UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Márcio Aldo Lobato Bahia

SOLVABILIDADE PARA UMA EDP NÃO LINEAR DO TIPO KIRCHHOFF

Orientador: Prof. ***Dr.*** **Jorge Ferreira.**

Dezembro - 2005
Belém - PA

Márcio Aldo Lobato Bahia

SOLVABILIDADE PARA UMA EDP NÃO LINEAR DO TIPO KIRCHHOFF

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística / CCEN / UFPA, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais
Orientador: Prof. *Dr.* Jorge Ferreira.

Dezembro - 2005
Belém - PA

Solvabilidade para uma EDP não Linear do tipo Kirchhoff

por

BAHIA, Márcio Aldo Lobato

Esta Dissertação, foi julgada e aprovada, pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística/CCEN/UFPA, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belém, 13 de Dezembro de 2005

Prof. *Dr.* **Marcus Pinto da Costa da Rocha**
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. *Dr.* Jorge Ferreira.
Universidade Federal de S. João Del Rei-UFSJ
Orientador

Prof. *Dr.* Ducival Carvalho Pereira
Faculdade Ideal-FACI
Membro

Prof. *Dr.* João dos Santos Protázio.
Esccola Superior Madre Celeste-ESMAC
Membro

Prof. *Dr.* Marcus Pinto da Costa da Rocha
Universidade Federal do Pará-UFPA
Suplente

Aos meus dois grandes mestres, meu Pai Iolando Manoel Bahia e minha Mãe Maria Helena Lobato Bahia.

Agradecimentos

⋆ À Deus Todo Poderoso, que me concedeu a vida e a inspiração necessária para chegar ao final deste trabalho;

⋆ À Universidade Federal do Pará pela oportunidade dada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, favorecendo e muito a minha vida acadêmica e profissional;

⋆ Aos Colegiados dos Cursos de Matemática e Estatística da UFPA;

⋆ Ao muito estimado professor Dr. Jorge Ferreira, por me orientar neste trabalho de dissertação de mestrado, na qual foi de suma importância para a introdução, andamento e conclusão;

⋆ Ao pilar da minha vida: minha família;

⋆ À minha fortaleza: meu filhão Victor;

⋆ À minha amante: minha esposa Adélia;

⋆ Aos meus irmãos: Francisca, Vera, Raimundo, Iolena, Socorro, Jorge, Nazareno, Iolanda, Helena, Benedita, Paulo e Santana;

⋆ À dois amigos: Sr. Edmilson e Sra. Zilda;

⋆ Aos professores doutores: Ferreira,J., Protázio,J.S.;, Pereira,D.C. e Santos,M.L., pelo incentivo e ajuda;

⋆ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas;

“Devemos ter perseverança para aprender o que nos é ensinado, e transmitir os ensinamentos com a mesma virtude”.

BAHIA, Márcio Aldo Lobato, 2005

Resumo

Neste trabalho estudamos a solvabilidade do problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &u'' + M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au + M_1(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)u = f \\ &u(0) = u_0 \\ &u'(0) = u_1 \end{aligned}$$

onde A **é um operador auto-adjunto positivo definido de um espaço de Hilbert** H **e os dados iniciais são tais que** $u_0 \in D(A), \quad u_1 \in V$ **e** $f \in L^2(0,T;V)$**.**

Abstract

In this work we study the solvability of the Cauchy's problem

$$
\begin{aligned}
&u'' + M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au + M_1(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)u = f \\
&u(0) = u_0 \\
&u'(0) = u_1
\end{aligned}
$$

where A is a self-adjoint operator on a Hilbert space H and the initial data are such that $u_0 \in D(A), \quad u_1 \in V$ and $f \in L^2(0,T;V)$.

SUMÁRIO

Introdução

No presente trabalho analisamos a solvabilidade, para o problema de Cauchy abstrato,

$$\left\| \begin{array}{l} u'' + M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au + M_1(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)u = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde A é um operador auto-adjunto positivo definido. V e H são espaços de Hilbert com produto interno e norma representados respectivamente por $((,))$, $\|.\|$ e $(,)$, $|.|$, V denso em H, com injeção compacta, as funções M e M_1 são de classe $C^1[(0,\infty),\mathbb{R}]$, $M(\lambda) > 0$ e $M_1(\lambda) \geq 0$, $\forall\lambda \geq 0$. O operador A é definido pela terna $\{V, H; ((,))\}$ nas condições da Teoria Espectral. Ainda com relação ao problema (0.1), os dados iniciais u_0, u_1 e f são considerados de modo que

$$u_0 \in D(A), u_1 \in V \text{ e } f \in L^2(0,T;V).$$

Denotamos por (P*), o problema (0.1) sem o termo não linear $M_1(\|u\|^2)u$. Este problema teve sua origem no modelo matemático que descreve pequenas vibrações de uma corda elástica de comprimento L, presa nos extremos, quando supomos apenas significativa a componente vertical de tensão.

Usando a Lei linear de Hooke, conforme Kirchhoff, a formulação matemática para esse fenômeno é dada por

$$\rho u_{tt} - \left[\tau_0 + \frac{aE}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] \triangle u(x,t) = f, 0 \leq x \leq L,$$

onde τ_0 é a tensão inicial da corda; E é o módulo de Young do material; ρ a densidade; a área da secção reta da corda e $u(x,t)$ o deslocamento vertical do ponto x na corda no instante t.

Considerando a Lei de Hooke do tipo,

$$\tau - \tau_0 = \sigma\left(\frac{S-L}{L}\right),$$

onde σ não necessariamente linear, $\tau - \tau_0$ é a variação de tensão e $S - L$ a variação do comprimento da corda, obtemos um modelo não linear do tipo (P*)

$$M(s) = m_0 + \phi(s),$$

onde $m_0 > 0$ e $\phi(s)$ é não linear.

Para o caso concreto, temos como representação o modelo de Kirchhoff,

$$u_{tt}(x,t) - M\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx\right) \triangle u(x,t) = f(t), \qquad (0.2)$$

onde Ω aberto limitado $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e $M(\lambda)$, $\lambda \geq 0$.

Diversos autores estudaram o modelo (0.2) e deram importantes contribuições que mencionamos a seguir:

Em 1940, Bernstein fez análise quando Ω é um intervalo limitado da reta real $\mathbb{R}$, utilizando a série de Fourier. Quando Bernstein supõe $M(\lambda) \geq m_0 > 0$ continuamente diferenciável, faz algumas restrições aos coeficientes da série de Fourier e admite $f = 0$ obtendo, assim, solução analítica.

Em 1978, Lions formulou o problema acima de forma abstrata, propondo seu estudo com $M(\lambda) \geq 0$. Em virtude de sua positiva abordagem, obtiveram muitos outros resultados.

Dickey, fez sua análise com Ω sendo a semi-reta $\mathbb{R}^+$, para cordas de comprimento finito e semi-finito e $M(\lambda) = a + b(\lambda)$, com $a > 0$, $b > 0$. Este resultado foi generalizado em 1979 por Menzala, que admitiu $\Omega = \mathbb{R}^n$, e em ambos os casos os autores utilizaram a transformada de Fourier.

Em 1989, J. Ferreira [8], em trabalho relevante, generalizou os trabalhos de Dickey e Menzala formulando o problema de forma abstrata, admitindo a injeção de V em H apenas contínua. Em substituição à transformada de Fourier o autor usou a técnica de Diagonalização de Operadores, que num certo sentido generaliza a transformada de Fourier. Outros autores utilizaram essa técnica com sucesso entre eles E. R. Crippa, E. Bisognin, A. T. Cousin, etc. Como conseqüência obtivemos os casos particulares de Ω limitado ou ilimitado.

Em nosso primeiro capítulo, apresentamos os conceitos, as noções básicas e os resultados usuais da literatura os quais são essenciais para os capítulos subseqüente.

Nos capítulos II e III, estudamos o problema regularizado, o qual consiste em considerarmos os dados iniciais mais regulares, com o próposito de obtermos a solvabilidade. O método utilizado para o problema da existência foi o método de Galerkin e para a unicidade o método da energia.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subseqüentes. Sendo assim, não nos preocuparemos nas demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Representa-se por $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço vetorial constituído pelas funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis, cuja potência p, $|f|^p$, é integrável à Lebesgue; isto é:*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e} \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty,\ 1 \leq p < +\infty \right\}$$

Gostaríamos que esses espaços fossem espaços de Banach, a fim de lidar com eles usando as ferramentas de Análise Funcional. Todavia, o que ocorre é que a "candidata natural" a definir uma norma em $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, que é a função $\|.\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} : \mathcal{L}^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

é apenas uma semi-norma, uma vez que $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$ se, e somente se, $f \equiv 0$ quase sempre em Ω.

Para driblar essa "deficiência" dos espaços $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, procedemos do modo seguinte. Primeiro, definimos em $\mathcal{L}^p(\Omega)$ uma relação binária $\sim$ definida

por:

$$f \sim g \Leftrightarrow f \equiv g \; quase \; sempre \; em \; \Omega$$

É fácil provar que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Assim, faz sentido considerar o quociente de $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, pela relação de equivalência $\sim$.

A coleção de classes de equivalência assim obtida forma um espaço vetorial, com norma definida por

$$\| \{f\} \|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

onde f é um representante da classe de equivalência $\{f\}$.

Os espaços vetoriais normados assim definidos são denotados por $L^p(\Omega)$. Eles exercem um papel fundamental no estudo moderno das Equações Diferenciais Parciais. Como, na verdade, não há possibilidade de confusão, é usual, devido à conveniência, escrever $f \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_p$ para denotar os elementos e a norma em $L^p(\Omega)$, onde f é um representante qualquer da classe de equivalência em questão.

Pode-se provar que os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, são todos espaços de Banach. Além disso, o único dos $L^p(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert ocorre quando $p = 2$, com produto interno definido por:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

Finalmente, para definir $L^\infty(\Omega)$ é preciso generalizar a idéia de supremo.

Definição 1.1.2. *Uma Função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita essencialmente limitada quando existe $g : \Omega \to \mathbb{R}$ limitada, tal que $f \sim g$. A coleção das classes de equivalência da funções definidas em Ω e essencialmente limitadas é denotada por $L^\infty(\Omega)$.*

Pode-se definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ por:

$$\|f\|_\infty = inf \, \{sup|g|; g \sim f\}$$

o lado direito da igualdade acima é muitas vezes chamado o supremo essencial de f, e denotado por *supess* f. Prova-se que, com a norma acima, $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach.

A tabela abaixo apresenta um resumo das principais propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$. Apenas nesta tabela, estamos considerando $p \neq 1$, $p \neq 2$, e , neste caso, q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

	Banach	Hilbert	Reflexivo	Separável	Espaço Dual
$L^p(\Omega)$	sim	não	sim	sim	$L^q(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	sim	não	não	sim	$L^\infty(\Omega)$
$L^2(\Omega)$	sim	sim	sim	sim	$L^2(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	sim	não	não	não	contém $L^1(\Omega)$

1.2 Convergências em um Espaço de Banach

Seja X um Espaço de Banach, com norma $\|.\|_X$. Por X' denotamos o dual topológico de X; que é o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos definidos em X. Prova-se que X' é também em Espaço de Banach, com a norma dual

$$\|f\|_{X'} := sup\,\{|\langle f, x\rangle|; x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X, e $x \in X$.

Definição 1.2.1 (Convergência Forte). *Dizemos que x_n converge forte para x em X, ou, simplesmente, x_n converge para x em X, e anotamos*

$$x_n \to x \text{ em } X$$

quando

$$\|x_n - x\|_X \to 0$$

Definição 1.2.2 (Convergência Fraca). *Dizemos que x_n converge fraco para x em X, e anotamos*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X$$

quando

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall f \in X'$$

Agora, sejam $(f_n)_{x\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X', e $f \in X'$.

Definição 1.2.3 (Convergência Fraca-Estrela). *Dizemos que f_n converge fraco-estrela para f em X', e anotamos*

$$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ em } X'$$

quando

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in X$$

Na verdade, podemos definir uma topologia em X, chamada de Topologia Fraca, que induz a convergência fraca enunciada acima. Analogamente, podemos definir uma topologia em X', chamada Topologia Fraca-Estrela, que induz a convergência fraca-estrela. Quando procedemos dessa forma, as convergências numéricas usadas nas definições acima passam a ser uma consequência da maneira como as topologias são definidas. O leitor interessado pode consultar [2].

Não é difícil mostrar que, quando X tem dimensão finita, as três convergências (a fortiori, as três topologias) coincidem. Além disso, quando X é reflexivo, as convergências (a fortiori, as topologias) fraca de X' e fraca-estrela coincidem.

As principais relações entre estas convergências ficam determinadas pela seguinte proposição.

Proposição 1.2.1. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de X', $x \in X$, e $f \in X'$. Tem-se:*

(i) *Se $x_n \to x$ em X, então $x_n \rightharpoonup x$ em X.*

(ii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|_X$ é limitada, e $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$.*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, e se $f_n \to f$ em X', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

(iv) *Se $f_n \rightharpoonup f$ em X', então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X'.*

(v) *Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X', então $\|f_n\|_{X'}$ é limitada, e $\|f\|_{X'} \leq \liminf \|f_n\|_{X'}$.*

(vi) *Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em X', e se $x_n \to x$ em X, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

(vii) *Se X é um espaço de Hilbert, então $x_n \to x$ em X se, e somente se, $x_n \rightharpoonup x$ em X, e $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$.*

Demostração: Faremos apenas a prova de volta do item (vii). Para as demais, ver [2].

Por hipótese, temos $x_n \rightharpoonup x$; isto é, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $f \in X'$. Do Teorema da Representação de Riesz para Espaços de Hilbert, segue, em particular, que $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|_X^2$. Daí,

$$\|x_n - x\|_X^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|_X^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|_X^2 \to 2\|x\|_X^2 - 2\|x\|_X^2 = 0.$$

$\blacksquare$

1.3 Teoria das Distribuições Escalares

1.3.1 Espaço das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$
2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$
3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda \quad supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.3.1. *Seja $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$:*

Verifica-se que o $supp\,(\varphi) = (0,1)$, não é um conjunto compacto.

Neste nosso estudo, damos um destaque especial as funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que , sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito defininamos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1.3.2. *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\quad r > 0$, *denotamos por* $B_r(x_0)$ *a bola aberta de centro* x_0 *de raio* r, *isto é,* $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. *Se* $B_r(x_0) \subset \Omega$, *define-se*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right) & se \;\; \|x - x_0\| < r \\ 0 & se \;\; \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que supp $(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ *é um compacto e que* $C_0^\infty(\Omega)$ *é não vazio. O espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares continuos definidos em* $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.3.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denotamos por* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial, de ordem* $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, *temos por definição* $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.3.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \ \textbf{ e } \ supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima, é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ e chamamos de espaço das funções testes.

Observação 1.3.2. *Sendo* Ω *limitado, obtemos* $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, para todo* p*, tal que* $1 \leq p < \infty$*, com imersão contínua e densa. De fato, dado* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p \, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Mostraremos que*

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0$$

note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0 \end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [12]

1.3.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω**, introduzimos o conceito de distribuições escalares.**

Denominamos de distribuição escalar sobre Ω **a toda forma linear e contínua sobre** $\mathcal{D}(\Omega)$**, isto é, uma função** $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ **que satisfaz as seguintes condições:**

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(ii) T **é contínua, isto é, se** $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ **converge para** φ**, em** $\mathcal{D}(\Omega)$**, então**

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \textbf{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T **na função teste** φ**, é denotado por** $\langle T, \varphi \rangle$**. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:**

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(< T_\nu, \varphi >)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.3.1. *Dizemos que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.3.3. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então

$$|\langle T_u, \varphi_\nu\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi\rangle| = \left|\int_\Omega u(x)\,(\varphi_\nu - \varphi)(x)\, dx\right| \leq$$
$$\int_\Omega |u(x)\,(\varphi_\nu - \varphi)(x)|\, dx \leq \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|\, dx \to 0,$$

pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u", e usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.3.1 (de Du Bois Raymond). *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: ver [11]

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.4. *Seja* x_0 *um ponto de* Ω *e definamos a função* $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

É fácil vereficar δ_{x_0} *que é uma distribuição, conhecida por* Distribuição de Dirac*, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição* δ_{x_0} *não é definida por uma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, isto é, não existe* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} *é definida por alguma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então tem-se:*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *definida por*

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$$

daí,

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x)\|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω*, logo* $u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω*, isto é,* $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, ou seja,* $\varphi(x_0) = 0$*,* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*, que é uma contradição.*

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.3.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduzimos o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional dado por *Sobolev*, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índece. A derivada (no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.3.3. *Outro resultado interessante a ser mercionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.3.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ *mas sua derivada* $u' = \delta_0$ *não pertence a* $L^1_{loc}(\Omega)$. *Como* $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, *basta verificar que* $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u', \varphi >= - < u, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_\infty^0 \varphi'(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.3.4. *Se* $u \in C^k(R^n)$, *para cada* $|\alpha| \leq k$, *então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall |\alpha| \leq k.$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.4 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.4.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$ pois estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$; logo tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

Dados os inteiros $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \textbf{multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m \right\},$$

as derivadas D^α, evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} dx, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)_{L^2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.* Ver [11]

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b); u' \in L^2(a,b) \right\}, \ u' = \frac{du}{dt}.$$

neste caso

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) , \ \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$; desempenham papel fundamental na Teoria dos ***Espaços de Sobolev*** e por conseguinte na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [14] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|_{\overline{\Omega}}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega)$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma \, ,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$. O operador γ_0, denominado

operador de traço, é contínuo, linear cujo o núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

Representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir enunciamos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.4.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$*

***Demonstração**: ver* [11]

Proposição 1.4.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$)**.** *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

***Demonstração**: ver* [11]

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.4.1 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

***Demonstração**: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1. Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,*

$$\varphi_\nu \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \quad a < proj\ x < b$ onde a $proj\ x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1. Agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = 0$, temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi$$

e da desigualdade de Schwartz, *obtemos:*

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi.$$

aplicando o Teorema de Fubini *temos:*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx &\leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi dx \leq \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 dx \end{aligned}$$

daí,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2}.$$

portanto,

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

■

Observação 1.4.1. *Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.*

Demonstração: *Consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:*

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C)\, |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

■

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|.\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Dizemos que uma função vetorial $\varphi :]0,T[\to X$ é dita simples, quando assume apenas um número finito de valores distintos.

Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}\varphi_i.$$

onde os conjuntos $E_i \subset (0,T)$ são mensuráveis, dois a dois disjuntos, com $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $\forall\ i = 1,2,\ldots,k$; então definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\,\varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}-$*integrável*) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que:

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ **em** X**, q.s em** $(0,T)$;

(ii) $\lim\limits_{k,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X\,dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u é, por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \varphi_\nu(t)\,dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X. Ver [8]

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle\Phi, u(t)\rangle$ for mensurável $\forall\Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X; dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é mensurável à *Lebesgue.*

Denotamos por $L^p(0,T;X)\,, 1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de)

funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ **fortemente mensuráveis e tais que a função** $t\mapsto \|u(t)\|_X^p$ **é integrável à *Lebesgue* em** $(0,T)$**, munido da norma**

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}$$

Quando $p=2$ **e** $X=H$ **é um espaço de *Hilbert*, o espaço** $L^2(0,T;H)$ **é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por**

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)}=\int_0^T (u(s),v(s))_H\,ds$$

Representamos por $L^\infty(0,T;X)$ **o espaço de *Banach* das (classes de) funções** $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow X$ **que são fortemente mensuráveis e tais que** $t\mapsto\|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$**. A norma em** $L^\infty(0,T;X)$ **é definida por**

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)}=supess_{t\in]0,T[}\,||u(t)||_X$$

Quando X **é reflexivo e separável e** $1<p<\infty$**, então** $L^p(0,T;X)$ **é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach*** $L^q(0,T;X')$**, onde** p **e** q **são índices conjugados, isto é,** $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$**. No caso,** $p=1$**, o dual topológico do espaço** $L^1(0,T;X)$ **se identifica ao espaço** $L^\infty(0,T;X')$**. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:**

$$\langle u,v\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)}=\langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}$$

Definição 1.5.1. $f:[0,T]\to X$ *é integrável se existe uma seqüência* $\{S_k\}_k$ *de funções vetoriais simples, tal que,*

$$\int_0^T ||S_k(t)-f(t)||_X dt\to 0,\;\; com\;\; k\to\infty.$$

se f *é integrável, define-se*

$$\int_0^T f(t)d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)dt$$

A expressão $\int_0^T f(t)d\mu$ *é dita integral de Bochner de* f*, em relação a* μ*.*

Exemplo 1.5.1. *Sejam* $u\in L^p(0,T;X)$*,* $1\le p<\infty$*, e* $\varphi\in\mathcal{D}(0,T)$*. Considere a função* $T_u:\mathcal{D}(0,T)\longrightarrow X$*, definida por*

$$T_u(\varphi)=\int_0^T u(s)\varphi(s)\,ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner *em* X. *A aplicação* T_u *é linear e contínua de* $\mathcal{D}(0,T)$ *em* X *e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição* T_u *é univocamente determinada por* u *e, neste sentido, podemos identificar* u *com a distribuição* T_u *por ela definida e, portanto,* $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ *com injeção contínua e densa.*

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotamos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.5.2. *Seja* $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. *A derivada de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *dada por*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, *estamos representando o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X.$$

Por $C_w^0([0,T];X)$, *denotamos o espaço das funções* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *fracamente contínuas, isto é, a aplicação* $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X',X}$ *é contínua em* $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

1.6 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos são representados, respectivamente, por, $\|.\|$, $((,))$ e $|.|$, $(,)$. Suponhamos que $V \subset H$, V denso em H e a injeção de V em H contínua.

A terna $\{V, H, ((,))\}$ determina um operador linear A caracterizado por: o domínio do operador A é o subespaço vetorial $D(A)$ de V dado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u,v)) = (f,v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que

$$((u,v)) = (Au,v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V$$

Demonstra-se em Milla [13], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas, além disso A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de H, enumerável, constituído de autovetores de A, cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$. satisfazem à

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots, \lambda_j \to \infty \text{ quando } j \to \infty.$$

Para cada α real, o operador A^α é caracterizado por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u,w_\nu)|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u,w_\nu) w_\nu \in H, u \in D(A^\alpha).$$

Dado $u \in H$, então

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u,w_\nu) w_\nu.$$

Em $D(A^\alpha)$ consideramos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u,v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

e

$$|u|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|.$$

Temos que $D(A^\alpha)$ munido do produto interno $(u,v)_{D(A^\alpha)}$ é um espaço de Hilbert e dados α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão de $D(A^{\alpha_2})$ em $D(A^{\alpha_1})$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = V, \left|A^{\frac{1}{2}}\right| = \|u\|, \forall u \in V.$$

No que se segue o operador A será definido pelo terno $\{V, H, ((u,v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.7 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciamos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- **$f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;**
- **$f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;**
- **Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que**

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \forall (t,x) \in D. \tag{1.1}$$

Considere o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathcal{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.7.1 (Carathéodory). *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\mathbb{R}$. Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

***Demonstração**: Vamos mostrar para o caso $t \geq \tau$. Definimos a função M*

$$M(t) = 0 \quad (t < \tau) \tag{1.3}$$

$$M(t) = \int_{\tau}^{t} m(s)ds \ (t \leq t \leq \tau + a) \tag{1.4}$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$
$M(\tau) = 0$

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in \mathbb{R}$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ definimos as seguintes aproximações φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ por

$$\begin{array}{ll} \varphi_j(t) = \xi & (\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}) \\ \varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s))ds & (\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta) \end{array} \tag{1.5}$$

Notemos que $\varphi_1(t) = \xi$ $\forall t \in (\tau, \tau + \beta)$.

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.5) só tem sentido se

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}$$

daí segue, que em (6) tem-se φ_j é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}$ e, pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in \mathbb{R}$ a equação (1.5) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \dfrac{\beta}{j} < t \leq \tau + \dfrac{2\beta}{j}$ e além disso, temos

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = |\int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds|$$

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_\tau^{t-\beta/j} |f(s, \varphi(s))|ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_\tau^{t-\beta/j} m(s)ds$$

por (1.1) e, portanto,

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) \tag{1.6}$$

Afirmação: $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Provaremos essa afirmação usando indução finita
$n = 1$ ok!

Suponhamos que para $n = k$ temos φ_j está definida em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$ assim temos $\varphi_j(t) = \xi + \displaystyle\int_\tau^{\tau - \frac{k\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))ds$ de modo análogo, concluímos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \dfrac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$, portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.6). Portanto, por indução, (1.5) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$, para todo $j \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi_j(t) = \xi & \tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j} \\ |\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) & \tau + \frac{\beta}{j} \leq t \leq \tau + \beta \end{array} \right.$$

φ_j ***é equicontínua***

Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para quaisquer* t_1, t_2 *tais que* $|t_1 - t_2| < \delta$ *temos* $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon \ \ \forall j$. *Sabemos que*

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})|$$

sendo M *contínua em* $[\tau, \tau + \beta]$ *vem que* M *é uniformemente contínua. Logo,*

$$|t_1 - t_2| = |(t_1 - \frac{\beta}{j}) - (t_2 - \frac{\beta}{j})| < \delta \Rightarrow |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})| < \epsilon$$

donde segue nossa afirmação.

φ_j ***é equilimitada***

Notemos que $|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j})\forall j$. *Sendo* M *contínua em* $[\tau, \tau + \beta]$ *logo limitada, então existe* $C > 0$ *tal que* $|M(t)| \leq C$. *Desde que*

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j})$$

segue que

$$|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

desta forma, a seqüência (φ_j) *está nas condições do teorema de Àrzela-Ascoli, assim existe uma subseqüência* (φ_{j_k}) *que converge uniformemente em* $[\tau, \tau + \beta]$ *para uma função continua* φ.

Mostremos que tal função limite, é solução de (1.2). *Sendo* $f(t, x)$ *contínua em* x *para cada* t *fixo decorre da que*

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)) \ \forall t$$

e, usando (1.1) *segue que*

$$|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t)$$

desde que $m(t)$ *é Lebesgue integrável a função* f *está nas condições do teorema da convergência dominada de Lebesgue, resultando portanto*

$$\lim_{k \to \infty} \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds$$

para todo $t \in [\tau, \tau + \beta]$ *temos:*

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\beta/j_k}^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds$$

quando, $k \to \infty$ *o segundo termo integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vem que*

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

donde segue o resultado.

■

Corolário 1.7.1 (Prolongamento de solução). *Seja* $D = [0, \omega] \times B$ *com* $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b,\ b > 0\}$ *e* f *nas condições de Carathéodory. Considere* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(0) = X_0, \ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

e suponhamos que em qualquer intervalo I *onde* $\varphi(t)$ *está definida, se tenha,* $|\varphi(t)| \leq M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* t *e* $M < b$. *Então* φ *tem um prolongamento até* $[0, \omega]$.

Demonstração: *Ver* [12].

Proposição 1.7.1. *Sejam* V *e* H *espaços de Hilbert,* V *continuamente imerso em* H, $u \in L^p(0, T; V)$ *e* $u' \in L^p(0, T; H)$, *com* $1 \leq p < \infty$, *então* $u \in C^0([0, T]; H) \cap C_w^0([0, T]; V)$.

Demonstração: *Ver* [5].

Proposição 1.7.2 (Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam* B_0, B, B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1 *reflexivos, a imersão de* B_0 *em* B *compacta,* B *imerso continuamente em* B_1 *e* W *o espaço*

$$W = \left\{u \in L^2(0, T; B_0);\ u' \in L^2(0, T; B_1)\right\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^2(0,T;B_1)}$. *Então* W *é um espaço de Banach, e a imersão de* W *em* $L^2(0, T; B)$ *é compacta.*

Demonstração: *Ver* [5].

Observação 1.7.1. *Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se* $(u_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ *é uma seqüência limitada em* $L^2(0, T; B_0)$ *e* $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência limitada em* $L^2(0, T; B_1)$ *então* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *é limitada em* W. *Daí, segue que existe uma subseqüência* $(u_{\nu_k})_{k \in \mathcal{N}}$ *de* (u_ν) *tal que* $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ *forte em* $L^2(0, T; B)$.

Lema 1.7.1. *Consideremos X um espaço de Hilbert com dual X' e Y um outro espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$. Seja*

$$W = \{u \in L^2(0,T;X);\ \ u' \in L^2(0,T;X')\}.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))_Y = \langle u'(t),v(t)\rangle_{X,X'} + \langle u(t),v'(t)\rangle_{X,X'}.$$

Demonstração*: Ver* [3].

Lema 1.7.2 (Lema de Lions)**.** *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ e g funções de $L^q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, tais que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C,\ \ g_\mu \to g$$

quase sempre em $\mathcal{O}$. Então $g_\mu \to g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração*: Ver* [4].

Lema 1.7.3 (Lema de Fatou)**.** *Seja (f_n) uma seqüência em $M^+(X,\mathcal{M})$. Então,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

onde $M^+(X,\mathcal{M})$ a coleção de todas as funções mensuráveis, não negativas, definidas em X, a valores reais estendida.

Demonstração*: Ver* [12].

Teorema 1.7.2 (da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X. Suponhamos que*

1. *$(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f;*

2. *Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$;*

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

Demonstração*: Ver* [12]

Teorema 1.7.3 (Representação de Riez). *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $\varphi \in (L^p)'$. *Então existe um único* $u \in L^{p'}$ *tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall\ f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. *Ver* [2].

Como conseqüência destes resultados temos as seguintes identificações:

$$i) L^2 \cong (L^2)'$$

$$ii) L^{p'} \cong (L^p)'$$

Teorema 1.7.4 (Desigualdade de Sobolev). *Seja* $1 \leq p < n$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^n)$$

onde $p*$ *é tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

e existe uma constante $C = C(p,n) = \frac{(n-1)p}{n-p}$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: *Ver* [1].

Observação 1.7.2. $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^n), m \geq 1$, *inteiro, tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

Demonstração: *Ver* [1].

Proposição 1.7.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *com*

$$p, p' \geq 1 \ \ e \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então

$$f, g \in L^1 \ \ e \ \ \int |f.g| \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: *Ver* [10].

Teorema 1.7.5 (Banach-Alaoglu-Boubarki). *Seja H um espaço de Hilbert. Então, toda seqüência $(u_m)_{n\in\mathbb{N}}$ que é limitada em $L^\infty(0,T;H)$, com $1 \leq p < \infty$ e T um real positivo fixado, possui uma subseqüência convergente na topologia fraca-estrela.*

Demonstração: *Ver* [22].

Teorema 1.7.6 (Regularidade para um problema de Dirichlet). *Seja Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitado [ou com $\Omega = \mathbb{R}^n_+$]. Se $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1_0(\Omega)$ são tais que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in H^1_0(\Omega)$$

então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ onde C é uma constante que depende somente de Ω. E mais, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \ \ com \ \ \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m};$$

em particular se $m > \frac{n}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ou ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: *Ver* [2].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotamos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.7.1. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H tais que*

(i) $|\omega_n| = 1\ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0\ \forall n, m \in \mathbb{N}$ *com* $m \neq n$;

(ii) *O espaço gerado pela $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em H.*

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.7.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que*

(i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$, *q.s. em* Ω*;*

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, *q.s. em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: *Ver* [2].

Observação 1.7.3. *Nas estimativas que obtemos posteriormente, temos as globais e locais. Para as globais utilizamos uma desigualdade fundamental, devido o lema de Gronwall e para as locais utilizamos o Lema* 1.7.5*. Ambos apresentamos a seguir, sendo o lema de Gronwall na versão mais simples.*

Lema 1.7.4 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam* $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e não-negativas,* $\alpha \geq 0$*. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a, b]$$

em particular, se $\varphi(t)$ *é limitada e* $\alpha = 0$*, então* $\varphi \equiv 0$*.*

Demonstração: *Fazendo* $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds$*, decorre da hipótese que* $\varphi(t) \leq \omega(t)$ *e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que* $\omega'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$*. Logo,*

$$\omega'(t) \leq \omega(t)\,\psi(t),$$

donde segue,

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

integrando a última desigualdade de a até t, obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

assim

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

portanto,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right), \ \ t \in [a,b].$$

desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

■

Lema 1.7.5. *Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds, \ \ 0 \leq t \leq T,$$

então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que

$$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0,T_0] \ \ C_1, C_2 \geq 0.$$

Demonstração: *Sejam $\varphi(t) = \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2\varphi(t)$. Decorre da hipótese que*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\varphi(t)$$

ou ainda,

$$\gamma^2(t) \leq \left[C_1 + C_2\varphi(t)\right]^2$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue,

$$\varphi'(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2,$$

logo,

$$\varphi(t) \leq Y(t) + Y^2(t). \tag{1.7}$$

Por outro lado, $Y'(t) = C_2\varphi'(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right]$, daí segue

$$Y'(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right], \ \ 0 \leq t \leq T \tag{1.8}$$

observando que

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)\, e^{-c_2 t}\right] = Y'(t)\, e^{-c_2 t} + C_2 Y(t)\, e^{-c_2 t}$$

e aplicando em (1.8), segue

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)\, e^{-c_2 t}\right] \leq C_2 Y^2(t)\, e^{-c_2 t}. \tag{1.9}$$

integrando a última desigualdade de 0 *até* T *e notando que* $Y(0) = C_1$, *resulta*

$$Y(t) \leq C_1 e^{c_2 t} + C_2 e^{c_2 t} \int_0^t Y^2(s)\, e^{-c_2 s} ds. \tag{1.10}$$

Seja $z(t) = \int_0^t Y^2(s)\, e^{-c_2 s} ds$. *Assim resulta de* (4) *que* $Y(t) \leq [C_1 + C_2 z(t)]\, e^{c_2 t}$ *e, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo*

$$z'(t) = Y^2(t)\, e^{-c_2 s} dt$$

logo,

$$z'(t) \leq [C_1 + C_2 z(t)]^2\, e^{c_2 t},$$

donde segue,

$$\frac{z'(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} \leq e^{c_2 t}.$$

integrando a última desigualdade de 0 *até* t, *obtemos*

$$\int_0^t \frac{z'(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} dt \leq \int_0^t e^{c_2 t} dt$$

daí segue,

$$-\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} + \frac{1}{C_1} \leq \frac{e^{c_2 t}}{C_2} - \frac{1}{C_2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} \geq \frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}.$$

Agora suponha que,

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{c_2 t}}{C_2} \iff C_2 t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right),$$

logo,

$$t < \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Seja

$$T^* = \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

onde $T^* > 0$ *e escolha* T_0 *tal que* $0 < T_0 < T^*$, *então* $0 \leq t \leq T_0$ *isto implica que*

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1},$$

ou ainda,

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1}.$$

assim,

$$Y(t) \leq (C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t},$$

por outro lado,

$$(C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right] e^{c_2 T_0}.$$

portanto,

$$Y(t) \leq C, \ \ 0 \leq t \leq T_0,$$

desta desigualdade e $\gamma(t) = Y(t)$, *segue o Lema*

$\blacksquare$

Lema 1.7.6. *Se* $\theta \in L^p(0, T_0)$ *e* $v \in V$, *então*

$$\xi(t, x) = \theta(t)\, v(x) \in L^p(0, T_0; V).$$

Demonstração: *Devemos mostrar que* $|\xi(t,x)|_v \in L^p(0, T_0)$, *ou seja,*

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p \, dt < \infty.$$

temos que:

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)\, v(x)|_v^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p\, |v(x)|_v^p \, dt = |v(x)|_v^p \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt,$$

mas decorre da hipótese que: $\int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt < \infty$. *assim, segue o Lema.*

$\blacksquare$

Lema 1.7.7. *Se* $u_m \to u$ *em* $L^p(0, T_0; X)$, *então*

$$\|u_m(t)\|_X \to \|u(t)\|_X \ \text{ em } L^p(0, T_0)$$

Demonstração: *Queremos mostrar que*

$$\left|\left\|u_m\left(t\right)\right\|_X - \left\|u\left(t\right)\right\|_X\right|^p_{L^p(0,T_0)} \rightarrow 0.$$

temos que:

$$\begin{aligned}\left|\left\|u_m\left(t\right)\right\|_X - \left\|u\left(t\right)\right\|_X\right|^p_{L^p(0,T_0)} &= \int_0^{T_0} \left|\left\|u_m\left(t\right)\right\|_X - \left\|u\left(t\right)\right\|_X\right|^p_{L^p(0,T_0)} dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \left\|u_m\left(t\right) - u\left(t\right)\right\|^p_X dt,\end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que:

$$\int_0^{T_0} \left\|u_m\left(t\right) - u\left(t\right)\right\|^p_X dt \rightarrow 0$$

e, portanto, segue o Lema.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Solução Local

2.1 Teorema 1

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de solução fraca local para o seguinte problema de Cauchy abstrato:

$$\left| \begin{array}{l} u'' + M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au + M_1(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)u = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

onde o operador A **definido pelo terno** $\{V, H; ((,))\}$ **nas condições da Teoria Espectral. Para resolvê-lo, supomos os dados iniciais na classe** $\{u_0, u_1\} \in D(A) \times V$**. E as seguintes hipótese sobre as funções** M **e** M_1**:**

$$H.1)\ \ M, M_1 \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$$

$$H.2)\ \ M(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0, +\infty)$$

$$H.3)\ \ m_1' \geq M_1(s) \geq m_1 \geq 0, \forall s \in [0, +\infty)$$

Observação 2.1.1. *Estamos denotando por* $((\ ,\ )), \|\ .\ \|$ *e* $(\ ,\ ), |\ .\ |$ *o produto interno e norma dos espaços* V *e* H*, respectivamente.*

Seja $T > 0$ **um número real fixado, porém arbitrário. Assim, de acordo com as hipóteses assumidas para esse problema obtemos o primeiro resultado, que assegura a existência de solução fraca local para o problema (2.1).**

Teorema 2.1.1. *Suponhamos que* $D(A) \overset{c}{\hookrightarrow} V$ *e que* M *e* M_1 *satisfaçam* $H.1$, $H.2$ *e* $H.3$. *Se* $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in V$ *e* $f \in L^2(0,T;V)$, *então existe um* $T_0 > 0$, *com* $0 < T_0 < T$, *e uma única função vetorial* $u : [0,T_0] \to H$ *tal que,*

$$u \in L^\infty(0,T_0;D(A)) \tag{2.2}$$

$$u' \in L^\infty(0,T_0;V) \tag{2.3}$$

$$u'' \in L^2(0,T_0;H) \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) + M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v) = (f(t),v) \tag{2.5}$$

$$\text{no sentido de } D'(0,T_0),\ \forall v \in V$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } u'(0) = u_1 \tag{2.6}$$

Demonstração: Por questão de simplicidade fazemos por etapas.

2.1.1 Soluções Aproximadas

Considere $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$ **uma base hilbertiana de** H **constituída de vetores próprios do operador** A **e** $\{\lambda_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$ **os seus valores próprios correspondente. Tome** $V_m = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m]$ **o subspaço vetorial de dimensão finita gerado pelos** m **primeiros vetores** $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$**. Assim, obtemos o seguinte problema aproximado associado a (2.1):**

Determinar $u_m(t) \in V_m$ **com** $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j(x)$ **e sendo os** g_{jm} **de classe** C^2**, determinados de modo a satisfazer,** $\forall\ j = 1,2,3,...,m$**, o seguinte sistema:**

$$(u''_m(t),\omega_j) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t),\omega_j) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t),\omega_j) = (f(t),\omega_j) \tag{2.7}$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{0\nu} w_\nu \to u_0 \text{ em } D(A) \tag{2.8}$$

$$u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{1\nu} w_\nu \to u_1 \text{ em } V \tag{2.9}$$

o qual possui solução.

Observação 2.1.2. *As convergências acima são devidas a densidade de* V_m *nos espaços* $D(A)$ *e* V. *Outro sim, é que garantimos a existência de solução para o sistema acima, obtendo um sistema equivalente de modo que este satisfaça as condições do teorema de existência de Carathéodory, como mostramos a seguir.*

Sabemos que:

$$u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m$$
$$u'_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m$$
$$u''_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g''_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m$$

e

$$Au_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)(Aw_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\lambda_\nu w_\nu \in V_m \tag{2.10}$$

$$(u''_m(t), \omega_j) = \sum_{\nu=1}^{m} g''_{\nu m}(t)(\omega_\nu, \omega_j) = g''_{jm}(t) \tag{2.11}$$

logo

$$M(\|u_m(t)\|^2)(A_m(t), \omega_j) = M(\|u_m(t)\|^2)[\sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\lambda_\nu(\omega_\nu, \omega_j)]$$

de onde obtemos

$$M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), \omega_j) = M(\|u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) \tag{2.12}$$

de maneira análoga para

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \omega_j)$$

temos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \omega_j) = M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{jm}(t) \tag{2.13}$$

agora fazendo $t = 0$ **em** $u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\omega_\nu$ **e** $u'_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t)\omega_\nu$ **segue que:**

$$u_m(0) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(0)\omega_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{0\nu}\omega_\nu = u_{0m} \textbf{ de onde } g_{\nu m}(0) = \alpha_{0\nu} \tag{2.14}$$

$$u'_m(0) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(0)\omega_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{1\nu}\omega_\nu = u_{1m} \textbf{ de onde } g'_{\nu m}(0) = \beta_{1\nu} \tag{2.15}$$

Assim usando as igualdades (2.10), (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15); o sistema do problema aproximado fica $\forall j = 1, 2, ..., m$:

$$g''_{jm}(t) + \lambda_j M(\|u_m(t)\|^2) g_{jm}(t) + M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{jm}(t) = (f(t), \omega_j)$$
$$g_{jm}(0) = \alpha_{0j}$$
$$g'_{jm}(0) = \beta_{1j}$$

Notamos que as m equações no sistema acima equivalem a uma EDO do tipo $Y' = F(Y, t)$ que satisfaz as condições do teorema de existência de Carathéodory, de fato:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} g''_{1m}(t) & + & \lambda_1 M(\|u_m(t)\|^2) g_{1m}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{1m}(t) & = & (f(t), \omega_1) \\ g''_{2m}(t) & + & \lambda_2 M(\|u_m(t)\|^2) g_{2m}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{2m}(t) & = & (f(t), \omega_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g''_{mm}(t) & + & \lambda_m M(\|u_m(t)\|^2) g_{mm}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{mm}(t) & = & (f(t), \omega_m) \end{array}\right.$$

e

$$\left|\begin{array}{ccccccc} g_{1m}(0) & = & \alpha_{01} & ; & g'_{1m}(0) & = & \beta_{11} \\ g_{2m}(0) & = & \alpha_{02} & ; & g'_{2m}(0) & = & \beta_{12} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{mm}(0) & = & \alpha_{0m} & ; & g'_{mm}(0) & = & \beta_{1m} \end{array}\right.$$

escrevendo na forma matricial as equações acima, temos:

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} + M(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} +$$

$$+ M_1(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

fazendo

$$B = M(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} + M_1(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$C = \begin{bmatrix} (f(t), \omega_1) \\ (f(t), \omega_2) \\ \vdots \\ (f(t), \omega_m) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad X = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad X' = \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$X'' = \begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

e também

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \vdots \\ \alpha_{0m} \end{bmatrix}_{m\times 1} \qquad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1m} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

o sistema toma a forma matricial abaixo:

$$\left| \begin{array}{l} X'' + BX = C \\ X(0) = X_0 \ e \ X'(0) = X_1 \end{array} \right.$$

que podemos reescrever na forma:

$$\left| \begin{array}{l} X'' = -BX + C \\ X(0) = X_0 \ e \ X'(0) = X_1 \end{array} \right. \tag{2.16}$$

para transformar (2.16) em um sistema de 1ª ordem, considere:

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}_{2m\times 1} \quad , \quad Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}_{2m\times 1} \ e \ Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

então,

$$\left| \begin{array}{l} Y' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} Y + \begin{bmatrix} 0^* \\ C \end{bmatrix}_{2m\times 1} \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right.$$

onde I **matriz identidade de ordem** m, 0 **matriz nula de ordem** m **e** 0^* **matriz nula de ordem** $m \times 1$.

Fazendo $F(Y,t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & 0 \end{bmatrix}_{2m\times 2m} Y + \begin{bmatrix} 0^* \\ C \end{bmatrix}_{2m\times 1}$ **, temos que o último sistema acima assume a forma de EDO desejada, que se segue:**

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F(Y,t) = QY + R \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{2.17}$$

***Afirmação*: A EDO (2.17) atende as condições de Carathéodory, de fato:**

i) Fixando Y**, temos pela hipótese** $(H.1)$, M **e** M_1 **são contínuas, então** $M(\|u_m(t)\|^2)$ **e** $M_1(\|u_m(t)\|^2)$ **são contínua em** t $(j = 1, ..., m)$. **Logo,** $-B$ **é mensurável em** t. **Portanto,** Q **é mensurável em** t.

Agora para R, como $f \in L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$ e $\omega_j \in H$, segue que $(f(t),\omega_j)$ é mensurável, logo C é mensurável em t, portanto R é mensurável em t.

ii) Fixado t, vamos mostrar que F é contínua em Y. Observe que R é contínua em Y, pois é constante em relação a Y. Para continuidade de QY basta mostrar que $-B$ é contínua em Y.

Seja $\Pi_j(Y) = g_{jm} \;\; (j = 1,...,m)$ a projeção do $\mathbb{R}^{2\mathrm{m}} \longrightarrow \mathbb{R}$. É claro que Π_j é contínua. Para cada t fixado, como $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j$, a função

$$Y \;\longmapsto\; \|u_m(t)\|^2 = ((u_m(t), u_m(t))) = (Au_m(t), u_m(t))$$

então $\|u_m(t)\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2\lambda_j(\omega_j,\omega_j)$ de onde segue que, $\|u_m(t)\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2(t)\lambda_j$ e pode ser escrita como

$$Y \;\longmapsto\; \sum_{j=1}^{m}[\Pi_j(Y)]^2\lambda_j$$

assim,

$$Y \;\longmapsto\; \|u_m(t)\|^2$$

é contínua para t fixo. Daí $\lambda_j M(\|u_m(t)\|^2)$ e $M_1(\|u_m(t)\|^2)$ são contínuas em Y $(j = 1,2,...,m)$. Portanto, fixado t, a função $F(Y,t)$ é contínua em Y.

iii)Considere K um compacto de $E \times [0,T]$, onde E é o conjunto:

$$E = \left\{Y \in \mathbb{R}^{2m} \;;\; \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m\times 1}} \leq \gamma \; com \; \gamma > 0\right\}$$

Devemos mostrar que $\exists$ uma função real $m_k(t) \in L^1(0,T)$, tal que

$$\|F(Y,t)\|_{\mathbb{R}^{2\mathrm{m}\times 1}} \leq m_k(t) \;,\; \forall\, (Y,t) \in E \times [0,T]$$

$*$) Estamos Denotando por $\|\,.\,\|_{p\times q}$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^{p\times q}$.

Aplicando em $F(Y,t) = QY + R$, temos que,

$$\|F(Y,t)\|_{2m\times 1} \leq \|QY\|_{2m\times 1} + \|R\|_{2m\times 1} \leq \|Q\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1} + \|R\|_{2m\times 1}$$

mas $Y \in E$, daí $\|Y\|_{2m\times 1} \leq \gamma$. Então a desigualdade acima fica,

$$\|F(Y,t)\|_{2m\times 1} \leq \gamma\|Q\|_{2m\times 2m} + \|R\|_{2m\times 1}$$

Sabemos que $M, M_1 \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$, particularmente em $[0,T]$, consequentemente todas as entradas da matriz $-B$ são limitadas por uma constante e

portanto, $\|Q\| \leq c$. Em relação à matriz R, todas as suas entradas, em valor absoluto, são iguais a

$$|(f(t), \omega_j)| \leq |f||\omega_j| = |f|$$

então,

$$|F(Y,t)| \leq c + |f| \equiv m_k(t)$$

note que $m_k(t)$ é integrável em $[0,T]$, pois c é constante e $f \in L^2(0,T;H)$. Portanto, a EDO (2.17) satisfaz as condições de Carathéodory, logo existe uma solução $u_m(t)$ em $[0,t_m)$, $\forall\, m$ e $\forall\, t_m < T$.

2.1.2 Estimativas a Priori

Como a primeira equação (2.7) do sistema do problema aproximado é válida para todo ω_j, $j = 1, 2, \cdots, m$, segue por linearidade que

$$(u''_m(t), v) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v) = (f(t), v) \tag{2.18}$$

é válida para todo $v \in V_m$.

Estimativa I

Tomando $v = u'_m(t)$ na equação (2.18) e observando que

$$(Au_m(t), u'_m(t)) = ((u_m(t), u'_m(t)))$$

obtemos:

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t), u'_m(t))) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t))$$

note que:

$$(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2$$
$$((u'_m(t), u_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}((u_m(t), u_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$

Assim a igualdade anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t)) \tag{2.19}$$

Seja

$$\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds$$

daí segue

$$\widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) = \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds \;\geq\; \int_0^{\|u_m(t)\|^2} m_0 ds = m_0\|u_m(t)\|^2 \;\geq\; 0 \quad (2.20)$$

então pelo teorema fundamental do cálculo e fazendo $y = \|u_m(t)\|^2$ **temos:**

$$\frac{d}{dy}\left[\widehat{M}(y)\right] = \frac{d}{dy}\int_0^y M(s)ds = M(y) = M(\|u_m(t)\|^2)$$

pela regra da cadeia obtemos:

$$\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) = M(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \quad (2.21)$$

usando (2.21) em (2.19) segue:

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) + 2M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u'_m(t)) = 2(f(t), u'_m(t))$$

integrando-se de 0 **a** $t \leq t_m < T$ **obtemos:**

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|u'_m(s)|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_m(s)\|^2)ds = \int_0^t 2(f(s), u'_m(s))ds - \int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)(u_m(s), u'_m(s))ds$$

daí,

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) = |u'_m(0)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(0)\|^2) + \int_0^t 2(f(s), u'_m(s))ds - \int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)(u_m(s), u'_m(s))ds$$

de onde segue

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) \leq |u'_m(0)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(0)\|^2) + \int_0^t 2|(f(s), u'_m(s))|ds + \int_0^t 2|M_1(\|u_m(s)\|^2)||(u_m(s), u'_m(s))|ds$$

como $0 < m_1 \leq M_1(\lambda) \;\leq m'_1 \;\forall\lambda \;\geq\; 0$ **temos que**

$$\int_0^t 2|M_1(\|u_m(s)\|^2)||(u_m(s), u'_m(s))|^2 ds \;\leq\; m'_1\int_0^t 2|(u_m(s), u'_m(s))|^2 ds$$

logo

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) \leq |u'_m(0)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(0)\|^2) + \int_0^t 2|(f(s), u'_m(s))|ds +$$
$$m'_1 \int_0^t 2|(u_m(s), u'_m(s))|ds$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $2ab \leq a^2 + b^2$, resulta que:

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + m'_1 \int_0^t |u_m(s)|^2 ds +$$
$$m'_1 \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + |u_{1m}|^2 + \widehat{M}(\|u_{0m}\|^2)$$

Note que nas equações (2.8) e (2.9) do sistema do problema aproximado temos as covergências

$$u_{0m} \to u_0 \ em \ D(A)$$
$$u_{1m} \to u_1 \ em \ V$$

e como $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, então

$$u_{0m} \to u_0 \ em \ V$$
$$u_{1m} \to u_1 \ em \ H$$

portanto, devido ao fato de que $\widehat{M} \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R})$ temos as seguintes convergências em $\mathbb{R}$:

$$\|u_{0m}\| \to \|u_0\| \ donde \ \|u_{0m}\|^2 \to \|u_0\|^2$$
$$|u_{1m}| \to |u_1| \ donde \ |u_{1m}|^2 \to |u_1|^2$$
$$\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2) \to \widehat{M}(\|u_0\|^2)$$

assim, existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_4 independentes de m e t, tais que:

$$\begin{aligned}
\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2) &\leq c_1 \\
|u_{1m}|^2 &\leq c_2 \\
m'_1 \int_0^t |u_m(s)|^2 ds &\leq c_3 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \\
\int_0^T |f(s)|^2 ds &\leq \int_0^T \overline{c}\, \|f(s)\|^2 ds \ \leq \ c_4
\end{aligned}$$

daí

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) \leq c + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + m'_1 \int_0^t 2|u'_m(s)|^2 ds + c_3 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq$$
$$c + (1+m'_1) \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + c_3 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq c + c_5 \int_0^t (|u'_m(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2) ds$$

onde $c = c_1 + c_2 + c_4$ **e** $c_5 = max\{(1+m'_1), c_3\}$**.**

Substituindo (2.20) na desigualdade anterior temos:

$$|u'_m(t)|^2 + m_0\|u_m(t)\|^2 \leq c + c_5 \int_0^t (|u'_m(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2) ds$$

de onde fazendo $c_6 = min\{1, m_0\}$ **segue:**

$$|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c}{c_6} + \int_0^t (|u'_m(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2)(\frac{c_5}{c_6}) ds$$

tomando $\varphi(t) = |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2$ **temos, usando Gronwall, que:**

$$\varphi(t) = |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq ce^{\int_0^t \frac{c_5}{c_6} ds} = ce^{\frac{c_5}{c_6} t}$$

ou seja

$$|u'_m(t)| \leq c_7, \;\; \forall m, \forall t \in [0, t_m) \tag{2.22}$$

e

$$\|u_m(t)\| \leq c_8, \;\; \forall m, \forall t \in [0, t_m) \tag{2.23}$$

Com as estimativas (2.22), (2.23) e usando o teorema de Carathéodory, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ **ao intervalo** $[0, T]$ **e posteriormente tomando o supremo essencial temos:**

$$(u_m)_{m \in \mathbf{N}} \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; V)$$
$$(u'_m)_{m \in \mathbf{N}} \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; H)$$

Estimativa II

Tomando $v = Au'_m(t)$ **na equação (2.18), obtemos:**

$$\begin{aligned}&(u''_m(t), Au'_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), Au'_m(t)) + \\ &M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), Au'_m(t)) = (f(t), Au'_m(t))\end{aligned} \tag{2.24}$$

temos que:

$$(u''_m(t), Au'_m(t)) = ((u''_m(t), u'_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2$$
$$(Au_m(t), Au'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2$$
$$(u_m(t), Au'_m(t)) = ((u_m(t), u'_m(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$

usando estes resultados em (2.24) obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = 2((f(t), u'_m(t)))$$

temos também que:

$$M(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\{M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 +$$
$$+M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} - \frac{d}{dt}[M(\|u_m(t)\|^2)]|Au_m(t)|^2 - \frac{d}{dt}[M_1(\|u_m(t)\|^2)]\|u_m(t)\|^2$$

usando o resultado anterior deduzimos que,

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\{M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} = 2((f(t), u'_m(t))) +$$
$$\frac{d}{dt}[M(\|u_m(t)\|^2)]|Au_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}[M_1(\|u_m(t)\|^2)]\|u_m(t)\|^2$$

Agora usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $2ab \leq a^2+b^2$ resulta:

$$\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\{M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} \leq \|f(t)\|^2 +$$
$$\|u'_m(t)\|^2 + |\frac{d}{dt}[M(\|u_m(t)\|^2)]|Au_m(t)|^2| + |\frac{d}{dt}[M_1(\|u_m(t)\|^2)]\|u_m(t)\|^2$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}\{\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} \leq \|f(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 +$$
$$|M'(\|u_m(t)\|^2)|2|((u_m(t), u'_m(t)))||Au_m(t)|^2 + |M'_1(\|u_m(t)\|^2)|2|(u_m(t), u'_m(t))|\|u_m(t)\|^2$$

como $\|u_m(t)\|$ varia no compacto $[0, c^2]$ e M', M'_1 são contínuas, temos

$$|M'(\|u_m(t)\|^2)| \leq c_1 \ e \ |M'_1(\|u_m(t)\|^2)| \leq c_2 \ \forall m, \ \forall t \in [0, T]$$

pela estimativa (2.23) e usando as desigualdades de Cauchy-Shwarz e a elementar $2ab \leq a^2 + b^2$**, obtemos:**

$$2|((u_m(t), u'_m(t)))| \leq 2\|u_m(t)\|\|u'_m(t)\| \leq \|u_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leq c_3 + \|u'_m(t)\|^2$$

usando os dois últimos resultados acima, deduzimos que

$$\frac{d}{dt}\{\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} \leq \|f(t)\|^2 +$$
$$\|u'_m(t)\|^2 + c_1[c_3 + \|u'_m(t)\|^2]|Au_m(t)|^2 + c_2[c_3 + \|u'_m(t)\|^2]\|u'_m(t)\|^2 \leq \|f(t)\|^2 +$$
$$(1 + c_1c^2)\|u'_m(t)\|^2] + c_1c_2|Au_m(t)|^2 + \frac{c_1}{2}2\|u'_m(t)\|^2|Au_m(t)|^2 + c_2c_3c^2$$

fazendo $c_4 = c_1c_3$**,** $c_5 = c_2c_3c^2$ **e** $c_6 = \max\{c_4, \frac{c_1}{2}, (1 + c_2c^2)\}$ **segue que**

$$\frac{d}{dt}\{\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} \leq \|f(t)\|^2 +$$
$$c_6[|Au_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 + 2|Au_m(t)|^2\|u'_m(t)\|^2] + c_5$$

usando a desigualdade $2|a|^2|b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ **e tomando** $\varphi(t) = |Au_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2$**, temos:**

$$\frac{d}{dt}\{\|u'_m(t)\|^2+M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2+M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2\} \leq \|f(t)\|^2+c_5+c_6[\varphi(t)+\varphi(t)^2]$$

integrando de 0 **a** t **esta última desigualdade, obtemos**

$$\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2 \leq \int_0^T \|f(t)\|^2 ds + \int_0^T c_5 ds +$$
$$c_6\int_0^t [\varphi(t) + \varphi(t)^2]ds + \|u_{1m}\|^2 + M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2 + M_1(\|u_{0m}\|^2)\|u_{0m}\|^2$$

Sabemos que $u_{0m} \to u_0$ *em* $D(A)$**,** $u_{1m} \to u_1$ *em* V **e como** $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ **então** $u_{0m} \to u_0$ *em* V**, logo** $M(\|u_{0m}\|^2) \to M(\|u_0\|^2)$ *em* $\mathbb{R}$**, pois** $M \in C^1([0, +\infty))$**. Ora,** $Au_{0m} \to Au_0$ *em* H**, daí** $|Au_{0m}|^2 \to |Au_0|^2$ *em* $\mathbb{R}$**, portanto** $M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2 \to M(\|u_0\|^2)|Au_0|^2$ *em* $\mathbb{R}$**. Analogamente,** $M_1(\|u_{0m}\|^2)\|u_{0m}\|^2 \to M_1(\|u_0\|^2)\|u_0\|^2$ *em* $\mathbb{R}$ **e como** $f \in L^2(0, T; V)$**, tem-se então que** f **é limitada e sendo** c_5T **constante, também é limitada. Dessa forma, existe uma constante positiva** c_7 **tal que**

$$\|u_{1m}\|^2 + M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2 + M_1(\|u_{0m}\|^2)\|u_{0m}\|^2 + c_5T + \int_0^T \|f(t)\|^2 ds \leq c_7, \ \ \forall m, \ \ \forall t.$$

e daí segue-se que

$$\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2 \leq c_7 + c_6\int_0^t [\varphi(t) + \varphi(t)^2]ds$$

usando as hipóteses $(H.1)$ e $(H.2)$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|u'_m(t)\|^2 + m_0|Au_m(t)|^2 + m_1\|u_m(t)\|^2 \leq c_7 + c_6\int_0^t [\varphi(t) + \varphi(t)^2]ds$$

ou seja,

$$\|u'_m(t)\|^2 + m_0|Au_m(t)|^2 \leq c_7 + c_6\int_0^t [\varphi(t) + \varphi(t)^2]ds$$

Fazendo $c_8 = \min\{1, m_0\}$ temos que

$$\varphi(t) = \|u'_m(t)\|^2 + |Au_m(t)|^2 \leq \frac{c_7}{c_8} + \frac{c_6}{c_8}\int_0^t [\varphi(t) + \varphi(t)^2]ds$$

observe que $\varphi(t)$ é contínua em $[0, T]$ e não-negativa. Então existe $0 < T_0 < T$ tal que $\varphi(t) \leq c_9$, $\forall m$ e $\forall t \in [0, T_0]$. Logo,

$$\|u'_m(t)\| \leq c_{10}, \ \ \forall m, \ \ \forall t \in [0, T_0] \tag{2.25}$$

e

$$|Au_m(t)| \leq c_{11}, \ \ \forall m, \ \ \forall t \in [0, T_0] \tag{2.26}$$

portanto, tomando o supremo essencial temos:

$$(u'_m) \textbf{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T_0; V) \tag{2.27}$$

$$(Au_m) \textbf{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T_0; H) \tag{2.28}$$

como (u_m) é *limitada em* $L^\infty(0, T_0; V)$, logo concluimos que:

$$(u_m) \textbf{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T_0; D(A))$$

Estimativa III

Tomando $v = u''_m(t)$ na equação (2.18) obtemos:

$$(u''_m(t), u''_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u''_m(t)) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u''_m(t)) = (f(t), u''_m(t))$$

ou seja,

$$2|u''_m(t)|^2 + 2M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u''_m(t)) + 2M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u''_m(t)) = 2(f(t), u''_m(t))$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integrando de 0 a t, obtemos

$$2\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leq 2\int_0^t |M(\|u_m(s)\|^2)||Au_m(s)||u''_m(s)|ds +$$
$$2\int_0^t |M_1(\|u_m(s)\|^2)||u_m(s)||u''_m(s)|ds + 2\int_0^t |f(s)||u''_m(s)|ds$$

note que $2ab \leq a^2 + b^2$ **que equivale a** $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}ab = 2(\sqrt{2}a)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) \leq 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$**, daí**

$$2\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leq 2\int_0^t [|M(\|u_m(s)\|^2)||Au_m(s)|]^2 ds + 2\int_0^t [|M_1(\|u_m(s)\|^2)||u_m(s)|]^2 ds +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds + 2\int_0^T |f(s)|^2 ds$$

Das estimativas (2.27) e (2.23) e do fato de que $M, M_1 \in C^1([0,+\infty))$ **concluimos que existe uma constante positiva** c**, independente de** m **e** t**, tal que**

$$2\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leq c + \frac{3}{2}\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leq c \ \forall m, \ \forall t \in [0, T_0] \tag{2.29}$$

logo

$$(u''_m) \text{ é } \textit{limitada em } L^2(0, T_0; H) \tag{2.30}$$

2.1.3 Passagem ao Limite

Das estimativas anteriores temos

$$(u_m) \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T_0; D(A))$$
$$(u'_m) \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T_0; V)$$
$$(u''_m) \text{ é } \textit{limitada em } L^2(0, T_0; H)$$

usando o teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki e observando que $L^2(0, T_0; H)$ **é Hilbert, podemos extrair uma subseqüência de** (u_m)**, que continuamos a de-**

notar por (u_m) **tal que:**

$$u_m \to u \ em \ L^\infty(0,T_0;D(A)), \ fraco \star \quad (2.31)$$

$$u'_m \to u' \ em \ L^\infty(0,T_0;V), \ fraco \star \quad (2.32)$$

$$u''_m \to u'' \ em \ L^2(0,T_0;H), \ fraco \quad (2.33)$$

usando o fato de que $L^\infty(0,T;D(A)) \hookrightarrow L^2(0,T;D(A))$ **e (2.31), segue que**

$$u_m \to u \ em \ L^2(0,T_0;D(A)), \ fraco$$

isto é,

$$(Au_m,\omega) \to (Au,\omega), \ \ \forall\omega \in L^2(0,T_0;H), \quad (2.34)$$

da convergência (2.33), deduzimos que

$$(u''_m,\omega) \to (u'',\omega), \ \forall\omega \in L^2(0,T_0;H), \quad (2.35)$$

Convergência dos termos não-lineares

Por (2.31), (2.32) e pelo fato de que $L^\infty(0,T_0;X) \hookrightarrow L^2(0,T_0;X)$ **com** X **Hilbert segue que**

$$(u_m) \text{ **é** } limitada \ em \ L^2(0,T_0;D(A))$$

$$(u'_m) \text{ **é** } limitada \ em \ L^2(0,T_0;V)$$

pelo lema de compacidade de Aubin-Lions, com $B_0 = D(A)$**, e** $B = B_1 = V$**, podemos extrair uma subseqüência de** (u_m)**, que continuamos denotando por** (u_m)**, tal que** $u_m \to u \ forte \ em \ L^2(0,T_0;V)$ **e daí** $\|u_m(t)\| \to \|u(t)\| \ em \ L^2(0,T_0)$**. E passando a uma subsequência** (u_m)**, se necessário, temos que**

$$\|u_m(t)\|^2 \to \|u(t)\|^2, \ quase \ sempre \ em \ [0,T_0]$$

sendo M **contínua, temos**

$$M(\|u_m(t)\|^2) \to M(\|u(t)\|^2), \ quase \ sempre \ em \ [0,T_0] \quad (2.36)$$

além disso, de $\|u_m(t)\|^2 \leq c$ **segue que** $M(\|u_m(t)\|^2) < \tau$ **onde** $\tau = max\{M(\lambda): \ 0 < \lambda < \|u_m(t)\|^2\}$**, portanto** $\forall\, \theta(t) \in L^2(0,T_0)$ **temos de (2.36)**

$$M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t) \rightarrow M(\|u(t)\|^2)\theta(t), \ quase \ sempre \ em \ [0,T_0]$$

note que:

$$M(\|u_m(t)\|^2) \leq \widetilde{c} \iff \int_0^{T_0} M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t)dt \leq \widetilde{c}\int_0^{T_0} \theta(t)dt \leq \overline{c}$$

pois $\theta \in L^2(0,T_0) \subset L^1(0,T_0)$**.**

Desses dois últimos resultados, e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_0^{T_0} M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^{T_0} M(\|u(t)\|^2)\theta(t)dt \ \ \forall\theta \in L^2(0,T_0)$$

ou seja,

$$M(\|u_m(t)\|^2) \ \rightharpoonup \ M(\|u(t)\|^2) \ em \ L^2(0,T_0) \tag{2.37}$$

de (2.34) segue que

$$(Au_m(t),v) \ \longrightarrow \ (Au(t),v) \ em \ L^2(0,T_0), \ \ \forall v \in V_{m_0} \ com \ m_0 \ fixo \tag{2.38}$$

usando (2.37) e (2.38), concluímos $\ \forall\theta \in L^2(0,T_0)$ **e** $\forall v \in V_{m_0}$ **que**

$$\int_0^{T_0} M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t),v)\theta(t)dt \ \rightarrow \ \int_0^{T_0} M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v)\theta(t)dt$$

Se, em particular, consideramos $\theta \in D(0,T_0) \subset L^2(0,T_0)$ **obtemos**

$$M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t),v) \ \rightarrow \ M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v) \ em \ D'(0,T_0); \ \forall v \in V_{m_0} \tag{2.39}$$

e como V_m **é denso em** V **logo** $\forall v \in V$**.**

De maneira análoga temos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2) \ \rightharpoonup \ M_1(\|u(t)\|^2) \ em \ L^2(0,T_0) \tag{2.40}$$

e também

$$(u_m,\omega) \rightarrow (u,\omega), \ \ \forall\omega \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega)), \tag{2.41}$$

de onde por (2.41) segue que

$$(u_m(t), v) \longrightarrow (u(t), v) \ em \ L^2(0, T_0), \ \forall v \in V_{m_0} \ com \ m_0 \ fixo \tag{2.42}$$

portanto de (2.40) e (2.42) obtemos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v) \rightarrow M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v) \ em \ D'(0, T_0); \ \forall v \in V_{m_0} \tag{2.43}$$

e como V_m é denso em H logo vale para todo $v \in H$.

Multiplicando (2.18) por $\theta(t) \in D(0, T_0)$ e integrando de 0 a T_0, temos:

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_0} (u''_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v)\theta(t)dt + \\ &\int_0^{T_0} M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^{T_0} (f(t), v)\theta(t)dt \end{aligned} \tag{2.44}$$

tomando o limite na expressão acima, quando $m \to +\infty$ e usando (2.35), (2.39) e (2.43) temos $\forall \theta \in D(0, T_0) \subset L^2(0, T_0)$ e $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_0} (u''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v)\theta(t)dt + \\ &\int_0^{T_0} M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v)\theta(t)dt = \int_0^{T_0} (f(t), v)\theta(t)dt \end{aligned}$$

note que:

$$\int_0^{T_0} (u''(t), v)\theta(t)dt = (u'(t), v)\theta(t)|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} (u'(t), v)\theta'(t)dt = \langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta(t) \rangle$$

$$\int_0^{T_0} M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v)\theta(t)dt = \langle M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v), \theta(t) \rangle$$

$$\int_0^{T_0} M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v)\theta(t)dt = \langle M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v), \theta(t) \rangle$$

$$\int_0^{T_0} (f(t), v)\theta(t)dt = \langle (f(t), v), \theta(t) \rangle$$

logo

$$\begin{aligned} &\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta(t)dt \rangle + \langle M(\|u(t)\|^2)((u(t), v)), \theta(t) \rangle + \langle M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v), \theta(t) \rangle = \\ &\langle (f(t), v), \theta(t) \rangle \ \ \forall \theta(t) \in D(0, T_0) \ \ \forall v \in V \end{aligned}$$

daí

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t), v)) + M_1(|u(t)|^2)(u(t), v) = (f(t), v)$$
$$em \ D'(0, T_0) \ e \ \forall v \in V$$

2.1.4 Condições Iniciais

De resultados anteriores temos que

$$
\begin{aligned}
&u \in L^2(0, T_0; D(A))\\
&u' \in L^2(0, T_0; V)\\
&u'' \in L^2(0, T_0; H)
\end{aligned}
$$

e usando resultado de regularidade, concluímos que

$$
\begin{aligned}
&u \in C^0([0, T_0]; V))\\
&u' \in C^0([0, T_0]; H)
\end{aligned}
$$

de forma que, $u(0)$ **e** $u'(0)$ **fazem sentido. Considere** $\theta \in C^1([0, T_0])$**, com** $\theta(0) = 1$ **e** $\theta(T_0) = 0$ **e** $v \in H_0^1(\Omega)$**. Como**

$$u'_m \to u' \ em \ L^2(0, T_0; V) \tag{2.45}$$

segue que,

$$((u'_m, w)) \to ((u', w)), \forall w \in L^2(0, T_0; V)$$

Tomando $\omega(t) = \theta(t)v$, $v \in V$ **e integrando de** 0 **a** T_0**, temos**

$$\int_0^{T_0} ((u'_m(t), v))\theta(t)dt \to \int_0^{T_0} ((u'(t), v))\theta(t)dt$$

isto é,

$$\int_0^{T_0} \frac{d}{dt}((u'_m(t), v))\theta(t)dt \to \int_0^{T_0} \frac{d}{dt}((u'(t), v))\theta(t)dt \tag{2.46}$$

usando a integrando por partes em ambas as integrais de (2.46), resulta

$$-((u_m(0), v)) - \int_0^{T_0} ((u_m(t), v))\theta'(t)dt \to -((u(0), v)) - \int_0^{T_0} ((u(t), v))\theta'(t)dt \tag{2.47}$$

de (2.31), obtemos que

$$\int_0^{T_0} ((u_m(t), v))\varphi dt \to \int_0^{T_0} ((u(t), v))\varphi dt, \forall v \in V, \forall \varphi \in L^1(0, T_0)$$

assim

$$((u_m(0), v)) \to ((u(0), v)), \ \ \forall v \in V \tag{2.48}$$

mas

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \;\; em \;\; D(A) \hookrightarrow V$$

então

$$((u_m(0), v)) \to ((u_0, v)), \forall v \in V \tag{2.49}$$

de (2.48) e (2.49), obtemos

$$((u(0), v)) = ((u_0, v)), \forall v \in V$$

portanto $u(0) = u_0$**.**

Para provarmos que $u'(0) = u_1$**, usamos as convergências (2.9) e (2.32), e procedendo de forma análoga, temos**

$$((u'(0), v)) = ((u_1, v)), \forall v \in H$$

logo $u'(0) = u_1$**.**

2.1.5 Unicidade

Considere u **e** v **funções de** $[0, T_0]$ **em** $L^2(\Omega)$ **soluções do nosso problema (2.1) nas condições do Teorema, e considere** $w(t) = u(t) - v(t)$**. Então,**

$$w \in L^\infty(0, T_0; D(A)) \tag{2.50}$$

$$w' \in L^\infty(0, T_0; V) \tag{2.51}$$

$$w'' \in L^2(0, T_0; H) \tag{2.52}$$

e

$$\begin{array}{l} w''(t) + M(\|u(t)\|^2)Au(t) - M(\|v(t)\|^2)Av(t) + M_1(\|u(t)\|^2)u(t) - \\ M_1(\|v(t)\|^2)v(t) = 0 \\ w(0) = 0 \;\; e \;\; w'(0) = 0 \end{array} \tag{2.53}$$

somando e subtraindo os termos $M(\|u(t)\|^2)Av(t)$**,** $M_1(\|u(t)\|^2)v(t)$ **em** $\mathbf{(2.53)}_1$ **e agrupando os termos comuns como** $Aw(t) = Au(t) - Av(t)$ **obtemos:**

$$\begin{array}{l} w''(t) + M(\|u(t)\|^2)Aw(t) + [M(\|u(t)\|^2) - M(\|v(t)\|^2)]Av(t) + M_1(\|u(t)\|^2)w(t) + \\ [M_1(\|u(t)\|^2) - M_1(\|v(t)\|^2)]v(t) = 0 \end{array} \tag{2.54}$$

sendo $M, M_1 \in C^1([0,+\infty))$ podemos usar o Teorema do Valor Médio em (2.54) para obter

$$\begin{aligned}&w''(t) + M(\|u(t)\|^2)Aw(t) + M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2]Av(t) + M_1(\|u(t)\|^2)w(t)+ \\ &M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2]v(t) = 0\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde ξ_1 e ξ_2 pertencem ao intervalo aberto com extremidades $\|u(t)\|^2$ e $\|v(t)\|^2$. Pela regularidade da solução obtida, podemos fazer o produto interno de (2.55) com $2w' \in L^2(0,T;V)$ pois $w' \in L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V)$ portanto

$$\begin{aligned}&(w''(t), 2w'(t)) + M(\|u(t)\|^2)(Aw(t), 2w'(t)) + M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2](Av(t), 2w'(t)) \\ &+M_1(\|u(t)\|^2)(w(t), 2w'(t)) + M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2](v(t), 2w'(t)) = 0\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + 2M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2](Av(t), w'(t)) + \\ &M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + 2M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2 - \|v(t)\|^2](v(t), w'(t)) = 0\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq \\ &\leq 2|M'(\xi_1)||(\|u(t)\| - \|v(t)\|)(\|u(t)\| + \|v(t)\|)||Av(t)||w'(t)| + \\ &+2|M_1'(\xi_2)||(\|u(t)\| - \|v(t)\|)(\|u(t)\| + \|v(t)\|)||v(t)||w'(t)|\end{aligned} \tag{2.56}$$

note que $v, u \in L^\infty(0,T_0;D(A))$ e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ daí

$$\begin{aligned}&|\|u(t)\| - \|v(t)\|| \leq \|u(t) - v(t)\| = \|w(t)\| \\ &|\|u(t)\| + \|v(t)\|| \leq \|u(t)\| + \|v(t)\| \leq k \\ &|M'(\xi_1)||Av(t)| \leq c_0 \\ &|M_1'(\xi_2)||v(t)| \leq c_1\end{aligned}$$

assim aplicando em (2.56) resulta que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq \\ &2c_0k\|w(t)\||w'(t)| + 2c_1k\|w(t)\||w'(t)|\end{aligned}$$

tomando $c_2 = \max\{2c_0k, 2c_1k\}$ **e aplicando a desigualdade elementar** $2ab \leq a^2 + b^2$ **segue que**

$$\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq$$
$$c_2[\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2]$$

de onde

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} +$$
$$+|M'(\|u(t)\|^2)||\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2|\|w(t)\|^2 + |M_1'(\|u(t)\|^2)||\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2||w(t)|^2 =$$
$$c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + 2|M'(\|u(t)\|^2)||((u(t), u'(t)))|\|w(t)\|^2 +$$
$$2|M_1'(\|u(t)\|^2)||((u(t), u'(t)))||w(t)|^2$$

novamente usando Cauchy-Schwarz e $2ab \leq a^2 + b^2$**, segue que**

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} +$$
$$+2|M'(\|u(t)\|^2)|(\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + 2|M_1'(\|u(t)\|^2)|(\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2)|w(t)|^2$$

sendo $u \in L^\infty(0, T_0; D(A))$ **então** $u \in L^\infty(0, T_0; V)$**. Daí segue que** $\|u(t)\|^2$ **varia em** $[0, c_3^2]$ **e como** M' **e** M_1' **são contínuas, então** $|M'(\|u(t)\|^2)|$ **e** $|M_1'(\|u(t)\|^2)|$ **são limitadas em** $\mathbb{R}$**. Temos também que** $u' \in L^\infty(0, T_0; V)$ **logo:**

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq$$
$$c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + c_4\|w(t)\|^2 + c_5|w(t)|^2$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq$$
$$c_6\|w(t)\|^2 + c_2|w'(t)|^2 + c_5|w(t)|^2$$

tomando $c_7 = \max\{c_5, c_6, c_2\}$ **na desigualdade anterior e integrando de** 0 **a** t**, obtemos**

$$|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2 \leq |w'(0)|^2 + M(\|u(0)\|^2)\|w(0)\|^2 +$$
$$M_1(\|u(0)\|^2)|w(0)|^2 + c_7\int_0^t [\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2]ds$$

de $(2.53)_2$ e das hipóteses sobre M e M_1 temos

$$|w'(t)|^2 + m_0\|w(t)\|^2 + m_1|w(t)|^2 \leq c_7 \int_0^t \{\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2\}ds$$

de onde segue que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 \leq \frac{c_7}{m_2} \int_0^t [\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2]ds$$

com $m_2 = \min\{1, m_0, m_1\}$ e usando a desigualdade de Gronwall (note que $\alpha = 0$), concluímos que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 = 0$$

daí segue que $|w(t)| = 0$, ou seja, $w(t) = 0$. Logo, $u(t) = v(t)$, $\forall t \in [0, T_0]$.

■

Corolário 2.1.1 (Aplicação). *Considere $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, com Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, limitado e com fronteira Γ regular, então $A = -\triangle$, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e obtemos:*

1. $u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$
2. $u' \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega))$
3. $u'' \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$
4. $\dfrac{d}{dt}(u'(t), v) + M(|\nabla u(t)|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + M_1(|\nabla u(t)|^2)(u(t), v) = (f(t), v)$ *em* $D'(0, T_0), \forall v \in H_0^1(\Omega)$
5. $u(x, 0) = u_0$ *e* $u'(x, 0) = u_1$, *com* $x \in \Omega$.

Demonstração: *Imediata. Basta utilizar o Teorema 1*

■

Capítulo 3

Solução Global

3.1 Teorema 2

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de solução fraca global para o seguinte problema de Cauchy

$$\left| \begin{array}{l} u'' + M(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)Au + M_1(|A^{\frac{1}{2}}u|^2)u + Au' = f \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde as condições sobre o operador A são as mesmas estabelecidas no capítulo 2, bem como as condições sobre as funções M e M_1. Assim, se $T > 0$ é um número real fixado, porém arbitrário, então temos o seguinte resultado que assegura a existência de solução fraca global para o problema (3.1).

Observação 3.1.1. *Estamos denotando por $((\ ,\ )), \|\ .\ \|$ e $(\ ,\ ), |\ .\ |$ o produto interno e norma dos espaços V e H, respectivamente.*

Teorema 3.1.1. *Sejam M e M_1 funções satisfazendo as hipóteses estabelecidas anteriormente. Se $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in V$ e $f \in L^2(0,T;V)$, então existe uma única função vetorial $u : [0,T] \to H$ tal que,*

$$u \in L^\infty(0,T;D(A)) \tag{3.2}$$

$$u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \tag{3.3}$$

$$u'' \in L^2(0,T;H) \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) + M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v) + ((u'(t),v)) = (f(t),v) \tag{3.5}$$

$$\text{no sentido de } D'(0,T), \forall v \in V$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } u'(0) = u_1 \tag{3.6}$$

Demonstração: Novamente fazemos por etapas.

3.1.1 Soluções Aproximadas

Considere $\{\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ uma base hilbertiana de H constituída de vetores próprios do operador A e $\{\lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbf{N}}$ os seus valores próprios correspondente. Tome $V_m = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m]$ o subspaço vetorial de dimensão finita gerado pelos m primeiros vetores $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m\}$. Assim, obtemos o seguinte problema aproximado associado a (3.1):

Determinar $u_m(t) \in V_m$ com $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j(x)$ e sendo os g_{jm} de classe C^2, determinados de modo a satisfazer, $\forall\ j = 1, 2, 3, ..., m$, o seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
&(u''_m(t), \omega_j) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), \omega_j) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \omega_j) + \qquad (3.7)\\
&(Au'_m(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j)\\
&u_m(0) = u_{0m} = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{0\nu} w_\nu \to u_0 \ em\ D(A) \qquad (3.8)\\
&u'_m(0) = u_{1m} = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{1\nu} w_\nu \to u_1 \ em\ V \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

o qual também possui sulução. Para justificar a existência de solução do problema aproximado procedemos de forma análoga ao que foi feito no capítulo 2.

Note que as convergências acima são devidas a densidade de V_m nos espaços $D(A)$ e V. Por outro lado sabemos que:

$$
\begin{aligned}
u_m(t) &= \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m\\
u'_m(t) &= \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m\\
u''_m(t) &= \sum_{\nu=1}^{m} g''_{\nu m}(t) w_\nu \in V_m
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Au_m(t) &= \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)(Aw_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\lambda_\nu w_\nu \in V_m \\
(u''_m(t), \omega_j) &= \sum_{\nu=1}^{m} g''_{\nu m}(t)(\omega_\nu, \omega_j) = g''_{jm}(t) \qquad (3.10)\\
(Au'_m(t), \omega_j) &= \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t)\lambda_\nu(\omega_\nu, \omega_j) = \lambda_j g'_{jm}(t) \\
Au'_m(t) &= \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t)(Aw_\nu) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t)\lambda_\nu w_\nu \in V_m
\end{aligned}
$$

logo

$$M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), \omega_j) = M(\|u_m(t)\|^2)[\sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\lambda_\nu(\omega_\nu, \omega_j)]$$

de onde obtemos

$$M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), \omega_j) = M(\|u_m(t)\|^2)\lambda_j g_{jm}(t) \qquad (3.11)$$

de maneira análoga para

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \omega_j)$$

temos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), \omega_j) = M_1(\|u_m(t)\|^2)g_{jm}(t) \qquad (3.12)$$

agora fazendo $t = 0$ **em** $u_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(t)\omega_\nu$ **e** $u'_m(t) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(t)\omega_\nu$**, segue que:**

$$u_m(0) = \sum_{\nu=1}^{m} g_{\nu m}(0)\omega_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_{0\nu}\omega_\nu = u_{0m} \textbf{ de onde } g_{\nu m}(0) = \alpha_{0\nu} \qquad (3.13)$$

$$u'_m(0) = \sum_{\nu=1}^{m} g'_{\nu m}(0)\omega_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} \beta_{1\nu}\omega_\nu = u_{1m} \textbf{ de onde } g'_{\nu m}(0) = \beta_{1\nu} \qquad (3.14)$$

Assim usando (3.10),(3.11),(3.12),(3.13) e (3.14), as equações do problema aproximado ficam $\forall\ j = 1, 2, ..., m$**:**

$$
\begin{aligned}
&g''_{jm}(t) + \lambda_j M(\|u_m(t)\|^2)g_{jm}(t) + M_1(\|u_m(t)\|^2)g_{jm}(t) + \lambda_j g'_{jm}(t) = (f(t), \omega_j) \\
&g_{jm}(0) = \alpha_{0j} \\
&g'_{jm}(0) = \beta_{1j}
\end{aligned}
$$

Note que as m equações no sistema acima equivalem a uma EDO do tipo $Y' = F(Y,t)$ que satisfaz as condições do teorema de existência de Carathéodory, de fato:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} g''_{1m}(t) & + & \lambda_1 M(\|u_m(t)\|^2) g_{1m}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{1m}(t) & + & \lambda_1 g'_{1m}(t) & = & (f(t),\omega_1) \\ g''_{2m}(t) & + & \lambda_2 M(\|u_m(t)\|^2) g_{2m}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{2m}(t) & + & \lambda_2 g'_{2m}(t) & = & (f(t),\omega_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ g''_{mm}(t) & + & \lambda_m M(\|u_m(t)\|^2) g_{mm}(t) & + & M_1(\|u_m(t)\|^2) g_{mm}(t) & + & \lambda_m g'_{mm}(t) & = & (f(t),\omega_m) \end{array} \right.$$

e

$$\left| \begin{array}{ccccccc} g_{1m}(0) & = & \alpha_{01} & ; & g'_{1m}(0) & = & \beta_{11} \\ g_{2m}(0) & = & \alpha_{02} & ; & g'_{2m}(0) & = & \beta_{12} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{mm}(0) & = & \alpha_{0m} & ; & g'_{mm}(0) & = & \beta_{1m} \end{array} \right.$$

escrevendo na forma matricial as equações acima, temos:

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} + M(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} +$$

$$M_1(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} +$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1} = \begin{bmatrix} (f(t),w_1) \\ \vdots \\ (f(t),w_m) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

fazendo

$$B = M(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m} + M_1(\|u_m(t)\|^2) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix}_{m\times m}, \quad D = \begin{bmatrix} (f(t),\omega_1) \\ (f(t),\omega_2) \\ \vdots \\ (f(t),\omega_m) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad X = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

$$X' = \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}, \quad X'' = \begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

e também

$$X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \vdots \\ \alpha_{0m} \end{bmatrix}_{m\times 1} \quad e \quad X_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1m} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

o sistema toma a forma matricial abaixo:

$$\left| \begin{array}{l} X'' + BX + CX' = D \\ X(0) = X_0 \ e \ X'(0) = X_1 \end{array} \right.$$

que podemos reescrever na forma:

$$\left| \begin{array}{l} X'' = -BX - CX' + D \\ X(0) = X_0 \ e \ X'(0) = X_1 \end{array} \right. \tag{3.15}$$

para transformar (3.15) em um sistema de 1ª ordem, considere:

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}_{2m\times 1}, \ Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}_{2m\times 1} \ e \ Y_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix}_{2m\times 1}$$

então,

$$\left| \begin{array}{l} Y' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & -C \end{bmatrix}_{2m\times 2m} Y + \begin{bmatrix} 0^* \\ D \end{bmatrix}_{2m\times 1} \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right.$$

onde I **matriz identidade de ordem** m, 0 **matriz nula de ordem** m **e** 0^* **matriz nula de ordem** $m \times 1$.

Fazendo $F(Y,t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B & -C \end{bmatrix}_{2m\times 2m} Y + \begin{bmatrix} 0^* \\ D \end{bmatrix}_{2m\times 1}$, **temos que o último sistema acima assume a forma de EDO desejada, que se segue:**

$$\left| \begin{array}{l} Y' = F(Y,t) = QY + R \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{3.16}$$

***Afirmação*: A EDO (3.16) atende as condições de Carathéodory, de fato:**

i) Fixando Y, **temos pela hipótese** $(H.1)$, M **e** M_1 **são contínuas, então** $M(\|u_m(t)\|^2)$ **e** $M_1(\|u_m(t)\|^2)$ **são contínua em** t $(j = 1, ..., m)$. **Logo,** $-B$ **é mensurável em** t, **e como** $-C$ **é constante com relação** t **segue daí que também é mensurável em** t. **Portanto,** Q **é mensurável em** t.

Agora para R, **como** $f \in L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$ **e** $\omega_j \in L^2(\Omega)$, **daí** $(f(t), \omega_j)$ **é mensurável, logo** D **é mensurável em** t, **portanto** R **é mensurável em** t.

ii) Fixando t, **vamos mostrar que** F **é contínua em** Y. **Note que** R **é contínua em** Y, **pois é constante em relação a** Y. **Para continuidade de** QY **basta mostrar que** $-B$ **é contínua em** Y.

Seja $\Pi_j(Y) = g_{jm} \quad (j = 1, ..., m)$ a projeção do $\mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}$ que é contínua. Então para cada t fixado temos,

$$Y \longmapsto \|u_m(t)\|^2 = ((u_m(t), u_m(t))) = (Au_m(t), u_m(t))$$

Note que $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\omega_j$, logo $\|u_m(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2 \lambda_j(\omega_j, \omega_j)$ de onde segue que, $\|u_m(t)\|^2 = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}^2(t)\lambda_j$ e pode ser escrita como

$$Y \quad \longmapsto \quad \sum_{j=1}^{m} [\Pi_j(Y)]^2 \lambda_j$$

assim,

$$Y \quad \longmapsto \quad \|u_m(t)\|^2$$

é contínua para t fixo. Daí $\lambda_j M(\|u_m(t)\|^2)$ e $M_1(\|u_m(t)\|^2)$ são contínuas em Y $(j = 1, 2, ..., m)$. Portanto, fixado t, a função $F(Y, t)$ é contínua em Y.

iii)Seja K um compacto de $E \times [0, T]$, onde E é o conjunto:

$$E = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{2m} \; ; \; \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq \gamma \; com \; \gamma > 0 \right\}$$

Devemos mostrar que existe uma função real $m_k(t) \in L^1(0, T)$, tal que:

$$\|F(Y, t)\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq m_k(t) \; , \; \forall \; (Y, t) \in E \times [0, T]$$

$*$) Denotamos por $\| \, . \, \|_{p \times q}$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^{p \times q}$.

Aplicando em $F(Y, t) = QY + R$, temos que,

$$\|F(Y, t)\|_{2m \times 1} \leq \|QY\|_{2m \times 1} + \|R\|_{2m \times 1} \leq \|Q\|_{2m \times 2m} \|Y\|_{2m \times 1} + \|R\|_{2m \times 1}$$

mas $Y \in E$, temos que $\|Y\|_{2m \times 1} \leq \gamma$. Então a desigualdade acima fica,

$$\|F(Y, t)\|_{2m \times 1} \leq \gamma \|Q\|_{2m \times 2m} + \|R\|_{2m \times 1}$$

Sabemos que $M, M_1 \in C^1([0, \infty); \mathbb{R})$, em particular, em $[0, T]$, segue que todas as entradas da matriz $-B$ e $-C$ são limitadas por uma constante. Portanto, $\|Q\| \leq c$. Em relação à matriz R, todas as suas entradas, em valor absoluto, são iguais a

$$|(f(t), \omega_j)| \leq |f||\omega_j| = |f|$$

então,

$$|F(Y,t)| \leq c + |f| \equiv m_k(t)$$

note que $m_k(t)$ **é integrável em** $[0,T]$**, pois** c **é constante e** $f \in L^2(0,T;H)$**. Portanto, a EDO (3.16) satisfaz as condições de Carathéodory, daí existe uma solução** $u_m(t)$ **em** $[0,t_m)$**,** $\forall\, m$ **e** $\forall\, t_m < T$**.**

3.1.2 Estimativas a Priori

Como a primeira equação (3.7) do sistema do problema aproximado é válida para todo ω_j**,** $j = 1, 2, \cdots, m$**, segue por linearidade que**

$$(u''_m(t), v) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v) + (Au'_m(t), v) = (f(t), v) \tag{3.17}$$

é válida para todo $v \in V_m$**.**

Estimativa I

Tomando $v = 2u'_m(t)$**, na equação aproximada (3.17) e observando que**

$$(Au_m(t), u'_m(t)) = ((u_m(t), u'_m(t)))$$
$$(Au'_m(t), u'_m(t)) = ((u'_m(t), u'_m(t))) = \|u'_m(t)\|^2$$

obtemos:

$$2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2M(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t), u'_m(t))) + 2\|u'_m(t)\|^2 = -2M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u'_m(t)) + 2(f(t), u'_m(t)) \tag{3.18}$$

note que:

$$2(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{d}{dt}(u'_m(t), u'_m(t)) = \frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2$$
$$2((u'_m(t), u_m(t))) = \frac{d}{dt}((u_m(t), u_m(t))) = \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + 2\|u'_m(t)\|^2 = -2M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u'_m(t)) + 2(f(t), u'_m(t)) \tag{3.19}$$

Seja

$$\widehat{M}(\lambda) = \int_0^{\lambda} M(s)ds$$

daí segue

$$\widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) = \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds \;\; \geq \;\; \int_0^{\|u_m(t)\|^2} m_0 ds = m_0\|u_m(t)\|^2 \;\; \geq \;\; 0 \qquad (3.20)$$

então pelo teorema fundamental do cálculo e fazendo $y = \|u_m(t)\|^2$ **temos:**

$$\frac{d}{dy}\left[\widehat{M}(y)\right] = \frac{d}{dy}\int_0^{y} M(s)ds = M(y) = M(\|u_m(t)\|^2)$$

e pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}\widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) = M(\|u_m(t)\|^2)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \qquad (3.21)$$

substituindo (3.21) em (3.19) e integrando-se de 0 **a** $t \leq t_m < T$ **obtemos:**

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|u'_m(s)|^2ds + \int_0^t \frac{d}{ds}\widehat{M}(\|u_m(s)\|^2)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2ds = \int_0^t 2(f(s), u'_m(s))ds - \int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)(u_m(s), u'_m(s))ds$$

daí,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|u'_m(s)|^2ds + \int_0^t \frac{d}{ds}\widehat{M}(\|u_m(s)\|^2)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2ds \leq \int_0^t 2|(f(s), u'_m(s))|ds + \int_0^t 2|M_1(\|u_m(s)\|^2)||(u_m(s), u'_m(s))|ds$$

como $0 < m_1 \leq M_1(\lambda) \;\leq m'_1 \;\; \forall\lambda \;\geq\;\; 0$ **temos que**

$$\int_0^t 2|M_1(\|u_m(s)\|^2)||(u_m(s), u'_m(s)|ds \;\leq\; m'_1\int_0^t 2|(u_m(s), u'_m(s))|ds$$

e aplicando na desigualdade anterior obtemos,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|u'_m(s)|^2ds + \int_0^t \frac{d}{ds}\widehat{M}(\|u_m(s)\|^2)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2ds \leq \int_0^t 2|(f(s), u'_m(s))|ds + m'_1\int_0^t 2|(u_m(s), u'_m(s))|ds$$

usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $2ab \leq a^2+b^2$**, resulta que:**

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|u'_m(s)|^2ds + \int_0^t \frac{d}{ds}\widehat{M}(\|u_m(s)\|^2)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2ds \leq \int_0^t |f(s)|^2ds + \int_0^t |u'_m(s)|^2ds + m'_1\int_0^t |u'_m(s)|^2ds + m'_1\int_0^t |u_m(s)|^2ds$$

logo

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |f(s)|^2 ds + \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds +$$
$$m'_1 \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds + m'_1 \int_0^t |u_m(s)|^2 ds + |u'_m(0)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(0)\|^2)$$

note que em (3.8) e (3.9) temos as covergências

$$u_{0m} \to u_0 \;\; em \;\; D(A)$$
$$u_{1m} \to u_1 \;\; em \;\; V$$

e como $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$**, então**

$$u_{0m} \to u_0 \;\; em \;\; V$$
$$u_{1m} \to u_1 \;\; em \;\; H$$

portanto, devido ao fato de que $\widehat{M} \in C^0([0, +\infty); \mathbb{R})$ **temos as seguintes convergências em** $\mathbb{R}$**:**

$$\|u_{0m}\| \to \|u_0\| \textbf{ de onde } \|u_{0m}\|^2 \to \|u_0\|^2$$
$$|u_{1m}| \to |u_1| \textbf{ de onde } |u_{1m}|^2 \to |u_1|^2$$
$$\widehat{M}(\|u_{0m}\|^2) \to \widehat{M}(\|u_0\|^2)$$

assim, existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 **e** c_4 **independentes de** m **e** t**, tais que:**

$$\begin{array}{rcl} \widehat{M}(\|u_{0m}\|^2) & \leq & c_1 \\ |u_{1m}|^2 & \leq & c_2 \\ m'_1 \displaystyle\int_0^t |u_m(s)|^2 ds & \leq & c_3 \displaystyle\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \\ \displaystyle\int_0^T |f(s)|^2 ds & \leq & \displaystyle\int_0^T \overline{c}\, \|f(s)\|^2 ds \;\; \leq \;\; c_4 \end{array}$$

portanto

$$|u'_m(t)|^2 + \widehat{M}(\|u_m(t)\|^2) + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leq c + (1 + m'_1) \int_0^t |u'_m(s)|^2 ds +$$
$$c_3 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq c + c_5 \int_0^t (|u'_m(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2) ds$$

onde $c = c_1 + c_2 + c_4$ **e** $c_5 = max\{(1 + m_1'), c_3\}$**.**

Substituindo (3.20) na desigualdade anterior temos:

$$|u_m'(t)|^2 + m_0\|u_m(t)\|^2 + 2\int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leq c + c_5\int_0^t (|u_m'(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2)ds$$

de onde fazendo $c_6 = min\{1, m_0\}$ **segue:**

$$|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq \frac{c}{c_6} + \int_0^t (|u_m'(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2)(\frac{c_5}{c_6})ds$$

tomando $\varphi(t) = |u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2$ **temos, usando Gronwall, que:**

$$\varphi(t) = |u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leq ce^{\int_0^t \frac{c_5}{c_6}ds} = ce^{\frac{c_5}{c_6}t}$$

ou seja

$$|u_m'(t)| \leq c_7, \ \ \forall m, \forall t \in [0, t_m) \tag{3.22}$$

$$\|u_m(t)\| \leq c_8, \ \ \forall m, \forall t \in [0, t_m) \tag{3.23}$$

e ainda

$$\int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leq c_9, \ \ \forall m, \forall t \in [0, t_m) \tag{3.24}$$

Com as estimativas (3.22), (3.23), (3.24) e usando o teorema de Carathéodory, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ **ao intervalo** $[0, T]$**. Assim, tomando o supremo essencial nas estimativas adequadas temos:**

$$(u_m)_{m\in\mathbf{N}} \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; V)$$
$$(u_m')_{m\in\mathbf{N}} \text{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$$

Estimativa II

Tomando $v = Au_m(t)$ **na equação aproximada (3.17), obtemos:**

$$(u_m''(t), Au_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), Au_m(t)) + (Au_m'(t), Au_m(t)) \tag{3.25}$$
$$+M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), Au_m(t)) = (f(t), Au_m(t))$$

temos que:

$$
\begin{aligned}
&(u''_m(t), Au'_m(t)) = \frac{d}{dt}(u'_m(t), Au_m(t)) - (u'_m(t), Au'_m(t))\\
&(Au_m(t), Au'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2\\
&(u_m(t), Au_m(t)) = ((u_m(t), u_m(t))) = \|u_m(t)\|^2\\
&(Au_m(t), Au_m(t)) = |Au_m(t)|^2\\
&(u'_m(t), Au'_m(t)) = ((u'_m(t), u'_m(t))) = \|u'_m(t)\|^2
\end{aligned}
$$

usando estes resultados em (3.25) obtemos

$$
\frac{d}{dt}(u'_m(t), Au_m(t)) - \|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2 +
M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2 = (f(t), Au_m(t))
$$

isto é,

$$
\frac{d}{dt}\left[2(u'_m(t), Au_m(t)) + |Au_m(t)|^2\right] + 2M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + 2\|u'_m(t)\|^2 +
2M_1(\|u_m(t)\|^2)\|u_m(t)\|^2 = 2(f(t), Au_m(t))
$$

integrando a última igualdade de 0 **até** $t \leq t_m < T$ **obtemos,**

$$
\int_0^t \frac{d}{ds}\left[2(u'_m(s), Au_m(s)) + |Au_m(s)|^2\right] ds + \int_0^t 2M(\|u_m(s)\|^2)|Au_m(s)|^2 ds +
\int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)\|u_m(s)\|^2 ds = \int_0^t 2\|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t 2(f(s), Au_m(s)) ds
$$

de onde segue que:

$$
\begin{aligned}
&2(u'_m(t), Au_m(t)) - 2(u'_m(0), Au_m(0)) + |Au_m(t)|^2 - |Au_m(0)|^2 +\\
&\int_0^t 2M(\|u_m(s)\|^2)|Au_m(s)|^2 ds + \int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)\|u_m(s)\|^2 ds =\\
&\int_0^t 2\|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t 2(f(s), Au_m(s)) ds
\end{aligned}
$$

daí,

$$
\begin{aligned}
&|Au_m(t)|^2 + \int_0^t 2M(\|u_m(s)\|^2)|Au_m(s)|^2 ds + \int_0^t 2M_1(\|u_m(s)\|^2)\|u_m(s)\|^2 ds \leq\\
&2|(u'_m(t), Au_m(t))| + 2|(u'_m(0), Au_m(0))| + |Au_m(0)|^2 + \int_0^t 2\|u'_m(s)\|^2 ds +\\
&\int_0^t 2|(f(s), Au_m(s))| ds
\end{aligned}
$$

agora usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $2(\sqrt{2}a)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) \leq 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$ **resulta:**

$$|Au_m(t)|^2 + 2\int_0^t M(\|u_m(s)\|^2)|Au_m(s)|^2 ds + 2\int_0^t M_1(\|u_m(s)\|^2)\|u_m(s)\|^2 ds \leq$$
$$2|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 + 2|u_m'(0)||Au_m(0)| + |Au_m(0)|^2 + \int_0^t 2\|u_m'(s)\|^2 ds +$$
$$\int_0^T |f(s)|^2 ds + \int_0^t |Au_m(s)|^2 ds$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 + 2\int_0^t M(\|u_m(s)\|^2)|Au_m(s)|^2 ds + 2\int_0^t M_1(\|u_m(s)\|^2)\|u_m(s)\|^2 ds \leq$$
$$2|u_m'(t)|^2 + 2|u_{1m}||Au_{0m}| + |Au_{0m}|^2 + 2\int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds + \int_0^T |f(s)|^2 ds +$$
$$\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds$$

das estimativas (3.22), (3.24) e usando as convergências de u_{1m} **e** u_{0m} **podemos concluir que existe uma constante** c_3 **tal que**

$$2|u_m'(t)|^2 + 2|u_{1m}||Au_{0m}| + |Au_{0m}|^2 + 2\int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds + \int_0^T |f(s)|^2 ds \leq c_3 \tag{3.26}$$

aplicando (3.26) na desigualdade acima obtemos:

$$\frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 \leq c_3 + \int_0^t |Au_m(s)|^2 ds$$

e usando novamente o lema de Gronwall segue que:

$$|Au_m(t)| \leq c_4, \;\; \forall m, \;\; \forall t \in [0, t_m) \tag{3.27}$$

portanto, tomando o supremo essencial temos:

$$(Au_m) \textbf{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; H) \tag{3.28}$$

com as limitações (3.23) e (3.27) conseguimos mostrar que:

$$(u_m) \textbf{ é } \textit{limitada em } L^\infty(0, T; D(A)) \tag{3.29}$$

Estimativa III

Tomando $v = u_m''(t)$ **na equação aproximada (3.17), obtemos:**

$$(u_m''(t), u_m''(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u_m''(t)) + M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u_m''(t)) +$$
$$((u_m'(t), u_m''(t))) = (f(t), u_m''(t))$$

ou seja,

$$2|u_m''(t)|^2 + 2M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u_m''(t)) + 2M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), u_m''(t)) +$$
$$\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 = 2(f(t), u_m''(t))$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integrando de 0 **a** t**, temos**

$$2\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds + \|u_m'(t)\|^2 \leq \|u_m'(0)\|^2 + 2\int_0^t |M(\|u_m(s)\|^2)||Au_m(s)||u_m''(s)|ds +$$
$$2\int_0^t |M_1(\|u_m(s)\|^2)||u_m(s)||u_m''(s)|ds + 2\int_0^t |f(s)||u_m''(s)|ds$$

note que $2ab \leq a^2 + b^2$ **que equivale a** $2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}ab = 2(\sqrt{2}a)(\frac{1}{\sqrt{2}}b) \leq 2a^2 + \frac{1}{2}b^2$**, e como** $|u_m(s)| \leq c_1\|u_m(s)\|$ **daí**

$$2\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds + \|u_m'(t)\|^2 \leq \|u_{1m}\|^2 + 2\int_0^t [|M(\|u_m(s)\|^2)||Au_m(s)|]^2 ds +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds + 2c_1^2\int_0^t [|M_1(\|u_m(s)\|^2)|\|u_m(s)\|]^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds +$$
$$2\int_0^T |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds$$

Sabemos que u_{1m} **é convergente, e também que pelas estimativas (3.23) e (3.27) e do fato de que** $M, M_1 \in C^1([0, +\infty))$ **podemos concluir que existe uma constante positiva** c**, independente de** m **e** t**, tal que**

$$2\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds + \|u_m'(t)\|^2 \leq c + \frac{3}{2}\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds$$

de onde segue que

$$\frac{1}{2}\int_0^t |u_m''(s)|^2 ds \leq c \ \forall m, \ \forall t \in [0, T] \tag{3.30}$$

logo

$$(u_m'') \textbf{ é } \textit{limitada em } L^2(0, T; H)$$

3.1.3 Passagem ao Limite

Das estimativas anteriores temos

$$(u_m) \text{ é } limitada\ em\ L^\infty(0,T;D(A))$$
$$(u'_m) \text{ é } limitada\ em\ L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$$
$$(u''_m) \text{ é } limitada\ em\ L^2(0,T;H)$$

usando o teorema de Banach-Alouglu-Bourbaki e observando que $L^2(0,T;H)$ **é Hilbert, podemos extrair uma subseqüência de** (u_m)**, que continuamos a denotar por** (u_m) **tal que:**

$$u_m \to u\ em\ L^\infty(0,T;D(A)),\ fraco\star \tag{3.31}$$
$$u'_m \to u'\ em\ L^\infty(0,T;H),\ fraco\star \tag{3.32}$$
$$u'_m \to u'\ em\ L^2(0,T;V),\ fraco \tag{3.33}$$
$$u''_m \to u''\ em\ L^2(0,T;H),\ fraco \tag{3.34}$$

usando o fato de que $L^\infty(0,T;D(A)) \hookrightarrow L^2(0,T;D(A))$ **e (3.31), segue que**

$$u_m \to u\ em\ L^2(0,T;D(A)),\ fraco$$

isto é,

$$(Au_m, \omega) \to (Au, \omega),\ \forall \omega \in L^2(0,T;H) \tag{3.35}$$

de forma análoga, deduzimos que

$$(Au_m, \omega) \to (Au, \omega),\ \forall \omega \in L^2(0,T;H) \tag{3.36}$$
$$(u''_m, \omega) \to (u'', \omega),\ \forall \omega \in L^2(0,T;H) \tag{3.37}$$

Convergência dos termos não-lineares

Por (3.31), (3.32) e pelo fato de que $L^\infty(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X)$ *com X Hilbert* **segue que**

$$(u_m) \text{ é } limitada\ em\ L^2(0,T;D(A))$$
$$(u'_m) \text{ é } limitada\ em\ L^2(0,T;V)$$

pelo lema de compacidade de Aubin-Lions, com $B_0 = D(A)$, e $B = B_1 = V$, podemos extrair uma subseqüência de (u_m), que continuamos denotando por (u_m), tal que $u_m \to u$ *forte em* $L^2(0,T;V)$. Daí temos que $\|u_m(t)\| \to \|u(t)\|$ *em* $L^2(0,T)$. E passando a uma subseqüência (u_m), se necessário, podemos supor que

$$\|u_m(t)\|^2 \to \|u(t)\|^2, \text{ quase sempre em } [0,T]$$

sendo M contínua, temos

$$M(\|u_m(t)\|^2) \to M(\|u(t)\|^2), \text{ quase sempre em } [0,T] \tag{3.38}$$

além disso, de $\|u_m(t)\|^2 \leq c$ segue que $M(\|u_m(t)\|^2) < \tau$ onde $\tau = max\{M(\lambda) : \ 0 < \lambda < \|u_m(t)\|^2\}$, portanto $\forall\, \theta(t) \in L^2(0,T)$ temos de (3.38)

$$M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t) \to M(\|u(t)\|^2)\theta(t), \text{ quase sempre em } [0,T]$$

note que:

$$M(\|u_m(t)\|^2) \leq \widetilde{c} \iff \int_0^T M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t)dt \leq \widetilde{c}\int_0^T \theta(t)dt \leq \overline{c}$$

pois $\theta \in L^2(0,T) \subset L^1(0,T)$.

Desses dois últimos resultados, e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_0^T M(\|u_m(t)\|^2)\theta(t)dt \to \int_0^T M(\|u(t)\|^2)\theta(t)dt \ \ \forall\theta \in L^2(0,T)$$

ou seja,

$$M(\|u_m(t)\|^2) \ \rightharpoonup \ M(\|u(t)\|^2) \text{ em } L^2(0,T) \tag{3.39}$$

de (3.35) segue que

$$(Au_m(t), v) \ \longrightarrow \ (Au(t), v) \text{ em } L^2(0,T), \ \ \forall v \in V_{m_0} \text{ com } m_0 \text{ fixo} \tag{3.40}$$

usando (3.39) e (3.40), concluímos $\forall\theta \in L^2(0,T);\ \forall v \in V_{m_0}$ que

$$\int_0^T M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v)\theta(t)dt \ \to \ \int_0^T M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v)\theta(t)dt$$

assim mostramos para $\theta \in D(0,T) \subset L^2(0,T)$ que

$$M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v) \ \to \ M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v) \text{ em } D'(0,T);\ \forall v \in V_{m_0} \tag{3.41}$$

e como V_m é denso em V logo $\forall v \in V$.

De maneira análoga obtemos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2) \rightharpoonup M_1(\|u(t)\|^2) \ em \ L^2(0,T) \tag{3.42}$$

e também

$$(u_m, \omega) \to (u, \omega), \ \forall \omega \in L^2(0,T;H), \tag{3.43}$$

de onde segue que

$$(u_m(t), v) \longrightarrow (u(t), v) \ em \ L^2(0,T), \ \forall v \in V_{m_0} \ com \ m_0 \ fixo \tag{3.44}$$

portanto de (3.42) e (3.44) obtemos

$$M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v) \rightarrow M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v) \ em \ L^2(0,T); \ \forall v \in V_{m_0} \tag{3.45}$$

e como V_m é denso em H logo vale para todo $v \in H$.

Multiplicando (3.7) por $\theta(t) \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), v)\theta(t)dt + \\ &\int_0^T (Au'_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T M_1(\|u_m(t)\|^2)(u_m(t), v)\theta(t)dt = \\ &\int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt\end{aligned} \tag{3.46}$$

tomando o limite na expressão acima, quando $m \to +\infty$ e usando (3.36), (3.37), (3.41) e (3.45) temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T M(\|u(t)\|^2)(Au(t), v)\theta(t)dt + \\ &\int_0^T M_1(\|u(t)\|^2)(u(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (Au'(t), v)\theta(t)dt = \\ &\int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt \ \forall \theta \in D(0,T) \subset L^2(0,T) \ e \ \forall v \in V.\end{aligned}$$

note que:

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta(t)dt = (u'(t),v)\theta(t)|_0^T - \int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)dt = \langle \frac{d}{dt}(u'(t),v),\theta(t)\rangle$$
$$\int_0^T M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v)\theta(t)dt = \langle M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v),\theta(t)\rangle$$
$$\int_0^T M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v)\theta(t)dt = \langle M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v),\theta(t)\rangle$$
$$\int_0^T (Au'(t),v)\theta(t)dt = \langle (Au'(t),v),\theta(t)\rangle = \langle ((u'(t),v)),\theta(t)\rangle$$
$$\int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt = \langle (f(t),v),\theta(t)\rangle$$

logo

$$\langle \frac{d}{dt}(u'(t),v),\theta(t)dt\rangle + \langle M(\|u(t)\|^2)(Au(t),v),\theta(t)\rangle + \langle M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v),\theta(t)\rangle +$$
$$\langle ((u'(t),v)),\theta(t)\rangle = \langle (f(t),v),\theta(t)\rangle \ \ \forall\theta(t)\in D(0,T) \ \ \forall v\in V$$

daí

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + M(\|u(t)\|^2)((u(t),v)) + M_1(\|u(t)\|^2)(u(t),v) + ((u'(t),v)) = (f(t),v)$$
$$em \ \ D'(0,T) \ \ e \ \ \forall v\in V.$$

3.1.4 Condições Iniciais

De resultados anteriores temos que

$$u\in L^\infty(0,T;D(A))\hookrightarrow L^2(0,T;D(A))$$
$$u'\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$$
$$u''\in L^2(0,T;H)$$

e usando resultado de regularidade, concluímos que

$$u\in C^0([0,T];V)$$
$$u'\in C^0([0,T];H)$$

de forma que, $u(0)$, $u'(0)$ **fazem sentido. Considere** $\theta \in C^1([0,T])$, **com** $\theta(0) = 1$ **e** $\theta(T) = 0$ **e** $v \in V$. **Como**

$$u'_m \to u' \ em \ L^2(0,T;V) \tag{3.47}$$

segue que,

$$((u'_m, w)) \to ((u', w)), \forall w \in L^2(0,T;V)$$

tomando $\omega(t) = \theta(t)v$, $v \in V$ **e integrando de** 0 **a** T, **temos**

$$\int_0^T ((u'_m(t), v))\theta(t)dt \to \int_0^T ((u'(t), v))\theta(t)dt$$

isto é,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((u'_m(t), v))\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}((u'(t), v))\theta(t)dt \tag{3.48}$$

usando a integração por partes em ambas as integrais de (3.48), resulta

$$-((u_m(0), v)) - \int_0^T ((u_m(t), v))\theta'(t)dt \to -((u(0), v)) - \int_0^T ((u(t), v))\theta'(t)dt \tag{3.49}$$

de (3.31), obtemos que

$$\int_0^T ((u_m(t), v))\varphi dt \to \int_0^T ((u(t), v))\varphi dt, \forall v \in V, \forall \varphi \in L^1(0,T)$$

assim

$$((u_m(0), v)) \to ((u(0), v)), \ \forall v \in V \tag{3.50}$$

mas

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ em \ D(A) \hookrightarrow V$$

então

$$((u_m(0), v)) \to ((u_0, v)), \forall v \in V \tag{3.51}$$

de (3.50) e (3.51), obtemos

$$((u(0), v)) = ((u_0, v)), \forall v \in V$$

daí $u(0) = u_0$.

Para provarmos que $u'(0) = u_1$, **usamos as convergências (3.9) e (3.32), e procedendo de forma análoga, assim obtemos**

$$((u'(0), v)) = ((u_1, v)), \ \forall v \in H$$

logo $u'(0) = u_1$.

3.1.5 Unicidade

Considere u e v funções de $[0,T]$ em H soluções do nosso problema (3.1) nas condições do Teorema, e considere $w(t)=u(t)-v(t)$. Então,

$$w \in L^{\infty}(0,T;D(A)) \tag{3.52}$$

$$w' \in L^{\infty}(0,T;H)\cap L^{2}(0,T;V) \tag{3.53}$$

$$w'' \in L^{2}(0,T;H) \tag{3.54}$$

e

$$\begin{aligned}
&w''(t)+M(\|u(t)\|^2)Au(t)+M(\|v(t)\|^2)Av(t)+M_1(\|u(t)\|^2)u(t)-\\
&M_1(\|v(t)\|^2)v(t)+Aw(t)=0 \qquad (3.55)\\
&w(0)=0 \;\; e \;\; w'(0)=0
\end{aligned}$$

somando e subtraindo os termos $M(\|u(t)\|^2)Av(t)$, $M_1(\|u(t)\|^2)v(t)$ em (3.55)$_1$ e agrupando os termos comuns como $Aw(t)=Au(t)-Av(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&w''(t)+[M(\|u(t)\|^2)+1]Aw(t)+[M(\|u(t)\|^2)-M(\|v(t)\|^2)]Av(t)+\\
&M_1(\|u(t)\|^2)w(t)+[M_1(\|u(t)\|^2)-M_1(\|v(t)\|^2)]v(t)=0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

sendo $M,M_1\in C^1([0,+\infty))$ podemos usar o Teorema do Valor Médio em (3.56) para obter

$$\begin{aligned}
&w''(t)+[M(\|u(t)\|^2)+1]Aw(t)+M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2]Av(t)+\\
&M_1(\|u(t)\|^2)w(t)+M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2]v(t)=0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde ξ_1 e ξ_2 pertencem ao intervalo aberto com extremidades $\|u(t)\|^2$ e $\|v(t)\|^2$. Pela regularidade da solução obtida, podemos fazer o produto interno de (3.57) com $2w'\in L^2(0,T;V)$ pois $w'\in L^{\infty}(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)$ portanto

$$\begin{aligned}
&(w''(t),2w'(t))+[M(\|u(t)\|^2)+1](Aw(t),2w'(t))+M_1(\|u(t)\|^2)(w(t),2w'(t))+\\
&M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2](Av(t),2w'(t))+M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2](v(t),2w'(t))=0
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|w'(t)|^2+[M(\|u(t)\|^2)+1]\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2+2M'(\xi_1)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2](Av(t),w'(t))+\\
&M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2+2M_1'(\xi_2)[\|u(t)\|^2-\|v(t)\|^2](v(t),w'(t))=0
\end{aligned}$$

usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2) + 1]\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq \\
&\leq 2|M'(\xi_1)||(\|u(t)\| - \|v(t)\|)(\|u(t)\| + \|v(t)\|)||\triangle v(t)||w'(t)| + \\
&2|M_1'(\xi_2)||(\|u(t)\| - \|v(t)\|)(\|u(t)\| + \|v(t)\|)||v(t)||w'(t)|
\end{aligned} \tag{3.58}$$

note que $v, u \in L^\infty(0, T; D(A))$ **e** $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ **daí**

$$\begin{aligned}
&|\|u(t)\| - \|v(t)\|| \leq \|u(t) - v(t)\| = \|w(t)\| \\
&|\|u(t)\| + \|v(t)\|| \leq \|u(t)\| + \|v(t)\| \leq k \\
&|M'(\xi_1)||Av(t)| \leq c_0 \\
&|M_1'(\xi_2)||v(t)| \leq c_1
\end{aligned}$$

assim aplicando em (3.58) temos

$$\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2) + 1]\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 2c_0k\|w(t)\||w'(t)| + 2c_1k\|w(t)\||w'(t)|$$

tomando $c_2 = \max\{2c_0k, 2c_1k\}$ **e aplicando a desigualdade elementar** $2ab \leq a^2 + b^2$ **obtemos**

$$\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2) + 1]\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq c_2[\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2]$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2) + 1]\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + \\
&|M'(\|u(t)\|^2)||\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2|\|w(t)\|^2 + |M_1'(\|u(t)\|^2)||\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2||w(t)|^2 = \\
&c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + 2|M'(\|u(t)\|^2)||((u(t), u'(t)))|\|w(t)\|^2 + \\
&2|M_1'(\|u(t)\|^2)||((u(t), u'(t)))||w(t)|^2
\end{aligned}$$

novamente usando Cauchy-Schwarz e $2ab \leq a^2 + b^2$**, segue que**

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2) + 1]\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + \\
&+2|M'(\|u(t)\|^2)|(\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2)\|w(t)\|^2 + 2|M_1'(\|u(t)\|^2)|(\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2)|w(t)|^2
\end{aligned}$$

sendo $u \in L^\infty(0,T;D(A))$ **então** $u \in L^\infty(0,T;V)$**. Daí segue que** $\|u(t)\|^2$ **varia em** $[0,c_3^2]$ **e como** M **e** M' **são contínuas, então** $|M'(\|u(t)\|^2)|$ **e** $|M_1'(\|u(t)\|^2)|$ **são limitadas em** $\mathbb{R}$**. Temos também que** $u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ **logo:**

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2)+1]\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_2\{\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\} + c_4\|w(t)\|^2 + c_5|w(t)|^2$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt}\{|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2)+1]\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2\} \leq c_6\|w(t)\|^2 + c_2|w'(t)|^2 + c_5|w(t)|^2$$

tomando $c_7 = \max\{c_5, c_6, c_2\}$ **e integrando de** 0 **a** t**, obtemos**

$$|w'(t)|^2 + [M(\|u(t)\|^2)+1]\|w(t)\|^2 + M_1(\|u(t)\|^2)|w(t)|^2 \leq |w'(0)|^2 + [M(\|u(0)\|^2)+1]\|w(0)\|^2 + M_1(\|u(0)\|^2)|w(0)|^2 + c_7\int_0^t [\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2]ds$$

de (3.55)$_2$ **e das hipóteses sobre** M **e** M_1**, obtemos**

$$|w'(t)|^2 + m_0\|w(t)\|^2 + m_1|w(t)|^2 \leq c_7\int_0^t \{\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2\}ds$$

tomando $m_2 = \min\{1, m_0, m_1\}$**, temos que**

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 \leq \frac{c_7}{m_2}\int_0^t [\|w(s)\|^2 + |w(s)|^2 + |w'(s)|^2]ds$$

usando a desigualdade de Gronwall (note que $\alpha = 0$**), concluímos que**

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 = 0$$

daí $|w(t)| = 0$**, ou seja,** $w(t) = 0$**. Logo,** $u(t) = v(t)$**,** $\forall t \in [0,T]$**.**

■

Corolário 3.1.1 (Aplicação). *Considere* $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, *com* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$, *limitado e com fronteira* Γ *regular, então* $A = -\triangle$, $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *e obtemos:*

1. $u \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$
2. $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
3. $u'' \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega))$
4. $\dfrac{d}{dt}(u'(t), v) + M(|\nabla u(t)|^2)(\nabla u(t), \nabla v) + M_1(|\nabla u(t)|^2)(u(t), v) + ((u'(t), v)) =$ $(f(t), v)$ *em* $D'(0, T_0), \forall v \in H_0^1(\Omega)$
5. $u(x, 0) = u_0$ *e* $u'(x, 0) = u_1$, *com* $x \in \Omega$.

Demonstração: *Imediata. Basta utilizar o Teorema 2*

■

Considerações Finais

Ressaltamos que os resultados apresentados nesta dissertação de mestrado, são inéditos e relevantes na área de EDP não lineares em domínios limitados. Gostariamos de destacar que as técnicas utilizadas neste trabalho, se aplicam a diversos problemas de EDP abstrato não-linear, os quais pretendo dar continuidade nos referidos problemas, visando o doutoramento em EDP. Tais problemas foram conjecturados pelo meu orientador Prof. Dr. Jorge Ferreira, por exemplo, estudar um sistema acoplado nas não linearidades, e tentar obter resultados de sobre a existência de solução local e Global, decaimento exponencial e polinomial, estudar a solvabilidade do problema estudado nesta dissertação e do mesmo sistema mensionado acima, porém em domínio com fronteira móvel, domínios exterior e outros tipos de domínios, entre outros problemas que irão aparecer.

BIBLIOGRAFIA

[1] **BARTLE, R.G.,** *The Elements of Real Analysis*. **New York, , 1964.**

[2] **BRÉZIS, H.** *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones*. **Alianza Editoril. Madrid, París, 1984.**

[3] **CASTRO, N.** *Sobre um Problema Não-Linear de Evolução: Existência, comportamento assintótico e soluções periódicas*. **Tese de Doutorado. rio de Janeiro, 1995.**

[4] **CARRIER, G.F.** *On the vibration problem of elastic string*. **Q.J. Appl. Math 3, pp151-165, 1945.**

[5] **LIONS, J.L.** *Quelques méthodes de résolutions des prolémes aux limites non linéaris*. **Dunod, Paris, 1969.**

[6] **MATOS, M.P.** *Mathematical Analysis of the Nonlinear Model for the Virations of a string. Nonlinear Analyis. Theory, Methods & Applications*. **Vol. 17, no. 12, pp 1125-1137, 1991.**

[7] **MATOS, M.P., PEREIRA, D.C.** *On a Hiperbolic Equations with Strong Damping*. **Funkcialay Ekavacioj. Vol. 34, no. 2, pp 303-311, 1991.**

[8] **MATOS, M.P., FEREIRA, J., SANTOS, M. L. and PEREIRA, D.C.** *Hidden Regularity for the Hiperbolc-Parabolic Equations*. **(To Appear).**

[9] **FEREIRA, J.,** *Análise Funcional*. **Notas de aula da disciplina. UFPA, Belém. 2004**

[10] **MEDEIROS, L.A.,ANDRADE, N.G.,** *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*. **L.T.C, 1978.**

[11] **MEDEIROS, L.A.,***Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*. **Escola de Análise São Paulo, 1977.**

[12] **MEDEIROS, L.A.,MELLO, E.A.,** *A Integral de Lebesgue*. **textos de Métodos Matemáticos. IM-UFRJ, 1989.**

[13] **MEDEIROS, L.A.,MIRANDA, M.M.,** *Introdução aos Espaçoes de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. **Textos de Métodos Matemáticos. nº25, IM-UFRJ, 1993.**

[14] **SANTOS, M.L.,** *Equações Diferenciais Parciais*. **Notas de aula da disciplina.**

UFPA, Belém, 2004.

[15] **CALLEGARI, E., MANFRIN, R.,** *Global small solutions to Klein-Gordon-type equations with non-local non-linearities.* **PERGAMON, Nonlinear Analysis 38 (1999) 505-526.**

[16] **MIRANDA, M.M.,** *Análise Espestral em Espaços de Hilbert.* **IM-UFRJ, 1989.**

[17] **MIRANDA, M.M.,** *Traço para o dual dos Espaços de Sobolev.* **Atas do 28º Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191. São Paulo,1990.**

[18] **LIMA, G.J.M.** *Sobre a Equação de Klein-Gordon com não Linearidade do tipo Kirchhoff-Carrier.* **Dissertação de Mestrado. João Pessoa - Pb , 2004.**

[19] **KREYSZIG, E.** *Introductory Functional Analysis With Applications.* **John Wiley & Sons. Inc., Canada, 1978.**

[20] **RIVERA, J.E.M.** *Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* **Série Textos Avançados - LNCC, Rio de Janeiro, 2004.**

[21] **FRIEDMAN, A.** *Foundations of Modern Analysis.* **Dover, New York, 1982.**

[22] **YOSIDA, K.** *Functional Analysis.* **Springer-Verlag. 1971.**