(x)) - \rho(v(x))| \leq |u(x) - v(x)| = v(x) - u(x).$

Logo, $u(x) - \rho(u(x)) - v(x) + \rho(v(x))][u(x) - v(x) \geq 0.$

Em qualquer caso, $(\beta u - \beta v, u - v) \geq 0$

ii) β é Lipschitziano. De fato,

$|\beta u - \beta v|^2 = \int_\Omega |\beta u(x) - \beta v(x)|^2 dx = \int_\Omega |u(x) - \rho(u(x)) - v(x) + \rho(v(x))|^2 dx \leq$

$\int_\Omega \{|u(x) - v(x)| + |\rho(u(x)) - \rho(v(x))|\}^2 dx \leq \int_\Omega \{|u(x) - v(x)| + |(u(x)) - (v(x))|\}^2 dx =$

$4 \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2 dx = 4|u(x) - v(x)|^2$, o que mostra que β é Lipschitziano.

Observação 1.2- Sendo β lipschitziano, então β é contínuo e $\beta(S)$ é limitado para qualquer subconjunto limitado $S \subset L^2(\Omega)$. Além disso , consideraremos também que $\beta(v) = 0 \Longleftrightarrow v \in N$, isto é, $\ker \beta = N$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Global Fraca

Provaremos um teorema de existência de solução fraca global em t do problema:

$$(\mathrm{P})\quad \left|\begin{array}{l} K(x,t)u'' + \Delta^2 u + M(\|u\|^2)(-\Delta u) + u' \geq f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ u\,|_{\Sigma} = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,|_{\Sigma} = 0 \end{array}\right.$$

No cilindro finito $Q = \Omega\times]0,T[$, onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular Γ, $T > 0$ é um número real arbitrário porém fixo, $\sum = \Gamma\times]0,T[$ é a fronteira lateral do cilindro Q , onde K e f são funções definidas em Q.

2.1 Hipóteses

$\mathcal{H}_1)$ $K \in C^1(0,T;H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))$ com $K(x,t) \geq 0$, $\forall\ (x,t) \in \Omega\times]0,T[$ e $\forall\ \gamma > 0$ tal que $K(x,0) \geq \gamma > 0$

$\mathcal{H}_2)$ $\left|\dfrac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}} \leq \alpha + C(\alpha)K$, $\forall\ \alpha > 0$

$\mathcal{H}_3)$ $M \in C^1([0,\infty])$ com $M(\lambda) \geq -\sigma$, $\forall\ \lambda \geq 0$; $0 < \sigma < \lambda_1$; sendo λ_1 o primeiro valor próprio de $\Delta^2 u - \lambda(-\Delta u) = 0$.

Observação (2.1): De acordo com Mikhlin (veja [7]) λ_1 satisfaz:

$$\lambda_1 = \inf_{u\in H_0^2(\Omega)} \frac{|-\Delta u|^2}{|-\Delta^{1/2}u|^2} > 0$$

$\mathcal{H}_4)$ Seja $\beta : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ o operador de penalização definido por $\beta = I - P_N$, onde P_N é o operador projeção de $L^2(\Omega)$ em N , dado por $(P_N v)(x) = \rho(v(x))$, $\forall\ v \in L^2(\Omega)$.

Teorema 2.1: Nas hipóteses (H_1) - (H_4), se $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap N$, f e $f' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então existe uma única função $u : [0,T] \longrightarrow L^2(\Omega)$ tal que:

- $u \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$ (2.1)
- $u' \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$; $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$ (2.2)
- $u'' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (2.3)
- $\displaystyle\int_0^T (k(x,t)u'', v-u')dt + \int_0^T (-\Delta u, -\Delta(v-u'))dt + \int_0^T M(\|u\|^2)(-\Delta u, v-u')dt +$
  $\displaystyle\int_0^T (u', v-u')dt \geq \int_0^T (f, v-u')dt \ \forall\ v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $v(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$ (2.4)
- $u(0) = u_0$ e $u'(0) = u_1$ (2.5)

O teorema (2.1) será uma consequência do Lema (2.1)

Lema 2.1: Nas mesmas condições do teorema (2.1), para cada $0 < \varepsilon < 1$ e $\delta > 0$ existe uma função $u_{\varepsilon\delta}$ definida em Q tal que:

- $u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega))$ (2.6)
- $u'_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$ (2.7)
- $u''_{\varepsilon\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (2.8)
- $(k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta} + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta} + M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}) + u'_{\varepsilon\delta} + \dfrac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}) = f$ em $L^2(Q)$ (2.9)
- $u_{\varepsilon\delta}(0) = u_0$ e $u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1$ (2.10)

2.2 Problema Aproximado Pertubado Penalizado

Considere o problema pertubado penalizado $(2.6) - (2.10)$, fixados $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}$ com $\varepsilon \in (0,1)$ e $\delta > 0$.

Seja $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de $H_0^2(\Omega)$ formada pelas auto-funções de $-\Delta$, isto é, $-\Delta w_\nu =$

$\lambda_\nu w_\nu$,$w_\nu \mid_\Gamma = \dfrac{\partial w_\nu}{\partial \eta} \mid_\Gamma = 0$ e $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... <$ divergindo para $+\infty$

A seguir usaremos o método de Faedo Galerkin para obter soluções $u_{\varepsilon\delta}$ do problema pertubado penalizado.

Considere $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço gerado pelas m primeiras funções $(w_\nu)_{\nu \in N}$

Para cada $m \in \mathbf{N}$, considere a função:

$$u_{\varepsilon\delta m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{\varepsilon\delta jm}(t) w_j(x) \in V_m \text{ tal que} \tag{2.11}$$

$$((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(t), w_j) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}, -\Delta w_j) + M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}, w_j) + (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w_j) +$$
$$\frac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), w_j) = (f, w_j) \tag{2.12}$$

Para todo $w_j \in V_m$

$$u_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ em } \; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \tag{2.13}$$

$$u'_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ em } \; H_0^2(\Omega) \cap N \text{ onde } N = \{v \in L^2(\Omega); v \geq 0 \; q.s \; em \; \Omega\} \tag{2.14}$$

Pelo Teorema de Carathéodory o sistema (2.12) - (2.14) tem solução local em $[0, t]$, $0 < t < T$, e as estimativas a priori nos permitirão extender a solução aproximada $u_{\varepsilon\delta m}(t)$ para o intervalo $[0, T]$.

2.3 Estimativas a Priori

<u>1ª Estimativa</u>:

Fazendo $w_j = u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ em (2.12), obtemos

$$((K+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) +$$
$$(u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \frac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = (f(t), u'_{\varepsilon\delta m}) \tag{2.15}$$

Note que, $((K+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}, u'_{\varepsilon\delta m}) = (Ku''_{\varepsilon\delta m}, u'_{\varepsilon\delta m}) + \varepsilon(u''_{\varepsilon\delta m}, u'_{\varepsilon\delta m})$ e

$$(Ku''_{\varepsilon\delta m}, u'_{\varepsilon\delta m}) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(k, u'^2_{\varepsilon\delta m}) - \left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}\right)\right]$$

Portanto,

$$((K+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}) + \varepsilon\frac{d}{dt}|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 - \left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}\right)\right] \tag{2.16}$$

$\widehat{M}(s) = \int_0^s M(\tau)d\tau$. Portanto, $\widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) = \int_0^{\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} M(\tau)d\tau$. Assim ,

$$\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) = M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 = M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)\frac{d}{dt}|\nabla u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \tag{2.17}$$

Por outro lado,

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(\nabla u_{\varepsilon\delta m}(t), \nabla u'_{\varepsilon\delta m}(t)) =$$
$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \tag{2.18}$$

Assim, de (2.17) e (2.18) concluimos que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) \tag{2.19}$$

Podemos então reescrever (2.15) como:

$$\frac{d}{dt}\left[(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)\right] + 2|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 +$$

$$\frac{2}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = \left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right) + 2(f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \tag{2.20}$$

Note que $(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)) - \beta(0), u'_{\varepsilon\delta m}(t) - 0) \geq 0$, pois $0 \in N = \ker\beta$ e β é monótono.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\left[(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)\right] + 2|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \leq \left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right) +$$

$$2(f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))$$

Agora, integrando essa desigualdade de 0 a t, $0 < t \leq t_m < T$, obtemos:

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) - (K(0), u'^2_{\varepsilon\delta m}(0)) - \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 -$$

$$|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 - \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(0)\|^2) + 2\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq \int_0^t \left(\frac{\partial k}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right) ds + 2\int_0^t (f(s), u'_{\varepsilon\delta m}(s)) ds$$

Segue que ,

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) + 2\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq$$

$$\int_0^t \left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right)\right|_{\mathbb{R}} ds + 2\int_0^t |(f(s), u'_{\varepsilon\delta m}(s))|_{\mathbb{R}} ds + |(K(0), u^2_{1m})|_{\mathbb{R}} + \varepsilon|u_{1m}|^2 +$$

$$|\Delta u_{0m}|^2 + |\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2)|_{\mathbb{R}}$$

Aplicando a desigualdade elementar e a de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) + 2\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq$$

$$\int_0^t \left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right)\right|_{\mathbb{R}} ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds| + (K(0), u^2_{1m})|_{\mathbb{R}} + \varepsilon|u_{1m}|^2 +$$

$$|\Delta u_{0m}|^2 + |\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2)|_{\mathbb{R}} \tag{2.21}$$

De acordo com a observação (2.1),

$$\lambda_1 = \inf_{w \in H_0^2(\Omega)} \frac{|-\Delta w|^2}{|-\Delta^{1/2} w|^2} = \inf_{w \in H_0^2(\Omega)} \frac{|\Delta w|^2}{|\nabla w|^2}$$

Isto implica dizer que $\lambda_1 \leq \dfrac{|\Delta w|^2}{|\nabla w|^2}$, ou ainda, $-|\nabla w|^2 \geq \dfrac{-|\Delta w|^2}{\lambda_1}$

Usando este último resultado, a definição de $\widehat{M}$ e $\mathcal{H}_3$, concluimos que

$$\widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2) = \int_0^{\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} M(\tau) d\tau \geq \int_0^{\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} -\sigma d\tau = -\sigma\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 =$$

$$-\sigma|\nabla u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \geq \frac{-\sigma}{\lambda_1}|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2, \text{ com } 0 < \sigma < \lambda_1$$

Agora, utilizaremos este resultado em (2.21) , obtemos

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 - \frac{\sigma}{\lambda_1}|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq$$

$$\int_0^t \left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right)\right|_{\mathbb{R}} ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds + \left|(K(0), u^2_{1m})\right|_{\mathbb{R}} + \varepsilon|u_{1m}|^2 + |\Delta u_{0m}|^2 +$$

$$\left|\widehat{M}(\|u_{\varepsilon\delta m}\|^2)\right|_{\mathbb{R}} \tag{2.22}$$

Note que

$$\left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right)\right|_{\mathbb{R}} = \left|\int_\Omega \frac{\partial K}{\partial t} u'^2_{\varepsilon\delta m}(s) ds\right|_{\mathbb{R}} \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial k}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}} \left|u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right|_{\mathbb{R}} ds$$

E por $\mathcal{H}_2$, segue-se que:

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}} \left|u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right|_{\mathbb{R}} ds \leq \int_\Omega (\alpha + C(\alpha)K) \left|u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right|_{\mathbb{R}} dx = \int_\Omega \alpha \left|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\right|^2 dx +$$

$$C(\alpha) \int_\Omega K.u'^2_{\varepsilon\delta m}(s) dx = \alpha|u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 + C(\alpha)(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)), \ \forall \ \alpha > 0$$

Portanto,

$$\int_0^t \left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)\right)\right|_{\mathbb{R}} ds \leq \alpha \int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds + C(\alpha) \int_0^t (K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)) ds$$

Substituindo este resultado em (2.22), obtemos:

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}|^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq \alpha \int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds +$$

$$C(\alpha) \int_0^t (K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)) ds + \int_0^t |f(s)|^2 ds + |(K(0), u^2_{1m})|_{\mathbb{R}} + \varepsilon|u_{1m}|^2 + |\Delta u_{0m}|^2 +$$

$$|\widehat{\mathcal{M}}(\|u_{0m}\|^2)|_{\mathbb{R}} \tag{2.23}$$

Em (2.13) temos que

$u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega) \hookrightarrow H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$

Logo, $\|u_{0m}\| \longrightarrow \|u_0\|$ e $|\Delta u_{0m}| \longrightarrow |\Delta u_0|$

Em (2.16) temos que

$u_{1m} \longrightarrow u_1$ em $H_0^2(\Omega) \cap N \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Logo, $|u_{1m}| \longrightarrow |u_1|$

Concluimos, então, que $\|u_{0m}\|$, $|\Delta u_{0m}|$ e $|u_{1m}|$ são limitados por constantes independentes de ε, δ, m e t.

Sabemos por $\mathcal{H}_3$ que $M \in C^1([0,\infty])$. Então M é contínua em $[0,\infty)$, portanto

$\widehat{M} \in C^2([0,\infty])$. Logo,

$\|u_{0m}\| \longrightarrow \|u_0\| \Longrightarrow \widehat{M}(\|u_{0m}\|^2) \longrightarrow \widehat{M}(\|u_0\|^2)$

Note também que, por $\mathcal{H}_1$; $K(0) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Portanto,

$|(K(0), u_{1m}^2)|_{\mathbb{R}} \leq |K(0)||u_{1m}^2| \leq \left(\sup_{x\in\Omega} ess\ \ K(0)\right)|u_{1m}|^2$ e

$\left(\sup_{x\in\Omega} ess\ \ K(0)\right)|u_{1m}|^2 \longrightarrow \left(\sup_{x\in\Omega} ess\ \ K(0)\right)|u_1|^2$

Além disso, $\displaystyle\int_0^t |f(s)|^2 ds < \infty$, pois $f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

Concluimos então que

$\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2), (K(0), u_{1m})$ e $\displaystyle\int_0^t |f(s)|^2 ds$ são limitadas por constantes independentes de ε, δ, m e t.

Assim , de (2.23) , temos

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq$$

$$\mathrm{C}_0 + C(\alpha)\int_0^t (k, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s))ds \tag{2.24}$$

Onde, $0 < \alpha < 1$ e C_0 constante positiva independente de ε, δ, m e t

Logo pela identidade de Gronwall,

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C \tag{2.25}$$

onde, C é constante positiva independente de ε, δ, m e t

Portanto de (2.25) concluimos que:

$$(K^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.26}$$

De fato, $(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) = \int_\Omega K u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)dx = \int_\Omega (K^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}(t))^2 dx = |k^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2$ é limitado. Além disso,

$\|K^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup\limits_{t\in]0,T[} ess\ |K^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}(t)|$, daí segue o resultado

$$(\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.27}$$

De fato, $\varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 = |\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2$ é limitado e

$\|\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)} = \sup\limits_{t\in]0,T[} ess\ |\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}(t)|$. Daí segue o resultado

$$(u_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{2.28}$$

Com efeito, como $|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|$ é limitado, então $\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{H_0^2(\Omega)}$ é limitado pela equivalência de normas. Além disso,

$\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} = \sup\limits_{t\in]0,T[} ess\ \|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{H_0^2(\Omega)}$. Daí segue o resultado

$$(u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.29}$$

De fato, basta observar que $\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} = \displaystyle\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 ds$ e que $\displaystyle\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2$ é limitado para $t \in]0,T[$.

$$(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \text{ é limitado em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.30}$$

De fato, como $|u'_{\varepsilon\delta m}(t)|$ é limitado, então, pela definição do operador β, $|\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2$ é limitado.

Portanto, $\|\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \displaystyle\int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta m})|^2 ds$ é limitado.

<u>2ª Estimativa</u>

Fazendo $w = -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ em (2.12), obtém-se

$$\begin{aligned}&(ku''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon(u''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))+\\ &M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + (u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) + \frac{1}{\delta}(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) =\\ &(f, -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))\end{aligned} \tag{2.31}$$

Note que $\displaystyle\int_\Omega a\Delta b dx + \int_\Omega \nabla a \nabla b dx = \int_{\partial\Omega} a\frac{\partial b}{\partial \nu} dr$ (identidade de Green). Portanto , se

$\displaystyle\int_{\partial\Omega} a\frac{\partial b}{\partial \nu} dr = 0$, então $-\displaystyle\int_\Omega a\Delta b dx = \int_\Omega \nabla a \nabla b dx.$

Isto implica dizer que $(a, -\Delta b) = (\nabla a, \nabla b) = ((a,b))$

Portanto , podemos escrever (2.32)

$(I)\ (ku''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(II)\ (u''_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(III)\ (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(IV)\ (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(V)\ (u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(VI)\ (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

$(VII)\ (f, -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)) = ((f, u'_{\varepsilon\delta m}(t)))$

Substituindo (2.32) em (2.31), obtemos

$$((ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))+$$

$$M(\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + \frac{1}{\delta}((\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) =$$
$$((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \tag{2.33}$$

Pelo Lema (1.2) , $((\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \geq 0$. Portanto,

$$((Ku''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon((u''_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)))+$$
$$M(\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) + ((u'_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \leq ((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) \tag{2.34}$$

Note que: (2.35)

$$\text{(I)}\ ((\text{K u"}_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) - \left(\left(\frac{\partial k}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right)\right]$$

$$\text{(II)}\ ((\ \text{u"}_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$$

$$\text{(III)}\ ((\text{- }\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$$

(IV) $((\text{ u'}_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$

(V) $2|((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}} \leq 2\|f(t)\|\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\| \leq \|f\|^2 + \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$

(VI) $\left|\left(\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq \left(\left(\left|\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right) \leq ((\alpha + C(\alpha)K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) =$

$\alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + C(\alpha)((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)))$

Substituindo (2.35) em (2.34), obtemos

$\frac{d}{dt}\left[((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2\right] + 2\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 \leq 2\,|((f(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))|_{\mathbb{R}} +$

$\left|\left(\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right)\right|_{\mathbb{R}} + |2M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|((-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t)))|_{\mathbb{R}} \leq \|f(t)\|^2 + \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 +$

$\alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + C(\alpha)((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + 2|M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}\|-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|$

Integrando de 0 a t, $0 < t < T$, obtemos:

$((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \|f(s)\|^2 ds +$

$C(\alpha)\int_0^t ((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)))ds + 2\int_0^t |M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|ds + |((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}} +$

$$\varepsilon\|u_{1m}\|^2 + \|\Delta u_{0m}\|^2 \tag{2.36}$$

Como já verificamos, $(u_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo, $\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$ é limitada. Portanto, pela continuidade da M, podemos tomar

$C_1 = \max\limits_{0<\lambda<\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} |M(\lambda)|_{\mathbb{R}}$

Podemos então escrever:

$$2\int_0^t |M(\|u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2)|_{\mathbb{R}}\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|ds \leq 2\int_0^t C_1\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|ds$$

Além disso, usando a desigualdade elementar, temos

$$\frac{2C_1\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha}\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\| \leq \frac{C_1^2\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2}{\alpha} + \alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2$$

Substituindo estes resultados em (2.36), obtemos

$$((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \|f(s)\|^2 ds +$$

$$C(\alpha)\int_0^t ((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(s)))ds + \int_0^t \frac{C_1^2}{\alpha}\|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds + \int_0^t \alpha\|u'_{\varepsilon\delta m}(s)\|^2 ds + |((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}} +$$

$$\varepsilon\|u_{1m}\|^2 + \|\Delta u_{0m}\|^2 \tag{2.37}$$

Note que (2.13) e (2.14) garantem que $\|\Delta u_{0m}\|$ e $\|u_{1m}\|$ são limitadas e, além disso, observando $\mathcal{H}_1$, temos que

$$|((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}} \leq \|K(0)\|\|u^2_{1m}\| \leq \left(\sup_{x\in\Omega} ess\|K(0)\|\right)\|u^2_{1m}\| \longrightarrow \left(\sup_{x\in\Omega} ess\|K(0)\|\right)\|u_1\|^2.$$

Portanto,

$|((K(0), u^2_{1m}))|_{\mathbb{R}}$ é limitado.

Note também que $\|f(t)\|^2$ é limitado, pois $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Dessa maneira, podemos escrever

$$((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 ds \leq C_2 +$$

$$C_3\int_0^t \left[((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2\right] ds, \text{ com } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \tag{2.38}$$

Pela desigualdade de Gronwall:

$$((K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t))) + \varepsilon\|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t \|u'_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 ds \leq C_4 \tag{2.39}$$

Onde C_4 é constante positiva independente de ε, δ, m e t

Portanto , de (2.39) concluimos que:

$$(k^{1/2}u'_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.40}$$

$$(\sqrt{\varepsilon}u'_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.41}$$

$$(u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.42}$$

$$(u_{\varepsilon\delta m}(t)) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)) \tag{2.43}$$

<u>3ª **Estimativa**</u>

Derivando a equação (2.12) em relação a t, obtemos

$$((K+\varepsilon)u'''_{\varepsilon\delta m}(t), w) + \left(\frac{\partial K}{\partial t}u''_{\varepsilon\delta m}(t), w\right) + (-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta w) +$$

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), w) + \frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 M'(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), w)$$

$$(u''_{\varepsilon\delta m}(t), w) + \frac{1}{\delta}([\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))]', w) = (f'(t), w) \tag{2.44}$$

Pela identidade de Green ,
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2 = ((u_{\varepsilon\delta m}(t), u'_{\varepsilon\delta m}(t))) = (u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t))$

Substituindo este resultado em (2.44) e fazendo $w = u''_{\varepsilon\delta m}(t)$, obtemos

$$(Ku'''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + (\varepsilon u'''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + \left(\frac{\partial K}{\partial t}u''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)\right) + (-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) +$$

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + 2(u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))$$

$$M'(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + (u''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) + \frac{1}{\delta}([\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))]', (u'_{\varepsilon\delta m}(t))') =$$

$$(f'(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) \tag{2.45}$$

Note que: (2.46)

$$(I)\ \ (Ku'''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) - \left(\frac{\partial K}{\partial t}, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right]$$

$$(II)\ \ (u'''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2$$

$$(III)\ \ (-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u''_{\varepsilon\delta m}(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2$$

$$(IV)\ \ (u''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)) = |u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2$$

$$(V)\ \ \left(\frac{\partial k}{\partial t}u''_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t)\right) = \left(\frac{\partial k}{\partial t}, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)$$

$$(VI)\ \ ([\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))]', (u'_{\varepsilon\delta m}(t))') \geq 0$$

Demonstração de VI:

$$([\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))]', (u'_{\varepsilon\delta m}(t))'] = \lim_{h\longrightarrow 0^+}\left(\frac{\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t+h)) - \beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)))}{h}, \frac{u'_{\varepsilon\delta m}(t+h) - u'_{\varepsilon\delta m}(t)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\longrightarrow 0^+}\frac{1}{h}\left(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t+h)) - \beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))), u'_{\varepsilon\delta m}(t+h) - u'_{\varepsilon\delta m}(t)\right)$$

Como β é monótono ,

$(\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t+h)) - \beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t+h) - u'_{\varepsilon\delta m}(t)) \geq 0$. Daí segue o resultado.

Substituindo (2.46) em (2.45), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[(K, u''_{\varepsilon\delta)m}(t) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2\right] + 2|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 \leq 2\,|(f'(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}} +$$

$$\left|\left(\frac{\partial K}{\partial t}, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right|_{\mathbb{R}} + 2|M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|(-\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}}+$$

$$4|(u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}}|M'(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), u''_{\varepsilon\delta m}(t))|_{\mathbb{R}} \tag{2.47}$$

Por (H.2) temos

$$\left|\left(\frac{\partial k}{\partial t}, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)\right)\right|_{\mathbb{R}} \leq \alpha|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + C(\alpha)(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t))$$

Portanto aplicando este resultado, a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a desigualdade elementar em (2.47) e integrando de 0 a t, obtemos

$$(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + 2\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 ds \leq \int_0^t |f'(s)|^2 ds + \int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds+$$

$$\alpha\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t (K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s))ds + 2C_1\int_0^t |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)||u''_{\varepsilon\delta m}(s)|ds+$$

$$4C_5\int_0^t |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)||u_{\varepsilon\delta m}(s)||\Delta u_{\varepsilon\delta m}(s)||u''_{\varepsilon\delta m}(s)|ds + |K(0)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2+$$

$$|\Delta u_{1m}(t)|^2 \tag{2.48}$$

Onde C_1 é a mesma constante de (2.37) e $C_5 = \max\limits_{0\leq\lambda\leq\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2} |M'(\lambda)|_{\mathbb{R}}$

Agora mostraremos que $|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|$ é limitada.

Se $u''_{\varepsilon\delta m}(0) = 0$, então $|u''_{\varepsilon\delta m}(0)| = 0$ e, portanto, limitada. Suponhamos, então, $u''_{\varepsilon\delta m}(t) \neq 0$. Fazendo $t = 0$ e $w = u''_{\varepsilon\delta m}(0)$ em (2.12), obtemos

$$((K(x,0)+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(0), u''_{\varepsilon\delta m}(0)) + (-\Delta u_{0m}, -\Delta u''_{\varepsilon\delta m}(0)) + M(\|u_{0m}\|^2)(-\Delta u_{0m}, u''_{\varepsilon\delta m}(0))+$$

$$(u_{1m}, u''_{\varepsilon\delta m}(0)) + \frac{1}{\delta}(\beta(u_{1m}), u''_{\varepsilon\delta m}(0)) = (f(0), u''_{\varepsilon\delta m}(0)).$$

Por $\mathcal{H}_1$, $\exists\gamma$ tal que $K(x,0) \geq \gamma > 0$. Portanto,

$$((\gamma+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(0), u''_{\varepsilon\delta m}(0)) \leq |((K(x,0)+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(0), u''_{\varepsilon\delta m}(0))|_{\mathbb{R}} \leq |(-\Delta u_{0m}, -\Delta u''_{\varepsilon\delta m}(0))|_{\mathbb{R}}+$$

$$|M(\|u_{0m}\|^2)|_{\mathbb{R}}|(-\Delta u_{0m}, u''_{\varepsilon\delta m}(0))|_{\mathbb{R}}+|(u_{1m}, u''_{\varepsilon\delta m}(0))|_{\mathbb{R}}+\frac{1}{\delta}\,|(\beta(u_{1m}), u''_{\varepsilon\delta m}(0))|_{\mathbb{R}}+|(f(0), u'_{\varepsilon\delta m}(0))|$$

Usando o fato de que o operador Δ é auto-adjunto e, em seguida, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$(\gamma+\varepsilon)|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 \leq |\Delta^2 u_{0m}(t)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)| + |M(\|u_{0m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|\Delta u_{0m}||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|+$$

$$|u_{1m}||u''_{\varepsilon\delta m}(0)| + \frac{1}{\delta}|\beta(u_{1m})||u''_{\varepsilon\delta m}(0)| + |f(0)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|.$$

$$(\gamma+\varepsilon)|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 \leq \left(|\Delta^2 u_{0m}| + |M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)|_{\mathbb{R}}|\Delta u_{0m}| + |u_{1m}| + \frac{1}{\delta}|\beta(u_{1m})| + |f(0)|\right).$$

$$|u''_{\varepsilon\delta m}(0)| \tag{2.49}$$

Por (2.15), $u_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)$.Logo:

$\|u_{0m}\|, |\Delta u_{0m}|$ e $|\Delta^2 u_{0m}|$ são limitadas

Por (2.16), $u'_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1$ em $H_0^2(\Omega)\cap N$. Logo:

$|u_{1m}|$ é limitada e $\beta(u_{1m}) = 0$

Por $\mathcal{H}_3$, $M(\|u_{0m}\|^2)$ é limitada.

Note também que $f(0) \in L^2(\Omega)$. Logo, $|f(0)|$ é limitada.

Usando estes resultados em (2.49), obtemos

$(\gamma+\varepsilon)|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|^2 \leq C_6|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|$, onde C_6 é constante positiva independente de ε, δ, m e t. Portanto,

$|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|| \leq C_7$, ou seja, $|u''_{\varepsilon\delta m}(0)|$ é limitada (2.50)

Voltando à desigualdade (2.48), note que:

(2.50) e $\mathcal{H}_1$ garantem que $|k(0)||u''_{\varepsilon\delta m}(0)|$ é limitada

(2.28) garante que $|u_{\varepsilon\delta m}(t)|$ e $|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|$ são limitados

(2.14) garante que $|\Delta u_{1m}|$ é limitado

$f' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \Longrightarrow \int_0^t |f'(s)|^2 ds$ é limitado

Utilizando estes resultados em (2.48), obtemos

$$(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)| + (1-\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|ds \leq C_8 +$$

$$C(\alpha)\int_0^t (K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s))ds + \int_0^t C_9|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)||u''_{\varepsilon\delta m}(s)|ds \tag{2.51}$$

Note que $\dfrac{C_9}{\sqrt{2\alpha}}|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|\sqrt{2\alpha}|u''_{\varepsilon\delta m}(t)| \leq \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{C_9^2}{2\alpha}|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + 2\alpha|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2\right]$

Substituindo este resultado em (2.51), obtemos

$$(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_8 +$$

$$C(\alpha)\int_0^t (K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s))ds + \int_0^T \frac{1}{2}\left[\frac{C_9^2}{2\alpha}|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + 2\alpha|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2\right] ds. \text{ Assim ,}$$

$$(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_8 +$$

$$\int_0^t \left[\frac{C_9^2}{4\alpha}|\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + C(\alpha)(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t))\right] ds$$

Fazendo $C_{10} = \max\left\{\dfrac{C_9^2}{4\alpha}, C(\alpha)\right\}$, temos

$$(K, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_8 +$$

$$C_{10}\int_0^t [(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(s)) + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2]ds \tag{2.52}$$

Pela desigualdade de Gronwall, temos

$$(k, u''^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + |\Delta u'_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-2\alpha)\int_0^t |u''_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds \leq C_{11} \tag{2.53}$$

Onde C_{11} é constante positiva independente de ε, δ, m e t.

Podemos então, afirmar que:

$$(k^{1/2}u''_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.54}$$

$$(\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta m}(t)) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.55}$$

$$(u'_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{2.56}$$

$$(u''_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.57}$$

$$(ku''_{\varepsilon\delta m}) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.58}$$

De fato, por (2.53) e $\mathcal{H}_1$,

$$\|Ku''_{\varepsilon\delta m}(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \sup_{t\in]0,T[} ess|Ku''_{\varepsilon\delta m}(t)| = \sup_{t\in]0,T[} ess\left[\int_\Omega |Ku''_{\varepsilon\delta m}|^2 dx\right]^{1/2} =$$

$$\sup_{t\in]0,T[} ess\left[\int_\Omega |K^{1/2}u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 dx\right]^{1/2} \leq K_0 \sup_{t\in]0,T[} ess\left[\int_\Omega |K^{1/2}u''_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 dx\right]^{1/2} \leq C_{12}$$

Com C_{12} constante positiva e independente de ε, δ, m , t e

$$K_0 = \max_{t\in[0,T]}\left(\sup_{x\in\Omega} ess K(x,t)\right)$$

2.4 Passagem ao Limite

Baseado nos teorema (1.3) , e nas estimativas (2.26)-(2.30) , (2.40)- (2.43) , (2.54)-(2.58) , podemos afirmar que existe uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta m})$, que continuaremos denotando por $(u_{\varepsilon\delta m})$, tal que:

i) $u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$

ii) $u'_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} n$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))$

iii) $u''_{\varepsilon\delta m} \rightharpoonup \mu$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

iv) $\Delta u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} \chi$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

v) $\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon}\mu$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

vi) $ku''_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} k\mu$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

vii) $\beta(u'_{\varepsilon\delta m}) \rightharpoonup \rho$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Usando as convergências no sentido das distribuições, temos:

i) $u_{\varepsilon\delta m} \to u_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))$

ii) $u'_{\varepsilon\delta m} \to u'_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;H_0^2(\Omega))$

iii) $u''_{\varepsilon\delta m} \to u''_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$

iv) $\Delta u_{\varepsilon\delta m} \to \Delta u_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$

v) $\sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta m} \to \sqrt{\varepsilon}u''_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$

vi) $ku''_{\varepsilon\delta m} \to ku''_{\varepsilon\delta}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$

vii) $\beta(u'_{\varepsilon\delta m}) \to \beta(u'_{\varepsilon\delta})$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$

Nota: A afirmativa (vii) decorre do fato de que β é contínuo (veja observação(1.2))

Pela unicidade dos limites resulta que:

$$u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)) \tag{2.59}$$

$$u'_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{2.60}$$

$$u''_{\varepsilon\delta m} \rightharpoonup u''_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.61}$$

$$\Delta u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.62}$$

$$\sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.63}$$

$$k u''_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} k u''_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.64}$$

$$\beta(u'_{\varepsilon\delta m}) \rightharpoonup \beta(u'_{\varepsilon\delta}) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.65}$$

No corolário(1.1) (Compacidade de Aubin - Lions) se fizermos $B_0 = H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, $B = H_0^1(\Omega)$, $B_1 = L^2(\Omega)$ e $W(0,T) = \{w; w \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)) \ e \ w' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$ com a norma

$\|w\|_{W(0,T)} = \|w\|_{L^2(0,T;H_0^2 \cap H^3(\Omega))} + \|w'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ então,

i) $W(0,T) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

ii) $(u_{\varepsilon\delta m})$ é limitada em $W(0,T)$, pois

- $u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))$
- $u'_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$

De i) e ii), concluimos que existe uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta m})$, que continuaremos denotando por $(u_{\varepsilon\delta m})$, tal que

$$\text{i) } u_{\varepsilon\delta m} \longrightarrow u_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.66}$$

ii) $u'_{\varepsilon\delta m} \longrightarrow u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$

Decorre de (2.66) e da continuidade da função M que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}\|^2) \longrightarrow M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2) \tag{2.67}$$

Decorre de (2.62) que

$$\Delta u_{\varepsilon\delta m} \rightharpoonup \Delta u_{\varepsilon\delta}, \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.68}$$

De (2.67) e (2.68), temos que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta m}\|^2)\Delta u_{\varepsilon\delta m} \rightharpoonup M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)\Delta u_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.69}$$

Da convergência de (2.64) e pela proposição (1.2)(i), temos

$$\int_0^t (ku''_{\varepsilon\delta m}(t), z(t))dt \longrightarrow \int_0^t (ku''_{\varepsilon\delta}(t), z(t))dt, \ \forall \ z \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.70}$$

Como $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega))$, tomemos então, $z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$z(x,t) = w(x)\theta(t)$, com $w \in V_m$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, então

$z(x,t) = w(x)\theta(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

De fato,

$$\|z\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \left[\int_0^t |z|^2 dt\right]^{1/2} = \left[\int_0^T \int_\Omega |z(x,t)|^2 dxdt\right]^{1/2} = \left[\int_0^T \int_\Omega |w(x)\theta(t)|^2 dxdt\right]^{1/2} =$$

$$\left[\int_0^T |\theta(t)|^2 \int_\Omega |w(x)|^2 dxdt\right]^{1/2} = |w(x)|_{L^2(\Omega)} \left[\int_0^T |\theta(t)|^2 dt\right]^{1/2} \leq \sqrt{T} \max|\theta(t)||w(x)|_{L^2(\Omega)}$$

Logo, $z(x,t) = w(x)\theta(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Podemos escrever, então:

$$\int_0^T (K, u''_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (K, u''_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt, \ \forall \ w(x) \in V_m \text{ e } \forall \ \theta(t) \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.71}$$

De (2.61) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\int_0^T (\varepsilon u''_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\varepsilon u''_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt, \forall \ w(x) \in V_m \text{ e } \forall \ \theta(t) \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.72}$$

De (2.71) e (2.72), temos

$$\int_0^T ((k+\varepsilon), u''_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T ((k+\varepsilon), u''_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt, \forall \ w(x) \in V_m$$
$$\text{e } \forall \ \theta(t) \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.73}$$

De (2.62) e pela proposição (1.2) (i), temos

$$\int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t), -\Delta w)\theta(t)dt \tag{2.74}$$

De (2.69) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta}(t)\|)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt \tag{2.75}$$

De (2.60) e pela proposição (1.2) (i), temos

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt, \ \forall\ w \in V_m \text{ e } \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.76}$$

De (2.65) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), w)\theta(t)dt \longrightarrow \frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t)), w)\theta(t)dt, \ \forall\ w \in V_m \text{ e } \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.77}$$

Multiplicando a equação (2.12) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, fixando m_0 e integrando de 0 a T, obtemos, para $m \geq m_0$:

$$\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), -\Delta w)\theta(t)dt +$$

$$\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta m}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt +$$

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), w)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w)\theta(t)dt, \ \forall\ w \in V_m \text{ e } \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.78}$$

Tomando o limite com $m \longrightarrow \infty$ em (2.78) e observando as convergências (2.73) - (2.77), obtemos:

$$\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t), -\Delta w)\theta(t)dt +$$

$$\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt +$$

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t)), w)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), w)\theta(t)dt, \forall\ w \in V_m \text{ e } \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T) \tag{2.79}$$

Portanto, lembrando que $z(x,t) = w(x)\theta(t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, podemos escrever

$$\int_0^T ((k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta}(t) + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta}(t) + M(\|u_{\varepsilon\delta}(t)\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}(t)) + u'_{\varepsilon\delta}(t) + \frac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t)), z)dt =$$

$$\int_0^T (f(t), z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.80}$$

Segue que:

$$(k+\varepsilon)u''_{\varepsilon\delta} + \Delta^2 u_{\varepsilon\delta} + M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}) + u'_{\varepsilon\delta} + \frac{1}{\delta}\beta(u'_{\varepsilon\delta}) = f \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.81}$$

Observação 2.2: De (2.81) concluimos que $\Delta^2 u_{\varepsilon\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, isto é , $\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}(t) \in L^2(\Omega)$, ou ainda, $u_{\varepsilon\delta}(t) \in H^4(\Omega)$ e desde que $u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))$, concluimos que:

$$u_{\varepsilon\delta} \in L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \tag{2.82}$$

2.5 Verificação das Condições Iniciais

Da convergência (2.60), temos

$u'_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Isto implica dizer que

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), z)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), z)dt, \forall\ z \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

Fazendo $z(x,t) = w(x)\theta(t)$, com $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, obtemos:

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt$$

Integrando por partes ambas as integrais, obtemos

$$[(u_{\varepsilon\delta m}(t),w)\theta(t)]_0^T - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow [(u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta(t)]_0^T - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt$$

Segue que:

$$-(u_{0m},w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta m}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u_{\varepsilon\delta}(0),w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt \tag{2.83}$$

Da convergência (2.59), temos

$u_{\varepsilon\delta m} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_{\varepsilon\delta}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Isto implica dizer que

$$\int_0^T (u_{\varepsilon\delta m}(t),z)dt \longrightarrow \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),z)dt,\ \forall\ z \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

Assim, observando que $z(x,t) = w(x)\theta'(t) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, obtemos:

$$\int_0^T (u_{\varepsilon\delta m}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt,\ \forall\ w \in L^2(\Omega) \tag{2.84}$$

Além disso,

$u_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega) \Longrightarrow u_{0m} \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega) \Longrightarrow u_{0m} \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$(u_{0m},w) \longrightarrow (u_0,w)\ \forall\ w \in L^2(\Omega) \tag{2.85}$$

Portanto de (2.84) e (2.85)

$$-(u_{0m},w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta m}(t),w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u_0,w) - \int_0^T (u_{\varepsilon\delta}(t),w)\theta'(t)dt \tag{2.86}$$

Da unicidade dos limites e de (2.83) e (2.86), temos que $(u_{\varepsilon\delta}(0),w) = (u_0,w)$, e portanto,

$$u_{\varepsilon\delta}(0) = u_0 \tag{2.87}$$

Agora mostremos que $u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1$

Da convergência (2.61), temos

$$\int_0^T (u''_{\varepsilon\delta m}(t), z)dt \longrightarrow \int_0^T (u''_{\varepsilon\delta}(t), z)dt \ \forall \ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Fazendo $z(x,t) = w(x)\theta(t)$, com $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in C^1([0,T])$, tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, obtemos:

$$\int_0^T (u''_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u''_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)dt, \ \forall \ w \in L^2(\Omega)$$

Integrando por partes , obtemos

$$[(u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta(t)]_0^T - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow [(u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta(t)]_0^T - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta'(t)dt$$

Segue que:

$$-(u_{1m}, w) - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u'_{\varepsilon\delta}(0), w) - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta'(t)dt \tag{2.88}$$

Da convergência (2.60), temos

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta'(t)dt, \ \forall \ w \in L^2(\Omega) \tag{2.89}$$

Além disso,

$u'_{\varepsilon\delta m}(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1$ em $H_0^2(\Omega) \Longrightarrow u_{1m} \longrightarrow u_1$ em $L^2(\Omega) \Longrightarrow u_{1m} \rightharpoonup u_1$ em $L^2(\Omega)$, isto é,

$$(u_{1m}, w) \longrightarrow (u_1, w) \ \forall \ w \in L^2(\Omega) \tag{2.90}$$

Portanto, de (2.89) e (2.90), temos

$$-(u_{1m}, w) - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta m}(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow -(u_1, w) - \int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}(t), w)\theta'(t)dt \tag{2.91}$$

Da unicidade dos limites e de (2.88) e (2.91), resulta que $(u_1, w) = (u'_{\varepsilon\delta}(0), w)$, e portanto,

$$u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_1 \tag{2.92}$$

Isto conclui a demonstração do Lema 2.1

Capítulo 3

Demonstração do Teorema (2.1)

3.1 Demonstração da Existência de Soluções

Baseado nas proposições (1.1)(iii) e (1.2)(iii), nas convergências (2.59)-(2.65) e na observação (2.2), obtemos:

i) $\|u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq \liminf \|u_{\varepsilon\delta m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq C_{13}$

ii) $\|u'_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq \liminf \|u'_{\varepsilon\delta m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)} \leq C_{14}$

iii) $\|u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|u''_{\varepsilon\delta m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{15}$

iv) $\|\Delta u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta u_{\varepsilon\delta m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{16}$

v) $\|\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta^2 u_{\varepsilon\delta m}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{17}$

vi) $\|\sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{18}$

vii) $\|K u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|k u''_{\varepsilon\delta m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{19}$

viii) $\|\beta(u'_{\varepsilon\delta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\beta(u'_{\varepsilon\delta m})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{20}$

Onde C_i são constantes positivas independentes de ε, δ , m e t para $i \in \{13, ..., 20\}$

Baseado nos teorema (1.3) e nas limitações (I)-(VIII) anteriores, podemos afirmar que existe uma subsequência de $(u_{\varepsilon\delta})$ que continuaremos denotando por $(u_{\varepsilon\delta})$, tal que

$$u_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} u_\delta \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)) \tag{3.1}$$

$$u'_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} u'_\delta \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.2}$$

$$u''_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u''_\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.3}$$

$$\Delta u_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u_\delta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.4}$$

$$\Delta^2 u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \Delta^2 u_\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.5}$$

$$\sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon} u''_\delta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.6}$$

$$K u''_{\varepsilon\delta} \overset{\star}{\rightharpoonup} k u''_\delta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.7}$$

$$\beta(u'_{\varepsilon\delta}) \rightharpoonup \beta(u'_\delta) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.8}$$

Novamente, usando o Lema (1.2) (Compacidade de Aubin-Lions), encontramos uma convergência forte para $(u_{\varepsilon\delta})$, isto é,

$$u_{\varepsilon\delta} \longrightarrow u_\delta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.9}$$

Decorre de (3.9) e da continuidade da função M que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2) \longrightarrow M(\|u_\delta\|^2) \tag{3.10}$$

Decorre de (3.4) que

$$\Delta u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \Delta u_\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.11}$$

De (3.10) e (3.11), temos que

$$M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)\Delta u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup M(\|u_\delta\|^2)\Delta u_\delta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.12}$$

Da convergência (3.7) e pela proposição (1.2) (i), temos

$$\int_0^T (Ku''_{\varepsilon\delta}, z)dt \longrightarrow \int_0^T (Ku''_{\varepsilon}, z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.13}$$

De (3.5) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\int_0^T (\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}, z)dt \longrightarrow \int_0^T (\Delta^2 u_{\delta}, z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.14}$$

De (3.12) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\int_0^T M(\|u_{\varepsilon\delta}\|^2)(-\Delta u_{\varepsilon\delta}, z)dt \longrightarrow \int_0^T M(\|u_{\delta}\|^2)(-\Delta u_{\delta}, z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.15}$$

De (3.2) e pela proposição (1.2) (i), temos

$$\int_0^T (u'_{\varepsilon\delta}, z)dt \longrightarrow \int_0^T (u'_{\delta}, z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.16}$$

De (3.8) e pela proposição (1.1) (i), temos

$$\frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta}), z)dt \longrightarrow \frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\delta}), z)dt, \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.17}$$

Passando ao limite, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ na equação (2.9) do lema (2.1) e observando as convergências (3.13)-(3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}&(ku''_{\delta}, z) + (-\Delta u_{\delta}, -\Delta z) + M(\|u_{\delta}\|^2)(-\Delta u_{\delta}, z) + (u'_{\delta}, z) + \frac{1}{\delta}\beta(u'_{\delta}, z) = (f, z),\\ &\forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\end{aligned} \tag{3.18}$$

Novamente, baseado nas proposições (1.1)(iii) e (1.2) (iii), e nas convergências (3.1)- (3.8), obtemos

i) $\|u_{\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq \liminf \|u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega))} \leq C_{21}$

ii) $\|u'_{\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq \liminf \|u'_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq C_{22}$

iii) $\|u''_{\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{23}$

iv) $\|\Delta u_{\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta u_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{24}$

v) $\|\Delta^2 u_\delta\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\Delta^2 u_{\varepsilon\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{25}$

vi) $\|\sqrt{\varepsilon} u''_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\sqrt{\varepsilon} u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{26}$

vii) $\|k u''_\delta\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|k u''_{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{27}$

viii) $\|\beta(u'_\delta)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf \|\beta(u'_{\varepsilon\delta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_{28}$

Onde C_i são constantes positivas independentes de ε , δ e t , para $i = 21, ..., 28$

Baseado nos teorema (1.3) e nas limitações (I)-(VIII) anteriores, podemos afirmar que existe uma subsequência de (u_δ) que continuaremos denotando por (u_δ), tal que

$$u_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \tag{3.19}$$

$$u'_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^2(\Omega)) \tag{3.20}$$

$$u''_\delta \rightharpoonup u'' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.21}$$

$$\Delta u_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.22}$$

$$\Delta^2 u_\delta \rightharpoonup \Delta^2 u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.23}$$

$$\sqrt{\varepsilon} u''_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} \sqrt{\varepsilon} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.24}$$

$$k u''_\delta \overset{\star}{\rightharpoonup} k u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.25}$$

$$\beta(u'_\delta) \rightharpoonup \beta(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.26}$$

Seguindo o mesmo raciocínio de (3.9)- (3.12), para sequência (u_δ), temos

$$M(\|u_\delta\|^2)\Delta u_\delta \rightharpoonup M(\|u\|^2)\Delta u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.27}$$

Segue de (3.19), (3.20) e (3.21) que (2.1), (2.2) e (2.3) do teorema (2.1) são satisfeitos. Para provar (2.5), basta seguir o mesmo raciocínio da verficação das condições iniciais feita no capítulo II. Resta então mostrar que u é a solução da desigualdade de (2.4) e que $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in [0,T]$

De fato, temos de (3.18) que

$$(k u''_\delta, z) + (-\Delta u_\delta, -\Delta z) + M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, z) + (u'_\delta, z) + \frac{1}{\delta}(\beta(u'_\delta), z) =$$

(f, z), $\forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Portanto, considerando $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $v(t) \in N$ q.t.p $\ t \in [0,T]$. Temos:

$$\int_0^T (ku''_\delta, v - u'_\delta)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta(v - u'_\delta))dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v - u'_\delta)dt +$$

$$\int_0^T (u'_\delta, v - u'_\delta)dt + \int_0^T \frac{1}{\delta}(\beta(u'_\delta), v - u'_\delta)dt = \int_0^T (f, v - u'_\delta)dt\ \forall\ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (3.28)$$

Note que $(\beta(u'_\delta), v - u'_\delta) = (\beta(u'_\delta) - \beta(v), v - u'_\delta) \leq 0$,

pois $v(t) \in N$ e β é monótono.

Segue de (3.28), que

$$\int_0^T (ku''_\delta, v - u'_\delta)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta(v - u'_\delta))dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v - u'_\delta)dt +$$

$$\int_0^T (u'_\delta, v - u'_\delta)dt \geq \int_0^T (f, v - u'_\delta)dt.$$

Assim ,

$$\int_0^T (Ku''_\delta, v)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta v)dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v)dt + \int_0^t (u'_\delta, v)dt -$$

$$\int_0^T (f, v - u'_\delta)dt \geq \int_0^T (ku''_\delta, u'_\delta)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta u'_\delta)dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, u'_\delta)dt +$$

$$\int_0^T (u'_\delta, u'_\delta)dt \qquad (3.29)$$

Temos de (3.20), (3.23), (3.25) e (3.27)

$$\int_0^T (Ku''_\delta, v)dt + \int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta v)dt + \int_0^T M(\|u_\delta\|^2)(-\Delta u_\delta, v)dt + \int_0^T (u'_\delta, v)dt -$$

$$\int_0^T (f, v - u'_\delta)dt \longrightarrow \int_0^T (Ku'', v)dt + \int_0^T (-\Delta u, -\Delta v)dt + \int_0^T M(\|u\|^2)(-\Delta u, v)dt +$$

$$\int_0^T (u', v)dt - \int_0^T (f, v - u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.30}$$

Resta, então analisar a passagem ao limite no segundo membro da desigualdade (3.29).

$$\text{Mostremos que } \int_0^T (ku''_\delta, u'_\delta)dt \longrightarrow \int_0^T (ku'', u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.31}$$

De fato,

$$\left|\int_0^T (Ku''_\delta, u'_\delta)dt - \int_0^T (ku'', u')dt\right| \leq \left|\int_0^T (ku''_\delta, u'_\delta)dt - \int_0^T (Ku''_\delta, u')dt\right| +$$

$$\left|\int_0^T (Ku''_\delta, u')dt - \int_0^T (Ku'', u')dt\right| \leq \int_0^T |(Ku''_\delta, u'_\delta - u')|dt + \left|\int_0^T [(Ku''_\delta, u') - (Ku'', u')]dt\right| \leq$$

$$\left\{\int_0^T |Ku''_\delta||u'_\delta - u'|dt + \left|\int_0^T [(Ku''_\delta, u') - (Ku'', u')]dt\right|\right\} \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0$$

Pois $|ku''_\delta|$ é limitado e, por Aubin - Lions, $|u'_\delta - u'| \longrightarrow 0$, quando $\delta \longrightarrow 0$. Além disso, por (3.25), $(ku''_\delta, v) \longrightarrow (ku'', v)$, $\forall$v$\in L^2(0,T)$. Portanto, fazendo $v = u'$, temos

$$(Ku''_\delta, u') \longrightarrow (Ku'', u'). \text{ Logo } \left|\int_0^T (Ku''_\delta, u'_\delta)dt - \int_0^T (Ku'', u')dt\right| \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0$$

Seguindo o mesmo raciocínio aplicado em (3.31), concluimos que:

$$\int_0^T (-\Delta u_\delta, -\Delta u'_\delta)dt \longrightarrow \int_0^T (-\Delta u, -\Delta u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.32}$$

$$\int_0^T (u'_\delta, u'_\delta)dt \longrightarrow \int_0^T (u', u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.33}$$

Resta analisar $\displaystyle\int_0^T M(\|u_\delta(t)\|^2)(-\Delta u_\delta, u'_\delta)dt$

De (2.19) da 1ª estimativa, temos

$$M(\|u_\delta(t)\|^2)(-\Delta u_\delta, u'_\delta) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_\delta(t)\|^2)$$

Portanto,

$$\int_0^T M(\|u_\delta(t)\|^2)(-\Delta u_\delta, u'_\delta)dt = \frac{1}{2}[\widehat{M}(\|u_\delta(t)\|^2)]_0^T = \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_\delta(T)\|^2) - \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_0\|^2) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\widehat{M}(\|u(T)\|^2) - \frac{1}{2}\widehat{M}(\|u_0\|^2) = \int_0^T M(\|u(t)\|^2)(-\Delta u, u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0$$

Pois $\widehat{M}$ é contínua e, por Aubin-Lions, $u_\delta(T) \longrightarrow u(T)$, quando $\delta \longrightarrow 0$.

Portanto,

$$\int_0^T M(\|u_\delta(t)\|^2)(-\Delta u_\delta, u'_\delta)dt \longrightarrow \int_0^T M(\|u(t)\|^2)(-\Delta u, u')dt, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.34}$$

Concluimos, então, de (3.30)-(3.34) que u é a solução da desigualdade (2.4) do teorema (2.1)

Mostraremos agora que $u'(t) \in N$ q.t.p $t \in (0,T)$. De (2.20) e (2.25) na 1ª estimativa, temos

$$(K, u'^2_{\varepsilon\delta m}(t)) + \varepsilon|u'_{\varepsilon\delta m}(t)| + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta u_{\varepsilon\delta m}(t)|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |u'_{\varepsilon\delta m}(s)|^2 ds +$$

$$\frac{2}{\delta}\int_0^t (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(s)), u'_{\varepsilon\delta m}(s))ds \leq C, \ \forall\ m \geq m_0 \text{ e } \forall\ t \in [0,T] \tag{3.35}$$

E como todos os termos de (3.35) são positivos, então, tomando em particular $t = T$,

$$0 \leq \frac{1}{\delta}\int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t))dt \leq C \tag{3.36}$$

Sabemos também da proposição (1.3), que

$$(w - P_N(w), v - P_N(w)) \leq 0, \ \forall\ v \in N \tag{3.37}$$

e pela definição (1.11), temos

$$(\beta(w), v - P_N(w)) \leq 0, \ \forall\ v \in N \tag{3.38}$$

Para $v = 0$, teremos

$$(\beta(w), w - P_N(w) - w) \leq 0 \Longleftrightarrow (\beta(w), \beta(w) - w) \leq 0 \Longleftrightarrow (\beta(w), \beta(w)) - (\beta(w), w) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow (\beta(w), \beta(w)) \leq (\beta(w), w) \tag{3.39}$$

ou ainda

$$|\beta(w)|^2 \leq (\beta(w), w) \tag{3.40}$$

Fazendo $w = u'_{\varepsilon\delta m}(t)$ em (3.40) e integrando de 0 a T, obtemos por (3.36)

$$\int_0^T |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \leq \int_0^T (\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t)), u'_{\varepsilon\delta m}(t)) dt \leq \delta C$$

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, temos

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \int_0^T |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \leq \delta C$$

Temos por Aubin - Lions (2.66) (ii) que

$$u'_{\varepsilon\delta m} \longrightarrow u'_{\varepsilon\delta} \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega) \tag{3.41}$$

Pela continuidade do β, obtemos

$$\int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta m}(t))|^2 dt \longrightarrow \int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t))|^2 dt, \text{ quando } m \longrightarrow \infty \tag{3.42}$$

Portanto,

$$\int_0^t |\beta(u'_{\varepsilon\delta}(t))|^2 dt \leq \delta C \tag{3.43}$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ em (3.43) e seguindo o mesmo raciocínio de (3.41) e (3.42) para a sequência $(u_{\varepsilon\delta})$ obtemos

$$0 \leq \int_0^t |\beta(u'_{\delta}(t))|^2 dt \leq \delta C \tag{3.44}$$

Agora, tomando o limite quando $\delta \longrightarrow 0$ em (3.44), obtemos

$$\int_0^T |\beta(u'_\delta(t))|^2 dt \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0 \tag{3.45}$$

Segue então que

$$\beta(u'_\delta(t)) \longrightarrow 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.46}$$

Por (3.41) e pela continuidade da β, temos

$$\beta(u'_\delta(t)) \longrightarrow \beta(u'(t)) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.47}$$

Por (3.46) e (3.47) e pela unicidade dos limites, temos

$$\beta(u'(t)) = 0 \tag{3.48}$$

O que implica dizer que

$$u'(t) \in N \text{ q.t.p } \quad t \in (0,T) \tag{3.49}$$

3.2 Unicidade do Problema Não Linear Unilateral

Provaremos que a solução do teorema (2.1) é única.

Sejam u_1 e u_2 soluções de (2.4) no teorema (2.1). Logo podemos escrever

$$\int_0^T (k(x,t)u''_1, v - u'_1)dt + \int_0^T (-\Delta u_1, -\Delta(v - u'_1))dt + \int_0^T M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1, v - u'_1)dt +$$

$$\int_0^T (u'_1, v - u'_1)dt \geq \int_0^T (f, v - u'_1)dt \tag{3.50}$$

$$\int_0^T (k(x,t)u''_2, v - u'_2)dt + \int_0^T (-\Delta u_2, -\Delta(v - u'_2))dt + \int_0^T M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, v - u'_2)dt +$$

$$\int_0^T (u'_2, v - u'_2)dt \geq \int_0^T (f, v - u'_2)dt \text{ , } \forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\, v(t) \in N \quad \text{q.t.p} \quad t \in (0,T) \tag{3.51}$$

Considerando na desigualdade (3.50), $v = u_2'$ e na desigualdade (3.51), $v = u_1'$ e t um ponto arbitrário de $(0, T)$,temos:

$$\int_0^t (k(x,t)u_1'', u_2' - u_1')dt + \int_0^t (-\Delta u_1, -\Delta(u_2' - u_1'))dt + \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1, u_2' - u_1')dt+$$

$$\int_0^t (u_1', u_2' - u_1')dt \geq \int_0^t (f, u_2' - u_1')dt \tag{3.52}$$

$$\int_0^t (k(x,t)u_2'', u_1' - u_2')dt + \int_0^t (-\Delta u_2, -\Delta(u_1' - u_2'))dt + \int_0^t M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, u_1' - u_2')dt+$$

$$\int_0^t (u_2', u_1' - u_2')dt \geq \int_0^t (f, u_1' - u_2')dt \tag{3.53}$$

Reescrevemos a desigualdade (3.53) na forma

$$-\int_0^t (k(x,t)u_2'', u_2' - u_1')dt - \int_0^t (-\Delta u_2, -\Delta(u_2' - u_1'))dt - \int_0^t M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, u_2' - u_1')dt-$$

$$\int_0^t (u_2', u_2' - u_1')dt \geq -\int_0^t (f, u_2' - u_1')dt \tag{3.54}$$

Agora, efetuando (3.52)+(3.54), obtemos:

$$\int_0^t (k(x,t)(u_1'' - u_2''), u_2' - u_1')ds + \int_0^t (-\Delta(u_1 - u_2), -\Delta(u_2' - u_1'))dt+$$

$$\int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1, u_2' - u_1')ds - \int_0^t M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, u_2' - u_1')ds+$$

$$\int_0^t (u_1' - u_2', u_2' - u_1')dt \geq 0 \tag{3.55}$$

Fazendo $u_2 - u_1 = w$, obtemos

$$-\int_0^t (k(x,t)w'', w')ds - \int_0^t (-\Delta w, -\Delta w')ds + \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_1, w')ds-$$

$$\int_0^t M(\|u_2\|^2)(-\Delta u_2, w')ds - \int_0^t (w', w')ds \geq 0 \tag{3.56}$$

Somando e subtraindo $\int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta u_2, w')ds$, obtemos:

$$-\int_0^t (k(x,t)w'', w')ds - \int_0^t (\Delta w, \Delta w')ds - \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta w, w')ds+$$

$$\int_0^t [M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2, w')ds - \int_0^t (w', w')ds \geq 0 \tag{3.57}$$

Segue que:

$$-\int_0^t (k(x,t)w'', w')ds - \int_0^t (\Delta w, \Delta w')ds - \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta w, w')ds+$$

$$-\int_0^t (w', w')ds \geq -\int_0^t [M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2, w')ds$$

Ou ainda ,

$$\int_0^t (K(x,t)w'', w')ds + \int_0^t (\Delta w, \Delta w')ds + \int_0^t M(\|u_1\|^2)(-\Delta w, w')ds+$$

$$+\int_0^t (w', w')ds \leq \int_0^t [M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2, w')ds \tag{3.58}$$

Note que:

$$(Kw'', w') = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}(K, w'^2) - \left(\frac{\partial K}{\partial t}, w'^2\right)\right]$$

$$(\Delta w, \Delta w') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta w|^2$$

$$(-\Delta w, w') = ((w, w')) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$

$$(w', w') = |w'|^2$$

Portanto, podemos reescrever a desigualdade (3.58) :

$$\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{d}{dt}(K,w'^2) - \left(\frac{\partial K}{\partial t}, w'^2\right)\right] ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}|\Delta w|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t M(\|u_1\|^2)\frac{d}{dt}\|w\|^2 ds +$$

$$\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t [M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2, w') ds \tag{3.59}$$

Note também que:

$$\frac{d}{dt}\left[M(\|u_1\|^2)\|w\|^2\right] = \frac{d}{dt}\|u_1\|^2 M'(\|u_1\|^2)\|w\|^2 + M(\|u_1\|^2)\frac{d}{dt}\|w\|^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}M(\|u_1\|^2)\frac{d}{dt}\|w\|^2 =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[M(\|u_1\|^2)\|w\|^2\right] - ((u_1, u_1')).M'(\|u_1\|^2)\|w\|^2$$

Substituindo em (3.59), obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}[(K,w'^2) + |\Delta w|^2 + M(\|u_1\|^2)\|w\|^2] ds + \int_0^t |w'|^2 ds \leq$$

$$\int_0^t [M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)](-\Delta u_2, w') ds + \int_0^t ((u_1, u_1'))M'(\|u_1\|^2)\|w\|^2 ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\partial K}{\partial t}, w'^2\right) ds$$

Aplicando $\mathcal{H}_2$ e a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t}, w'^2\right) \leq \left(\left|\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{\mathbb{R}}, w'^2\right) \leq (\alpha + C(\alpha)K, w'^2) = (\alpha, w'^2) + C(\alpha)(K, w'^2) \leq$$

$$|\alpha||w'^2| + C(\alpha)(K, w'^2)$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds}[(K,w'^2) + |\Delta w|^2 + M(\|u_1\|^2)\|w\|^2] ds + 2\int_0^t |w'|^2 ds \leq$$

$$2\int_0^t |M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)|_{\mathbb{R}}|\Delta u_2||w'| ds + 2\int_0^t \|u_1\|\|u_1'\||M(\|u_1\|^2)|_{\mathbb{R}}\|w\|^2 ds +$$

$$\int_0^t \alpha|w'|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t (K, w'^2) ds \tag{3.60}$$

Sabemos que $\|u(t)\|$, $\|u'(t)\|$ e $|\Delta u(t)|$ são limitadas. Sabemos também por $\mathcal{H}_3$ que a função

M é continuamente diferenciável em $[0,\infty)$. Isto nos permite aplicar o Teorema do Valor Médio:

$|M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)|_{\mathbb{R}} \leq |M'(\xi)|_{\mathbb{R}}|\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2|_{\mathbb{R}}$, onde $\xi = (1-\theta)\|u_1\|^2 + \theta\|u_2\|^2$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Mas,

$|M'(\xi)|_{\mathbb{R}}|\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2|_{\mathbb{R}} \leq C_\xi(\|u_1\| + \|u_2\|)|\|u_1\| - \|u_2\||_{\mathbb{R}} \leq C_\xi(C_1 + C_2)\|u_1 - u_2\| = C_3\|w\|$

Portanto, podemos escrever:

$$|M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)|_{\mathbb{R}} \leq C_3\|w\| \leq C_4|\Delta w|$$

Assim ,

$|M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)|_{\mathbb{R}}|\Delta u_2||w'| \leq C_5|\Delta w||w'|$ e, aplicando a desigualdade elementar

$$C_5|\Delta w||w'| \leq \frac{1}{2}\left(|w'|^2 + C_5^2|\Delta w|^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(|w'|^2 + C_6|\Delta w|^2\right)$$

Logo,

$$|M(\|u_1\|^2) - M(\|u_2\|^2)|_{\mathbb{R}}|\Delta u_2||w'| \leq \frac{1}{2}|w'|^2 + \frac{C_6}{2}|\Delta w|^2 \tag{3.61}$$

Além disso,

$$\|u_1\|\|u_1'\||M(\|u_1\|^2)|_{\mathbb{R}}\|w\|^2 \leq C_7\|w\|^2 \leq \frac{C_8}{2}|\Delta w|^2 \tag{3.62}$$

Aplicando (3.61) e (3.62) em (3.60), obtemos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}[(K, w'^2) + |\Delta w|^2 + M(\|u_1\|^2)\|w\|^2]ds + 2\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t (\alpha|w'|^2 + C_5|\Delta w|^2)ds +$$

$$\int_0^t C_8|\Delta w|^2 ds + \int_0^t |w'|^2 ds + C(\alpha)\int_0^t (K, w'^2)ds$$

Note que $w(0) = w'(0) = 0$. Logo ,

$$(k, w'^2) + |\Delta w|^2 + M(\|u_1\|^2)\|w\| + (1-\alpha)\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t [C(\alpha)(k, w'^2) + C_9|\Delta w|^2]ds \quad (3.63)$$

com $0 < \alpha < 1$ e C_i constantes positivas, para $i = 1, 2, ..., 9$

De acordo com a obs(2.1): $\lambda_1 \leq \dfrac{|\Delta w|^2}{|\Delta^{1/2} w|^2} = \dfrac{|\Delta w|^2}{|\nabla w|^2} \Longrightarrow -|\nabla w|^2 \geq -\dfrac{|\Delta w|^2}{\lambda_1}$

Por $\mathcal{H}_3$: $M(\|u_1\|^2) \geq -\sigma$, com $0 < \sigma < \lambda_1$.

Logo , $M(\|u_1\|^2)\|w\|^2 \geq -\sigma|\nabla w|^2 \geq -\dfrac{\sigma}{\lambda_1}|\Delta w|^2$

Aplicando este resultado em (3.63), obtemos

$$(K, w'^2) + \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda_1}\right)|\Delta w|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t [C(\alpha)(K, w'^2) + C_9|\Delta w|^2]ds,$$
$$\text{com } 0 < 1 - \frac{\sigma}{\lambda_1} < 1 \text{ e } 0 < 1 - \alpha < 1 \quad (3.64)$$

Fazendo $\xi = 1 - \dfrac{\sigma}{\lambda_1}$ e $C_{10} = \max\{C(\alpha), C_9\}$, obtemos:

$$\xi[(K, w'^2) + |\Delta w|^2] < (K, w'^2) + \xi|\Delta w|^2 + (1-\alpha)\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t C_{10}[(K, w'^2) + |\Delta w|^2]ds.$$

Ou ainda ,

$$(K, w'^2) + |\Delta w|^2 < \frac{1}{\xi}(K, w'^2) + |\Delta w|^2 + \frac{1-\alpha}{\xi}\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t \frac{C_{10}}{\xi}[(K, w'^2) + |\Delta w|^2]ds.$$

Portanto ,

$$(K, w'^2) + |\Delta w|^2 < C_{11}(K, w'^2) + |\Delta w|^2 + C_{12}\int_0^t |w'|^2 ds \leq \int_0^t C_{13}[(K, w'^2) + |\Delta w|^2]ds \quad (3.65)$$

Onde $C_{11} = \dfrac{1}{\xi}$, $C_{12} = \dfrac{1-\alpha}{\xi}$ e $C_{13} = \dfrac{C_{10}}{\xi}$

Pela desigualdade de Gronwall , $(K, w'^2) + |\Delta w|^2 \leq 0$

Isto implica dizer que $|\Delta w(t)|^2 = \|w(t)\|^2_{H_0^2(\Omega)} = 0$, e portanto, $w(t) = 0$ q.s. em $[0, T]$.

Desde que w é contínua em $[0, T]$, $w(t) = 0$, $\forall\ t \in [0, T]$, isto é, $u_1 = u_2$.

Bibliografia

[1] BRÉZIS, Haim. Analyse Fonctionnelle: Théorie e Applications. Paris: Masson, 1987

[2] BECERRA, V.J.V. Solução Local Para um Problema não Linear Unilateral. Dissertação de Mestrado. UFRJ. Dez/1987

[3] FERREIRA, J. On a variation inequality for a hiperbolic-parabolic equation with a lipschitzian nonlinearity. Proyecciones Revista de Matemática. vol 16, nº 2. Dez/1997

[4] L.A MEDEIROS and M. MILLA MIRANDA. Local solutions for nonlinear unilateral problems, Revue Romaine de Math. Pures et Appliques, 31 (1986) 371-382.

[5] MIRANDA, M.M. e MEDEIROS, L.A. Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº 25, IM-UFRJ, 1993.

[6] MENEZES, D.B.S, OLIVEIRA, E.A, PEREIRA, D.C., FERREIRA, J. Existence uniquesses and uniform decay for the nonlinear bean degenerate equation with weak damping. Applied Mathematics and Computation, 154 (2004)pp. 555-565.

[7] MIKHLIN, S.G. Variational methods in Mathematical Physic. Oxford: Pergamon Press, 1964.

[8] LIONS, J.L. Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes Aux Limites Non Linéaris. Dunod, Paris, 1969.

[9] PEREIRA, D.C. Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico das Soluções da Equação Não - Linear da Viga. Doctoral Thesis. IM - UFRJ, 1987.

[10] STAMPACCHIA, G. Formes bilineaires sur les ensembles convexes. C.R.Acad. Sc. Paris , 258 , pp. 4413-4416 , (1964).

[11] LIONS,J.L.and STAMPACCHIA,G. Variational inequalities Com. Pure and Appl. , Math. 20 , pp. 493-519 (1967).

[12] KINDERLEHRER, D. and STAMPACCHIA , G. An introduction to variational inequalities and their Applications , Academic Press , New York , (1980).

[13] EBIHARA, Y. , Modified variational inequalities to semilinear wave equations. Nonlinear Analysis , 7 , No 8 , pp. 821-826 , (1983).

[14] EBIHARA, Y. and MEDEIROS , L.A. and MIRANDA , M.M. , On a variational inequality for a nonlinear operator of hyperbolic type , Bol. Soc. Mat. , 16 , pp. 41-54 , (1985).

[15] WOINOWSKY - KRIEGER, S. The Effect of Axail Force on The Vibrations of Hinged Bars. J. Appl. Mech, n° 17, 1950.