UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Belém/PA
2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação Apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. *Dr.* **Jorge Ferreira**

Área de concentração:*Análise*

Belém/PA
2005

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIA EXATA E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Data da defesa: 12 de dezembro de 2005.
Conceito:

Banca Examinadora

Prof. Dr. JORGE FERREIRA - Orientador

Prof. Dr. MAURO DE LIMA SANTOS - Membro

Porf .Dr. DUCIVAL CARVALHO PEREIRA - Membro

A minha primeira e grande mestra, minha Mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por cada dia desta empleitada e por me permitir chegar até o final deste curso.

A minha esposa Ana Cláudia e ao meu filho Cláuber, pela dedicação, paciência e apoio durante esta camihada. Sua ajuda foi fundamental.

A minha Mãe Maria Gregória Seixas e a minha irmã Izabel as pessoas que mais se empenharam na minha formação pessoal e acadêmica.

Ao Professor Dr. Jorge Ferreira, pela orientação eficaz e amiga, pelo incentivo, confiança, credibilidade e dedicação na elaboração deste trabalho.

Ao Professor Mauro Lima Santos pelo apoio e colaboração que enriqueceu este trabalho.

Aos Professores: João Dos Santos Protázio, Ducival Carvalho Pereira, pelo incetivo e participação na minha formação acadêmica.

A todos que compõem o Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatistica.

Aos colegas do mestrado pelo incentivo, companherismo e cooperação durante o curso. Em especial: Lindomar, Carlos Alessandro, Heleno, Sebastião, Helena, Irazel, Ana Paula, Silvia,...

A todos que formam o Campus Universitário do Baixo Tocantins pelo apoio total. Em especial aos professores, Damião Bezerra, Waldir Abreu, Antônio Otaviano, Joice Otânia, Adelino Ferranti,Francisca Carvalho... pelos incentivos incondicionais.

"Aprendi o silêncio com os faladores, a tolerância com os intolerantes, a bondade com os maldosos; e, por estranho que pareça, sou grato a esses professores. ".

Kahlil Gibran, 1883-1931;

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência da solução fraca global para a equação diferencial parcial do tipo hiperbólica-parabólica não-linear.

$$(P)\begin{cases} (k_1(x,t)u')' + k_2(x,t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho \, u' = f \quad \text{em } Q, \\ u = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad (k_1 u)(x,0) = u_1(x) \ . \end{cases}$$

Onde k_1, k_2, f, u_0 e u_1 são funções que satisfazem as condições apropriadas, então obtemos a existência da solução fraca global com dados iniciais nulos e não-nulos respectivamente.

Palavra-Chave:

Abstract

In this work we study the existence of the global weak solution for the nonlinear partial differential equation of the hyperbolic-parabolic type

$$(P)\begin{cases} (k_1(x,t)u')' + k_2(x,t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \quad \text{in} \;\; Q, \\ u = 0 \;\; \text{on} \;\; \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad (k_1 u)(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where k_1, k_2, f, u_0 and u_1 are functions that satisfy appropriate conditions. We obtain the existence of the global weak solution with null and not null initial data respectively.

Key Words:

SUMÁRIO

Introdução

Os estudos de problemas de contorno definido em regiões variáveis teve início em 1923, a partir do trabalho de *Francisco Tricomi*, que estava interessado em estudar fluidos trânsônicos, a partir do operador diferencial

$$T[y] = yZ_{yy} + Z_{yy}, (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Se $y > 0$, T é eliptica; $y < 0$, T é hiperbólica e se $y = 0$, T é parabólica. Esse problema diferente originado de uma aplicação a indústria aeronáutica deu origem a uma série de investigações. Em 1958, G.Fichera procurou desenvolver uma teoria geral considerando apenas operadores lineares, utilizando métodos clássicos. Um modelo matemático que expressa esse tipo de problema é determinado por equações diferenciais parciais não-lineares em domínio cilíndricos. O exemplo mais famoso deste tipo de equação é:

$$u_t u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

denominada equação harmônica de Karman. Esta equação expressa a compressibilidade de um fluxo de gás em um meio transônico.

Um grande número de trabalhos envolvendo equações hiperbólica-parabólica são desenvolvidos em domínios cilíndricos e apenas poucos destes são estudados em domínios não-cilíndricos. No presente trabalho faremos um estudo detalhado deste tipo de equação em domínio não-cilíndrico.

Seja Q um domínio não-cilíndrico do R^{n+1}, com fronteira lateral Σ. Seja Ω um aberto limitado do R^n com fronteira bem regular Γ e $T > 0$ um número real fixado, porém arbitrário. Seja $Q_0 = \Omega \times (0, T)$ um cilíndro com fronteira lateral que denotamos por Σ' tal que $Q \subset Q_0$.

Em Q consideremos o seguinte problema misto:

$$(P)\begin{cases} (k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + \\ |u'(x,t)|^{\rho}u'(x,t) = f \quad em \quad Q \\ u = 0 \quad sobre \quad \sum \\ u(0) = 0, \quad (k_1u')(0) = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

sendo k_1, k_2, e f funções satisfazendo condições apropriadas. O problema (P) é uma versão não-linear da equação:

$$u'' - \Delta u - \Delta u'' = 0$$

que modela as vibrações transversais de uma vareta fina no espaço tridimensional. Para maiores informações ver [11].

Os problemas lineares, e não-lineares, para equações e sistemas de equações em domínios não-cilindricos têm sido tratados por diversos autores dentre eles: J.L.Lions [9], que introduziu o método da penalização para resolver o problema de exitência de solução. Usando o mesmo método, L.A. Medeiros, ver [12], estudou a existência de solução fraca para o problema misto:

$$u'' - \Delta u + F(u) = 0 \quad em \quad Q, \tag{0.2}$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfazem $sF(s) \geq 0$ e Q um domínio crescente.

J.Cooper e C.Bardos, ver [4], estudaram a existência e unicidade de soluções para a equação (0.2) introduzindo o termo não-linear $F(u) = |u|^{\alpha}u$, $(\alpha > 0)$ e considerando a fronteira Σ de Q globalmente "time-like", e Q não necessariamente crescente.

Em 1970, Strauss, ver [17], estudou o problema (P) com $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, sem o termo $-\Delta u''$ e com a não-linearidade considerada em [12], isto é:

$$u'' - \Delta u + F(u) = f \quad em \quad Q. \tag{0.3}$$

Podemos destacar, ainda, os trabalhos envolvendo a equação

$$k_1(x)u''(x,t) + k_2(x)u'(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad em \quad Q, \tag{0.4}$$

sendo $k_1(x) \geq 0 \;\; e \;\; k_2(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega$. Este resultado foi obtido por Bensoussan-Lions-Papanicolau, ver [1], considerando dados iniciais não-nulos. Medeiros, ver [12], estudou a existência de soluções fracas para a equação (0.4) mas considerando o termo não-linear $|u|^\rho u, \rho > 0$. Vragov, ver [18], estudou (0.4) para o caso em que k_1, k_2 dependem de $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, mas com condições iniciais nulas. Lar'kin, ver [10], estudou (0.4) com condições não-lineares mais gerais e com k_1, k_2 dependendo de $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, incluindo também f com fortes restrinções. Em 1988, D.C.Pereira, ver [14], estudou a existência e a unicidade de solução para a equação:

$$k_1(x,t)u''(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + |u(x,t)|^\rho u(x,t) = f(x,t) \;\; em \;\; Q, \tag{0.5}$$

com $\rho > 0$ se $n = 1, 2$ e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

Em 1995, Ferreira, ver [7], estudou a existência e decaimento exponencial, quando $t \to +\infty$, das soluções fracas do problema misto para a equação hiperbólica-parabólica não-linear:

$$(k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) + A(t)u(x,t) + F(u) = f(x,t) \;\; em \;\; Q, \tag{0.6}$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfaz $sF(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$ e $\{A(t), t \geq 0\}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$, generalizando a formulação original de (0.4).

Outros trabalhos que também tiveram significativa relevância na área foram os de: Ferreira-Pereira [8], Ferreira [9] e Ferreira-Lar'kin [10].

O objetivo deste tabalho é mostrar a existência de soluções globais fracas do problema (P) sobre a hipótese em que Q é monótono crescente. Apartir daqui daremos uma interpretação geométrica do domínio não-cilíndrico do problema no qual usaremos as seguintes notações:

$\Omega_s = int(\overline{Q} \cap \{t = s\}),\ 0 < t < T$

$\phi \neq \Omega_0 = int(\overline{Q} \cap \{t = 0\})$,

$\Omega_T = int(\overline{Q} \cap \{t = T\})$,

$\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ e $\sum_s = \cup\Gamma_s$ com $0 < s < T$ fronteira lateral de Q com $\partial Q = \overline{\Omega_0} \cup \sum \cup \Gamma_s$

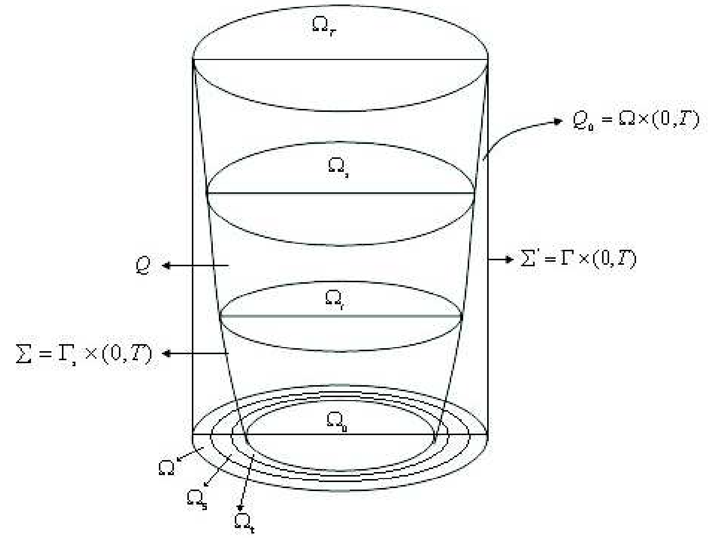

Figura 1 *Interpretação geométrica*

O domínio não-cilíndrico deve satisfazer as seguintes hipóteses:

$(H.1)$. Ω_t cresce com t, isto é, se $\Omega_t^* = Proj_{\{t=0\}}$ então $\Omega_t^* \subset \Omega_s^*$ se $t < s$;

$(H.2)$. Para cada $t \in (0,T)$, Ω_t possui a seguinte propriedade de regularidade: Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u = 0$ quase sempre em $\Omega \backslash \Omega_t^*$ então $u|_{\Omega_t^*} \in H_0^1(\Omega_t^*)$.

Identificaremos assim $\Omega_t^* = \Omega_t$.

Defiremos a seguir os espaços funcionais que surgem no estudo de problemas em domínios não-cilíndricos. Esses espaços são de fundamental importância para o nosso estudo, pois neles iremos encontrar a solução desejada para o nosso problema (P). Sejam $1 \leq p, q < +\infty$ e

$L^q(0,T;L^p(\Omega)) = \{f \in L^q(0,T;L^p(\Omega)); f(x,t) = 0 \text{ } quase \text{ } sempre \text{ } em \text{ } \Omega\backslash\Omega_t\}$,

para quase todo $t \in (0,T)$, com a norma:

$\|f\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega))} = (\int_0^T \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^q dt)^{\frac{1}{q}}$, se $1 \leq q < +\infty$.

e

$\|f\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} = supess_{t\in(0,T)}\|f(t)\|_{L^p(\Omega)}$, se $q = +\infty$.

$L^q(0,T;H_0^1(\Omega)) = \{f \in L^q(0,T;H_0^1(\Omega)); f(x,t) = 0 \text{ } quase \text{ } sempre \text{ } em \text{ } \Omega\backslash\Omega_t\}$,

para quase todo $t \in (0,T)$, com a norma:
$\|f\|_{L^q(0,T;H_0^1(\Omega))} = (\int_0^T \|f(t)\|^q_{H_0^1(\Omega)} dt)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{se } 1 \leq q < +\infty.$
e
$\|f\|_{L^\infty(0,T;H_1^0(\Omega))} = \text{supess}_{t\in(0,T)}\|f(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$, se $q = +\infty$

A proposição seguinte será importante para o nosso estudo, pois garante determinar a solução do problema nos espaços funcionais:

Proposição 0.0.1. *Seja $w : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável. Então $w(x,t) = 0$ quase sempre em $\Omega\backslash\Omega_t$ para quase todo $t \in (0,T)$ se, e somente se, $w = 0$ quase sempre em $Q_0\backslash Q$.*

Dem.: Ver [15].

Os lemas seguintes são de muita importância para o nosso trabalho, pois eles nos darão subsidios para análise do termo não-linear $|u'|^\rho u'$ do problema.

Lema 0.0.1. *Se Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $0 < \rho < \infty$ se $n = 1,2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$*

Demo.: Ver [12].

Lema 0.0.2. *Seja $u' \in L^\infty(0,+\infty; L^2(\Omega))$ tal que $u'' \in L^2(0,+\infty; H_0^1(\Omega))$. Seja M uma função definida por*

$$M(x,t) = \begin{cases} 1 \text{ em } Q_0\backslash Q \bigcup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0 \text{ em } Q \bigcup \Omega_0 \times \{0\} \end{cases} \tag{0.7}$$

então $\int_0^t (M(s)u'(s), u''(s))ds \geq \frac{1}{2}|M(t)u'(t)|^2 - \frac{1}{2}|M(0)u'(0)|^2$.

Dem.: Ver [18].

Para a existência de soluções usaremos o método da penalização de Lions, ver [11], que consiste, mediante ao uso de uma função de penalização M, transformar o problema (P) num outro problema penalizado pertubado (P^ϵ), $(0 < \epsilon < 1)$ definido no cilindro Q_0. Isto é:

$$(P^\epsilon) : k_{1\epsilon}u''_\epsilon + k'_1 u'_\epsilon + k_2 u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} M u'_\epsilon = \widetilde{f}, \tag{0.8}$$

sendo $k_{1\epsilon} = k_1 + \epsilon > 0$.

A partir daqui projetamos o problema (P^ϵ) sobre um subespaço de dimensão finita V_m de $H_0^1(\Omega)$. Desejamos encontrar as soluções aproximadas

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j\epsilon m}(t) w_j(x), 0 \leq t < t_{\epsilon m} \leq T, \tag{0.9}$$

solução do seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares

$$(P^{\epsilon m}) \begin{cases} (k_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}, v) + (k'_1 u'_{\epsilon m}, v) + (k'_1 u'_{\epsilon m} + (k_2 u'_{\epsilon m} + (-\Delta u_{\epsilon m}, v) + \\ (-\Delta u''_{\epsilon m}, v) + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, v) + \frac{1}{\epsilon}(M u'_{\epsilon m}, v) = (\widetilde{f}, v), \forall v \in V_m. \end{cases} \tag{0.10}$$

Aqui usaremos o método de *Faedo-Galerkin* para obter as soluções aproximadas $u_{\epsilon m}$ do sistema $P^{\epsilon m}$. A seguir mediante estimativas a priori e passando o limite quando $m \to \infty$ obtemos a solução u_ϵ de (P^ϵ) e finalmente voltando ao domínio não-cilíndrico, encontramos a solução de (P).

Estrutura do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em 3 capítulos, a saber:

Na introdução do trabalho estão englobadas, a motivação física do problema, e a história de alguns problemas do tipo misto em domínios cilndricos e não-cilíndricos.

No capítulo 1 apresentamos as definições básicas das teorias das equações diferencias parcias, alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes, além da formulação do problema e das técnicas que serão usadas para obtermos nossos resultados.

O capitulo 2 será dedicado ao estudo da existência de soluções globais fracas do problema (P) com os dados iniciais nulos.

No capítulo 3 estenderemos o resultado do capítulo anterior, considerando as condicões iniciais não-nulas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais Parciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Sendo assim, não nos preocuparemos com as demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, mas mencionaremos as referências bibliográficas onde as respectivas demostrações poderão ser encontradas.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado, no qual φ se anula fora e valem as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$,

2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$,

3. $supp\,(\lambda\varphi) = supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1.1. *Seja* $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$*:*

Verifica-se que o *supp* $(\varphi) = (0,1)$,que não é um conjunto compacto.No que segue, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω e que são infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções infinidamente diferenciáveis tal que *supp*$(\varphi) \subset \Omega$. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1.1.2. *Dados* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, *denotemos por* $B_r(x_0)$ *a bola aberta de centro* x_0 *de raio* r, *isto é,* $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - x_0\| < r\}$ *. Se* $B_r(x_0) \subset \Omega$ *, define-se:*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right) & se \ \ \|x - x_0\| < r \\ 0 & se \ \ \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verifica-se que supp $(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ *é um compacto e que* $C_0^\infty(\Omega)$ *é não-vazio. O espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em* $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos uma n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denota-se por* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial, de ordem* $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, *temos por definição* $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Diz-se que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \text{ e } supp\,(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado espaços das funções testes.

Observação 1.1.2. *Sendo Ω limitado, obtemos*
$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$.*
com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p\, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx \to 0.$$

note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx = 0.\end{aligned}$$

Pode-se ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [12]

1.1.3 Distribuições Escalares

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathcal{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considere o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(< T_\nu, \varphi >)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. . *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω.quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.1.3. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então

$$\begin{aligned}|\langle T_u, \varphi_\nu\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega u(x)\,(\varphi_\nu - \varphi)\,(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)\,(\varphi_\nu - \varphi)\,(x)|\,dx \\ &\leq \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u\,(x)|\,dx \to 0,\end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (de Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Dem.: Ver [16] .

Vale salientar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo que se segue.

Exemplo 1.1.4. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ dada por*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

É fácil vereficar que δ_{x_0} é uma distribuição, conhecida por Distribuição de Dirac, *em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função*

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *isto é, não existe* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} *é definida por alguma função* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então tem-se que:*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *definida por*

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$$

daí,

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω, *logo* $u(x) = 0$ *quase sempre em* Ω, *isto é,* $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *ou seja,* $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *que é uma contradição.*

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, entretanto, este conceito foi generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multíndice. A derivada (no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R},$$

tal que

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado que vale a pena mencionar é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo que vem a seguir. Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de* Espaços de Sobolev.

Exemplo 1.1.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathcal{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u^{'}, \varphi >= - < u, \varphi^{'} >= - \int_0^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^k(R^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall \, |\alpha| \leq k.$$

Isto é uma conseqüência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma funçãode $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, mensuráveis, tal que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

é espaço de *Banach* ver [2].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess \, |v(x)| \, , \forall v \in L^\infty(\Omega) \, .$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* ver [2].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx,$$

cuja norma induzida é:

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que denotaremos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\right\},$$

as derivadas D^α, evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}\, dx, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)^2_{L^2(\Omega)} dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se, ver [11], que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.*

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b)\, ; u' \in L^2(a,b) \right\}, \;\; u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(t)]^2\, dt + \int_a^b [u'(t)]^2\, dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)\, ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\, , \;\; i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüênciaconvergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$. Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [14] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ no qual pode-se definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma\,,$$

onde o limite é considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.. O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. Por simplicidade, escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$ e, dessa forma, podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}.$$

A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0, \ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tal que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Dem.: Ver [16].

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$)**.** *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Dem.: Ver [16].

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1.

Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega),\ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \ \ a < proj\ x < b$ no qual a $proj\ x$ é a projeçãode x sobre o eixo coordenado x_1, agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

E da desigualdade de *Schwartz*, obtemos:

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 &= \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi \right)^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* temos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Logo,

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\, |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Observação: Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato; Consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+C)\,|\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.3 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|.\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\to X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}\varphi_i.$$

Onde cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1,2,\ldots,k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1,2,\ldots,k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\,\varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B} - integrável$) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

(ii) $\lim\limits_{k,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X\,dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* Ver [8] de u, é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \varphi_\nu(t)\,dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t\mapsto\langle\Phi,u(t)\rangle$ for mensurável, $\forall\Phi\in X'$, onde X' é o dual topológico de X; dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t\mapsto\|u(t)\|_X$ é *Lebesgue* mensurável .

Denotaremos por $L^p(0,T;X)\,,1\leq p<\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tal que a função $t\mapsto\|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lesbegue* em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Quando $p=2$ e $X=H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s),v(s))_H\,ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tal que $t\mapsto\|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{t\in]0,T[}\,||u(t)||_X\,.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. No caso, $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u,v\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)} = \langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}$$

Definição 1.3.1. *$f:[0,T]\to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,*

$$\int_0^T ||S_k(t)-f(t)||_X dt \to 0, \ \ com\ k\to\infty.$$

se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t)d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t)d\mu$ é dita integral de Bochner de f, em relação a μ.

Exemplo 1.3.1. *Sejam $u\in L^p(0,T;X)$, $1\le p<\infty$, e $\varphi\in\ \mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a função $T_u:\mathcal{D}(0,T)\longrightarrow X$, definida por*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\varphi(s)\,ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner *em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada distribuiçãovetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0,T;X)\hookrightarrow\mathcal{D}'(0,T;X)$ com injeçãocontínua e densa.*

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuiçõesvetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.3.2. *Seja $T\in\mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n},\varphi\right\rangle = (-1)^n\left\langle T,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle \forall\varphi\in\mathfrak{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, *estamos representando o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u:[0,T] \longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \,..$$

Por $C^0_w([0,T];X)$, *denotaremos o espaço das funções* $u:[0,T] \longrightarrow X$ *fracamente contínuas, isto é, a aplicação* $t \mapsto \langle v, u(t)\rangle_{X',X}$ *é contínua em* $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

1.4 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\|.\|$, $((,))$ e $|.|$, $(,)$. Suponhamos que $V \subsetneq H$, V denso em H e a injeção de V em H é contínua.

A terna $\{V, H, ((,))\}$ determina um operador linear A caracterizado por: o domínio do operador A é o subespaço vetorial $D(A)$ de V dado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u,v)) = (f,v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que

$$((u,v)) = (Au, v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V.$$

Demonstra-se em Milla [13], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas, além disso A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo de H, enumerável, $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, constituído de autovetores de A, cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$. satisfazem à

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots, \lambda_j \to \infty \text{ quando } j \to \infty.$$

Para cada α real, o operador A^{α} é caracterizado por

$$D\left(A^{\alpha}\right) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{2\alpha} \left|(u, w_{\nu})\right|^{2} < \infty \right\}$$

e

$$A^{\alpha} u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{\alpha} \left(u, w_{\nu}\right) w_{\nu} \in H, u \in D\left(A^{\alpha}\right).$$

Dado $u \in H$, então

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(u, w_{\nu}\right) w_{\nu}.$$

Em $D\left(A^{\alpha}\right)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{D(A^{\alpha})} = \left(A^{\alpha} u, A^{\alpha} v\right)$$

e

$$|u|_{D(A^{\alpha})} = \left|A^{\alpha} u\right|.$$

Temos $D\left(A^{\alpha}\right)$ munido do produto interno $(u, v)_{D(A^{\alpha})}$ é um espaço de Hilbert e dados α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão de $D\left(A^{\alpha_2}\right)$ em $D\left(A^{\alpha_1}\right)$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, então é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = V, \left|A^{\frac{1}{2}}\right| = \|u\|, \forall u \in V.$$

No qual segue-se o operador A será definido pelo terno $\{V, H, ((u, v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- $f(t, x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f(t, x)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável$m_K(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m_K(t)$, para todo $(t, x) \in D$.

Consideremos o retângulo $R = \left\{(t, x) \in \mathcal{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\right\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.5.1 (Carathéodory). *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Dem: Vamos mostrar para o caso $t \geq \tau$. Definimos a função M

$$M(t) = 0 \qquad (t < \tau) \tag{1.2}$$

$$M(t) = \int_\tau^t m(s)ds \ (t \leq t \leq \tau + a). \tag{1.3}$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$

$M(\tau) = 0$

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ definimos as seguintes aproximações φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ por

$$\varphi_j(t) = \xi \qquad (\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}) \tag{1.4}$$

$$\varphi_j(t) \ = \ \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s))ds \quad (\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta) \qquad (1.5)$$

Note que $\varphi_1(t) = \xi \ \forall t \in (\tau, \tau + \beta)$

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.5) só tem sentido se

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}.$$

Daí segue-se, que em (6) tem-se φ_j é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}$ e pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in R$ a equação (1.5) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \dfrac{\beta}{j} < t \leq \tau + \dfrac{2\beta}{j}$ e além disso, temos

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = |\int_\tau^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds|$$

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_\tau^{t-\beta/j} |f(s, \varphi(s))|ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_\tau^{t-\beta/j} m(s)ds$$

por (1.4) e, portanto,

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j}). \qquad (1.6)$$

Afirmação: $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Provamos essa afirmação usando indução finita

$n = 1$ ok!

Suponha que para $n = k$ temos φ_j está definida em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$ assim temos $\varphi_j(t) = \xi + \displaystyle\int_\tau^{\tau - \frac{k\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))ds$ de modo análogo, concluímos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \dfrac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. Portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.6). Portanto, por indução, (1.5) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$, para todo $j \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{cccc} \varphi_j(t) & = & \xi & \tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j} \\ |\varphi_j(t) - \xi| & \leq & M(t - \frac{\beta}{j}) & \tau + \frac{\beta}{j} \leq t \leq \tau + \beta \end{array} \right.$$

φ_j **é equicontínua**.

Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 tais que $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon \ \ \forall j$. Sabemos que

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})|$$

.

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$ vem que M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = |(t_1 - \frac{\beta}{j}) - (t_2 - \frac{\beta}{j})| < \delta \Rightarrow |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})| < \epsilon$$

Donde segue nossa afirmação.

φ_j **é equilimitada**

Note que

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j})\forall j.$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$, logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$. Desde que

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j})$$

Segue que

$$|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Àrzela-Ascoli, Assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[\tau, \tau + \beta]$ para uma função continua φ.

Mostremos que tal função limite, é solução de (1.1).

Sendo $f(t, x)$ contínua em x para cada t fixo decorre da que

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)) \ \forall t$$

e, usando (1.4) segue que

$$|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t).$$

Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável a função f está nas condições do teorema da convergência dominada de Lebesgue, resultando portanto

$$\lim_{k\to\infty}\int_\tau^t f(s,\varphi_{j_k}(s))ds = \int_\tau^t f(s,\varphi(s))ds$$

para todo $t \in [\tau, \tau+\beta]$ temos:

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\beta/j_k}^t f(s,\varphi_{j_k}(s))ds.$$

Quando, $k \to \infty$ o segundo termo integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vêm que

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi(s))ds$$

donde segue o resultado.

Corolário 1.5.1 (Prolongamento de solução). *Seja $D = [0,\omega]\times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{x \in \mathcal{R}^n; |x| \le b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(0) = X_0, \ \ |X_0| \le b. \end{cases}$$

Dem.: Ver [.] Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \le M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0,\omega]$.

Proposição 1.5.1. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H, $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$, com $1 \le p < \infty$, então $u \in C^0([0,T];H) \cap C^0_w([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [12].

Observação 1.5.1. *: Como conseqüência do conceito de topologia fraca e fraco -★, segue:*

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca)**.** *. Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E^{'}.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela)**.** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Diz-se $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco -★ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E.$$

Proposição 1.5.2 (Compacidade de Aubin-Lions)**.** *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1, e, W o espaço*

$$W = \left\{ u \in L^2(0,T;B_0);\ u' \in L^2(0,T;B_1) \right\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^2(0,T;B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^2(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [12].

Observação 1.5.2. *Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

Lema 1.5.1. *Consideremos X um espaço de Hilbert com dual X' e Y um outro espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$. Seja*

$$W = \{u \in L^2(0,T;X);\ u' \in L^2(0,T;X')\}.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))_Y = \langle u'(t), v(t) \rangle_{X,X'} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{X,X'}.$$

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.5.2 (Lema de Lions). *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_μ e g funções de $L^q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, tal que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \ g_\mu \to g$$

quase sempre em $\mathcal{O}$. Então $g_\mu \to g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [12].

Lema 1.5.3 (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma seqüência em $M^+(X, \mathfrak{M})$. Então,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Onde $M^+(X, \mathfrak{M})$ a coleção de todas as funções mensuráveis, não negativas, definidas em X, a valores reais estendida.

Demonstração. Ver [16].

Teorema 1.5.2 (da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X. Suponha que*

1. *$(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f.*

2. *Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [16]

Teorema 1.5.3 (Representação de Riez). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall \ f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [2].

Como conseqüência destes resultados temos as seguintes identificações:

$$i) L^2 \cong (L^2)'$$

$$ii) L^{p'} \cong (L^p)'$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdade de Sobolev). *Considere* $1 \leq p < N$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N)$$

onde $p*$ *é tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N) = \frac{(N-1)p}{N-p}$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Ver [2].

Observação 1.5.3. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N), m \geq 1$, *inteiro, tal que*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Demonstração: Ver [2].

Proposição 1.5.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *com*

$$p, p' \geq 1 \ \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então

$$f, g \in L^1 \ \text{ e } \int |f.g| \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.5.5 (Banach-Alaoglu)**.** *Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.5.6 (Regularidade para um problema de Dirichlet)**.** *Sejam Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitado [ou com $\Omega = \mathbb{R}^N_+$]. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H^1_0(\Omega)$ verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ onde C é uma constante que depende somente de Ω. E mais, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m};$$

em particular se $m > \frac{N}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Então se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [2].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

$1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.5.3. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{(i)}}\ |\omega_n| = 1\ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0\ \forall n, m,\ m \neq n; \\ \textbf{\textit{(ii)}}\ \text{O espaço gerado pela } (\omega_n) \text{ é denso em } H. \end{cases}$$

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ da origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.5.4. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leq p \leq \infty$ *,* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência em* $L^p(\Omega)$ *convergindo para* u *em* $L^p(\Omega)$*. Então existe uma subseqüência de* (u_k)*, ainda denotada por* (u_k)*, tal que*

(i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$*, q.s. em* Ω*;*

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$*, q.s. em* Ω*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.5.4 (Lema de Gronwall)**.** *: Sejam* $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas e não-negativas,* $\alpha \geq 0$*. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ *é limitada e se* $\alpha = 0$*, então* $\varphi \equiv 0$*.*

Demonstração. Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t)\,\psi(t)$. Logo,

$$\omega'(t) \leq \omega(t)\,\psi(t),$$

donde segue,

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t,obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Assim

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right),\ \ t \in [a,b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$.

Lema 1.5.5. *Se $\theta \in L^p(0,T_0)$ e $v \in V$, então*

$$\xi(t,x) = \theta(t)\,v(x) \in L^p(0,T_0;V).$$

Demonstração. *Devemos mostrar que $|\xi(t,x)|_v \in L^p(0,T_0)$, ou seja,*

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p\,dt < \infty.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_v^p\,dt &= \int_0^{T_0} |\theta(t)\,v(x)|_v^p\,dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p\,|v(x)|_v^p\,dt \\ &= |v(x)|_v^p \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p\,dt,\end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que: $\int_0^{T_0} |\theta(t)|^p\,dt < \infty$.

Assim, segue o Lema.

Lema 1.5.6. *Se $u_m \to u$ em $L^p(0,T_0;X)$, então*

$$\|u_m(t)\|_X \to \|u(t)\|_X \quad em \quad L^p(0,T_0)$$

Demonstração. *Queremos mostrar que*

$$|\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|_{L^p(0,T_0)}^p \to 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \left|\left\|u_m(t)\right\|_X - \left\|u(t)\right\|_X\right|^p_{L^p(0,T_0)} &= \int_0^{T_0} \left|\left\|u_m(t)\right\|_X - \left\|u(t)\right\|_X\right|^p_{L^p(0,T_0)} dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \left\|u_m(t) - u(t)\right\|^p_X dt, \end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que:

$$\int_0^{T_0} \left\|u_m(t) - u(t)\right\|^p_X dt \to 0$$

e, portanto, segue o Lema.

$L^2(\Omega)$ é o espaço vetorial das (classes) funções definidas em Ω cujo o qadrado é integrável a Lebesgue.

Definimos o prduto escalar e norma, respectivamente, em $L^2(\Omega)$ por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)ds, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

$$|u| = \textstyle\int_\Omega u^2 dx$$

Capítulo 2

Existência de solução global fraca com dados iniciais nulos

Neste capítulo obtivemos a existencia de soluções globais fracas para o seguinte problema degenerado

$$(P)\begin{cases} (k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + \\ |u'(x,t)|^\rho u'(x,t) = f \quad em \quad Q \\ u = 0 \quad sobre \quad \sum \\ u(0) = 0, \quad (k_1 u')(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

no domínio não-cilíndrico Q contido no cilíndro $Q_0 = \Omega \times (0,T),\ T > 0$, onde Ω é um aberto limitado do R^n com fronteira Γ bem regular. Consideremos Ω_t definido anteriomente(Introdução). Daremos a seguir as hipóteses apropriadas das funções $k_1, k_2, f \quad e \quad \rho$.

(A.1): $k_1(x,t) \geq 0, \quad k_2(x,t) \geq d > 0,$ *quase sempre em* Q;

$k_1 \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega_t))$;

$k_2 \in C^0([0,T]; L^\infty(\Omega_t))$;

$\mu(x,t) = k_2(x,t) - \frac{1}{2}|k_1'(x,t)| \geq \delta_0 > 0$ quase sempre em Q.

(A.2): $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega_t))$,

$0 < \rho < \infty$ se $n = 1$ ou $n = 2$,

$0 < \rho < \frac{2}{n-2}$, se $n \geq 3$.

Teorema 2.0.7. *Assumimos as hipótesis:(H.1)-(H.2) , (A.1)-(A.2).*

Então dado $T > 0$, existe $u : Q \to \mathcal{R}$ na classe:

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)); \tag{2.2}$$
$$u' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)); \tag{2.3}$$
$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_t)), \tag{2.4}$$
$$u'' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t)) \tag{2.5}$$

e satisfaz:

$$\begin{cases} (k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + \\ +|u'(x,t)|^\rho u'(x,t) = f \quad \textit{no sentido de} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t)) \\ u(0) = 0; (k_1u')(0) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Demonstração: Usaremos o método da Penalização de Lions, para obter a existência de soluções para o problema (P). Seja M a função definida no lema (0.0.2). Considere $\widetilde{f}$ o prolongamento de f respectivamente a Q_0, sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q.

Agora, para cada $\epsilon > 0$, consideremos o seguinte problema:

$$(P^\epsilon) : \begin{cases} \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \widetilde{f}, \\ u_\epsilon(0) = 0 \quad e \quad (k_1u'_\epsilon)(0) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Aqui (P^ϵ) é o problema pertubado penalizado de (P) definido em (0.8).

Como $Q \subset Q_0$ e $\Omega_t \subset \Omega$ então,

$$k_1 \in C^1([0,T];L^\infty(\Omega)) \tag{2.8}$$
$$k_2 \in C^0([0,T];L^\infty(\Omega)) \tag{2.9}$$
$$\widetilde{f} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.10}$$

Provaremos primeiro o resultado à seguir.

Teorema 2.0.8. *Sejam k_1, k_2 e $\widetilde{f}$ como acima e M nas condições do lema (0.0.2). Então para cada $0 < \epsilon < 1$, existe uma função $u_\epsilon : Q_0 \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.11}$$
$$u'_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.12}$$
$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.13}$$
$$u''_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.14}$$

e satisfaz (P^ϵ)

$$(P^\epsilon)\begin{cases} k_{1\epsilon}u''_\epsilon + k'_1u'_\epsilon + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \widetilde{f} \\ u_\epsilon(0) = 0 \quad e \quad (k_1u'_\epsilon)(0) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Demonstração: Para obter a solução do problema (P^ϵ) usaremos o método de *Faedo-Galerkin* que nos dará uma sequência de soluções aproximadas para o problema definido a seguir. Posteriormente, mediante estimativas a priori, mostraremos que essa sequência converge, numa topologia adequada para solução do problema (P^ϵ).

Seja $\{w_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, w_2, w_3, ..., w_m] \subset H_0^1(\Omega)$ um subespaço de dimensão m $(dimV_m = m)$ gerado pelos primeiros elementos de $\{w_j\}$. Para todo $0 < \epsilon < 1$ queremos encontrar:

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j\epsilon m}(t)w_j(x), 0 \leq t < t_{\epsilon m} \leq T \tag{2.16}$$

solução do sistema de equações diferenciais não-lineares em t,

$$\begin{cases} (k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, v) + (k'_1u'_{\epsilon m}, v) + (k'_1u'_{\epsilon m} + (k_2u'_{\epsilon m} + (-\Delta u_{\epsilon m}, v) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, v) \\ +(|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, v) = (\widetilde{f}, v), \forall v \in V_m \\ u_{\epsilon m}(0) = 0 \text{ e } u'_{\epsilon m}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Substituindo $u_{\epsilon m}$ em (2.17), tomando $v = w_j$ e usando o fato de $\{w_j\}$ ser sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$ e ainda $(w_j, w_i) = \delta_{ij}$ obtemos

$$\left| \begin{array}{l} k_{1\epsilon}g''_{j\epsilon m}(t) + k'_1g'_{j\epsilon m}(t) + k_2g'_{j\epsilon m}(t) + \lambda_j g_{j\epsilon m}(t) + \widetilde{\lambda}_j g''_{j\epsilon m}(t) + \\ |u'_{\epsilon m}|^\rho g'_{j\epsilon m}(t) + \frac{1}{\epsilon}Mg'_{j\epsilon m}(t) = (\widetilde{f}, v) \\ g_{\epsilon mj}(0) = (u_{\epsilon mj}(0), w_j) = 0, g'_{\epsilon mj}(0) = (u'_{\epsilon mj}(0), w_j) = 0 \end{array} \right. \tag{2.18}$$

ou seja

$$\left| \begin{array}{l} g''_{j\epsilon m}(t) + \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^\rho+\frac{1}{\epsilon}M}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}} g'_{j\epsilon m}(t) + \frac{\lambda_j}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}} g_{j\epsilon m}(t) = \frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}(\widetilde{f}, v) \\ g_{\epsilon mj}(0) = (u_{\epsilon mj}(0), w_j) = 0, g'_{\epsilon mj}(0) = (u_{\epsilon mj}(0), w_j) = 0 \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Temos então a forma matricial do sistema (2.18)

$$\begin{cases} X'' + BX' + CX + = D \\ X(0) = O, X'(0) = O \end{cases} \tag{2.20}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^\rho+\frac{1}{\epsilon}M}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^\rho+\frac{1}{\epsilon}M}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_m}} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_m}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_m}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_1}}(\widetilde{f}, w_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_m}}(\widetilde{f}, wm) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} g_{\epsilon m1}(t) \\ \vdots \\ g_{\epsilon mm}(t) \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} g'_{\epsilon m1}(t) \\ \vdots \\ g'_{\epsilon mm}(t) \end{bmatrix}, \quad X'' = \begin{bmatrix} g''_{\epsilon m1}(t) \\ \vdots \\ g''_{\epsilon mm}(t) \end{bmatrix}.$$

Aqui denotemos a mx1 matriz coluna nula por

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0. \end{bmatrix}$$

Onde B, C, são matrízes de ordem mxm e D, X, X', X" são de ordem mx1, assim podemos reescrever a equação (2.19) como segue:

$$\begin{cases} X'' = -BX' - CX + D \\ X(0) = 0, X'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Transformemos o problema (2.17) em um sistema de equações diferencias ordinarias (E.D.O.) de 1ª ordem não linear, tomando

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

onde

$$Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -BX' - CX + D \end{bmatrix}$$

Ou ainda

$$\begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -BX' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{O} \\ -CX \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Aqui $\overline{O}$ e O são matrizes nulas de ordem mxm e mx1 respectivamente. Reescrevendo a equação (2.22), temos

$$Y' = \begin{bmatrix} \overline{O} & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Aqui I é a matriz identidade de ordem mxm. Agora tomemos:

$$F_1(X,t) = \begin{bmatrix} \overline{O} & I \\ -C & -B \end{bmatrix}$$

$$F_2(X,t) = \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix}$$

Temos o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

$$\begin{cases} Y' &= F(Y,t) \\ Y(0) &= \widetilde{O} \end{cases} \tag{2.24}$$

.

Onde $\widetilde{O}$ é a matríz nula de ordem 2mx2m e $F(Y,t) = F_1(Y,t)Y + F_2(Y,t)$. Nosso objetivo é mostrar que o problema (2.24), logo o problema (2.17), possui solução local. Vamos verificar que a função $F(Y,t)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

1ª Condição de Carathéodory:$F(Y,t)$ é mensurável em t, para cada Y fixado.Isto é:

$F_2(Y,t)$ são mensuráveis em t, para cada Y fixado. Com efeito, $F_2(Y,t)$ é mensurável em t, pois da hipótese $(A.1)$, e ainda, $0 < \widetilde{\lambda}_j, \quad j = 1,...m,$

temos que $(k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}>0)$ é contínua em t e daí $\frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}(\widetilde{f},v)$ é contínua, e pela hipótese $(A.2)$, temos que $f\in L^2(0.T;L^2(\Omega_t))$ é mensurável em t, para Y fixado, logo $\widetilde{f}$ é mensurável em t, e portanto D é mensurável em t e O é mensurável em t conseqüentemente $F_2(Y,t)$ é mensurável em t para Y fixado.

$F_1(Y,t)Y$ é mensurável em t. Basta comprovar que as entradas $\overline{O}$, I, $-B$, $-C$ de $F_1(Y,t)$ são mensuráveis .Para B ser mensurável devemos provar que $\frac{k_1'+k_2+|u_{\epsilon m}'|^\rho+\frac{1}{\epsilon}M}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_1}}$ é mensurável. De fato: Da hipótese $(A.1)$ k_1', k_2 são contínuas em t. A função $s\mapsto|s|^\rho$ e contínua, e portanto a função $t\mapsto|u_{\epsilon m}'(t)|^\rho$ é contínua, então logo mensurável, por outro lado $\frac{1}{\epsilon}M$ é mensurável. da primeira parte temos que $\frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}$ é mensurável. Portanto B é mensurável em t para Y fixado. Portanto $-B$ é mensurável.

C é mensurável em t, pois λ_i, $i=1,2,...,m$ são autovalores do operador $-\Delta$, portanto mensuráveis, logo $\frac{\lambda_j}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}$ é mensurável. Portanto $-C$ é mensurável

Como $\overline{O}$ e I são as matrízes nula e indentidade respectivamente, logo são mensuráveis em t.

Portanto $F_1(Y,t)$ é mensurável em t, para Y fixado

2ª Condição de Carathéodory

Suponha t fixado, devemos mostrar que $F(Y,t)$ é continua em Y.

É verdade que $F_2(Y,t)$ é contínua em Y, pois $\frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}(\widetilde{f},w_j)$ é contínua, visto que $k_1\in C^1([0,T];C^0(\overline{\Omega}))$ e $\widetilde{\lambda_j}$, $j=1,2,...,m$ são autovalores do operador $-\Delta$, logo $k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}>0$ é contínua, conseqüentemente $\frac{1}{k_{1\epsilon}+\widetilde{\lambda_j}}>0$, logo contínua e além disso $(\widetilde{f},w_j)$ é contínua, pois $\widetilde{f}\in L^2(0,T;L^2(\Omega)$ e não depende Y. Portanto $F_2(Y,t)$ é contínua em Y para t fixado.

Sabemos que: $k_1',k_2\in C^0([0,T];C^0(\overline{\Omega}))\Rightarrow k_1,k_2$ contínua.

A função $s\to|s|^\rho$ é contínua $\Rightarrow$ a função $t\to|u_{\epsilon m}'(t)|^\rho$ é contínua.

$\frac{1}{\epsilon}M(x,t)\in L^\infty(Q_0)$.Portanto cada entrada de $F_1(Y,t)$ é contínua em Y para t fixo.

Agora para cada $j = 1, 2, ..., m$ a função projeção π_j, definida por

$$\pi_j(Y) = g_{\epsilon mj}(t) \tag{2.25}$$

onde $g_{\epsilon mj}(t) = (u_{\epsilon m}, w_j)$, é contínua.

Para cada t fixo a função $Y \rightarrow u_\epsilon(t)$ definida por

$$u_{\epsilon m}(t) = (\Sigma_{j=1}^{m} g_{\epsilon mj} w_j) \tag{2.26}$$

onde $\Sigma_{j=1}^{m} g_{\epsilon mj} w_j = \Sigma_{j=1}^{m} \pi_j(Y) w_j$ é contínua para cada t fixado, pois é combinação linear finita de funções continuas, e ainda, para cada $i \in N$, $i = 1, 2, ..., m$ a função projeção

$$\pi_j(Y) = g'_{\epsilon mi}(t) \tag{2.27}$$

Onde $g'_{\epsilon mi}(t) = (u'_{\epsilon m}, w_i)$, é contínua.

Daí, para cada t fixado a função $Y \rightarrow u'_\epsilon(t)$ definida por

$$u'_{\epsilon m}(t) = \Sigma_{i=1}^{m} g'_{\epsilon mi} w_i \tag{2.28}$$

Onde $\Sigma_{i=1}^{m} g'_{\epsilon m}(t) = \Sigma_{i=1}^{m} \pi(Y) w_i$ é contínua. Então $F_1(Y,t)Y$ é contínua. Portanto a função $F(Y,t)$ é contínua em Y, para cada t fixado.

3º Condição de Crathéodory.

Pretendemos mostrar que existe uma função real $m(t)$ integrável em $[0,T]$ tal que

$$\|F(Y,t)Y\|_{R^{2m\times m}} \leq m_k(t), \forall (Y,t) \in V \tag{2.29}$$

Onde K é um compacto de V, e $V = E \times [0,T]$ com

$$E = \{Y \in R^{2m\times 1}; \|Y\|_{R^{2m\times 1}} \leq \delta, \delta > 0\} \tag{2.30}$$

Observação 2.0.4. *As normas em R^n (para cada $n \in N$) são equivalentes. Denotemos por $\|.\|p \times q$ a norma do máximo em $R^{p\times q}$*

Temos que

$$F(Y,t) = F_1(Y,t)Y + F_2(Y,t)) \tag{2.31}$$

logo,

$$\|F(Y,t)\|_{2m\times 1} \leq \|F_1(Y,t)Y\|_{2m\times 1} + \|F_2(Y,t))\|_{2m\times 1}$$

note que

$$\|F_1(Y,t)Y\|_{2m\times 1} = \|F_1(Y,t)\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1}$$

e daí, temos:

$$\|F(Y,t)\|_{2m\times 1} \leq \|F_1(Y,t)\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1} + \|F_2(Y,t))\|_{2m\times 1}$$

como $\|Y\|_{2m\times 1} \leq \delta$, ou seja,

$$\|F(Y,t)\|_{2m\times 1} \leq \delta\|F_1(Y,t)\|_{2m\times 2m} + \|F_2(Y,t))\|_{2m\times 1}$$

devemos provar que $\|F_1(Y,t)\|_{2m\times 2m}$, $\|F_2(Y,t))\|_{2m\times 1}$ são limitadas, isto é, devemos majorar cada entrada de $F_1(Y,t)$, e $F_2(Y,t)$.

Note que: (a)$\|k_{1\epsilon}\|_{C^1([0,T];L^\infty(\Omega))} \leq \|k_1(x,t)\| + \epsilon < \infty \Rightarrow \exists c_1; \|k_{1\epsilon}\| \leq c_1$.

(b) $\|k_{2\epsilon}\|_{C^1([0,T];L^\infty(\Omega))} \leq \infty \Rightarrow \exists c_2 > 0; \|k_2(x,t)\| \leq c_2$.

(c) $\|\lambda_i\| \leq \infty \forall i, i = 1,2,...m \Rightarrow \lambda_i \leq \lambda_m$.

(d) $\|\widetilde{\lambda_i}\| \leq \infty \forall i, i = 1,2,...m \Rightarrow \widetilde{\lambda_i} \leq \widetilde{\lambda_m}$.

(e) $\|k_1'(x,t)\|_{C^1([0,T];C^0(\overline{\Omega_t}))} < \infty \Rightarrow \exists c_3; \|k_1(x,t)\| \leq c_3$.

(f) $\|\frac{1}{\epsilon}M\| \leq \frac{1}{\epsilon}\ \ (\epsilon fixado) \Rightarrow \|\frac{1}{\epsilon}M\|_{Q_0} \leq c_4\ ,\ c_4 > 0$.

g) Da desiguadade de Cauchy-Schwarz temos que $\|(\widetilde{f}, w_i)\| \leq \|\widetilde{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, $\forall j, j = 1,2,...,m$.

(h) $\|u_{\epsilon m}(t)\|^\rho$ é limitada. De fato, temos que $\|Y\|_{2m\times 1} \leq \delta \Rightarrow |g_{\epsilon mj}| \leq \delta$, $j = 1,2,...,m$ logo

$$|u_{\epsilon mj}|^2 = (\sum_{j=1}^m g_{\epsilon mj}(t)w_j, \sum_{j=1}^m g_{\epsilon mj}(t)w_j) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon mj}(t)(w_j, \sum_{j=1}^m g_{\epsilon mj}(t)w_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m g_{\epsilon mj}(t)^2 \leq m\delta^2 = c_5.$$

Para $\rho \leq 2$ temos que

$$|u_{\epsilon mj}|^\rho = (|(u_{\epsilon mj}|^2)^{\frac{\rho}{2}} \leq (c_5)^{\frac{\rho}{2}} = c_6.$$

Por (a),(b),(c),(d),(e),(g) e como as funções $O_{m\times m}, I_{m\times m}$ são limitadas, temos que $F_1(Y,t)$ é limitada, isto é, existe $c > 0, c \in R$ tal que

$$\|F_1(Y,t)\|_{2m\times 2m} \leq c.$$

Basta tomar

$$c = max\{\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \frac{\widetilde{\lambda}}{c_1}, \frac{c_4}{c_1}, \frac{c_6}{c_1}, \|O\|_{m\times m}, \|I\|_{m\times m}$$

De (f) $\|C\| \leq c_1^{-1}\|\widetilde{f}\|^2_L(0,T;L^2(\Omega_t)) < \infty = \frac{1}{c_1}\|f|_{\Omega_t}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_t))}$ portanto C é limitada e por sua vez $F_2(Y,t)$ é limitada e podemos tomar

$$\|F_2(Y,t)\| \leq \frac{1}{c_1}|f(t)|$$

e portanto

$$\|F(Y,t) \leq \delta c + \frac{1}{c_1}|f(t)|$$

Tomemos, agora $m_k(t) = \delta c + \frac{1}{c_1}|f(t)|$. Note que $m_k(t)$ é integrável, pois $|f(t)|$ é integrável, pelo fato de

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega_t)).$$

Portanto $\|F(Y,t)\| \leq m_k(t)$.

2.1 Estimativas apriori

2.1.1 Estimativas apriori I

Em (P^ϵ) tomemos $w_j = u'_{\epsilon m}$, isto é.

$$\begin{aligned}&(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_2 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m})\\ &+(|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}). \qquad (2.32)\end{aligned}$$

Da primeira fórmula de Green e sendo $u_{\epsilon m} = 0$ em $\sum$ teremos:

$$(-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\epsilon m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}; \qquad (2.33)$$

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_{\epsilon m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}. \tag{2.34}$$

Temos ainda que

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}|^2 - \frac{1}{2}(k'_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}). \tag{2.35}$$

Substituindo (2.33) , (2.34) e (2.35) em (2.32) e depois integrando de 0 à t e usando a definição de produto interno em $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\frac{1}{2}|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega |\frac{1}{2}k'_1 + k_2||u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + \frac{1}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
$$+\frac{1}{2}\|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + \int_0^t\int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2}dxds + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t\int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}|^2 dxds =$$
$$\int_0^t (\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}(s))ds. \tag{2.36}$$

De Acordo com a hipótese $(A.1)$ $\frac{1}{2}k'_1 + k_2 \geq \delta_0 > 0$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e depois a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$ teremos

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0\int_0^t\int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0}$$
$$+2\int_0^t\int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2}dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t\int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 ds \leq 2\int_0^t |(\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}(s))|ds$$
$$\leq \int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^2_{L^2(\Omega)}ds \tag{2.37}$$

considerando

$$G_{\epsilon m}(t) = |\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0\int_0^t\int_\Omega |u'_\epsilon m(s)|^2 dxds + +\|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} +$$

$$+\|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + 2\int_0^t\int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2}dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t\int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds.$$

Agora, observando que $G_{\epsilon m} \geq 0$, e cada um de seu termos são também positivos, segue de (2.37) que:

$$G_{\epsilon m}(t) \leq \int_0^t |\widetilde{f}|^2_{L^2(\Omega)}ds + \int_0^t |u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)}ds.$$

Como $\widetilde{f} \in L^2(\Omega)$ logo limitada, então existe uma constante $C_1 \geq 0$ e, por ser $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos

$$G_{\epsilon m}(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t G_{\epsilon m}(s)ds,$$

portanto, pela desiguadade de Gronwall teremos

$$G_{\epsilon m}(t) \leq C$$

$C > 0$ independente de ϵ, m, t. Assim,

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_\Omega |u'_\epsilon m(s)|^2 dxds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H_0^1}$$
$$+2\int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds \leq C \tag{2.38}$$

Da desigualdade (2.38) podemos garantir que:

$$\|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = supess\|u_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{2.39}$$

$$\|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = supess\|u'_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \tag{2.40}$$

$$\|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = supess\|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{2.41}$$

$$|\frac{2}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{2.42}$$

independente de ϵ, m, t. E como

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega)(0,T,H_0^1) \hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega)) \Rightarrow$$

$$|u'_{\epsilon m}|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_2$$

$\forall m$, $\forall t \in [0, t_{\epsilon m})$, independente de ϵ, m, t.

Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos estender a solução $u_{\epsilon m}(t)$ a todo intervalo $[0, T]$. Daí, segue-se que:

$(u_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T,H_0^1\Omega)$;
$(u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$;
$(\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;
$(\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m})$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Como os espaços onde as sequências acima estão limitadas são espaços de Banach separáveis, podemos deduzir a existência de uma subsequência de $(u_{\epsilon m}(t))$ a qual denotaremos por $(u_{\epsilon m}(t))$ tal que:
$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

2.1.2 Estimativa apriori II

Em $P^{\epsilon m}$ tomemos $v = u''_{\epsilon m}$ logo

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k'_1 u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k_2 u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\triangle\, u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \\ +(-\triangle\, u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u''_{\epsilon m}) \tag{2.43}$$

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u''_{\epsilon m}) - \\ -((k'_1 + k_2)u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (-\Delta u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}). \tag{2.44}$$

Temos que

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u''_{\epsilon m}) = |\nabla u_{\epsilon m}|^2_{l^2(\Omega)} = \|u''_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{2.45}$$

substituindo (2.45)) em (2.44), usando a desigualdasde triangular e de Cauchy-Schwarz e depois integrando de 0 à t obtemos:

$$\int_0^t |\sqrt{k}_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (Mu'_{\epsilon m}(s), u''_{\epsilon m}(s))ds = \\ \int_0^t |\widetilde{f}(s)||u''_{\epsilon m}(s)|ds + \int_0^t |k'_1 + k_2||u'_{\epsilon m}(s)||u''_{\epsilon m}(s)|ds + \int_0^t |\nabla u_{\epsilon m}||u''_{\epsilon m}(s)|ds \\ + \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+1}|u''_{\epsilon m}(s)|ds. \tag{2.46}$$

Agora usando o lema (0.0.2), e as desigualdades, de Cauchy-Schwarz e a elementar $ab \leq \frac{1}{4\eta}a^2 + \eta b^2$ $\eta > 0$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t)|^2 - \frac{1}{2\epsilon}|M(0)u'_{\epsilon m}(0)|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \\
&\eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)^2|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\nabla u_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \\
&\frac{1}{4\eta}\int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{2(\rho+1)} + \eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds. \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ e $u'(0) = 0$, logo podemos reescrever (2.47)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t) \leq \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2 ds \\
&+c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds + c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)^2\|^2 ds \\
&+\frac{1}{4\eta}\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{2(\rho+1)} ds \\
&+c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds. \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

Das estimativas a priori I $u_{\epsilon m}$, $u'_{\epsilon m}$ são limitadas , $k_1 \in L^\infty(\Omega)$, $k_2 \in L^\infty(\Omega)$ logo, também são limitadas e além disso pelo lema (0.0.1) temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ logo $|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}$ é limitada. De fato

$$
\begin{aligned}
&||u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T |u'_{\epsilon m}(t)|^{2(\rho+1)}_{L(\rho+1)} dt \leq c_1 \int_0^T \|u'_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq cT. \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t)|^2 \\
&\leq c + 4c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds. \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

e consequentemente
$(1-4\eta)\int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds \leq c_5$ sempre que $\eta < \frac{1}{4}$ logo, temos que

$$\|u''_{\epsilon m}(s)\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \tag{2.51}$$

$C > 0$ independente ϵ, m, t, $\forall t \in [0, t_{\epsilon m})$. Portanto,
$(u''_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^2(0,T,H_0^1\Omega)$;
De maneira análoga à **Estimativa I**, obtemos
$u''_{\epsilon m} \to u''_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ quando $m \to \infty$

2.2 Análise do termo não-linear

Temos da primeira estimativa, que $(u'_{\epsilon m})$ é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e na segunda estimativa obtivemos que $(u''_{\epsilon m})$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$, mas temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong [L^2(\Omega)]'$. Pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions existe uma subseqüência de $(u'_{\epsilon m})$ que ainda denotaremos por $(u'_{\epsilon m})$ tal que
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.
Como a função $s \to |s|^\rho s$ é uma função contínua, logo a função $t \to |u'_{\epsilon m}(t)|^\rho u'_{\epsilon m}(t)$ é também contínua e como $u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Temos que,
$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $Q_0 = \Omega \times (0,T)$
Agora por (2.49) e pela convergencia acima e do lema de Lions obtemos a seguinte convergência $|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

2.3 Resumo das convergências

$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$
$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$u''_{\epsilon m} \to u''_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ quando $m \to \infty$,

2.4 Passagem do limite

Temos que $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, então, $\int_0^T(u_{\epsilon m},v)dt \to \int_0^T(u_\epsilon,v)dt, \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$ e além disso $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

Temos ainda que $u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ conseqüentemente

$\int_0^T(u'_{\epsilon m},v)dt \to \int_0^T(u'_\epsilon,v)dt, \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$

isto significa que

$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$. Agora, da continuidade de k_2 e k'_1 decorre que:

$k_2 u'_{\epsilon m} \to k_2 u'_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$

$k'_1 u'_{\epsilon m} \to k'_1 u'_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$

Por outro lado, tomando $v = w\theta, \quad \theta \in (D)(0;T)$ e $\quad w \in L^2(\Omega)$, então

$\int_0^T(u'_{\epsilon m},w)\theta(t)dt \to \int_0^T(u'_\epsilon,w)\theta(t)dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega)), \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

A função $\quad t \to (u'_{\epsilon m},w) \quad$ é uma distribuição em $L^2\Omega$ e

$(u'_{\epsilon m},w) \to (u'_\epsilon,w) \quad$ em $\quad \mathcal{D}'(0,T) \quad \forall w \in L^2(\Omega)$.

Portanto

$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m},w) \to \frac{d}{dt}(u'_\epsilon,w) \quad$ em $\quad \mathcal{D}'(0,T) \quad \forall w \in L^2(\Omega)$

conseqüentemente

$\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} \to \frac{d}{dt}u'_\epsilon \quad$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0)$.

Onde $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}, \quad \frac{d}{dt}u'_\epsilon$ é a derivada distribucional de $u'_{\epsilon m}, \quad u'_\epsilon$ respectivamente. Como $u'_{\epsilon m}$ é uma função contínua e sua derivada existe quase sempre em $(0,T)$, logo

$< \frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}, \theta >= -\int_0^T u'_{\epsilon m}\theta'(t)dt = \int_0^T u''_{\epsilon m}\theta(t)dt \to < u''_\epsilon, \theta >, \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T)$

Se denotarmos $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} = u''_{\epsilon m} \quad$ e $\quad \frac{d}{dt}u'_\epsilon = u''_\epsilon$, temos que

$\int_0^T(u''_{\epsilon m},v)dt \to \int_0^T(u''_\epsilon,v)dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega))$

Tomando $\quad v = w\theta, \quad w \in L^2(\Omega) \quad$ e $\quad \theta \in \mathcal{D}(0,T)$, teremos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon m},w)\theta(t)dt \to \int_0^T (u''_\epsilon,w)\theta(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega)), \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Portanto

$u''_{\epsilon m} \to u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0)$.

Conseqüentemente

$k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m} \to k_{1\epsilon}u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0)$.

Mas $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv (L^2(,T;L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, e como $u'_{\epsilon m} \to u'_{\epsilon}$, e $u''_{\epsilon m} \to u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$ e pela continuidade de Δ em $\mathcal{D}'(Q_0)$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon m} \to -\Delta u_{\epsilon} \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q_0) \\ -\Delta u_{\epsilon m} \to -\Delta u''_{\epsilon} \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q_0). \end{cases}$$

Temos , ainda, que

$|u'_{\epsilon m}|^{\rho}u'_{\epsilon m} \to |u'_{\epsilon}|^{\rho}u'_{\epsilon}$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Tomando $v = w\theta$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in L^2(\Omega)$ então

$$\int_0^T (|u'_{\epsilon m}|^{\rho}u'_{\epsilon m}, w)\theta(t)dt \to \int_0^T (|u'_{\epsilon}|^{\rho}u'_{\epsilon}, w)\theta(t)dt, \;\; \forall w \in L^2(\Omega)), \;\; \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Conseqüetemente

$|u'_{\epsilon m}|^{\rho}u'_{\epsilon m} \to |u'_{\epsilon}|^{\rho}u'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$.

Temos, também que:

$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon}$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

Tomando $v = w\theta$, $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in L^2(\Omega)$ então

$$\int_0^T (\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}, w)\theta(t)dt \to \int_0^T (\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon}, w)\theta(t)dt, \;\; \forall w \in L^2(\Omega)), \;\; \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Como $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv (L^2(,T;L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, conseqüetemente $\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$.

As convergências obtidas até aqui nos permite passar o limite na equação abaixo, quando $m \to \infty$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m}(t))v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_{\epsilon m}t, v(x))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (|u'_{\epsilon m}(t)|^\rho u'_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt$$
$$\to \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon(t))', v(t))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (-\Delta u_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt$$
$$+\int_0^T (|u'_\epsilon(t)|^\rho u'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T (\widetilde{f}, v(x))\theta(t)dt.$$

Como V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade acima é válida para todo $\theta \in \mathcal{D}'(0,T)$, $\forall v \in V_m$

Passando o limite quando $m \to \infty$ em $(P^{\epsilon m})$ e usando as convergências obtidas teremos

$$(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' + k_2 u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon m - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon(t) = \widetilde{f}(t)$$
$$\textit{no sentido de } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Pelo exposto acima podemos afirmar que que u_ϵ satisfaz as condições do teorema 2.0.8

2.5 Verificação dos dados iniciais

Considerando $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

Mas $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)dt. \tag{2.52}$$

Por outro lado
$u'_{\epsilon m} \to u'_{\epsilon}$ fraco estrela em $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)$
logo

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'_{\epsilon}, v)\theta(t)dt \tag{2.53}$$

integrando por partes as integrais acima então usamos a definição de θ, e obtemos:

1. $-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt$

2. $-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt.$

De (2.52) e das igualdades (1) e (2) obtemos

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \to (u_{\epsilon}(0), v), \tag{2.54}$$

mas $u_{\epsilon m}(0) = 0 \to 0$ forte em $H_0^1(\Omega)$.
Ou seja

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \to (0, v) \tag{2.55}$$

por (2.54) e (2.55) e pela unicidade de limite, temos:
$(u_{\epsilon}(0), v) = (0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
Logo, segue-se que $u_{\epsilon}(0) = 0$.
Agora verificaremos que $(k_{1\epsilon}u'_{\epsilon})(0) = 0$.
Multiplicando o problema $P^{\epsilon m}$ por $\theta \in C^1([o,T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt$$

integrando por partes a 1ª integral da igualdade acima, teremos:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\
&+\int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\
&= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt.
\end{aligned}
$$

Se $m \to \infty$, utilizando as convergências obtidas e pelo fato que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon}m, v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon}, v)\theta(t)dt \\
&+\int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon}|u'_{\epsilon}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_{\epsilon}, v)\theta(t)dt \\
&= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Seja a função

$$
\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\beta} + 1; & 0 < t \leq \beta \\ 0; & \beta < t \leq T. \end{cases} \tag{2.56}
$$

Ora substituindo θ'_β e θ_β na expressão acima obtemos:

$$
\frac{1}{\beta}\int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt + \int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \tag{2.57}
$$

onde

$h(t) = (k_2u'_\epsilon, v) + (-\Delta u_\epsilon, v) + (-\Delta u''_\epsilon, v) + (|u'_\epsilon|u'_\epsilon v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_\epsilon, v) - (\widetilde{f}, v)$.

Temos que $k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e da igualdade

$$
\begin{aligned}
&(k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})' + k_2u'_{\epsilon m} - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_{\epsilon m} + |u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} + \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}(t) = \widetilde{f}(t) \\
&\textit{no sentido de } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

implica que

$(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Longrightarrow k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C^0_w([0,T];L^2(\Omega))$.
Como $|\theta_\beta(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0,T]$ então

$$\lim_{\beta\to 0}\int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \tag{2.58}$$

sendo $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Longrightarrow k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C^0_w([0,T];L^2(\Omega))$ resulta que

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta}\int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt = ((k_{1\epsilon}u'\epsilon)(0), v). \tag{2.59}$$

Passando o limite quando $\beta \to 0$ em (2.57), e de (2.58) e de (2.59 obtemos:
$((k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0), v) = 0, \quad \forall \in H^1_0(\Omega)$
e pela densidade de $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega))$ temos
$(k_{1\epsilon}u'\epsilon)(0) = 0.$
O que prova o teorema (2.0.8)
Demonstração do teorema (2.0.7)
Observemos que as estimativas obtidas são independentes de ϵ. Portanto, pelos os mesmos argumentos usado para obter u_ϵ de $u_{\epsilon m}$, no qual é solução de $(P^{\epsilon m})$, podemos passar o limite quando $\epsilon \to 0$, em u_ϵ ou a uma subseqüência de u_ϵ tal que:

$$u_\epsilon \to u \quad fraco \quad estrela \quad em \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{2.60}$$

$$u'_\epsilon \to \quad fraco \quad em \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{2.61}$$

$$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \to \sqrt{k_{1\epsilon}}u' \quad fraco \quad estrela \quad em \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.62}$$

$$|u'_\epsilon|^\rho u' \to |u'|^\rho u' \quad fraco \quad em \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.63}$$

$$u''_\epsilon \to u''_\epsilon \quad fraco \quad em \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{2.64}$$

$$\frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \to \frac{1}{\epsilon}Mu' \quad fraco \quad em \quad L^2(0,T,H^1_0(\Omega)) \tag{2.65}$$

quando $m \to \infty$.

Da 1ª estimativa obtivemos:

$$\frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_\epsilon|^2 dt \leq C, \tag{2.66}$$

onde C é uma constante positiva independente de ϵ.

Usando a definição de M obtemos:

$$M(x,t)u'_\epsilon = \begin{cases} u'_\epsilon; \quad em \quad Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0; \quad Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \end{cases} \tag{2.67}$$

Da desigualdade (2.66) temos que $\frac{2}{\epsilon}|Mu'_\epsilon| \leq C$, logo $|Mu'_\epsilon| \leq \frac{\epsilon C}{2}$, passando o limite quando $\epsilon \to 0$ obtemos $0 \leq |Mu'_\epsilon| \leq 0$. Por definição $M \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e de (2.61) segue-se que

$$Mu'_\epsilon \to 0 \quad forte \quad em \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.68}$$

Mas por (2.65) e de (2.68), podemos concluir que:

$$Mu' = 0 \quad quase \quad sempre \quad em \quad Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \tag{2.69}$$

Mas, novamente da definição, $M = 1$ em $Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$, como consequência obtemos $u' = 0$ quase sempre em $Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$. Aplicando a proposição (0.0.1) obtemos $u(x,t) = 0$ quase sempre em $\Omega \backslash \Omega_t$ para quase todo $t \in (0,T)$. Como $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ teremos que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)).$$

De modo análogo, obtemos:

$$u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$$
$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t))$$
$$u'' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)).$$

Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ e pela continuidade de $\frac{d}{dt}$ obtemos:

$$\int_Q \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)\varphi(x,t)dxdt \to \int_Q \frac{d}{dt}(k_1 u')\varphi(x,t)dxdt$$

isto significa que

$$\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) \rightarrow \frac{d}{dt}(k_1 u'). \tag{2.70}$$

Restringindo a equação do teorema (2.0.8) a nosso domínio não-cilíndrico Q, usando a definição de M , $\widetilde{f}$, as convergências (2.60)-(2.65), (2.70), a proposição (0.0.1) e passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (2.7).:

Obtemos

$$\frac{d}{dt}(k_1 u') + k_2 u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \quad \textit{no sentido de} \quad \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.71}$$

De (2.71) é fácil ver que u satisfaz (2.6).

Para mostrar as condições iniciais $u(0) = 0$ e $(k_1 u')(0) = 0$ usa-se os mesmos argumentos aplicados para mostrar que $u_\epsilon(0) = 0$ e $(k_1 u'_\epsilon)(0) = 0$, o que completa a demonstração do nosso resultado relacionado com os dados nulos.

Capítulo 3

Existência de solução global fraca com dados não-nulos

Seja Q um domínio não-cilíndrico contido em $Q_0 = \Omega \times (0,T), T > 0$, onde Ω é um aberto limitado do R^n com fronteira Γ bem regular.

Em Q consideremos o seguinte problema misto,

$$(P)\begin{cases} (k_1(x,t)u')' + k_2(x,t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \quad em \quad \mathcal{Q} \\ u = 0 \quad sobre \quad \sum \\ u(0) = u_0 \quad em \quad H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \quad em \quad H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.1}$$

O objetivo deste capítulo será obter as soluções globais fracas para o problema (P) com os dados iniciais não-nulos. **Observação**: A primeira intensão do nosso estudo foi encontrar as soluções fracas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} (k_1(x,t)u')' + k_2(x,t)u' - \Delta u - \Delta u' + |u'|^\rho u' = f \quad em \quad \mathcal{Q} \\ u = 0 \quad sobre \quad \sum \\ u(0) = u_0 \quad em \quad H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \quad em \quad H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.2}$$

Uma das dificuldades encontradas foi passar o limite no termo não-linear $|u'|^\rho u'$. Para isso teríamos que fazer a segunda estimativa compondo o problema aproximado com u''_ϵ, ao fazer isso nos deparamos com a seguinte dificuldade

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}} u''_{\epsilon m}|^2 \leq C + \eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}\|^2 ds,$$

o que foi impossível estimar $u''_{\epsilon m}$.

A primeira idéia foi tomar $\sqrt{k_{1\epsilon}} = \sqrt{k_1 + \epsilon} \geq \sqrt{\epsilon}$, assim e estimativa de

$u''_{\epsilon m}$ vai depender de ϵ. O que não é possível, pois $\epsilon > 0$ (ϵ é pequeno). A não ser que $K_1(x,t) \geq d > 0$. O que não satisfaria nossa espectativa, pois perderíamos o carater hiperbólico-parabólico, de forma que teríamos apenas um problema hiperbólico e daí teríamos o resultado de existência com $k_1(x,t) \geq 0$, mas sem o termo $k_2(x,t)u'$.

Para estudar de fato o problema hiperbólico-parabólico, conservamos $k_1(x,t) \geq 0$, mas tivemos que substituir a dissipação $\Delta u'$ por uma dissipação mais forte $\Delta u''$ o que foi posível estimar u'' e consequentimente passar o limite na parte não-linear $|u'|^\rho u'$.

Faremos a seguir as seguinte hipóteses a cerca das funções $k_1, k_2, f \;\; e \;\; \rho$.

(A.1): $k_1(x,t) \geq 0, \;\; k_2(x,t) \geq d > 0$ *quase sempre em* Q.

$k_1 \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega_t))$

$k_2 \in C^0([0,T]; L^\infty(\Omega_t))$

$\mu(x,t) = k_2(x,t) - \frac{1}{2}|k_1'(x,t)| \geq \delta_0 > 0$ em Q

(A.2): $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega_t))$,

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$,

$0 < \rho < \infty$ se $n = 1$ ou $n = 2$

$0 < \rho < \frac{2}{n-2}$, se $n \geq 3$

Teorema 3.0.1. *Assumiremos as hipótesis:(H.1)-(H.2), (A.1)-(A.3) consideradas no teorema (2.0.7): Então dado* $T > 0$*, existe* $u : Q \to \mathbb{R}$ *na Classe:*

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega_t)); \tag{3.3}$$

$$u' \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega_t)); \tag{3.4}$$

$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_t)), \tag{3.5}$$

$$u'' \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega_t)) \tag{3.6}$$

e satisfaz:

$$\begin{cases} (k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u''(x,t) + |u'(x,t)|^\rho u'(x,t) = f \\ no \;\; sentido \;\; de \;\; L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_t)) \\ u(0) = u_0; \;\;\; (k_1 u')(0) = u_1. \end{cases}$$

Demonstração: Usaremos o método da Penalização de Lions, para obter a existência de soluções para o problema (P). Seja M a função definida no lema (0.0.2). Considere $\widetilde{f}$ o prolongamento de f respectivamente a Q_0, sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q.

Agora, para cada $\epsilon > 0$, consideremos o seguinte problema:

$$(P^\epsilon)\begin{cases} (k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' + k_2 u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} M u'_\epsilon = \widetilde{f}, \\ u_\epsilon(0) = u_0 \\ (k_1 u'_\epsilon)(0) = u_1. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aqui (P^ϵ) é o problema pertubado penalizado de (P).

Como $Q \subset Q_0$ e $\Omega_t \subset \Omega$ então,

$$k_1 \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega)) \tag{3.8}$$

$$k_2 \in C^0([0,T]; L^\infty(\Omega)) \tag{3.9}$$

$$\widetilde{f} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.10}$$

Denotaremos por $\widetilde{f}$ o prolongamento de f respectivamente a Q_0, sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q.

A prova do teorema (3.0.1) será uma consequência do seguinte resultado.

Teorema 3.0.2. *Sejam k_1 k_2 e $\widetilde{f}$ como mencionado anteriormente e M definida acima. Entâo para cada $0 < \epsilon < 1$, existe uma função $u_\epsilon : Q_0 \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.11}$$

$$u'_\epsilon \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.12}$$

$$\sqrt{K_1}u' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \tag{3.13}$$

$$u''_\epsilon \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.14}$$

e satisfaz,

$$\begin{cases} k_{1\epsilon}u''_\epsilon + k'_1 u'_\epsilon + k_2 u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} M u'_\epsilon = \widetilde{f} \\ u_\epsilon(0) = u_0 \quad em \quad H_0^1(\Omega) \quad e \\ (k_1 u'_\epsilon)(0) = u_1 \quad em \quad H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.15}$$

Demonstração: Seja $\{w_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m] \subset H_0^1(\Omega)$ um subespaço de dimensão m ($dimV_m = m$) gerado pelos primeiros elementos de $\{w_j\}$. Para todo $0 < \epsilon < 1$ queremos encontrar

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j\epsilon m}(t) w_j(x), 0 \leq t < t_{\epsilon m} \leq T. \tag{3.16}$$

Solução do sistema de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem em t

$$(P^{\epsilon m}) \begin{cases} (k_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}, v) + (k'_1 u'_{\epsilon m}, v) + (k'_1 u'_{\epsilon m} + (k_2 u'_{\epsilon m} + (-\Delta u_{\epsilon m}, v) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, v) \\ +(|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, v) + \frac{1}{\epsilon}(M u'_{\epsilon m}, v) = (\widetilde{f}, v), \forall v \in V_m \\ u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \to u_0 \;\; forte \;\; em \;\; H_0^1(\Omega) \\ u'_{\epsilon m}(0) = u_{1m} \to u_1 \;\; forte \;\; em \;\; H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.17}$$

Pelo teorema de Carathéodory $(P^{\epsilon m})$ admite solução $u_{\epsilon m} \in ([0, t_{\epsilon m}); V_m)$ tal que $u''_{\epsilon m}$ existe quase sempre em $[0; t_{\epsilon m})$ para algum $T > 0$. As estimativas a seguir nos permitiram prolongar as soluções aproximadas $u_{\epsilon m}$ a todo intervalo $[0, T]$.

3.1 Estimativas apriori

3.1.1 Estimativas apriori I*

Em $(P^{\epsilon m})$ tomemos $v = u'_{\epsilon m}$, isto é.

$$\begin{aligned} &(k_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_2 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) \\ &+(|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(M u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Da primeira fórmula de Green e sendo $u_{\epsilon m} = 0$ em $\sum$ teremos:

$$(-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.19}$$

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.20}$$

Temos ainda que

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}|^2 - \frac{1}{2}(k'_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}). \quad (3.21)$$

Substituindo (3.19) , (3.20) e (3.21) em (3.18) e depois integrando de 0 a t e usando a definição de produto interno em $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\frac{1}{2}|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega (\frac{1}{2}k'_1 + k_2)|u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + \frac{1}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
$$+\frac{1}{2}\|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + \int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+1} dxds + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}|^2 dxds =$$
$$\int_0^t (\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}(s))ds + \frac{1}{2}|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_\epsilon(0)|^2 + \frac{1}{2}\|u_{\epsilon m}(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|u'_{\epsilon m}\|^2 \quad (3.22)$$

Pela hipótese $(A.3)$ $\frac{1}{2}k'_1 + k_2 \geq \delta_0 > 0$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e depois a desiguadade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$, obtemos.

$$|\sqrt{K_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0}$$
$$+2\int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 ds \leq 2\int_0^t |(\widetilde{f}, u'_{\epsilon m}(s))|ds$$
$$\leq \int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + |\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_\epsilon(0)|^2 + \|u_{\epsilon m}(0)\|^2$$
$$+\|u'_{\epsilon m}(0)\|^2, \quad (3.23)$$

tomando

$$G_{\epsilon m} = |\sqrt{K_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + +\|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

$$+\|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + 2\int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds.$$

De posse da convergência em (3.17) notemos que: $u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \to u_0$ forte em $H^1_0(\Omega)$ portanto limitada, além disso $u'_{\epsilon m}(0) = u_{1m} \to u_0$ forte em $H^1_0(\Omega)$ logo limitada.

Afirmação $|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_{\epsilon m}(0)|$ é Limitada. De fato,

$|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_{\epsilon m}(0)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |k_{1\epsilon}(0)||u_{1m}|^2 dx = \int_\Omega |k_1(0)+\epsilon||u_{1m}|^2 dx \leq (supk_1+\epsilon)\int_\Omega |u_{1m}|^2 dx$

Como $0<\epsilon<1$, $k_1 \in C^1([0,T];L^\infty(\Omega))$ e $u_{1m} \to u_1$ forte em $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo $|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} \leq sup(k_1+\epsilon)|u'_1|^2 \leq C$ independente de t, m e ϵ.

Como $\widetilde{f} \in L^2(\Omega)$ logo limitada, e pelo fato de $u'_{\epsilon m}$ ser limitada, visto a estimativa I do Capitulo 3, e voltando a desigualdade (3.23) obetmos

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
$$+2\int_0^t \int_\Omega |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dxds + \frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dxds \leq C \tag{3.24}$$

onde C é uma constante, independente de ϵ, m, t.

Da desigualdade (3.24) podemos garantir que:

$$\|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} = supess\|u_{\epsilon m}\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C, \tag{3.25}$$

$$\|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} = supess\|u'_{\epsilon m}\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C, \tag{3.26}$$

$$\|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = supess\|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \tag{3.27}$$

$$|\frac{2}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \tag{3.28}$$

independente de ϵ, m, t. E como

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega)(0,T,H^1_0) \hookrightarrow L^2(0,T,L^2(\Omega)) \Rightarrow$$

$$|u'_{\epsilon m}|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_2$$

$\forall m$, $\forall t \in [0,t_{\epsilon m})$, independente de ϵ, m, t.

Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos extender a solução $u_{\epsilon m}(t)$ a todo intervalo $[0,T]$. Daí, segue-se que:

$(u_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T,H^1_0\Omega)$;

$(u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^2\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$;

$(\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)(t))$;
$(\frac{1}{\epsilon}u'_{\epsilon m})$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Como os espaços onde as sequências acima estão limitadas são espaços de Banach separáveis, podemos deduzir a existência de uma subsequência de $(u_{\epsilon m}(t))$ a qual denotaremos por $(u_{\epsilon m}(t))$ tal que:
$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$
$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

3.1.2 Estimativa apriori II*

Em $(P^{\epsilon m})$ tomemos $v = u''_{\epsilon m}$ logo

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k'_1 u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k_2 u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\triangle u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\triangle u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m})$$
$$+(|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u''_{\epsilon m}) \tag{3.29}$$

ou seja

$$\begin{aligned}(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\widetilde{f}, u''_{\epsilon m}) + \\ -((k'_1 + k_2)u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (-\Delta u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}).\end{aligned} \tag{3.30}$$

Temos que:

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u''_{\epsilon m}) = |\nabla u_{\epsilon m}|^2_{l^2(\Omega)} = \|u''_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{3.31}$$

substituindo (3.31) em (3.30), integrando de 0 à t obtemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^2 |\sqrt{k}_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (Mu'_{\epsilon m}(s), u''_{\epsilon m}(s))ds = \\ &\int_0^t |\widetilde{f}(s)||u''_{\epsilon m}(s)|ds + \int_0^t |k'_1 + k_2||u'_{\epsilon m}(s)||u''_{\epsilon m}(s)|ds + \\ &\int_0^t |\nabla u_{\epsilon m}||u''_{\epsilon m}(s)|ds + \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+1}|u''_{\epsilon m}(s)|ds.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, usando o lema (0.0.2), e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $ab \leq \frac{1}{4\eta}a^2 + \eta b^2$ $\eta > 0$ obtemos:

$$\int_0^2 |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t)|^2 - \frac{1}{2\epsilon}|M(0)u'_{\epsilon m}(0)|^2 ds$$
$$\leq \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds +$$
$$\eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\nabla u_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{2(\rho+1)}$$
$$+\eta \int_0^t |u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds. \tag{3.33}$$

e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ e pelas imersões convenientes, então podemos escrever

$$\int_0^2 |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t) \leq \frac{1}{4\eta}\int_0^t |\widetilde{f}(s)|^2 ds$$
$$+c_2\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds + c_3\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds$$
$$+\frac{1}{4\eta}\int_0^t \|u_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta}\int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{2(\rho+1)}$$
$$+c_4\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds. \tag{3.34}$$

Da primeira estimativa $u_{\epsilon m}$, $u'_{\epsilon m}$ são limitadas , $k_1 \in L^\infty(\overline{\Omega})$, $k_2 \in L^\infty(\overline{\Omega})$ logo, também são limitadas e, além disso, pelo lema (0.0.1) temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ logo $|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}$ é limitada. De fato

$$||u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T |u'\epsilon m(t)|^{2(\rho+1)}_{L^(\rho+1)} dt \leq c_1 \int_0^T \|u'_{\epsilon m}\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$
$$\leq cT. \tag{3.35}$$

Segue-se que

$$\int_0^2 |\sqrt{k}_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{\epsilon m}(t)|^2$$
$$\leq c + 4\eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds. \tag{3.36}$$

e consequentemente
$(1-4\eta)\int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds \leq c_5$ sempre que $\eta < \frac{1}{4}$ logo, temos que

$$\|u''_{\epsilon m}(s)\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c, \tag{3.37}$$

c independente ϵ, m, t, $\forall t \in [0, t_{\epsilon m})$. Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos estender a todo intervalo $[0, T]$. Portanto:
$(u''_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^2(0, T, H_0^1\Omega)$;
De maneira análoga à **Estimativa I**, obtemos
$u''_{\epsilon m} \to u''_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ quando $m \to \infty$.

3.2 Análise do termo não-linear

Temos, da primeira estimativa, que $(u'_{\epsilon m})$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e na segunda estimativa obtivemos que $(u''_{\epsilon m})$ é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pelo fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong [L^2(\Omega)]'$ e pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions existe uma subseqüência de $(u'_{\epsilon m})$ que ainda denotaremos por $(u'_{\epsilon m})$ tal que
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ forte em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.
Como a função $s \to |s|^\rho s$ é uma função contínua, logo a função $t \to |u'_{\epsilon m}(t)|^\rho u'_{\epsilon m}(t)$ é também contínua e como $u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então, temos que:
$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $Q_0 = \Omega \times (0, T)$
Agora, por (3.35) e pela convergencia acima e do lema de Lions deduzimos que:
$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

3.3 Resumo das convergências

$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$
$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$
$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m} \to \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$
$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \to |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$
$u''_{\epsilon m} \to u''_\epsilon$ fraco em $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ quando $m \to \infty$.

3.4 Passagem do limite*

Temos que $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$, então, $\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)dt \to \int_0^T (u_\epsilon, v)dt, \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$ e além disso $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

Temos ainda que $u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ conseqüentemente

$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v)dt \to \int_0^T (u'_\epsilon, v)dt, \forall v \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$

isto significa que

$u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

Por outro lado, tomando $v = w\theta$, $\theta \in (D)(0;T)$ e $w \in L^2(\Omega)$, então

$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, w)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'_\epsilon, w)\theta(t)dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega)), \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

A função $t \to (u'_{\epsilon m}(t))$ é uma distribuição em $L^2\Omega$ então

$(u'_{\epsilon m}, w) \to (u'_\epsilon, w)$ em $\mathcal{D}'(0,T)$ $\forall w \in L^2(\Omega)$

Portanto

$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}, w) \to \frac{d}{dt}(u'_\epsilon, w)$ em $\mathcal{D}'(0,T)$ $\forall w \in L^2(\Omega)$

conseqüentimente

$\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} \to \frac{d}{dt}u'_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0)$.

Onde $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}$, $\frac{d}{dt}u'_\epsilon$ é a derivada distribucional de $u'_{\epsilon m}$, u'_ϵ respectivamente. Como $u'_{\epsilon m}$ é uma função contínua e sua derivada existe quase sempre em $(0,T)$, logo

$< \frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}, \theta >= -\int_0^T u'_{\epsilon m}\theta'(t)dt = \int_0^T u''_{\epsilon m}\theta(t)dt =< u''_\epsilon, \theta >, \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Se denotarmos $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} = u''_{\epsilon m}$ e $\frac{d}{dt}u'_\epsilon = u''_\epsilon$, temos que

$\int_0^T u''_{\epsilon m}, v)dt \to \int_0^T (u''_\epsilon, v)dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$.

Tomando $v = w\theta$, $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, teremos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon m}, w)\theta(t)dt \to \int_0^T (u''_\epsilon, w)\theta(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega)), \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Portanto

$u''_{\epsilon m} \to u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$

Conseqüentimente

$k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m} \to k_{1\epsilon}u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$

Mas $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv (L^2(,T;L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, e como $u'_{\epsilon m} \to u'_{\epsilon}$, e $u''_{\epsilon m} \to u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$ e pela continuidade de Δ em $\mathcal{D}'(Q_0)$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon m} \to -\Delta u_{\epsilon} \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q_0) \\ -\Delta u_{\epsilon m} \to -\Delta u_{\epsilon} \;\; em \;\; \mathcal{D}'(Q_0). \end{cases}$$

De modo Analogo, temos:

$|u'_{\epsilon m}|^{\rho}u'_{\epsilon m} \to |u'_{\epsilon}|^{\rho}u'_{\epsilon}\forall w \in \mathcal{D}'(Q_0)$

$\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} \to \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$

$k_2u'_{\epsilon m} \to k_2u'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$

$k'_1u'_{\epsilon m} \to k'_1u'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

As convergências obtidas até aqui nos permite passar o limite na equação abaixo, quando $m \to \infty$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{d}{dt}((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m}(t))'v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon m}t, v(x))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (|u'_{\epsilon m}(t)|^{\rho}u'_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt \\ &\to \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon}(t))', v(t))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon}(t), v(x))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon}(t), v(x))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (|u'_{\epsilon}(t)|^{\rho}u'_{\epsilon}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon}(t), v(x))\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (\widetilde{f}, v(x))\theta(t)dt. \end{aligned}$$

Como V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade acima é válida para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T), \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Passando o limite quando $m \to \infty$ em $(P^{\epsilon m})$ e usando as convergências obitidas teremos

$((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})' + k_2 u'_{\epsilon m} - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_{\epsilon m} + |u'_{\epsilon m}|^{\rho} u'_{\epsilon m} + \frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon m}(t) = \widetilde{f}(t)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$.

3.5 Verificação dos dados iniciais*

Considerando $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

Mas $u_{\epsilon m} \to u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)dt. \tag{3.38}$$

Por outro lado

$u'_{\epsilon m} \to u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)$

logo

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'_\epsilon, v)\theta(t)dt \tag{3.39}$$

integranto por partes as integrais (3.39) acima e usando a definição de θ obtemos:

1. $(-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt$
2. $(-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt$

De (3.38) e das igualdades (1) e (2) obtemos

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \to (u_\epsilon(0), v). \tag{3.40}$$

Mas $u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \to u_0$ forte em $H_0^1(\Omega)$. Ou seja

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \to (u_0, v), \tag{3.41}$$

por (3.40) e (3.41) e pela unicidade de limite, temos:

$(u_\epsilon(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Logo, segue-se que $u_\epsilon(0) = u_0$.

Agora verificaremos que $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = u_1$.

Multiplicando o problema $(P^{\epsilon m})$ por $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt$$

integrando por partes a 1ª integral da igualdade acima, teremos:

$$- \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt.$$

Se $m \to \infty$, utilizando as convergências obtidas e pelo fato que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$ obtemos:

$$- \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon m, v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2 u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_\epsilon, v)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (-\Delta u''_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_\epsilon|u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T (Mu'_\epsilon, v)\theta(t)dt$$
$$= \int_0^T (\widetilde{f}, v)\theta(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Seja a função

$$\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\beta} + 1; & 0 < t \leq \beta \\ 0; & \beta < t \leq T. \end{cases} \tag{3.42}$$

Ora substituindo θ'_β e θ_β na expressão acima obtemos:

$$\frac{1}{\beta}\int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt + \int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \tag{3.43}$$

onde

$h(t) = (k_2u'_\epsilon, v) + (-\Delta u_\epsilon, v) + (-\Delta u''_\epsilon, v) + (|u'_\epsilon|u'_\epsilon v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_\epsilon, v) - (\widetilde{f}, v)$

Temos que $k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e da igualdade

$((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})' + k_2u'_{\epsilon m} - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_{\epsilon m} + |u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} + \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}(t) = \widetilde{f}(t)$ no sentido de $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ implica que

$(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Longrightarrow k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C^0_w([0,T];L^2(\Omega))$

Como $|\theta_\beta(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0,T]$ então

$$\lim_{\beta\to 0}\int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \tag{3.44}$$

sendo $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Longrightarrow k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C^0_w([0,T];L^2(\Omega))$ resulta que

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\beta}\int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt = ((k_{1\epsilon}u'\epsilon)(0), v). \tag{3.45}$$

Passando o limite quando $\beta \to o$ em (3.43), de (3.44) e de (3.45) obtemos:

$((k_{1\epsilon}u'\epsilon)(0), v) = (u_1, v) \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$

e pela densidade de $H^1_0(\Omega)$ em $L^2(\Omega))$ temos

$(k_{1\epsilon}u'\epsilon)(0) = u_1.$

O que prova o teorema (3.0.2)

Demonstração do teorema (3.0.1)

Observamos que as estimativas obtidas são independentes de ϵ. Portanto, pelos mesmos argumentos usado para obter u_ϵ de $u_{\epsilon m}$, a qual é solução de $(P^{\epsilon m})$, podemos passar o limite quando $\epsilon \to 0$, em u_ϵ ou a uma subseqüência de u_ϵ tal que:

$$u_\epsilon \to u \quad fraco \;\; estrela \;\; em \quad L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{3.46}$$

$$u'_\epsilon \to u' \quad fraco \;\; em \quad L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{3.47}$$

$$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}}u' \ \ fraco \ \ estrela \ \ em \ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.48}$$

$$|u'_\epsilon|^\rho u' \rightarrow |u'|^\rho u' \ \ fraco \ \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.49}$$

$$u''_\epsilon \rightarrow u''_\epsilon \ \ fraco \ \ em \ \ L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{3.50}$$

$$\frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon}Mu' \ \ fraco \ \ em \ \ L^2(0,T,H^1_0(\Omega)) \tag{3.51}$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Da estimativa apriori I obtivemos:

$$\frac{2}{\epsilon}\int_0^t \int_\Omega |Mu'_\epsilon|^2 dt \leq C, \tag{3.52}$$

onde C é uma constante positiva independente de ϵ.

Restringindo nossa equação do **teorema** (3.0.1) ao domínio não-cilíndrico Q. Usando a definição de M obtemos:

$$M(x,t)u'_\epsilon = \begin{cases} u'_\epsilon; \ \ em \ \ Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0; \ \ Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \end{cases} \tag{3.53}$$

Da desigualdade (3.52) temos que $\frac{1}{\epsilon}|Mu'_\epsilon| \leq C$, logo $|Mu'_\epsilon| \leq \frac{\epsilon C}{2}$, passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $0 \leq |Mu'_\epsilon| \leq 0$. Por definição $M \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e de (2.61) segue-se que

$$Mu'_\epsilon \rightarrow 0 \ \ forte \ \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.54}$$

Mas por (3.51) e de (3.54), podemos concluir que:

$$Mu' = 0 \ \ quase \ \ sempre \ \ em \ \ Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \tag{3.55}$$

Mas, por definição, $M = 1$ em $Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$, como consequência obtemos $u' = 0$ quase sempre em $Q_0 \backslash Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$. Aplicando a proposição (0.0.1) obtemos $u(x,t) = 0$ quase sempre em $\Omega \backslash \Omega_t$ para quase todo $t \in (0,T)$. Como $u \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))$ teremos que

$$u \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega_t)).$$

De modo análogo, obtemos:

$$u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$$

$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t))$$

$$u'' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t)).$$

Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ e pela continuidade de $\frac{d}{dt}$ obtemos:

$$\int_Q \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon u'_\epsilon})\varphi(x,t)dxdt \to \int_Q \frac{d}{dt}(k_1u')\varphi(x,t)dxdt$$

isto significa que

$$\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) \to \frac{d}{dt}(k_1u'). \tag{3.56}$$

Restringindo a equação do teorema (3.0.1) a nosso domínio não-cilíndrico Q, usando a definição de M , $\widetilde{f}$, as convergências (3.46)-(3.51), (3.56), a proposição (0.0.1) e passando o limite quando $\epsilon \to 0$ em (3.7),

obtemos:

$$\frac{d}{dt}(k_1u') + k_2u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \quad \textit{no sentido de} \\ \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.57}$$

De (3.57) segue imediatamente que u satisfaz

$$(k_1(x,t)u'(x,t))' + k_2(x,t)u'(x,t) - \triangle u(x,t) - \triangle u''(x,t) + |u'(x,t)|^\rho u'(x,t) = f \\ \textit{no sentido de} \;\; L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega_t)).$$

Para mostrar as condições iniciais $u(0) = u_0$ e $(k_1u')(0) = u_1$ usa-se os mesmos argumentos aplicados para mostrar que $u_\epsilon(0) = u_1$ e $(k_1u'_\epsilon)(0) = u_1$.

O que completa a demonstração do nosso resultado relacionado com os dados não-nulos.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS and G. PAPANICOLAOU, Pertubations et augmentation des conditions initiales, in: Singular pertubation and baundary large theory. Springes-Verag, LION(1976), pp 10-26

[2] H. BRÉZIS, Análisis Funcional. Teoria y aplicaciones. Alianza editorial. Madrid, Paris, 1984.

[3] J. COOPER, L.A. MEDEIROS, The cauchy problem for nonlinear wave equations in domains with moving boundary, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 26, fasc. IV, 829 - 838, 1972.

[4] J. COOPER, C. BARDOS, A nonlinear wave equation in a time dependent domain. J. Math. Anal. Appl, 42, 29-60, 1973.

[5] J. FERREIRA, M.A.ROJAS-MEDAR, On global weak solutions of a evolution equation in noncylindrical domain. Proceedgins of the Ninth International Colloquium on Differential equations, Bulgária, P. 155-162, 1999.

[6] J. FERREIRA, D.C. CARVALHO, Existence of global weak solutions or an equation of nonlinear vibrations. Boletim da Sociedade Brasileira Paranaense de Matemática. vol. 11(02), pp 70-90, 1990.

[7] J. FERREIRA, Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential Equation in noncilindrical domain. Rendiconti del Circolo Matemático Di Palermo (Italia), vol. 44, serie II, pp 135-146, 1995.

[8] J. FERREIRA, N.A.Lar'kin, Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncilindrical Domains. Portugaliea mathematica, vol. 53, fasc. 4-1996.

[9] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non lineáres. Dunod, Paris, 1969.

[10] N. LAR'KIN, Boundary problem in the large for a classe of hyperbolic-parabolic equation. Sib. Math. J. 18(6), pp 1003-1006, 1977.

[11] A.H. LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, 1944.

[12] L.A. MEDEIROS, nonlinear wave equations in domains wiht variable boundary, Arch. Rational Mech. Anal., 47 pp 47-58, 1972.

[13] L.A. MEDEIROS, M.M.MIRANDA, Introdução aos espaços de sobolev e às equações diferenciais parciais. Textos de métodos matemáticos nº 25. IME/UFRJ, 1993.

[14] D.C. PEREIRA, Problema misto para uma equação de vibrações não lineares. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 9(01), pp 31-43, 1988

[15] T.N. RABELLO, Decaimento de energia de um sistema de equações hiperbólicas não lineares num domínio não cilíndrico. Tese de doutorado, ITA-São José dos Campos, 1990.

[16] J.E.M. RIVERA, teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. Série textos avançados, LNCC, 1999.

[17] W.A. STRAUSS, On weak solutions of semiliear hyperbolic equation. Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 42(4) pp 645-751, 1970.

[18] N. VRAGOV, On a mixed problem of a hyperbolic-parabolic equation. Dolk. Akad. Nank-URSS, vol. 244(2) pp 1179-1183, 1975.