UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

SOLUÇÃO GLOBAL E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE KLEIN-GORDON COM NÃO-LINEARIDADES NÃO LOCAIS.

Belém/PA
2006

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

SOLUÇÃO GLOBAL E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE KLEIN-GORDON COM NÃO-LINEARIDADES NÃO LOCAIS.

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como quesito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Ferreira**
Co-Orientador: **Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira,**

Belém
2006

Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Solução Global e decaimento exponencial para um sistema de Klein-Gordon com não-linearidades não locais.

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 11 de Abril de 2006

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Ferreira
Universidade Federal de São João Del Rei
Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Faculdade Ideal - FACI
Co-orientador

Prof. Dr. João dos Santos Protázio
Universidade Federal do Pará
Examinador

À memória de José Ribamar Cordeiro, meu Pai.

À Benedita, minha mãe, motivo de minha existência.

À Cristiane, minha esposa, mulher da minha vida.

À Beatriz, minha filha, razão de minha vida.

Agradecimentos

⋆ À Deus Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e a inspiração necessária para chegar ao final deste trabalho;

⋆ Aos meus pais Benedita e Ribamar, os verdadeiros mestres desta história. Sem vocês este momento não seria possível;

⋆ Aos meus irmãos e irmãs: Socorro, Nonato, Jerônimo, Raimundo Neto, Isabel e Paula, pela alegria com a minha vitória;

⋆ À Cristiane, minha esposa, que sempre compartilhou comigo seu amor, atenção, paciência, e que nunca deixou de acreditar em mim;

⋆ Ao pilar da minha vida, fonte de alegria e paz, minha filha Beatriz;

⋆ Ao amigo e orientador, Prof. Dr. Jorge Ferreira, que desde o início depositou inteira confiança, e a humildade com que conduziu este trabalho;

⋆ Ao Prof. Antônio Miguel, e Prof. Dr. Ducival Pereira, pelos conselhos e oporutunidades;

⋆ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas, em especial: Lindomar, Renato, Edilson, Carlos, Sílvia, Helena, Paula, Antenor, Luiz, Irazel, Heleno, Aubedir e Gesson;

⋆ Ao corpo Docente do PPGME pelo apoio, ao corpo Docente das escolas JMM e ACC e aos companheiros do SINTEPP por me mostrar que a formação é feita de luta e organização;

⋆ A todos os amigos de Barcarena que de um modo ou de outro sempre estiveram torcendo por mim;

⋆ À CAPES e Secretaria Municipal de Educação, pelo financiamento durante o Curso, viabilizando meu deslocamento em viagens .

“Feci quodi potuit, faciante meliora potentes.”

Fiz o que pude, façam melhor os que puderem.

RESUMO

CORDEIRO, Sebastião Martins Siqueira. Existêcia e unicidade de solução global um sistema de edp's acoplado do tipo Klein-Gordon com não linearidades do tipo Kirchhoff-Carrier em domínio limitado. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

Neste trabalho nos propomos a demonstrar a existência e unicidade de solução global fraca e decaimento exponencial para o problema misto (P):

$$(P): \left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) - \Delta u'(t) = f(v(t)) \;\; em \;\; Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) - \Delta v'(t) = g(u(t)) \;\; em \;\; Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \; em \; \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \;\; em \;\; \Omega \\ \\ v(0) = v_0, \; v'(0) = v_1 \;\; em \;\; \Omega \end{array} \right.$$

onde para a existência de solução global utilizamos o método de Faedo Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e desigualdades importantes da Análise Funcional. Para unicidade usaremos o método da energia, enquanto que para o comportamento assintótico utilizamos o lema de Nakao, e também algumas desigualdades da Análise Funcional.

Palavras Chaves: Existência e Unicidade, Comportamento Assintótico, Solução Global Fraca.

Abstract

CORDEIRO, Sebastião Martins Siqueira Cordeiro. About a coupled system of Klein Gordon partial differential equations with no linearity of Kirchhoff-Carrier type in a limited domain. 2006. Dissertation (Mastering in Mathematics) - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

In this work we propose to demonstrate existence and uniqueness of local weak solution for the mixed problem (P):

$$(P): \left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) - \Delta u'(t) = f(v(t)) \quad em \quad Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) - \Delta v'(t) = g(u(t)) \quad em \quad Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \ em \ \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\ \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \quad em \quad \Omega \\ \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = v_1 \quad em \quad \Omega \end{array} \right.$$

in which for the existence we used Faedo Galerkin Method, Aubin Lions' theorem of compactness, important inequalities of Functional Analysis, while for the uniqueness we used the energy method, due to the solution's regularity, and also some inequalities of Functional Analysis. For asyntotic behavior we will use the Nakao lemma‘s and some inequalities of Functional Analysis.

Words Key: Existence, Uniqueness, Global Weak Solution end Asymptotic Behavior.

Introdução

Neste trabalho analisamos a existência e unicidade de solução Global fraca e comportamento assintótico para o problema misto

$$
\left\|\begin{array}{l}
u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) - \Delta u'_m(t) = f(v(t)) \;\; em \;\; Q, \\[2mm]
v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) - \Delta v'_m(t) = g(u(t)) \;\; em \;\; Q, \\[2mm]
u(t) = v(t) = 0 \; em \; \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\[2mm]
u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \;\; em \;\; \Omega \\[2mm]
v(0) = v_0, \; v'(0) = v_1 \;\; em \;\; \Omega
\end{array}\right. \tag{0.1}
$$

Onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$. E ainda, $-\Delta$ é o operador auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx$.

No que se segue, denotaremos por: $((\ ,\ ))$, $||\ .\ ||$, $(\ ,\ )$, $|\ .\ |$, o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.

O problema (0.1) consiste de uma versão estendida em forma de sistema da seguinte equação

$$
\left\|\begin{array}{l}
u'' - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + M_1\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx\right)u - \Delta u' = f \;\; em \;\; Q = \Omega \times]0,T[\\[2mm]
u = 0 \;\; em \;\; \Sigma = \partial\Omega \times]0,T[\\[2mm]
u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \;\; em \;\; \Omega.
\end{array}\right. \tag{0.2}
$$

estudada no trabalho *Global solutions to Klein-Gordon type equations with non-linearities of Kirchhoff-Carrier type* de J. Ferreira , D. C.Pereira e M.P. Matos, [1].

O problema (0.2) é a versão concreta do problema abstrato

$$\left\| \begin{array}{l} u'' + M\left(\|u(t)\|^2 dx\right) Au + M_1\left(|u(t)|^2 dx\right) u - Au' = f \\ \\ u(0) = u_0, \\ \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{0.3}$$

onde A é um operador auto-adjunto de um espaço de Hilbert H e os dados iniciais são tais que $u_0 \in D(A),\ u_1 \in V\ e\ f \in L^2(0, T; H)$. Estudado na dissertação de mestrado de Aroldo José de Oliveira, sob orientação do Prof. Dr. Marivaldo M. P. Matos, [2].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Sendo assim, não nos preocuparemos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula, e vale as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$

2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$

3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda\ supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1.1. *Seja* $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$*: Verifica-se que o* $supp\,(\varphi) = (0,1)$*, não é um conjunto compacto.*

Neste nosso estudo, damos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1.1.2. *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| < \mathrm{r}\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & se \;\; \|x - x_0\| < r \\ 0 & se \;\; \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares continuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp(\varphi) \subset K \;\text{ e }\; supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Observação 1.1.2. *Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p \, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0. \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [4]

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi\rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. . *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω.quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int\limits_K |u(x)|\, dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.1.3. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$< T_u, \varphi >= \int\limits_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então

$$|\langle T_u, \varphi_\nu\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi\rangle| = \left|\int\limits_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)\, dx\right| \leq \int\limits_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|\, dx$$

$$\leq \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|\, dx \to 0,$$

pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita *gerada pela função localmente integrável u* e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (de Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: ver [5]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.4. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

É fácil vereficar δ_{x_0} que é uma distribuição, conhecida por Distribuição de Dirac*, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$$

daí,

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x)\|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω, logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \le p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v\longrightarrow\infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v\longrightarrow\infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado interessante a ser mercionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada u' não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Com efeito, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u', \varphi >= - < u, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_\infty^0 \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção de derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall \, |\alpha| \leq k.$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

é espaço de *Banach* Ver [13].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess \, |v(x)| \, , \forall v \in L^\infty(\Omega) \, .$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* Ver [14].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert.* Neste caso o produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx,$$

cuja norma induzida é:

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\right\},$$

as derivadas D^α, evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \, dx, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2_{L^2(\Omega)} dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.* Ver [4]

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b)\,; u^{'} \in L^2(a,b) \right\},\ \ u^{'} = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(t)]^2\, dt + \int_a^b [u'(t)]^2\, dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)\,; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,,\ \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é *bem maior* que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [4] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \ \text{ em } \ H^1(\Omega)\,.$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma \,,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$ ..

O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega)\,;\ \ \varphi_{|_\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega)\,; \varphi_{|_\Gamma} = 0,\ \ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$. A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: ver [15] .

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

***Demonstração**: ver [5]*

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1. Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \;\; a < proj\ x < b$ onde a $proj\ x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1, agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

E da desigualdade de *Schwartz*, obtemos:

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi.$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* temos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi dx \leq \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2}.$$

Logo,

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Observação Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato; Consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C)\, |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.3 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|.\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\to X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i(t),$$

onde cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \ldots, k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i(t) \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\, \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B} - integrável$) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(*i*) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

(*ii*) $\lim\limits_{k,m \longrightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X\, dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* Ver [6] de u, é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)\, dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \text{X}$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X. Dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável *Lebesgue*.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)\,, 1 \le p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbegue* em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H \, ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{t\in]0,T[} \, ||u(t)||_X \, .$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma :

$$\langle u,v\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)} = \langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}$$

Definição 1.3.1. *$f : [0,T] \to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,*

$$\int_0^T ||S_k(t) - f(t)||_X dt \to 0, \quad com \ k \to \infty.$$

Se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_0^T S_k(t)dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t)d\mu$ é dita integral de Bochner de f, em relação a μ.

Exemplo 1.3.1. *Sejam $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \le p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a função $T_u : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\varphi(s)\, ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner *em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ com injeção contínua e densa, onde $\mathcal{D}'(0,T;X)$ é espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X.*

Definição 1.3.2. *Seja* $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$*. A derivada de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$*,* $0 < T < \infty$*, estamos representando o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X \,..$$

Por $C_w^0([0,T];X)$*, denotaremos o espaço das funções* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *fracamente contínuas, isto é, a aplicação* $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X',X}$ *é contínua em* $[0,T], \forall v \in X'$*.*

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

1.4 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\|.\|$, $((,))$ e $|.|$, $(,)$. Suponhamos que $V \subset H$, V denso em H e a injeção de V em H é contínua.

A terna $\{V, H, ((,))\}$ determina um operador linear A caracterizado por: o domínio do operador A é o subespaço vetorial $D(A)$ de V dado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u,v)) = (f,v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que

$$((u,v)) = (Au, v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V.$$

Demonstra-se em M. Mianda [13], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas, além disso A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo de H, enumerável, $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$, constituído de autovetores de A, cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. satisfazem à

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_j \le \cdots, \lambda_j \to \infty \text{ quando } j \to \infty.$$

Para cada α real, o operador A^{α} é caracterizado por

$$D\left(A^{\alpha}\right)=\left\{u\in H;\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}^{2\alpha}\left|\left(u,w_{\nu}\right)\right|^{2}<\infty\right\}$$

e

$$A^{\alpha}u=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}^{\alpha}\left(u,w_{\nu}\right)w_{\nu}\in H, u\in D\left(A^{\alpha}\right).$$

Dado $u\in H$, então

$$u=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(u,w_{\nu}\right)w_{\nu}.$$

Em $D\left(A^{\alpha}\right)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u,v)_{D(A^{\alpha})}=\left(A^{\alpha}u,A^{\alpha}v\right)$$

e

$$|u|_{D(A^{\alpha})}=\left|A^{\alpha}u\right|.$$

Temos que $D\left(A^{\alpha}\right)$ munido do produto interno $(u,v)_{D(A^{\alpha})}$ é um espaço de Hilbert e dados α_1, $\alpha_2\in\mathbb{R}$, $\alpha_1>\alpha_2\geq 0$, a imersão de $D\left(A^{\alpha_1}\right)$ em $D\left(A^{\alpha_2}\right)$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S=A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)=V,\left|A^{\frac{1}{2}}\right|=\|u\|,\forall u\in V.$$

No que se segue o operador A será definido pelo terno $\{V,H,((u,v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ e $f:D\to\mathbb{R}^{n}$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- $f\left(t,x\right)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f\left(t,x\right)$ é contínua em x, para cada t fixo;

- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \forall (t,x) \in D. \tag{1.1}$$

Consideremos o retângulo $R = \left\{(t,x) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n+1}}; |\mathrm{t}-\mathrm{t}_0| \leq \mathrm{a}, |\mathrm{x}-\mathrm{x}_0| \leq \mathrm{b}\right\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.5.1 (Carathéodory). *Seja $f : \mathrm{I\!R} \to \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|\mathrm{t}-\mathrm{t}_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração

Vamos mostrar para o caso $t \geq \tau$. Definimos a função M

$$M(t) = 0 \qquad (t < \tau) \tag{1.3}$$

$$M(t) = \int_\tau^t m(s)ds \; (t \leq t \leq \tau + a) \tag{1.4}$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$

$M(\tau) = 0$

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ definimos as seguintes aproximações φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ por

$$\varphi_j(t) = \xi \qquad (\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}) \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s))ds \quad (\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta) \tag{1.6}$$

Note que $\varphi_1(t) = \xi$ $\forall t \in (\tau, \tau + \beta)$

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.6) só tem sentido se

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}$$

Daí segue, que em (6) tem-se φ_j é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}$ e, pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in R$ a equação (1.6) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \dfrac{\beta}{j} < t \leq \tau + \dfrac{2\beta}{j}$ e além disso, temos

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = |\int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds|$$

$$|\varphi_j(t)-\xi| \leq \int_{\tau}^{t-\beta/j} |f(s,\varphi(s))|ds \Rightarrow |\varphi_j(t)-\xi| \leq \int_{\tau}^{t-\beta/j} m(s)ds$$

por (1.1) e, portanto,

$$|\varphi_j(t)-\xi| \leq M(t-\frac{\beta}{j}) \tag{1.7}$$

Afirmação: $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau+\beta$. Provamos essa afirmação usando indução finita

$n=1$ ok!

Suponha que para $n=k$ temos φ_j está definida em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1<k<j$ assim temos $\varphi_j(t) = \xi + \displaystyle\int_{\tau}^{\tau-\frac{k\beta}{j}} f(s,\varphi_j(s))ds$ de modo análogo, concluímos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \dfrac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. Portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.7). Portanto, por indução, (1.6) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau+\beta$, para todo $j \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{ccll} \varphi_j(t) & = & \xi & \tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j} \\ |\varphi_j(t)-\xi| & \leq & M(t-\frac{\beta}{j}) & \tau + \frac{\beta}{j} \leq t \leq \tau+\beta \end{array} \right.$$

φ_j **é equicontínua**

Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 tais que $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon \ \ \forall j$. Sabemos que

$$|\varphi_j(t_1)-\varphi_j(t_2)| \leq |M(t_1-\frac{\beta}{j}) - M(t_2-\frac{\beta}{j})|$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau+\beta]$ vem que M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1-t_2| = |(t_1-\frac{\beta}{j})-(t_2-\frac{\beta}{j})| < \delta \Rightarrow |M(t_1-\frac{\beta}{j}) - M(t_2-\frac{\beta}{j})| < \epsilon$$

Donde segue nossa afirmação.

φ_j **é equilimitada**

Note que

$$|\varphi_j(t)-\xi| \leq M(t-\frac{\beta}{j}) \forall j$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau+\beta]$ logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$. Desde que

$$|\varphi_j(t)-\xi| \leq M(t-\frac{\beta}{j})$$

Segue que

$$|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Àrzela-Ascoli, Assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[\tau, \tau+\beta]$ para uma função continua φ.

Mostremos que tal função limite, é solução de (1.2)

Sendo $f(t,x)$ contínua em x para cada t fixo decorre que

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)) \ \forall t$$

E, usando (1.1) segue que

$$|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t)$$

Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável a função f está nas condições do teorema da convergência dominada de Lebesgue, resultando portanto

$$\lim_{k\to\infty} \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds$$

Para todo $t \in [\tau, \tau+\beta]$ temos:

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\beta/j_k}^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds$$

Quando, $k \to \infty$ o segundo termo integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vem que

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds$$

Donde segue o resultado.

Corolário 1.5.1 (Prolongamento de solução). *Seja $D = [0,\omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |\mathrm{x}| \leq \mathrm{b}\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(0) = X_0, \ \ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0,\omega]$.

Demonstração: Ver [16].

Proposição 1.5.1. *Sejam* V *e* H *espaços de Hilbert,* V *continuamente imerso em* H*,* $u \in L^p(0,T;V)$ *e* $u' \in L^p(0,T;H)$ *, com* $1 \leq p < \infty$*, então* $u \in C^0([0,T];H) \cap C^0_w([0,T];V)$*.*

Demonstração: Ver [5].

Observação 1.5.1. *: Como conseqüência do conceito de topologia fraca e fraco -*$\star$*, segue:*

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca). *. Sejam* E *um espaço de Banach e* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência de* E*. Então* $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E'.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela). *Sejam* E *um espaço de Banach,* $\varphi \in E'$ *e* $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência de* E'*. Diz-se* $\varphi_\nu \to \varphi$ *fraco -*$\star$ *se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E.$$

Proposição 1.5.2 (Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam* B_0*,* B*,* B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1 *reflexivos, a imersão de* B_0 *em* B *é compacta,* B *imerso continuamente em* B_1*, e,* W *o espaço*

$$W = \left\{ u \in L^2(0,T;B_0);\ \ u' \in L^2(0,T;B_1) \right\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^2(0,T;B_1)}$*. Então* W *é um espaço de Banach, e a imersão de* W *em* $L^2(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver [5].

Observação 1.5.2. *Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se* $(u_\nu)_{\nu \in \boldsymbol{N}}$ *é uma seqüência limitada em* $L^2(0,T;B_0)$ *e* $(u'_\nu)_{\nu \in \boldsymbol{N}}$ *uma seqüência limitada em* $L^2(0,T;B_1)$ *então* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *é limitada em* W*. Daí, segue que existe uma subseqüência* $(u_{\nu_k})_{k \in \boldsymbol{N}}$ *de* (u_ν) *tal que* $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ *forte em* $L^2(0,T;B)$*.*

Lema 1.5.1. *Consideremos* X *um espaço de Hilbert com dual* X' *e* Y *um outro espaço de Hilbert tal que* $X \hookrightarrow Y$*. Seja*

$$W = \{u \in L^2(0,T;X);\ \ u' \in L^2(0,T;X')\}.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_Y = \langle u'(t), v(t) \rangle_{X,X'} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{X,X'}.$$

Demonstração*: Ver* [5].

Lema 1.5.2 (Lema de Lions). *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ e g funções de $L^q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, tal que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \;\; g_\mu \to g$$

quase sempre em $\mathcal{O}$. Então $g_\mu \to g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [5].

Lema 1.5.3 (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma seqüência em $M^+(X, \mathcal{M})$. Então,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Onde $M^+(X, \mathcal{M})$ a coleção de todas as funções mensuráveis, não negativas, definidas em X, a valores reais estendida.

Demonstração. Ver [17].

Teorema 1.5.2 (da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X. Suponha que*

1. *$(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f.*

2. *Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então,*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [17]

Teorema 1.5.3 (Representação de Riez). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall \; f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [14].

Como conseqüência destes resultados temos as seguintes identificações:

$$i) L^2 \cong (L^2)'$$

$$ii) L^{p'} \cong (L^p)'$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdade de Sobolev). *Considere* $1 \leq p < N$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N)$$

onde $p*$ *é tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p,N) = \frac{(N-1)p}{N-p}$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração*: ver* [9].

Observação 1.5.3. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N), m \geq 1$, *inteiro, tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Demonstração*. Ver [9].*

Proposição 1.5.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *com*

$$p, p' \geq 1 \;\; e \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então

$$f, g \in L^1 \;\; e \;\; \int |f.g| \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração*. Ver* [17].

Teorema 1.5.5 (Banach-Alaoglu). *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* E' *o seu*

dual topológico. Então o conjunto

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [14].

Teorema 1.5.6 (Regularidade para um problema de Dirichlet). *Sejam Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitado $[ou com \Omega = \mathbb{R}^N_+]$. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H^1_0(\Omega)$ verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ onde C é uma constante que depende somente de Ω. E mais, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m};$$

em particular se $m > \frac{N}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Então se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [14].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.5.3. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{(i)}}\ |\omega_n| = 1\ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0\ \forall n, m,\ m \neq n; \\ \textbf{\textit{(ii)}}\ \text{O espaço gerado pela } (\omega_n) \text{ é denso em } H. \end{cases}$$

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.5.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de (u_k), ainda denotada por (u_k), tal que*

(i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$, *q.s. em* Ω;

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, *q.s. em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [14].

Observação 1.5.4. *Nas estimativas que obteremos posteriormente, teremos as globais e locais.Para as globais utilizaremos uma desigualdade fundamental, devido o lema de Gronwall e para as locais utilizaremos o Lema* 1.5.5. *Ambos apresentaremos a seguir, sendo o lema de Gronwall na versão mais simples.*

Lema 1.5.4 (Lema de Gronwall). *: Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a, b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t)\psi(t)$. Logo,

$$\omega'(t) \leq \omega(t)\psi(t),$$

donde segue,

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t,obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)}ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Assim

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right), \ \ t \in [a, b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

Lema 1.5.5. *Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds, \ \ 0 \leq t \leq T,$$

então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0, T_0] \ \ C_1, C_2 \geq 0.$$

Demonstração. *Sejam $\varphi(t) = \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2\varphi(t)$. Decorre da hipótese que*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\varphi(t)$$

ou ainda,

$$\gamma^2(t) \leq \left[C_1 + C_2\varphi(t)\right]^2$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue,

$$\varphi^{'}(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2,$$

logo,

$$\varphi^{'}(t) \leq Y(t) + Y^2(t). \tag{1.8}$$

Por outro lado, $Y^{'}(t) = C_2\varphi^{'}(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right]$, daí segue

$$Y^{'}(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right], \ \ 0 \leq t \leq T \tag{1.9}$$

observando que

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] = Y^{'}(t)e^{-c_2t} + C_2Y(t)e^{-c_2t}$$

e aplicando em (2), segue

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] \leq C_2Y^2(t)e^{-c_2t}. \tag{1.10}$$

Integrando a última desigualdade de 0 até T e notando que $Y(0) = C_1$, resulta

$$Y(t) \leq C_1e^{c_2t} + C_2e^{c_2t}\int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds. \tag{1.11}$$

Seja $z(t) = \int_0^t Y^2(s)\, e^{-c_2 s} ds$. *Assim resulta de* (4) *que* $Y(t) \leq [C_1 + C_2 z(t)]\, e^{c_2 t}$ *e, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo*

$$z^{'}(t) = Y^2(t)\, e^{-c_2 s} dt$$

logo,

$$z^{'}(t) \leq [C_1 + C_2 z(t)]^2\, e^{c_2 t},$$

donde segue,

$$\frac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} \leq e^{c_2 t}.$$

Integrando a última desigualdade de 0 *até* t, *obtemos*

$$\int_0^t \frac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} dt \leq \int_0^t e^{c_2 t} dt$$

daí segue,

$$-\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} + \frac{1}{C_1} \leq \frac{e^{c_2 t}}{C_2} - \frac{1}{C_2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} \geq \frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}.$$

Agora suponha que,

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{c_2 t}}{C_2} \iff C_2 t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right),$$

logo,

$$t < \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Seja

$$T^* = \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Onde $T^* > 0$ *e escolha* T_0 *tal que* $0 < T_0 < T^*$, *então* $0 \leq t \leq T_0$ *isto implica que*

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1},$$

ou ainda,

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1}.$$

Assim,

$$Y(t) \leq (C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t},$$

por outro lado,

$$(C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right] e^{c_2 T_0}.$$

Portanto,

$$Y(t) \leq C, \;\; 0 \leq t \leq T_0,$$

desta desigualdade e $\gamma(t) = Y(t)$, *segue o Lema*

Lema 1.5.6. *Se* $\theta \in L^p(0, T_0)$ *e* $v \in V$, *então*

$$\xi(t, x) = \theta(t)\, v(x) \in L^p(0, T_0; V).$$

Demonstração. *Devemos mostrar que* $|\xi(t,x)|_v \in L^p(0, T_0)$, *ou seja,*

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p \, dt < \infty.$$

Temos que:

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)\, v(x)|_v^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, |v(x)|_v^p \, dt = |v(x)|_v^p \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt,$$

mas decorre da hipótese que: $\int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt < \infty$.

Assim, segue o Lema.

Lema 1.5.7. *Se* $u_m \to u$ *em* $L^p(0, T_0; X)$, *então*

$$\|u_m(t)\|_X \to \|u(t)\|_X \text{ em } L^p(0, T_0)$$

Demonstração. *Queremos mostrar que*

$$|\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|_{L^p(0,T_0)}^p \to 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} |\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|^p_{L^p(0,T_0)} &= \int_0^{T_0} |\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|^p_{L^p(0,T_0)}\, dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|^p_X\, dt, \end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que:

$$\int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|^p_X\, dt \to 0$$

e, portanto, segue o Lema.

$L^2(\Omega)$ é o espaço vetorial das (classes) funções definidas em Ω cujo o quadrado é integrável a Lebesgue.

Definimos o prduto escalar e norma, respectivamente, em $L^2(\Omega)$ por

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)ds, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

$$|u| = \int_\Omega u^2 dx$$

Capítulo 2

Existência de Solução Global Fraca

2.1 Resultado principal

Neste Capítulo investigaremos a existência de solução global fraca para o sistema acoplado de edp's, caso concreto:

$$\left\|\begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) - \Delta u' = f(v(t)) \;\; em \;\; Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) - \Delta v' = g(u(t)) \;\; em \;\; Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \; em \; \Sigma = \Gamma \times \,]0,T[\\ \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \;\; em \;\; \Omega \\ \\ v(0) = v_0, \; v'(0) = v_1 \;\; em \;\; \Omega \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Onde Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega\times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma\times]0,T[$. E ainda, $-\Delta$ é o operador auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$.

No que se segue, denotaremos por: $((\ ,\ ))$, $||\,.\,||$, $(\ ,\ )$, $|\,.\,|$, o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.

Sendo que estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da *norma do gradiente*, isto é, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$.

E assumiremos as seguintes hipóteses:

$$\cdot \;\; M_i \in C^1([0,\infty), \mathbb{R}), \;\; (\mathrm{i} = 1,2,3) \tag{2.2}$$

$$\cdot \;\; M_0(s), M_2(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0,\infty), \tag{2.3}$$

$$\cdot \;\; M_1(s), M_3(s) \geq m_1 \geq 0, \forall s \in [0,\infty), \tag{2.4}$$

$$\cdot \;\; f, \; g \; \in Lip_\alpha(\mathbb{R}) \text{ e } \mathrm{g}(0) = \mathrm{f}(0) = 0. \tag{2.5}$$

Considere ainda a energia associada ao sistema (4.1),

$$E(t) = |u'(t)|^2 + |v'(t)|^2 + \widehat{M_0}\big(\|u(t)\|^2\big) + \widehat{M_1}\big(|u(t)|^2\big) + \widehat{M_2}\big(\|v(t)\|^2\big) + \widehat{M_3}\big(|v(t)|^2\big)$$

onde $\widehat{M_i}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M_i(s)ds, \quad (i = 0,1,2,3).$

Teorema 2.1.1. *Seja* M_i $(i = 0,1,2,3)$ *funções obedecendo as hipóteses* (4.2), (4.3), (4.4) *e* f, g *obedecendo a hipótese* (4.5), *existe um número fixo* $T > 0$, *porém arbitrário, tal que, se* $\{u_0, v_0\} \in \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)^2$, $\{u_1, v_1\} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ *e* f, $g \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$, *então existe o par de funções* $\{u, v\} : [0, T] \to L^2(\Omega)$ *satisfazendo,*

- $\{u, v\} \in L^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap L^2((0,\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$,
- $\{u_t, v_t\} \in L^2([0,\infty); H_0^1(\Omega));$,
- $\{u_{tt}, v_{tt}\} \in L^2([0,\infty); L^2(\Omega));$
- $\dfrac{d}{dt}(u'(t), h) + M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u_m(t), h) + M_1(|u(t)|)(u(t), h) - (\Delta u'(t), h) = (f(v), h);$
  $\forall h \in V$, *no sentido* $\mathcal{D}'(0,\infty)$,
- $\dfrac{d}{dt}(v'(t), h) + M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v_m(t), h) + M_3(|v(t)|)(v(t), h) - (\Delta v'(t), h) = (f(u), h);$
  $\forall h \in V$, *no sentido* $\mathcal{D}'(0,\infty)$,
- $u(0) = u_0$ *e* $u'(0) = u_1$,
- $v(0) = v_0$ *e* $v'(0) = v_1$.

Comentário

Para mostrar a existência, usamos os método de Faedo Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions, desigualdades importantes de Análise Funcional.

Dem.: Por simplicidade, dividiremos a demonstração do teorema nas segintes etapas:
I - Definir o problema (4.1), em um espaço de dimensão finita conveniente, que denominamos Problema Aproximado (PA);
II - Mostrar que esse problema aproximado possui solução (global); que chamamos Solução Aproximada . Aqui, para a existência de solução global do (PA), mostraremos que este é equivalente a um sistema de EDO's de 1a. ordem, e utilizaremos o Teorema de Existência de Carathéodory;
III - Obter estimativas a priori sobre a seqüência de soluções aproximadas, que nos permitam efetuar a *passagem ao limite.* As quais permitam prolongar a solução ao intervalo

$[0, \infty[$;

IV - Essa passagem ao limite é o passo seguinte, onde devemos mostrar, a partir das estimativas a priori, que a seqüência de soluções aproximadas converge, numa topologia conveniente, para a solução do problema (4.1).

2.1.1 Problema Aproximado

Consideremos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ constituído de vetores próprios do operador $-\Delta$ e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a correspondente sequência de valores próprios. Para cada $m = 1, 2, 3, ...$, seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subspaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$. O problema aproximado (2.6) associado a (4.1), consiste em encontrar uma solução sob a forma $(u_m(t), v_m(t)) = \left(\sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}(t) w_j(x), \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\right) \in V_m$, sendo os $\Psi_{jm},\ \Phi_{jm}$ de classe C^∞, determinados de modo a satisfazer o seguinte sistema:

$$\left\| \begin{array}{l} (u''_m, h) - M_0\left(|\nabla u|^2\right)(\Delta u_m, h) + M_1\left(|u|^2\right)(u_m, h) - (\Delta u'_m, h) = (f(v_m), h) \\ \\ (v''_m, h) - M_2\left(|\nabla v^2\right)(\Delta v_m, h) + M_3\left(|v|^2\right)(v_m, h) - (\Delta v'_m, h) = (g(u_m), h) \\ \\ \{u_m(0), v_m(0)\} = \{u_{0m}, v_{0m}\}\ em\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \\ \{u'_m(0), v'_m(0)\} = \{u_{1m}, v_{1m}\}\ em\ H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

$\forall h \in V_m\ e\ j = 1, ..., m$. Onde $u_{0m},\ u_{1m},\ v_{0m},\ v_{1m}$ são as aproximações de $u_0,\ u_1,\ v_0,\ v_1$, respectivamente. Isto é, sendo $u_0,\ v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, podemos aproximá-las por combinações lineares finitas dos w_j, e existem $\alpha_{jm},\ \beta_{jm} \in \mathbb{R}\,(\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{m})$ tais que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \rightarrow u_0,\ v_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \rightarrow v_0,\ forte\ em\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{2.7}$$

Logo, tem-se $u_m(0) = u_{0m}\ e\ v_m(0) = v_{0m}$. E, como existe uma única combinação linear dos vetores da base de V_m, segue que $\Psi_{jm}(0) = \alpha_{jm}\ e\ \Phi_{jm}(0) = \beta_{jm}\ (j = 1, 2, ..., m)$. Analogamente, $u_1,\ v_1 \in H_0^1(\Omega)$, existem constantes $\gamma_{jm},\ \theta_{jm} \in \mathbb{R}\,(\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{m})$ tais que

$$u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{jm} w_j \rightarrow u_1,\ v_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{jm} w_j \rightarrow v_1,\ forte\ em\ H_0^1(\Omega) \tag{2.8}$$

Logo, tem-se $u'_m(0) = u_{1m}\ e\ v'_m(0) = v_{1m}$. E, como existe uma única combinação linear dos vetores da base de V_m, segue que $\Psi'_{jm}(0) = \gamma_{jm}\ e\ \Phi'_{jm}(0) = \theta_{jm}\ (j = 1, 2, ..., m)$.

Substituindo $(u_m(t), v_m(t))$ em (2.6), e usando o fato de que $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\Psi''_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) - M_0\left(|\nabla u_m(t)|^2\right)\left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Psi_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right)\\
+M_1\left(|u_m(t)|^2\right)&\left(\sum_{j=1}^{m}\Psi_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) - \left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Psi'_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) = (f(v_m), w_i(x))\\
&\left(\sum_{j=1}^{m}\Phi''_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) - M_2\left(|\nabla u_m(t)|^2\right)\left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Phi_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right)\\
+M_3\left(|u_m(t)|^2\right)&\left(\sum_{j=1}^{m}\Phi_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) - \left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Phi'_{jm}(t)w_j(x), w_i(x)\right) = (g(u_m), w_i(x))
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases}
\Psi''_{jm}(t) - \lambda_j M_0(|\nabla u_m|^2)\Psi_{jm}(t) + M_1(|u_m|^2)\Psi_{jm}(t) - \lambda_j\Psi'_{jm}(t) = (f(v_m), w_j)\\
\Psi_{jm}(0) = \alpha_{jm},\ \Psi'_{jm}(0) = \beta_{jm}\ (j = 1, ..., m)\\
\Phi''_{jm}(t) - \lambda_j M_2(|\nabla v_m|^2)\Phi_{jm}(t) + M_3(|v_m|^2)\Phi_{jm}(t) - \lambda_j\Phi'_{jm}(t) = (g(u_m), w_j)\\
\Phi_{jm}(0) = \gamma_{jm},\ \Phi'_{jm}(0) = \theta_{jm}\ (j = 1, ..., m)
\end{cases} \tag{2.9}$$

Forma Matricial

Por simplificação de escrita a forma matricial será feita apenas para a equação de cima no sistema (2.9), sendo o procedimento análogo para a equação de baixo.
Fazendo, $\lambda = \lambda_j$ e

$$X = \begin{pmatrix} \Psi_{jm} \\ \vdots \\ \Psi'_{jm} \end{pmatrix}$$

, obtemos de (2.9)

$$\begin{pmatrix} \Psi' \\ \vdots \\ \Psi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ \lambda M_0(|\nabla u_m|^2) - M_1(|u_m|^2) - & & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \vdots \\ \Psi' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (f(v_m), w_1) \\ \vdots \\ (f(v_m), w_m) \end{pmatrix}$$

temos,

$$X' = AX + B$$

Fazendo

$$Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}$$

obtemos a forma,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X' \\ AX + B \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ A_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}_{2m\times 2m}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{m\times 1} \\ B_{m\times 1} \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{K}$$

Assim, o sistema (2.9) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} Y' = LY + K = F(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} X(0) \\ X'(0) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.10}$$

Verificaremos que o sistema (2.10) atende as condições de Carathéodory.

1) <u>Fixemos Y</u>

Vamos mostrar que L e K são mensuráveis em t.

Para $L = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ A_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}$:

sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ \lambda M_0(|\nabla u_m|^2) - M_1(|u_m|^2) - & & -\lambda \end{pmatrix}$$

Como M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ são contínuas, então a soma $\lambda_j M_i(|\nabla u_m|^2) - M_{i+1}(|u_m|^2)$ é contínua em t $(j = 1, ..., m)$. Logo, A é mensurável em t. Portanto, L é mensurável em t.

Para $K = \begin{pmatrix} 0_{m\times 1} \\ B_{m\times 1} \end{pmatrix}$: sendo $B = \begin{pmatrix} (f(v_m), w_1) \\ \vdots \\ (f(v_m), w_m) \end{pmatrix}$.

Como $f \in Lip_\alpha(s)$ e $w_j \in L^2(\Omega)$, então $(f(v_m), w_j)$ é mensurável. Então B é mensurável em t. Portanto, K é mensurável em t.

2) Seja t fixo

Vamos mostrar que F é contínua em Y.

Note que K é contínua em Y, pois é constante em relação a Y. Para a continuidade de LY basta mostrar que A é contínua em Y.

Seja $\Pi_j(Y) = \Psi_{jm}$ $(j = 1, ..., m)$ a projeção do $\mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$. É claro que Π_j é contínua. Para cada t fixo, como

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}(t) w_j,$$

a função $Y \longmapsto \|u_m\|^2 = ((u_m, u_m)) = (\Delta u_m, u_m)$, então

$$\|u_m\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}^2 \lambda_j (w_j, w_j)$$

donde segue que,

$$\|u_m\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}^2 \lambda_j$$

e pode ser escrita como

$$Y \longmapsto \sum_{j=1}^{m} [\Pi_j(Y)]^2 \lambda_j$$

Assim, $Y \longmapsto \|u_m(t)\|^2$ é contínua para t fixo, pois é combinação linear finita de funções contínuas. De modo análogo para $|u_m(t)|^2$. Daí, $\lambda_j M_i(|\nabla u_m|^2) - M_{i+1}(|u_m|^2)$ é contínua em Y, $(j = 1, ..., m)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$. Portanto, fixado t, a função $F(t, Y)$ é contínua em Y.

3) Seja K um compacto de $H_0^1(\Omega) = [0, T] \times E$, onde E é o conjunto

$$E = \{Y \in \mathbb{R}^{2m \times 1}; \|\mathrm{Y}\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq \gamma, \ \gamma > 0\}$$

.

Devemos mostrar que existe uma função real $m_k(t)$, integrável em $[0, T]$, tal que

$$\|F(t, Y)\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq m_k(t), \ \forall (t, Y) \in H_0^1(\Omega)$$

Por simplicidade e devido ao fato de que em $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, todas as normas são equivalentes,

denotaremos por $\|.\|_{pq}$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^{pq}$.
Como $F(t,Y) = LY + K$, temos que,

$$\|F(t,Y)\|_{2m\times 1} \leq \|LY\|_{2m\times 1} + \|K\|_{2m\times 1}$$

mas,

$$\|LY\|_{2m\times 1} \leq \|L\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1}$$

então,

$$\|F(t,Y)\|_{2m\times 1} \leq \|L\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1} + \|K\|_{2m\times 1}$$

Como $Y \in E$, temos que $\|Y\|_{2m\times 1} \leq \gamma$. Então a desigualdade acima fica,

$$\|F(t,Y)\|_{2m\times 1} \leq \gamma\|L\|_{2m\times 2m} + \|K\|_{2m\times 1}$$

Como $M_i \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})\,(i = 0,1,2,3)$, em particular, em $[0,T]$, segue que todas as entradas da matriz A são limitadas por uma constante. Portanto, $\|L\| \leq c$
Em relação à matriz K, todas as suas entradas, em valor absoluto, são iguais a

$$|(f(v), w_j)| \leq |f(v)||w_j| = |f(v)|$$

Então,

$$|F(t,Y)| \leq c + |f(v)| \equiv m_k(t)$$

onde $m_k(t)$ é integrável em $[0,T]$, pois c é constante e $f \in Lip_\alpha(s)$.
Portanto, o sistema (2.10) satisfaz as condições de Carathéodory, e então existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t)\} \in [0,t_m) \times [0,t_m)$, $t_m < T_0$.
As estimativas à priori, na próxima etapa, nos permitirão prolongar a solução $u_m(t)$ e $v_m(t)$ ao intervalo $[0,T_0]$.

2.1.2 Estimativas a priori

Estimativa I

Tomando-se $h = 2u'_m$ e $h = 2v'_m$ nas equações de cima e de baixo do sistema (2.6), respectivamente.

$$
\begin{aligned}
&\Big(u''_m(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t) - \Delta u'_m(t), 2u'_m(t)\Big) \\
&\qquad\qquad = \Big(f\big(v_m(t)\big), 2u'_m(t)\Big) \\
&\Big(v''_m(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t) - \Delta v'_m(t), 2v'_m(t)\Big) \\
&\qquad\qquad = \Big(g\big(u_m(t)\big), 2v'_m(t)\Big).
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Agora somando as equações do sistema (2.11), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&2\big(u''_m(t), u'_m(t)\big) - 2M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), u'_m(t)\big) + 2M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), u'_m(t)\big) \\
&\quad -2\big(\Delta u'_m(t), u'_m(t)\big) + 2\big(v''_m(t), v'_m(t)\big) - 2M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), v'_m(t)\big) \\
&\quad +2M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), v'_m(t)\big) - 2\big(\Delta v'_m(t), v'_m(t)\big) = 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u'_m(t)\Big) \\
&\quad +2\Big(g\big(u_m(t)\big), v'_m(t)\Big)
\end{aligned}
$$

ou melhor,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + 2\big\|u'_m(t)\big\|^2 \\
&+\frac{d}{dt}|v'_m(t)|^2 + M_2\big(\|v_m(t)\|^2\big)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2 + 2\big\|v'_m(t)\big\|^2 \\
&= 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u'_m(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), v'_m(t)\Big)
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\widehat{M_0}\big(\|u_m(t)\|^2\big) + \frac{d}{dt}\widehat{M_1}\big(|u_m(t)|^2\big)+2\big\|u'\big\|^2 + \frac{d}{dt}|v'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\widehat{M_2}\big(\|v_m(t)\|^2\big) \\
&+\frac{d}{dt}\widehat{M_3}\big(|v_m(t)|^2\big)+2\big\|v'\big\|^2 = 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u'_m(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), v'_m(t)\Big)
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

uma vez que, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_0}\left(\|u_m(t)\|^2\right) = M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_1}\left(\|v_m(t)\|^2\right) = M_1\left(\|v_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_2}\left(\|u_m(t)\|^2\right) = M_2\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_3}\left(\|v_m(t)\|^2\right) = M_3\left(\|v_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2.$$

Para o lado direito da equação (2.12), usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a elementar e a hipótese sobre as funções f *e* g, obtemos

$$\begin{aligned}
\ldots &\leq 2\big|f(v_m)\big|\ |u'_m| + 2\big|g(u_m)\big|\ |v'_m| \\
\ldots &\leq \alpha_1 2|v_m|\ |u'_m| + \alpha_2 2|u_m|\ |v'_m| \\
\ldots &\leq \alpha_1|v_m|^2 + \alpha_1|u'_m|^2 + \alpha_2|u_m|^2 + \alpha_2|v'_m|^2
\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade de 0 *a* t,

$$\begin{aligned}
&|u'_m(t)|^2 + \widehat{M_0}\big(\|u_m(t)\|^2\big) + \widehat{M_1}\big(|u_m(t)|^2\big) + 2\int_0^t \big\|u'\big\|^2 ds + |v'_m(t)|^2 + \widehat{M_2}\big(\|v_m(t)\|^2\big) \\
&+\widehat{M_3}\big(|v_m(t)|^2\big) + 2\int_0^t \big\|v'\big\|^2 ds \leq \alpha_1\int_0^t |u'_m|^2 ds + \alpha_2\int_0^t |v'_m|^2 ds + \alpha_2\int_0^t |u_m|^2 ds \\
&+\alpha_1\int_0^t |v_m|^2 ds + E(0).
\end{aligned}$$

Das convergências (2.7), (2.8) e das imersões $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $u_{0m} \rightarrow u_0, \quad v_{0m} \rightarrow v_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$ e $u_{1m} \rightarrow u_1, \quad v_{1m} \rightarrow v_1$ *em* $L^2(\Omega)$. Logo, $\widehat{M_0}\left(\|u_{0m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_0}\left(\|u_0\|^2\right), \quad \widehat{M_2}\left(\|v_{0m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_2}\left(\|v_0\|^2\right)$ *em* $\mathbb{R}$ e
$\widehat{M_1}\left(\|u_{1m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_1}\left(\|u_1\|^2\right), \quad \widehat{M_3}\left(\|v_{1m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_3}\left(\|v_1\|^2\right)$ *em* $\mathbb{R}$, de forma que, $E(0)$ é limitada.

Usando a definição de $\widehat{M_i}(s)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, e as hipóteses (4.3) *e* (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
&|u'_m|^2 + |v'_m|^2 + m_0\left[\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\right] + m_1\left[|u_m|^2 + |v_m|^2\right] + 2\int_0^t \left[\big\|u'\big\|^2 + \big\|v'\big\|^2\right] ds \\
&\leq \alpha_1\int_0^t |u'_m|^2 ds + \alpha_2\int_0^t |v'_m|^2 ds + \alpha_2\int_0^t |u_m|^2 ds + \alpha_1\int_0^t |v_m|^2 ds + E(0).
\end{aligned}$$

ou, da imersão $L^2\big(0,t;H_0^1(\Omega)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,t;L^2(\Omega)\big)$, temos

$$
\begin{aligned}
&|u_m'|^2+|v_m'|^2+m_0\left[\|u_m\|^2+\|v_m\|^2\right]+m_1\left[|u_m|^2+|v_m|^2\right]+2\int_0^t\left[\left\|u'\right\|^2+\left\|v'\right\|^2\right]ds\\
&\leq \alpha_1\int_0^t|u_m'|^2+\alpha_2\int_0^t|v_m'|^2+\alpha_2 c_1\int_0^t\|u_m\|^2+\alpha_1 c_2\int_0^t\|v_m\|^2+E(0).
\end{aligned}
$$

Tomando-se $\alpha_3=\max\{\alpha_1,\alpha_2,c_2\alpha_1,c_1\alpha_2\}$ e $\alpha_4=\min\{1,2,m_0,\}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&|u_m'|^2+|v_m'|^2+\|u_m\|^2+\|v_m\|^2+\int_0^t\|u_m'(t)\|^2ds+\int_0^t\|v_m'(t)\|^2ds\\
&\leq \frac{E(0)}{\alpha_4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\int_0^t\left[|u_m'|^2+|v_m'|^2+\|u_m\|^2+\|v_m\|^2\right]ds. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

Usando a desig. Gronwall, obtemos $|u_m'|^2+|v_m'|^2+\|u_m\|^2+\|v_m\|^2\leq c$ (*cte.*).
Isto é,

$$|u_m'|\leq c_1, \qquad (2.14)$$

$$|v_m'|\leq c_2, \qquad (2.15)$$

$$\|u_m\|\leq c_3, \qquad (2.16)$$

$$\|v_m\|\leq c_4, \qquad (2.17)$$

$$\int_0^t\|u_m'(t)\|^2ds\leq c_5, \qquad (2.18)$$

e

$$\int_0^t\|v_m'(t)\|^2ds\leq c_6. \qquad (2.19)$$

Com as estimativa(2.14), (2.15), (2.16) e (2.17)e usando o corolário do prolongamento do *teorema de Caratheodory*, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ e $v_m(t)$ ao intervalo $[0,\infty[$ Portanto, as seqüências

$$
\begin{aligned}
&(u_m)\ e\ (v_m)\ \textit{são ltdas. em}\ L^\infty\big([0,\infty);H_0^1(\Omega)\big)\\
&(u_m')\ e\ (v_m')\ \textit{são ltdas. em}\ L^\infty\big([0,\infty);L^2(\Omega)\big)\cap L^2\big([0,\infty);H_0^1(\Omega)\big),.
\end{aligned}
$$

Estimativa II

Tomando $h = -2\Delta u_m$ e $h = -2\Delta v_m$, nas equações de cima e de baixo do sistema (2.6), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\Big(u''_m(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t) - \Delta u'_m(t), -2\Delta u_m(t)\Big)\\
&= \Big(f\big(v_m(t)\big), -2\Delta u_m(t)\Big)\\
&\Big(v''_m(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t) - \Delta v'_m(t), -2\Delta v_m(t)\Big)\\
&= \Big(g\big(u_m(t)\big), -2\Delta v_m(t)\Big)
\end{aligned}$$

Somando-se as equações, temos

$$\begin{aligned}
&2\big(u''_m(t), -\Delta u_m(t)\big) - 2M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), -\Delta u_m(t)\big) + 2M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), -\Delta u_m(t)\big)\\
&+2\big(\Delta u'_m(t), \Delta u_m(t)\big) + 2\big(v''_m(t), -\Delta v_m(t)\big) - 2M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), -\Delta v_m(t)\big)\\
&+2\big(\Delta v'_m(t), \Delta v_m(t)\big) + 2M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), -\Delta v_m(t)\big) = 2\Big(f\big(v_m(t)\big), -\Delta u_m(t)\Big)\\
&+2\Big(g\big(u_m(t)\big), -\Delta v_m(t)\Big).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Usando a primeira identidade de Green, e fazendo algumas adaptações para os produtos internos, reescrevemos a equação (2.20) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big[(u'_m(t), -\Delta u_m(t)\big) + 2\big|\Delta u_m(t)\big|^2\big] + 2M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|^2 + 2M_1\left(|u_m(t)|^2\right)|\nabla u_m(t)|^2\\
&+\frac{d}{dt}\big[\big(v'_m(t), -\Delta u_m(t)\big) + 2\big|\Delta v_m(t)\big|^2\big] + 2M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)|\Delta v_m(t)|^2 + 2M_3\left(|v_m(t)|^2\right)|\nabla v_m(t)|^2\\
&\qquad = 2\|u'_m(t)\|^2 + 2\|v'_m(t)\|^2 + 2\big(f(v_m), \Delta u_m\big) + 2\big(g(u_m), \Delta v_m\big).
\end{aligned}$$

Integrando esta última igualdade de 0 até $t \leq t_m \leq \infty$ e , temos:

$$\begin{aligned}
&\big|\Delta u_m(t)\big|^2 + 2\int_0^t M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|^2 ds + 2\int_0^t M_1\left(|u_m(t)|^2\right)|\nabla u_m(t)|^2 ds\\
&+|\Delta v_m(t)|^2 + 2\int_0^t M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)|\Delta v_m(t)|^2 ds + 2\int_0^2 M_3\left(|v_m(t)|^2\right)|\nabla v_m(t)|^2 ds =\\
&2\big(u'_m(t), \Delta u_m(t)\big) + 2\big(v'_m(t), -\Delta u_m(t)\big) + 2\int_0^t \|u'_m(t)\|^2 ds + 2\int_0^t \|v'_m(t)\|^2 ds\\
&+2\int_0^t \big(f(v_m), \Delta u_m\big)ds + 2\int_0^t \big(g(u_m), \Delta v_m\big)ds + 2(u'_m(0), -\Delta u_m(0)) + |\Delta u_m(0)|^2 +\\
&2(v'_m(0), -\Delta v_m(0)) + |\Delta v_m(0)|^2
\end{aligned}$$

Obs.: Trabalharemos apenas o lado direito da última igualdade, retornando mais adiante para a forma completa.
Usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwartz a desigualdade elementar e as hipóteses sobre f e g,temos:

$$
\begin{aligned}
&... \leq 2\left|u'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 + 2\left|v'_m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\Delta v_m(t)\right|^2 + 2\int_0^t \|u'_m(t)\|^2 ds + 2\int_0^t \|v'_m(t)\|^2 ds \\
&+\alpha_1 \int_0^t \left|v_m\right|^2 ds + \alpha_1 \int_0^t \left|\Delta u_m\right|^2 ds + \alpha_2 \int_0^t |u_m|^2 ds + \alpha_2 \int_0^t \left|\Delta v_m\right|^2 ds + 2|u_{1m}|^2 + \frac{1}{2}|\Delta u_{0m}|^2 \\
&+|\Delta u_{0m}|^2 + 2|v_{1m}|^2 + \frac{1}{2}|\Delta v_{0m}|^2 + |\Delta v_{0m}|^2.
\end{aligned}
$$

Usando os resultados da estimativa I, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&... \leq \underbrace{2\left|u'_m(t)\right|^2}_{c_7} + \underbrace{2\left|v'_m(t)\right|^2}_{c_8} + \underbrace{2\int_0^t \|u'_m(t)\|^2 ds}_{c_9} + \underbrace{2\int_0^t \|v'_m(t)\|^2 ds}_{c_{10}} + \alpha_1 \underbrace{\int_0^t \left|v_m\right|^2 ds}_{c_{11}} \\
&+\alpha_1 \underbrace{\int_0^t \left|\Delta u_m\right|^2 ds}_{c_{12}} + \alpha_2 \underbrace{\int_0^t \left|u_m\right|^2 ds}_{c_{13}} + \alpha_2 \underbrace{\int_0^t \left|\Delta v_m\right|^2 ds}_{c_{14}} + \underbrace{2|u_{1m}|^2}_{c_{15}} + \frac{3}{2}\underbrace{|\Delta u_{0m}|^2}_{c_{16}} \\
&+ \underbrace{2|v_{1m}|^2}_{c_{17}} + \frac{3}{2}\underbrace{|\Delta v_{0m}|^2}_{c_{18}}.
\end{aligned}
$$

Donde, segue que:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 + 2\int_0^t M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)|\Delta u_m(t)|^2 ds + 2\int_0^t M_1\left(|u_m(t)|^2\right)|\nabla u_m(t)|^2 ds \\
&+\frac{1}{2}|\Delta v_m(t)|^2 + 2\int_0^t M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)|\Delta v_m(t)|^2 ds + 2\int_0^2 M_3\left(|v_m(t)|^2\right)|\nabla v_m(t)|^2 ds \leq c_{21},
\end{aligned}
$$

onde:

$$
c_{21} = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + \alpha_1 c_{11} + \alpha_1 c_{12} + \alpha_2 c_{13} + \alpha_2 c_{14} + c_{15} + c_{16} + c_{17} + c_{18}.
$$

Das hipóteses (4.3) e (4.4), obtemos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\Delta u_m(t)\right|^2 + 2m_0 \int_0^t \left|\Delta u_m(t)\right|^2 ds + 2m_1 \int_0^t \left|\nabla u_m(t)\right|^2 ds + \frac{1}{2}|\Delta v_m(t)|^2 \\
&+2m_0 \int_0^t \left|\Delta v_m(t)\right|^2 ds + 2m_1 \int_0^2 \left|\nabla v_m(t)\right|^2 ds \leq c_{21}.
\end{aligned}
$$

Logo obtemos as seguintes limitações:

$$
\begin{aligned}
&|\Delta u_m| \leq c_{21}, \\
&|\Delta v_m| \leq c_{21}, \\
&\int_0^t \big|\Delta u_m(t)\big|^2 ds \leq c_{21}, \\
&\int_0^t \big|\Delta v_m(t)\big|^2 ds \leq c_{21}, \\
&\int_0^t \big|\nabla u_m(t)\big|^2 ds \leq c_{21}, \\
&\int_0^t \big|\nabla v_m(t)\big|^2 ds \leq c_{21}.
\end{aligned}
$$

Onde c_{21} é uma constante independente de m e de t, portanto, (Δu_m) e (Δv_m) são limitadas em $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ o que equivale dizer:

$$
\begin{aligned}
&(u_m) \ e \ (v_m) \ \textit{são ltdas. em} \ L^\infty\left(0,\infty_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right) \\
&(u_m) \ e \ (v_m) \ \textit{são ltdas. em} \ L^2\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right) \\
&(u_m) \ e \ (v_m) \ \textit{são ltdas. em} \ L^2\left(0,\infty_0;H_0^1(\Omega)\right)\right).
\end{aligned}
$$

Estimativa III

Tomando-se $h = u_m''$ e $h = v_m''$, nas equações de cima e de baixo, respectivamente, do sistema (2.6), e depois somando-se, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Big(u_m''(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t) - \Delta u_m', u_m''(t)\Big) = \Big(f\big(v_m(t)\big), u_m''(t)\Big) \\
&\Big(v_m''(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t) - \Delta v_m', v_m''(t)\Big) = \Big(g\big(u_m(t)\big), v_m''(t)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\big(u_m''(t), u_m''(t)\big) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), u_m''(t)\big) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), u_m''(t)\big) \\
&-\big(\Delta u_m'(t), u_m''(t)\big) + \big(v_m''(t), v_m''(t)\big) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), v_m''(t)\big) \\
&+M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), v_m''(t)\big) - \big(\Delta v_m'(t), v_m''(t)\big) = \Big(f\big(v_m(t)\big), u_m''(t)\Big) + \Big(g\big(u_m(t)\big), v_m''(t)\Big)
\end{aligned}
$$

usando a identidade de Greem e adesigualdade de Cauchy-Schwarz e as hipóteses sobre f e g obtemos:

$$
\begin{aligned}
&|u_m''|^2 + |v_m''|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|u_m'\big\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|v_m'\big\|^2 \leq \alpha_1|v_m|\ |u_m''| + \alpha_2|u_m|\ |v_m''| + \\
&\big|M_0\big(\|u_m\|^2\big)\big|\ |\Delta u_m|\ |u_m''| + \big|M_1\big(|u_m|^2\big)\big|\ |u_m|\ |u_m''| + \big|M_2\big(\|v_m\|^2\big)\big|\ |\Delta v_m|\ |v_m''| \\
&+\big|M_3\big(|v_m|^2\big)\big|\ |v_m|\ |v_m''|
\end{aligned}
$$

ou melhor:

$$2|u_m''|^2+2|v_m''|^2+\frac{d}{dt}\|u_m'\|^2+\frac{d}{dt}\|v_m'\|^2\leq 2\alpha_1|v_m|\;|u_m''|+2\alpha_2|u_m|\;|v_m''|$$
$$+2\big|M_0\big(\|u_m\|^2\big)\big|\;|\Delta u_m|\;|u_m''|+2\big|M_1\big(|u_m|^2\big)\big|\;|u_m|\;|u_m''|+2\big|M_2\big(\|v_m\|^2\big)\big|\;|\Delta v_m|\;|v_m''|$$
$$+2\big|M_3\big(|v_m|^2\big)\big|\;|v_m|\;|v_m''|.$$

Integrando de 0 até $t\leq t_m\leq t$ e usando a desigualdade elementar, obtemos:

$$2\int_0^t\left[|u_m''|^2+|v_m''|^2\right]ds+\|u_m'\|^2+\|v_m'\|^2\leq\|u_{1m}\|^2+\|v_{1m}\|^2+\int_0^t\left[\alpha_1^2|v_m|^2+\alpha_2^2|u_m|^2\right]ds$$
$$+\frac{3}{2}\int_0^t\left[|u_m''|^2+|v_m''|^2\right]ds+2\int_0^t\left[\big|M_0\big(\|u_m\|^2\big)\big|\big|\Delta u_m\big|\right]^2ds+2\int_0^t\left[\big|M_1\big(|u_m|^2\big)\big|\big|u_m\big|\right]^2ds$$
$$+2\int_0^t\left[\big|M_2\big(\|v_m\|^2\big)\big|\big|\Delta v_m\big|\right]^2ds\;+2\int_0^t\left[\big|M_3\big(|v_m|^2\big)\big|\big|v_m\big|\right]^2ds$$

usando as hipóteses (4.3) e (4.4) e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left[|u_m''|^2+|v_m''|^2\right]ds+\|u_m'\|^2+\|v_m'\|^2\leq\|u_{1m}\|^2+\|v_{1m}\|^2+\int_0^t\left[\alpha_1^2|v_m|^2+\alpha_2^2|u_m|^2\right]ds$$
$$+2m_0^2\int_0^t\left[\big|\Delta u_m\big|^2+\big|\Delta v_m\big|^2\right]ds+2m_1^2\int_0^t\left[\big|u_m\big|^2+\big|v_m\big|^2\right]ds.$$

De onde segue que,

$$\frac{1}{2}\int_0^t\left[|u_m''|^2+|v_m''|^2\right]\leq c_{22}\ (cte.)$$

Portanto,

(u_m'') *e* (v_m'') *são limitadas. em* $L^2\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right)$.

2.1.3 Passagem ao limite

Das estimativas anteriores, temos que:

$$(u_m)\ e\ (v_m)\ \textit{são limitadas em}\ L^\infty\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right);$$
$$(u_m')\ e\ (v_m')\ \textit{são limitadas em}\ L^\infty\big([0,\infty);L^2(\Omega)\big)\cap L^2\big([0,\infty);H_0^1(\Omega)\big);$$
$$(u_m'')\ e\ (v_m'')\ \textit{são limitadas em}\ L^2\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right).$$

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subseqüência de (u_m) *e* (v_m), que continuaremos a denotar por (u_m) *e* (v_m) tal que

$$u_m\to u\ e\ v_m\to v\ em\ L^\infty\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right),\ fraco* \tag{2.21}$$
$$u_m'\to u'\ e\ v_m'\to v'\ em\ L^\infty\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right),\ fraco* \tag{2.22}$$
$$u_m'\to u'\ e\ v_m'\to v'\ em\ L^\infty\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right),\ fraco* \tag{2.23}$$

e,

$$u''_m \to u'' \ e \ v''_m \to v'' \ em \ L^2\left(0,\infty; L^2(\Omega)\right), \ fraco. \tag{2.24}$$

Convergência dos termos lineares

Usando o fato que,

$$L^\infty(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X)$$

e de (2.21), segue que

$$u_m \to u \ e \ v_m \to v \ em \ L^2\left(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \ fraco$$

isto é,

$$(\Delta u_m, w) \to (\Delta u, w), \ e \ (\Delta v_m, w) \to (\Delta v, w) \ \forall w \in L^2\left(0,\infty; L^2(\Omega)\right) \tag{2.25}$$

Da convergência (2.23) e (2.24), deduzimos que:

$$(\Delta u'_m, w) \to (\Delta u', w), \ e \ (\Delta v'_m, w) \to (\Delta v'', w) \ \forall w \in L^2\left(0,T_0; L^2(\Omega)\right) fraco, \tag{2.26}$$

e

$$(u''_m, w) \to (u'', w), \ e \ (v''_m, w) \to (v'', w) \ \forall w \in L^2\left(0,T_0; L^2(\Omega)\right), fraco. \tag{2.27}$$

Convergência dos termos não-lineares

De (2.21) e (2.22), segue que

$$(u_m) \ e \ (v_m) \ são \ limitadas \ em \ L^2\left(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$$
$$(u'_m) \ e \ (v'_m) \ são \ limitadas \ em \ L^2\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\right)$$

Pelo lema de compacidade de Aubin-Lions, com $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e $B = B_1 = H_0^1(\Omega)$, podemos extrair uma subseqüência de (u_m) e (v_m), que continuaremos denotando por (u_m) e (v_m), tal que

$$u_m \to u \ e \ v_m \to v \ forte \ em \ L^2\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\right)$$

e usando o seguinte resultado de Análise Funcional: "Se $u_m \to u$ em $L^p(0,\infty;X)$, então $\|u_m\|_X \to \|u\|_X$ em $L^p(0,\infty)$, concluímos que,

$$\|u_m\| \to \|u\| \ e \ \|v_m\| \to \|v\| \ em \ L^2(0,\infty)$$

E, passando a uma subseqüência de (u_m) e (v_m), se necessário, podemos supor que

$$\|u_m\|^2 \to \|u\|^2 \ e \ \|v_m\|^2 \to \|v\|^2, \ q.s. \ em \ [0,\infty)$$

e, sendo M_i $(i = 0,1,2,3)$ contínua, obtemos

$$M_0(\|u_m\|^2) \to M_0(\|u\|^2) \ e \ M_2(\|v_m\|^2) \to M_2(\|v\|^2), \ q.s. \ em \ [0,\infty) \tag{2.28}$$

Usando (2.24) e (2.30), concluímos que

$$\begin{aligned} &M_0(\|u_m\|^2)((u_m,h)) \to M_0(\|u\|^2)((u,h)) \ e \\ &M_2(\|v_m\|^2)((v_m,h)) \to M_2(\|v\|^2)((v,h)) \ em \ L^2\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Para a convergência dos outros termos não-lineares, note que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} &M_1(|u_m|^2)(u_m,h) \to M_1(|u|^2)(u,h) \ e \ M_3(|v_m|^2)(v_m,h) \to M_3(|v|^2)(v,h) \\ &em \ L^2\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Passagem ao limite

Multiplicando-se (2.6) por $\theta(t) \in D(0,\infty)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u_m'',h)\theta - \int_0^T M_0(\|u_m\|^2)(\Delta u_m,h)\theta + \int_0^T M_1(|u_m|^2)(u_m,h)\theta - \int_0^T (\Delta u_m',h)\theta$$
$$= \int_0^T (f(v_m),h)\theta \tag{2.31}$$
$$\int_0^T (v_m'',h)\theta - \int_0^T M_2(\|v_m\|^2)(\Delta v_m,h)\theta + \int_0^T M_3(|v_m|^2)(v_m,h)\theta - \int_0^T (\Delta v_m',h)\theta$$
$$= \int_0^T (g(u_m),h)\theta \tag{2.32}$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$, e usando (2.25) a (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u'',h)\theta - \int_0^T M_0(\|u\|^2)(\Delta u,h)\theta + \int_0^T M_1(|u|^2)(u,h)\theta - \int_0^T (\Delta u',h)\theta = \int_0^T (f(v),h)\theta \\ &\int_0^T (v'',h)\theta - \int_0^T M_2(\|v\|^2)(\Delta v,h)\theta + \int_0^T M_3(|u|^2)(v,h)\theta - \int_0^T (\Delta v',h)\theta = \int_0^T (g(u),h)\theta \\ &\forall \theta \in D(0,\infty), \forall h \in V_m \ denso \ em \ H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Fazendo as integrações, obtemos, em $D'(\Omega)$,

$$\int_0^T (u'',h)\theta dt = (u',h)\theta|_0^T - \int_0^T (u',h)\theta' dt = -\langle (u',h),\theta' dt\rangle = -\left\langle (\frac{d}{dt}u',h),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^T (v'',h)\theta dt = (v',h)\theta|_0^T - \int_0^T (v',h)\theta' dt = -\langle (v',h),\theta' dt\rangle = -\left\langle (\frac{d}{dt}v',h),\theta(t)\right\rangle$$

$$-\int_0^T M_0(\|u\|^2)(\Delta u,h)\theta(t)dt = -\left\langle M_0(\|u\|^2)(\Delta u,h),\theta(t)\right\rangle$$

$$-\int_0^T M_2(\|v\|^2)(\Delta v,h)\theta(t)dt = -\left\langle M_2(\|v\|^2)(\Delta v,h),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^T M_1(|u|^2)(u,h)\theta(t)dt = \left\langle M_1(|u|^2)(u,h),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^T M_3(|v|^2)(v,h)\theta(t)dt = \left\langle M_3(|v|^2)(v,h),\theta(t)\right\rangle$$

$$-\int_0^T (\Delta u',h)\theta dt = -\langle (\Delta u',h)\theta(t)\rangle$$

$$-\int_0^T (\Delta v',h)\theta dt = -\langle (\Delta v',h)\theta(t)\rangle$$

$$\int_0^T (f(v),h)\,\theta(t)dt = \langle (f(v),h)\,,\theta(t)\rangle$$

$$\int_0^T (g(u),h)\theta(t)dt = \langle (g(u),h),\theta(t)\rangle$$

Donde, reescrevemos (2.31) e (2.32),

$$\left\langle (\frac{d}{dt}u',h),\theta(t)\right\rangle - \left\langle M_0(\|u\|^2)(\Delta u,h),\theta(t)\right\rangle + \left\langle M_1(|u|^2)(u,h),\theta(t)\right\rangle - \langle (\Delta u',h)\theta(t)\rangle$$
$$= \langle (f(v),h),\theta(t)\rangle \ \ em \ D'(\Omega)$$
$$\left\langle (\frac{d}{dt}v',h),\theta(t)\right\rangle - \left\langle (M_2(\|v\|^2)(\Delta v,h),\theta(t)\right\rangle + \left\langle M_3(|v|^2)(v,h),\theta(t)\right\rangle - \langle (\Delta v',h)\theta(t)\rangle$$
$$= \langle (g(u),h),\theta(t)\rangle \ \ em \ D'(\Omega)$$

Logo,

$$(\frac{d}{dt}u', h) - M_0(\|u\|^2)(\Delta u, h) + M_1(|u|^2)(u, h) - (\Delta u', h) = (f(v), h) \ q.s. \ em \ \Omega$$
$$(\frac{d}{dt}v', h) - M_2(\|v\|^2)(\Delta v, h) + M_3(|v|^2)(v, h) - (\Delta v', h) = (g(u), h) \ q.s. \ em \ \Omega$$

2.1.4 Condições iniciais

De resultados anteriores temos que

$$u, v \in L^2\left(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)$$
$$u', v' \in L^2\left(0, \infty; H_0^1(\Omega)\right)$$
$$u'', v'' \in L^2\left(0, \infty; L^2(\Omega)\right)$$

e, usando resultados de regularidade, concluímos que

$$u, v \in C^0\left([0, \infty); H_0^1\right)$$
$$u', v' \in C^0\left([0, \infty); L^2\right)$$

De forma que, $u(0), v(0)$ e $u'(0), v'(0)$ fazem sentido. Consideremos $\theta \in C^1([0, \infty))$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $h \in H_0^1(\Omega)$. Como

$$u'_m \to u' \ e \ v'_m \to v', \quad \forall u', v' \in L^2\left(0, \infty; H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.33}$$

ou,

$$((u'_m, w)) \to ((u', w)) \ e \ ((v'_m, w)) \to ((v', w)), \quad \forall w \in L^2\left(0, \infty; H_0^1(\Omega)\right)$$

Tomando $w(t) = \theta(t)h$, com $\theta(t) \in L^2(0, \infty)$, $h \in H_0^1(\Omega)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((u_m, h))\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}((u, h))\theta(t)dt$$
$$\int_0^T \frac{d}{dt}((v_m, h))\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}((v, h))\theta(t)dt$$

Fazendo integração por partes,

$$-((u_m(0), h)) - \int_0^T ((u_m, h))\theta'(t)dt \to -((u(0), h)) - \int_0^T ((u(t), h))\theta'(t)dt \tag{2.34}$$

$$-((v_m(0), h)) - \int_0^T ((v_m, h))\theta'(t)dt \to -((v(0), h)) - \int_0^T ((v(t), h))\theta'(t)dt \tag{2.35}$$

De (2.21), obtemos que

$$\int_0^T ((u_m,h))\varphi dt \to \int_0^T ((u,h))\varphi dt \; e \; \int_0^T ((v_m,h))\varphi dt \to \int_0^T ((v,h))\varphi dt, \quad (2.36)$$

$$\forall h \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in L^1(0,\infty). \quad (2.37)$$

E, da convergência dominada de Lebesgue, concluímos

$$((u_m(0),h)) \to ((u(0),h)) \; e \; ((v_m(0),h)) \to ((v(0),h)) \quad (2.38)$$

Ou, como

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \; e \; v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \; em \; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \quad (2.39)$$

obtemos,

$$((u_m(0),h)) \to ((u_0,h)), \quad ((v_m(0),h)) \to ((v_0,h)), \forall h \in H_0^1(\Omega) \quad (2.40)$$

Isto é, $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$.

Para provarmos $u'(0) = u_1$ e $v'(0) = v_1'$, usamos as convergências (2.8) e (2.22), e de forma análoga, obtemos

$$((u_m'(0),h)) \to ((u_1,h)), \quad ((v_m'(0),h)) \to ((v_1,h)) \forall h \in L^2(\Omega) \quad (2.41)$$

Ou seja, $u'(0) = u_1$ e $v'(0) = v_1$.

Capítulo 3

Unicidade da Solução Fraca

Sejam $\{u(t), v(t)\}, \{w(t), z(t)\} : [0, \infty] \to L^2(\Omega)$ funções vetoriais soluções do sistema nas condições do Teorema 1, e considere $q(t) = u(t) - w(t)$ e $r(t) = v(t) - z(t)$.

Então,

$$\{q, r\} \in \left(L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))\right)^2$$
$$\{q', r'\} \in \left(L^\infty(0, \infty; H_0^1(\Omega))\right)^2$$
$$\{q'', r''\} \in \left(L^2(0, \infty; L^2(\Omega))\right)^2$$

Sendo $\{u(t), v(t)\}$ e $\{w(t), z(t)\}$ soluções do sistema, temos que

$$\left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) - \Delta u'(t) = f(v(t)) \\ \\ v''(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) - \Delta v'(t) = g(u(t)) \end{array} \right.$$

e

$$\left\| \begin{array}{l} w''(t) - M_0(\|w(t)\|^2)\Delta w(t) + M_1(|w(t)|^2)w(t) - \Delta w'(t) = f(z(t)) \\ \\ z''(t) - M_2(\|z(t)\|^2)\Delta z(t) + M_3(|z(t)|^2)z(t) - \Delta z'(t) = g(w(t)) \end{array} \right.$$

Subtraindo, correspondentemente, as equações de cima e de baixo dos dois sistemas, encontramos

$$\begin{aligned} &u''(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) - \Delta u'(t) - w''(t) + M_0(\|w(t)\|^2)\Delta w(t) \\ &-M_1(|w(t)|^2)w(t) + \Delta w'(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &v''(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) - \Delta v'(t) - z''(t) + M_2(\|z(t)\|^2)\Delta z(t) \\ &-M_3(|z(t)|^2)z(t) + \Delta z'(t) = g(u(t)) - g(w(t)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Somando e subtraindo os termos $M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t)$, $M_1(|u(t)|^2)w(t)$ na eq. (3.1), e

$M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t)$, $M_3(|v(t)|^2)z(t)$ na eq. (3.2), obtemos

$$\begin{aligned}
&q''(t) - \left[M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t) - M_0(\|w(t)\|^2\Delta w(t)\right] - \Delta q'(t) \\
&-M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) - M_1(|u(t)|^2)w(t) + M_1(|u(t)|^2)w(t) \\
&-M_1(|w(t)|^2)w(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&r(t)'' - \left[M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t) - M_2(\|z(t)\|^2\Delta z(t)\right] - \Delta r'(t) \\
&-M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) - M_3(|v(t)|^2)z(t) + M_3(|v(t)|^2)z(t) \\
&-M_3(|z(t)|^2)z(t) = g(u(t)) - g(w(t)) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Obs.: a partir daqui o processo de desenvolvimento para obtenção de resultados será feito apenas para a eq. (3.3), uma vez que é análogo para eq. (3.4).

Agrupando alguns termos adequadamente na eq. (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
&q''(t) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta q(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)q(t) - \left[M_0\left(\|u(t)\|^2\right) - M_0\left(\|w(t)\|^2\right)\right]\Delta w(t) \\
&+\left[M_1\left(|u(t)|^2\right) - M_1\left(|w(t)|^2\right)\right]w(t) - \Delta q'(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sendo $M_i \in C^1\,[0,\infty[\;\; (i = 0,1,2,3)$, do Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
&q''(t) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta q(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)q(t) - M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right]\Delta w(t) \\
&+M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right]w(t) - \Delta q'(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

onde $\|u(t)\|^2 < \xi_1 < \|w(t)\|^2$ e $|u(t)|^2 < \xi_2 < |w(t)|^2$.

Pela regularidade da solução obtida, compondo com $2q'(t)$, em $L^2\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\right)$, a eq. (3.6) , obtemos

$$\begin{aligned}
&(q''(t), 2q'(t)) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)(\Delta q(t), 2q'(t)) + M_1\left(|u(t)|^2\right)(q(t), 2q'(t)) - (\Delta q'(t), 2q'(t)) \\
&-M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right](\Delta w(t), 2q') + M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right](w(t), 2q'(t)) \\
&= (f(v(t)) - f(z(t)), 2q'(t))
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 + 2\|q'(t)\|^2 \\
&-2M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right](\Delta w(t), q'(t)) + 2M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right](w(t), q'(t)) \\
&= (f(v(t)) - f(z(t)), 2q'(t))
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|q'(t)\right|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 + 2\|q'(t)\|^2 \\
&\leq 2\left|M'(\xi_1)\right| \ \left|\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right| \ |\Delta w(t)| \ |q'(t)| \\
&+2\left|M_1'(\xi_2)\right| \ \left||u(t)|^2 - |w(t)|^2\right| \ |w(t)| \ |q'(t)| + |f(v(t)) - f(z(t))| \ 2\,|q'(t)|
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
&\left|\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right| = |\|u(t)\| + \|w(t)\|| \ \ |\|u(t)\| - \|w(t)\|| \leq k_1\|q(t)\|, \\
&(k_1 = \|u(t)\| + \|w(t)\| \geq |\|u(t)\| + \|w(t)\||)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\left||u(t)|^2 - |w(t)|^2\right| = ||u(t)| + |w(t)|| \ \ ||u(t)| - |w(t)|| \leq k_2|q(t)|, \\
&(k_2 = |u(t)| + |w(t)| \geq ||u(t)| + |w(t)||)
\end{aligned}$$

e da hipótese sobre f, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|q'(t)\right|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 + 2\|q'(t)\|^2 \leq 2c_0k_1\,\|q(t)\| \ \ |q'(t)| \\
&+2c_1k_2\,|q(t)| \ \ |q'(t)| + |v(t) - z(t)| \ \ 2c_2\,|q'(t)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|q'(t)\right|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 + 2\|q'(t)\|^2 \leq 2c_0k_1\,\|q(t)\| \ \ |q'(t)| \\
&+2c_1k_2\,|q(t)| \ \ |q'(t)| + |v(t)| \ 2c_2\,|q'(t)| \ \ + |z(t)| \ 2c_2\,|q'(t)|\,.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2+b^2$ e tomando $c_3 = c_2|v(t)|^2+c_2|z(t)|^2$ e $c_5 = c_0k_1 + c_1k_2 + 2c_2$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left|q'(t)\right|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 + 2\|q'(t)\|^2 \\
&\leq c_5\left[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 + \left|q'(t)\right|^2\right] + c_3
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\left|q'(t)\right|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] + 2\|q'(t)\|^2 \leq c_5\big[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 \\
&+ \left|q'(t)\right|^2\big] + c_3 + \frac{d}{dt}M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + \frac{d}{dt}M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2
\end{aligned}$$

ainda,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\left|q'(t)\right|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] + 2\|q'(t)\|^2 \leq c_5\big[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 \\
&+ \left|q'(t)\right|^2\big] + c_3 + \left|M_0'\left(\|u(t)\|^2\right)\right| \ 2\left|((u(t), u'(t)))\right| \ \|q(t)\|^2 + \left|M_1'\left(|u(t)|^2\right)\right| \ 2\left|(u(t), u'(t))\right| \ |q(t)|^2
\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz e observando as limitações para $\|u(t)\|^2, |u(t)|^2, \|u'(t)\|^2,\ |u'(t)|^2,\ |M_0'(\|u(t)\|^2)|\ e\ |M_1'(|u(t)|^2)|$, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left[|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] + 2\|q'(t)\|^2 \leq c_6\left[\|q(t)\|^2 \right.$$
$$\left. + |q(t)|^2 + |q'(t)|^2\right] + c_3$$

onde $\alpha_1 = |M_0'(\|u(t)\|)|\ 2\|u(t)\|\ \|u'(t)\|,\ \alpha_2 = |M_1'(|u(t)|)|\ 2|u(t)|\ |u'(t)|\ e\ c_6 = \max\{c_5 + 2\alpha_1, c_5 + 2\alpha_2\}$.

Integrando a última desigualdade acima,

$$|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2 + 2\int_0^t \|q'(s)\|^2 ds \leq \int_0^t c_3 ds$$
$$+ c_6\int_0^t \left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right] ds + M_0(\|u(0)\|^2)\|q(0)\|^2 + M_1(|u(0)|^2)|q(0)|^2$$

Das hipóteses sobre $M_i\ (i = 0, 1, 2, 3)$, obtemos

$$|q'(t)|^2 + m_0\|q(t)\|^2 + m_1|q(t)|^2 + \frac{1}{2}|q'(t)|^2 \leq \int_0^t c_3 ds + c_6\int_0^t \left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right] ds$$

Tomando $m_2 = \min\{1, m_0, m_1\}$, temos que

$$|q'(t)|^2 + \|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 \leq cte. + cte.\int_0^t \left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right] ds$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$|q'(t)|^2 + \|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 = 0$$

Donde, segue que $|q(t)| = 0$, ou seja, $q(t) = 0$.

Logo, $u(t) = w(t),\ \forall t \in [0, \infty[$. Analogamente, $v(t) = z(t),\ \forall t \in [0, \infty[$.

Capítulo 4

Comportamento Assintótico

O objetivo deste capítulo é o comportamento assintótico da solução do problema (4.1), no caso homogêneo. Em outras palavras, vamos obter o decaimento exponencial em t da solução do problema de Cauchy.

$$\left\| \begin{array}{l} u''(t) + M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) - \Delta u'(t) = 0 \quad em \quad Q, \\ \\ v''(t) + M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) - \Delta v'(t) = 0 \quad em \quad Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \ em \ \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \quad em \quad \Omega \\ \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = v_1 \quad em \quad \Omega \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Com as hipóteses

$$\cdot \ M_i \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}), \ (\mathrm{i} = 0, 1, 2, 3) \tag{4.2}$$

$$\cdot \ M_0(s), M_2(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0, \infty), \tag{4.3}$$

$$\cdot \ M_1(s), M_3(s) \geq m_1 \geq 0, \forall s \in [0, \infty), \tag{4.4}$$

$$\cdot \ f, \ g \ \in Lip_\alpha(\mathbb{R}) \text{ e } \mathrm{g}(0) = \mathrm{f}(0) = 0. \tag{4.5}$$

O problema (4.1) foi estudado no capítulo 2 pelo *Método de Galerkin* e as soluções $u(x,t)$,$v(x,t)$ obtidas satisfazem:

$$\cdot \ \frac{d}{dt}(u'(t), h) + M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u_m(t), h) + M_1(|u(t)|)(u(t), h) - (\Delta u'(t), h) = 0;$$
$$\forall h \in V, \quad no \ sentido \ \mathcal{D}'(0, \infty), \tag{4.6}$$

$$\cdot \ \frac{d}{dt}(v'(t), h) + M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v_m(t), h) + M_3(|v(t)|)(v(t), h) - (\Delta v'(t), h) = 0;$$
$$\forall h \in V, \quad no \ sentido \ \mathcal{D}'(0, \infty), \tag{4.7}$$

Considerando M_0 e M_2, M_1 e M_3 com as mesmas propriedades e definidas no capítulo 2 e $\widehat{M_i}$, primitivas de M_i com $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Teorema 4.0.2. *Dados* $\{u_0, v_0\} \in \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)^2$, $\{u_1, v_1\} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ *e* $E(t, u, v) = E_1(t, u) + E_2(t, v)$ *a energia associada ao sistema* (P) *onde* $E_1(t, u) = \frac{1}{2}\left[|u'|^2 + \widehat{M_0}(\|u\|^2) + \widehat{M_1}(|u|^2),\right.$ $E_2(t, v) = \frac{1}{2}\left[|v'|^2 + \widehat{M_0}(\|v\|^2) + \widehat{M_1}(|v|^2)\right.$ *e* $\{u, v\}$ *é solução global de* (P)*, então*

$$E(t, u, v) \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t},$$

para todo $t \geq 1$*, onde* α_1*,* α_2 *são constantes, positivas.*

Para provarmos o teorema acima, usaremos o seguinte lema de decaimento , a saber:

Lema de Nakao

Seja φ uma função limitada e não-negativa em $\mathbb{R}^+$, satisfazendo:

$$\max_{t \leq s \leq t+1} \varphi(s) \leq c_0[\varphi(t) - \varphi(t+1)]$$

para todo $t \geq 1$, onde c_0 é uma constante positiva. Então

$$\varphi(t) \leq ce^{-\alpha t}, \quad para \quad todo \quad t \geq 1.$$

onde α e c são constantes positivas.

Demonstração:

Ver [12].

Demonstração do Teorema:

Consideremos o sistema:

$$(P) \left| \begin{array}{ll} (u'', h) - M_0\left(\|u\|^2\right)(\Delta u, h) + M_1(|u|^2)(u, h) - (\Delta u', h) = 0 & (1) \\ (v'', h) - M_2\left(\|v\|^2\right)(\Delta v, h) + M_3(|v|^2)(v, h) - (\Delta v', h) = 0 & (2) \end{array} \right.$$

Fazendo $h = u'$ e $h = v'$, nas eqs. (1) e (2), respectivamente, do sistema acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'|^2 + M_0(\|u\|^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + M_1(|u|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 - \|u'\|^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v'|^2 + M_2(\|v\|^2 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2 + M_3(|v|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 - \|v'\|^2 = 0$$

tomando $\widehat{M_i}(\lambda) = \int_0^\lambda M_i(s)ds, \quad onde \quad i = 0, 1, 2, 3$

Daí temos:

$$\widehat{M_0}(\|u\|^2) = \int_0^{\|u\|^2} M_0(s)ds \Rightarrow \frac{d}{dt}\widehat{M_0}(\|u\|^2) = M_0(\|u\|^2)\frac{d}{dt}\|u\|^2$$

$$\widehat{M_1}(|u|^2) = \int_0^{|u|^2} M_1(s)ds \Rightarrow \frac{d}{dt}\widehat{M_1}(|u|^2) = M_1(|u|^2)\frac{d}{dt}|u|^2$$

Fazendo o mesmo para $\widehat{M_2}(\|v\|^2)$ e $\widehat{M_3}(|v|^2)$, o sistema fica

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[|u'|^2 + \widehat{M_0}(\|u\|^2) + \widehat{M_1}(|u|^2)\big] + \|u'\|^2 = 0 \tag{4.8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big[|v'|^2 + \widehat{M_2}(\|v\|^2) + \widehat{M_3}(|v|^2)\big] + \|v'\|^2 = 0 \tag{4.9}$$

Denotando,

$$E_1(t,u) = \frac{1}{2}\big[|u'|^2 + \widehat{M_0}(\|u\|^2) + \widehat{M_1}(|u|^2), \quad E_2(t,v) = \frac{1}{2}\big[|v'|^2 + \widehat{M_2}(\|v\|^2) + \widehat{M_3}(|v|^2) \;\; e$$
$$E(t,u,v) = E_1(t,u) + E_2(t,v).$$

Somando as eqs. (4.8) e (4.9), temos

$$\frac{d}{dt}E(t,u,v) + \|u'\|^2 + \|v'\|^2 = 0 \tag{4.10}$$

Ou seja, a energia do sistema é decrescente.

Integrando de 0 a t a eq. (4.10), temos

$$E(t,u,v) + \int_0^t \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds = E(0,u,v) \tag{4.11}$$

Integrando (4.10) de t_1 a t_2, $0 < t_1 < t_2$, temos

$$E(t_2,u,v) + \int_{t_1}^{t_2} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds = E(t_1,u,v) \tag{4.12}$$

E, para todo $t > 0$, temos

$$E(t+1,u,v) + \int_t^{t+1} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds = E(t,u,v) \;\; ou,$$
$$\int_t^{t+1} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds = E(t,u,v) - E(t+1,u,v) \equiv F(t)^2 \tag{4.13}$$

Portanto, podemos escolher dois pontos $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$, tal que

$$\|u'(t_i)\| + \|v'(t_i\| \leq 4F(t), \quad \forall i = 1,2.$$

De fato, temos que

$$\int_t^{t+\frac{1}{4}} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds \leq \int_t^{t+1} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds = F(t)^2$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, existem $t_1 \in \left[t, t+\frac{1}{4}\right]$ $\;e\;$ $t_2 \in \left[t+\frac{3}{4}, t+1\right]$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[\|u'(t_1)\|^2 + \|v'(t_1)\|^2\right] = \int_t^{t+\frac{1}{4}} &\left[\|u'(t_1)\|^2 + \|v'(t_1)\|^2\right] ds \leq F(t)^2 \\ &\Rightarrow \|u'(t_1)\|^2 + \|v'(t_1)\|^2 \leq 4F(t)^2\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[\|u'(t_2)\|^2 + \|v'(t_2)\|^2\right] = \int_{t+\frac{3}{4}}^{t+1} &\left[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\right] ds \leq F(t)^2 \\ &\Rightarrow \|u'(t_2)\|^2 + \|v'(t_2)\|^2 \leq 4F(t)^2\end{aligned}$$

Então,

$$\|u'(t_i)\|^2 \leq 4F(t)^2 \Rightarrow \|u'(t_i)\| \leq 2F(t), \quad i = 1, 2 \tag{4.14}$$

De modo análogo,

$$\|v'(t_i)\| \leq 2F(t), \quad i = 1, 2. \tag{4.15}$$

Somando (4.14) e (4.15), temos

$$\|u'\| + \|v'\| \leq 4F(t) \tag{4.16}$$

Fazendo $h = u$ e $h = v$, respectivamente, nas eqs. (1) e (2) do sistema (P), temos

$$\left|\begin{array}{l}(u'', u) - M_0\left(\|u\|^2\right)(\Delta u, u) + M_1(|u|^2)(u, u) - (\Delta u', u) = 0 \\ (v'', v) - M_0\left(\|v\|^2\right)(\Delta v, v) + M_1(|v|^2)(v, v) - (\Delta v', v) = 0\end{array}\right.$$

ou melhor,

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(u', u) - |u'|^2 + M_0\left(\|u\|^2\right)\|u\|^2 + M_1(|u|^2)|u|^2 + ((u', u)) = 0 \\ \\ \dfrac{d}{dt}(v', v) - |v'|^2 + M_2\left(\|v\|^2\right)\|v\|^2 + M_3(|v|^2)|v|^2 + ((v', v)) = 0\end{array}\right. \tag{4.17}$$

Somando as duas eqs. em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[(u', u) + (v', v)\right] - \left[|u'|^2 + |v'|^2\right] + M_0(\|u\|^2)\|u\|^2 + M_2(\|v\|^2)\|v\|^2 \\ + M_1(|u|^2)|u|^2 + M_3(|v|^2)|v|^2 + ((u', u)) + ((v', v)) = 0\end{aligned}$$

Agora integrando de t_1 até t_2, temos

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[M_0(\|u\|^2)\|u\|^2+M_2(\|v\|^2)\|v\|^2\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[M_1(|u|^2)|u|^2+M_3(|v|^2)|v|^2\big]ds=(u'(t_1),u(t_1))$$
$$-(u'(t_2),u(t_2))+(v'(t_1),v(t_1))-(v'(t_2),v(t_2))-\int_{t_1}^{t_2}\big[((u',u))+((v',v))\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[|u'|^2+|v'|^2\big]ds$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e elementar, temos

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[M_0(\|u\|^2)\|u\|^2+M_2(\|v\|^2)\|v\|^2\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[M_1(|u|^2)|u|^2+M_3(|v|^2)|v|^2\big]ds\le|u'(t_1)|\ |u(t_1)|$$
$$+|u'(t_2)|\ |u(t_2)|+|v'(t_1)|\ |v(t_1)|+|v'(t_2)|\ |v(t_2)|+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|u'\|^2ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|u\|^2ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|v'\|^2ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\|v\|^2ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[|u'|^2+|v'|^2\big]ds.$$

ou melhor

$$\ldots\le\sup_{t<s<t+1}ess\{|u(s)|\big[|u'(t_1)|+|u'(t_2)|\big]+|v(s)|\big[|v'(t_1)|+|v'(t_2)|\big]\}+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[|u'|^2+|v'|^2\big]ds.$$

Usando o fato $H_0^1\hookrightarrow L^2$, temos que $|u'|^2_{L^2}\le c_1\|u'\|^2_{H_0^1}$ e $|v'|^2_{L^2}\le c_2\|v'\|^2_{H_0^1}$, daí tem-se

$$\ldots\le\sup_{t_1<s<t+1}ess\{|u(s)|\big[|u'(t_1)|+|u'(t_2)|\big]+|v(s)|\big[|v'(t_1)|+|v'(t_2)|\big]\}$$
$$+(\frac{1}{2}+c)\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]ds,\quad onde\quad c=\max\{c_1,c_2\}$$

$$\ldots\le\sup_{t<s<t+1}ess\big[|u(s)|4cF(t)+|v(s)|4cF(t)\big]+(\frac{1}{2}+c)\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]ds.$$

$$\ldots\le4c\sup_{t<s<t+1}ess\big[|u(s)|+|v(s)|\big]F(t)+(\frac{1}{2}+c)\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]ds.$$

ou melhor,

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[m_0\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[m_1\big[|u|^2+|v|^2\big]\big]ds\le4c\sup_{t<s<t+1}ess\big[|u(s)|+|v(s)|\big]F(t)$$
$$+(\frac{1}{2}+c)\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds+\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]ds.$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[(m_0-\frac{1}{2})\big[\|u\|^2+\|v\|^2\big]\big]ds+\int_{t_1}^{t_2}\big[m_1\big[|u|^2+|v|^2\big]\big]ds \leq 4c \underset{t_1<s<t+1}{\text{sup}ess}\big[|u(s)|+|v(s)|\big]F(t)$$
$$+(\frac{1}{2}+c)\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|^2+\|v'\|^2\big]ds, \quad com \quad m_0>\frac{1}{2}.$$

Fazendo $k=\min\{m_1,(m_0-\frac{1}{2})\}$, temos

$$k\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+|u|^2+\|v\|^2+|v|^2\big]ds \leq 4c \underset{t<s<t+1}{\text{sup}ess}\big[|u(s)|+|v(s)|\big]F(t)+(\frac{1}{2}+c)F(t)^2.$$

Fazendo $c_3=\max\left[\dfrac{\frac{1}{2}+c}{k},\dfrac{4c}{k}\right]$,

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+|u|^2+\|v\|^2+|v|^2\big]ds \leq c_3\Big[\underset{t<s<t+1}{\text{sup}ess}\big[|u(s)|+|v(s)|\big]F(t)+F(t)^2\Big]=G(t)^2.$$

Daí temos,

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u\|^2+|u|^2+\|v\|^2+|v|^2\big]ds \leq G(t)^2 \tag{4.18}$$

Somando (4.13) e (4.18), temos

$$\int_{t_1}^{t_2}\big[\|u'\|+\|v'\|+\|u\|^2+\|v\|^2+|u|^2+|v|^2\big]ds \leq F(t)^2+G(t)^2$$

Logo, existe $t^*\in[t_1,t_2]$, tal que

$$\|u'(t^*)\|^2+\|v'(t^*)\|^2+\|u(t^*)\|^2+\|v(t^*)\|^2+|u(t^*)|^2+|v(t^*)|^2 \leq 2\big[F(t)^2+G(t)^2\big] \tag{4.19}$$

uma vez que $t_2-t_1<\frac{1}{2}$.

Sabendo que $\|u\|^2\leq c$ e $\|v\|^2<c$, e

$$\widehat{M_0}(\|u(t^*)\|^2)=\int_0^{\|u(t^*)\|^2} M(s)ds \leq \overline{m}_0\|u(s^*)\|^2$$
$$\widehat{M_2}(\|v(t^*)\|^2)=\int_0^{\|v(t^*)\|^2} M(s)ds \leq \overline{m}_0\|v(s^*)\|^2$$

onde $\overline{m}_0=\max\limits_{0\leq\|u\|^2\leq c} M(s)<\infty$ e $\overline{m}_0=\max\limits_{0\leq\|v\|^2\leq c} M(s)<\infty$

Então,

$$\overline{m}_0\|u\|^2 \geq \widehat{M_0}(\|u(t^*)\|^2) \Rightarrow \|u(t^*)\|^2 \geq \frac{1}{\overline{m}_0}\widehat{M_2}(\|u(t^*)\|^2) \tag{4.20}$$

$$\overline{m}_0\|v\|^2 \geq \widehat{M_0}(\|v(t^*)\|^2) \Rightarrow \|v(t^*)\|^2 \geq \frac{1}{\overline{m}_0}\widehat{M_0}(\|v(t^*)\|^2) \tag{4.21}$$

De modo análogo temos que

$$|u(t^*)|^2 \geq \frac{1}{\overline{m}_1}\widehat{M_1}(|u(t^*)|^2) \tag{4.22}$$

$$|v(t^*)|^2 \geq \frac{1}{\overline{m}_1}\widehat{M_1}(|v(t^*)|^2) \tag{4.23}$$

Agora, substituindo (4.20) e (4.23) em (4.19), obtemos

$$\|u'(t^*)\|^2 + \|v'(t^*)\|^2 + \frac{1}{\overline{m}_0}\big[\widehat{M_0}(\|u(t^*)\|^2) + \widehat{M_0}(\|v(t^*)\|^2)\big] + \frac{1}{\overline{m}_1}\big[\widehat{M_1}(|u(t^*)|^2) + \widehat{M_1}(|v(t^*)|^2)\big]$$
$$\leq 2\big[F(t)^2 + G(t)^2\big]$$

Usando a imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ temos

$$\frac{1}{c_1}\big[|u'(t^*)|^2 + |v'(t^*)|^2\big] + \frac{1}{\overline{m}_0}\big[\widehat{M_0}(\|u(t^*)\|^2) + \widehat{M_0}(\|v(t^*)\|^2)\big] + \frac{1}{\overline{m}_1}\big[\widehat{M_1}(|u(t^*)|^2) + \widehat{M_1}(|v(t^*)|^2)\big]$$
$$\leq 2\big[F(t)^2 + G(t)^2\big]$$

Fazendo $c_4 = \dfrac{1}{\max\left[\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\overline{m}_0}, \frac{1}{\overline{m}_1}\right]}$ obtemos

$$c_4\left[|u'(t^*)|^2 + |v'(t^*)|^2 + \widehat{M_0}(\|u(t^*)\|^2) + \widehat{M_2}(\|v(t^*)\|^2) + \widehat{M_1}(|u(t^*)|^2) + \widehat{M_3}(|v(t^*)|^2)\right]$$
$$\leq 2\big[F(t)^2 + G(t)^2\big]$$

Donde obtemos $E(t^*, u, v) \leq c_5\big[F(t)^2 + G(t)^2\big]$

De (4.12), temos

$$E(t_1, u, v) = E(t_2, u, v) + \int_{t_1}^{t_2} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds$$

ou

$$E(t_1, u, v) = E(t^*, u, v) + \int_{t_1}^{t^*} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big]ds$$

Assim,

$$E(t,u,v) \leq E(t^*,u,v) + \int_t^{t+1} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big] ds$$

Então,

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} ess E(s) \leq E(t^*,u,v) + \int_t^{t+1} \big[\|u'\|^2 + \|v'\|^2\big] ds \tag{4.24}$$

De (4.13) e (4.24), obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t\leq s\leq t+1} ess E(s) &\leq F(t)^2 + c_5\big[F(t)^2 + G(t)^2\big] \\
\ldots &\leq F(t)^2 + c_5\Big[F(t)^2 + F(t)^2 + \sup_{t\leq s\leq t+1} ess\big[|u(s)| + |v(s)|\big]F(t)\Big] \\
\ldots &\leq c_6F(t)^2 + \frac{c_5}{2}\left[\sup_{t\leq s\leq t+1} ess\,[|u(s)| + |v(s)|]\right]^2, \quad onde \quad c_6 = 1 + 2c_5. \\
\ldots &\leq c_6F(t)^2 + \frac{1}{2\delta}\sup_{t\leq s\leq t+1} ess\big[|u(s)|^2 + |v(s)|^2\big], \quad onde \quad \delta = \frac{1}{c_5} > 0. \\
\ldots &\leq c_6F(t)^2 + \frac{1}{2\delta m_1}2\sup_{t\leq s\leq t+1} ess\left[\widehat{M_1}(|u(s)|^2) + \widehat{M_1}(|v(s)|^2)\right] \\
\ldots &\leq c_6F(t)^2 + \frac{1}{\delta m_1}\sup_{t\leq s\leq t+1} ess E(s,u,v).
\end{aligned}$$

donde concluimos que

$$(1 - \frac{1}{\delta m_1})\sup_{t\leq s\leq t+1} ess E(s,u,v) \leq c_6F(t)^2, \tag{4.25}$$

considerando que $m_1 > \frac{1}{\delta}$. Portanto,

$$\sup_{t\leq s\leq t+1} ess E(s) \leq c_7F(t)^2 = c_7\left[E(t,u,v) - E(t+1,u,v)\right]$$

com

$$c_7 = \frac{c_6}{1 - \frac{1}{\delta m_1}} = \frac{c_6}{\frac{\delta m_1 - 1}{\delta m_1}} = \frac{c_6\delta m_1}{\delta m_1 - 1} > 0$$

E pelo Lema de Nakao, temos

$$E(t,u,v) \leq \alpha e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad com \quad \alpha, \beta \quad constantes\ positivas.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Paper de J. Ferreira, M.P. Matos & D.C. Pereira *Global solutions to Klein-Gordon type equations with non-linearities of Kirchhoff-Carrier type.* Publicado no Journal of Diferential Equations, 1996.

[2] OLIVEIRA, A.J. *Análise Matemática de um Modelo de Vibração com Dissipação: Existênciia e Decaimento.* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2004.

[3] CARRIER, G.F. *On the vibration problem of elastic string.* Q.J. Appl. Math 3,pp151-165, 1945.

[4] MIRANDA, M.M. & MEDEIROS, L.A. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos No. 25, IM-UFRJ, 1993.

[5] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.

[6] MATOS, M.P., FEREIRA, J., SANTOS, M. L. & PEREIRA, D.C. *Hidden Regularity for the Hiperbolic-Parabolic Equations.* (To Appear).

[7] FRIEDMAN, Avner. *Foundations of Modern Analysis.* Dover Publications, Inc., New York, 1970.

[8] Paper de J. Ferreira, M.P. Matos & D.C. Pereira *STABILITY FOR A COUPLED SYSTEM OF WAVE EQUATIONS OF KIRCHHOFF TYPE WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS.* Publicado no Eletronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2003, No. 84, pp. 1-17. ISSN: 1072-6691.

[9] RIVERA, J.E.M. *Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* IM-UFRJ, 2004.

[10] BACHMAN, G. & NARICI, L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York and London, testando esse trem.1968.

[11] NAKAO, M. Asyntotic stabilit of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term, J. Math. Anal. and Appl. 58 (1977), pp 336-

343.

[12] NAKAO, M. Decay of Solutions of some nonlinear evolution equations, J. Math. Anal. and Appl. 60 (1977), pp 542-549.

[13] PEREIRA, D.C. *Existência e comportamento assintótico de soluções da equação não linear da viga*. Tese de Doutorado. UFRJ, 1987.

[14] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones*. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[15] MIRANDA, M. M.*análise Espectral em Espaços de Hilbert*, Texto de Métodos Matemáticos. nº 28, IM-UFRJ, 1990.

[16] MEDEIROS, L. A.,RIVERA, P. H.*Notas de Aula do Curso de Introdução dos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro, 1977.

[17] MEDEIROS, L.A., MELO, E. A. *A Integral de Lebesgue*. Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, 1989.