UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Lindomar Miranda Ribeiro

SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO DE EDP'S DO TIPO KLEIN-GORDON COM NÃO-LINEARIDADES DO TIPO KIRCHHOFF-CARRIER EM DOMÍNIO LIMITADO

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ferreira

Belém-PA
2005

Lindomar Miranda Ribeiro

SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO DE EDP'S DO TIPO KLEIN-GORDON COM NÃO-LINEARIDADES DO TIPO KIRCHHOFF-CARRIER EM DOMÍNIO LIMITADO

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como quesito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Jorge Ferreira**

Belém-PA
2005

Lindomar Miranda Ribeiro

Sobre um sistema acoplado de edp's do tipo Klein-Gordon com não linearidades do tipo Kirchhoff-Carrier em domínio limitado

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belém, 13 de Dezembro de 2005

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Ferreira
Universidade Federal de São João Del Rei, UFSJ
Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Faculdade Ideal, FACI
Examinador

Prof. Dr. João dos Santos Protázio
Universidade Federal do Pará, UFPA
Examinador

Ao meu primeiro grande mestre, meu Pai.

Agradecimentos

⋆ A Deus Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e a inspiração necessária para chegar ao final deste trabalho;

⋆ Aos meus pais Maria e Ribeiro, os verdadeiros mestres desta história. Sem vocês este momento não seria possível;

⋆ Aos meus irmãos e irmãs: Cyraney, João, Cyranete, Ricardo, Cyraneide, Georgiton, pela alegria com a minha vitória;

⋆ Ao pilar da minha vida, fonte de alegria e paz, meu filhão Gabriel;

⋆ Àquela que compartilhou sua amizade, atenção, paciência, e que nunca deixou de acreditar em mim. Obrigado Yo;

⋆ Ao amigo e orientador, Prof. Dr. Jorge Ferreira, que desde o início depositou inteira confiança, e a humildade com que conduziu este trabalho;

⋆ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas, em especial: Sebastião, Carlos, Sílvia, Helena, Paula, Márcio, Reiville, Antenor, Luiz, Renato, Irazel, Heleno e Aubedir;

"Sei que ninguém pode voltar atrás e fazer um novo começo,
mas qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim."

RESUMO

RIBEIRO, Lindomar Miranda. Sobre um sistema acoplado de edp's do tipo Klein-Gordon com não linearidades do tipo Kirchhoff-Carrier em domínio limitado. 2005. Dissertação de Mestrado em Matemática - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

Neste trabalho nos propomos a demonstrar a existência e unicidade de solução local fraca para o problema misto (P):

$$(P): \left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) = f(v(t)) \ \ em \ \ Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) = g(u(t)) \ \ em \ \ Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \ em \ \Sigma = \Gamma \times]0, T[\,, \\ \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = v_1 \ \ em \ \ \Omega. \end{array} \right.$$

sendo que para a existência utilizamos o método de Faedo Galerkin, o teorema de compacidade de Aubin-Lions, desigualdades importantes da Análise Funcional, enquanto para a unicidade utilizamos o método da energia, devido a regularidade da solução, e também algumas desigualdades da Análise Funcional.

Palavras Chaves: Existência, Unicidade, Solução Fraca Local.

Abstract

RIBEIRO, Lindomar Miranda. About a coupled system of Klein Gordon partial differential equations with no linearity of Kirchhoff-Carrier type in a limited domain. 2005. Dissertation (Mastering in Mathematics) - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

In this work we propose to demonstrate existence and uniqueness of local weak solution for the mixed problem (P):

$$
(P): \left\|\begin{array}{l}
u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) = f(v(t)) \ \ em \ \ Q, \\[2ex]
v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) = g(u(t)) \ \ em \ \ Q, \\[2ex]
u(t) = v(t) = 0 \ em \ \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[\,, \\[2ex]
u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \ \ em \ \ \Omega, \\[2ex]
v(0) = v_0, \ v'(0) = v_1 \ \ em \ \ \Omega.
\end{array}\right.
$$

For the existence we used Faedo Galerkin Method, Aubin Lions' theorem of compactness and important inequalities of Functional Analysis, while for the uniqueness we used the energy method, due to the solution's regularity, and also some inequalities of Functional Analysis.

Words Key: Existence, Uniqueness, Local Weak Solution.

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho analisamos a existência e unicidade de solução fraca local para o problema misto

$$\left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) = f(v(t)) \quad em \quad Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) = g(u(t)) \quad em \quad Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \; em \; \Sigma = \Gamma \times \left]0, T\right[, \\ \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \quad em \quad \Omega, \\ \\ v(0) = v_0, \; v'(0) = v_1 \quad em \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

em que Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times]0, T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. E ainda, $-\Delta$ é um operador "menos laplaciano"auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, sendo $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$.

Para mostrar a existência, usamos o método de Faedo Galerkin, o teorema de compacidade de Aubin-Lions e algumas desigualdades importantes de Análise Funcional. Para mostrar a unicidade, usamos o método da energia, aplicado com sucesso devido à regularidade da solução fraca, acoplada com desigualdades de Análise Funcional.

O problema (0.1) constitue uma versão estendida, em forma de sistema, da seguinte equação:

$$\left\| \begin{array}{l} u'' - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + M_1\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx\right)u = f \quad em \quad Q = \Omega \times \left]0, T\right[, \\ \\ u = 0 \quad em \quad \Sigma = \partial\Omega \times \left]0, T\right[, \\ \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \quad em \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.2}$$

estudada em [3].

O problema (0.2) é uma versão concreta do problema abstrato abaixo:

$$\left\| \begin{array}{l} u'' + M\left(\|u(t)\|^2 dx\right) Au + M_1\left(|u(t)|^2 dx\right) u = f \\ \\ u(0) = u_0, \\ \\ u'(0) = u_1 \end{array} \right. \tag{0.3}$$

sendo A um operador auto-adjunto em um espaço de Hilbert H com dados iniciais $u_0 \in D(A),\ u_1 \in V\ e\ f \in L^2\left(0, T; H\right)$ ver [5].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Sendo assim, não nos preocuparemos com demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, pois mencionaremos as referências bibliográficas onde poderão ser encontradas.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \;\text{ em }\; \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$
2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$
3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1.1. *Seja* $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$*: Verifica-se que o* $supp\,(\varphi) = (0,1)$*, não é um conjunto compacto.*

Neste nosso estudo, damos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω, que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definimos

$C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 1.1.2. *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\quad r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se*

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & se \ \ \|x - x_0\| < r \\ 0 & se \ \ \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares continuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp(\varphi) \subset K \ \text{ e } \ supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N},$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Observação 1.1.2. *Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

Note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \\ &= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = 0.\end{aligned}$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [9].

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$

em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. *. Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando é Lebesgue-integrável em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: ver [9]

Exemplo 1.1.3. *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então:

$$|\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)\, dx \right| \leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|\, dx$$

$$\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|\, dx \to 0,$$

pois $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1.4. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função* $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição, conhecida por Distribuição de Dirac, *em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por:

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x),$$

teremos que:

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω. Logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação do conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev,* se deve à fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada (no sentido das distribuições) de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear:

$$D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R},$$

tal que:

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim, as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u^{'}, \varphi >= - < u, \varphi^{'} >= -\int_0^{\infty} \varphi^{'}(x)dx = \int_{\infty}^{0} \varphi^{'}(x)dx = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^{\alpha}T_u = T_{D^{\alpha}u}, \quad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m\,(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p\,(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^{\alpha}u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p\,(\Omega)$pois estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p\,(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p\,(\Omega)$. Logo tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p\,(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

é espaço de *Banach.* Ver [1].

$L^2(\Omega)$ é o espaço vetorial das (classes) funções definidas em Ω cujo o qadrado é integrável a Lebesgue.

Definimos o prduto escalar e norma, respectivamente, em $L^2(\Omega)$ por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)ds, \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

$$|u| = \int_{\Omega} u^2 dx$$

O conjunto de todas as funções mensuráveis v e que sejam essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$. Define-se a norma de v por:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess\,|v(x)|\,, \forall v \in L^\infty(\Omega)\,.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach*. Ver [1].

No caso particular em que $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por:

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\,v(x)\,dx,$$

cuja norma induzida é

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \le p \le \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \le m$. Em símbolo temos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,, \forall \alpha, \text{multi-índice, com } |\alpha| \le m\}\,.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, 1 \le p < \infty.$$

Se $p = \infty$,

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Em ambos os casos, $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável, ver [1], se $1 \le p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotado por $H^m(\Omega)$, isto é:

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\,; D^\alpha u \in L^2(\Omega)\,, \forall \alpha, \ |\alpha| \le m\right\},$$

as derivadas D^α sendo tomadas no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar:

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \, dx, \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

com norma induzida por este produto escalar dada por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)^2_{L^2(\Omega)} dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.* Ver [9].

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b) \, ; u' \in L^2(a,b) \right\}, \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso:

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(t)]^2 \, dt + \int_a^b [u'(t)]^2 \, dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \, ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

De modo mais conciso:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços$W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a "aderência"de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [9] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por funções de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, sendo $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. Daí que podemos definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k|_\Gamma,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0, denominado operador de traço, é contínuo e linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$. Assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega);\ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{\varphi \in H^2(\Omega); \varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_\Gamma = 0\right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: ver [6]

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: ver [6]

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1. Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funçõesde $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Isto é,

$$\varphi_\nu \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega), \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$tais que $\forall x \in \Omega \;\; a < proj\ x < b$ sendo a $proj\ x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1. Agora, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

E da desigualdade de *Schwartz*, obtemos:

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 d\xi.$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a)\int_\Omega \int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 d\xi dx \leq \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto:

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\left[\sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

Logo:

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\,|\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Observação: Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que, em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato: consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = |v|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 \geq |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1+C)\,|\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Conclui-se, das desigualdades acima, que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.3 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com norma $\|.\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica de algum conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}\varphi_i,$$

sendo cada $E_i \subset (0,T)$ mensurável, $i = 1,2,\ldots,k$, os conjuntos E_i tomados dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1,2,\ldots,k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\,\varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner-integrável ($\mathcal{B}-integr\acute{a}vel$) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

(ii) $\lim\limits_{k,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X\,dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u é, por definição, o vetor de X dado por:

$$\int_0^T u(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)\,dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X. Ver [6].

Uma função vetorial $u:(0,T)\subset \mathbb{R}\longrightarrow$ X é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t\mapsto \langle \Phi, u(t)\rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, sendo X' o dual topológico de X; dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t\mapsto \|u(t)\|_X$ é *mensurável-Lebesgue.* Ver[6].

Denotaremos por $L^p(0,T;X)\,, 1\leq p<\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t\mapsto \|u(t)\|_X^p$ é à *Lesbegue-integrável* em $(0,T)$, munido da norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Quando $p=2$ e $X=H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por:

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)}=\int_0^T (u(s)\,,v(s))_H\,ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u:(0,T)\subset\mathbb{R}\longrightarrow$ X que são fortemente mensuráveis e tais que $t\mapsto \|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por:

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)}=supess_{t\in]0,T[}\,||u(t)||_X\,.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica com o espaço de *Banach* $L^q(0,T;X')$, sendo p e q índices conjugados. No caso, $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u,v\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)}=\langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}\,.$$

Definição 1.3.1. *$f:[0,T]\to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que:*

$$\int_0^T ||S_k(t)-f(t)||_X dt\to 0,\ \ com\ k\to\infty,$$

se f é integrável, define-se:

$$\int_0^T f(t)d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t)d\mu$ é dita integral de Bochner de f, em relação a μ.

Exemplo 1.3.1. *Sejam* $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, *e* $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. *Consideremos a função* $T_u : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$, *definida por:*

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

sendo a integral calculada no sentido de Bochner *em* X. *A aplicação* $T_u : D(0,T) \to X$ *é linear e contínua e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição* T_u *é univocamente determinada por* u *e, neste sentido, podemos identificar* u *com a distribuição* T_u *por ela definida e, portanto,* $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ *é uma injeção contínua e densa.*

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.3.2. *Seja* $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. *A derivada de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *dada por:*

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, *estamos representando o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme:*

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Por $C^0_w([0,T];X)$, *denotaremos o espaço das funções* $u : [0,T] \longrightarrow X$ *fracamente contínuas, isto é, a aplicação* $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X',X}$ *é contínua em* $[0,T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$. Ver [6].

1.4 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\|.\|$, $((,))$ e $|.|$, $(,)$. Suponhamos $V \subset H$, V denso em H e a injeção de V em H contínua.

A terna $\{V, H, ((,))\}$ determina um operador linear A cujo domínio é o subespaço vetorial $D(A) \subseteq V$ definido por:

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u,v)) = (f,v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que:

$$((u,v)) = (Au,v)\,, \forall u \in D(A) \;\text{ e }\; v \in V.$$

Demonstra-se, ver [9], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H, $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, são injeções contínuas e densas, e A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, ver [6], segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo de H, enumerável, $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$, constituído de autovetores de A, cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ satisfazem:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots, \lambda_j \to \infty \;\text{ quando }\; j \to \infty.$$

Para cada α real, seja A^α o operador defindo por:

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{\alpha} (u, w_\nu)\, w_\nu \in H, u \in D(A^\alpha)\,.$$

Neste sentido, cada $u \in H$, pode ser representado por:

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu)\, w_\nu.$$

Em $D(A^\alpha)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por:

$$(u,v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

e

$$|u|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|\,.$$

Temos que $D(A^\alpha)$, munido do produto interno $(u,v)_{D(A^\alpha)}$, é um espaço de Hilbert e dados α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão $D(A^{\alpha_1}) \hookrightarrow D(A^{\alpha_2})$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por:

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = V, \; \left|A^{\frac{1}{2}} u\right| = \|u\|\,, \forall u \in V.$$

No que se segue o operador A será definido pelo terno $\{V, H, ((u,v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

- $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto C em D, existe uma função real integrável $m_C(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_C(t), \forall (t,x) \in D. \tag{1.1}$$

Consideremos o retângulo $R = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |\mathrm{t} - \mathrm{t}_0| \leq \mathrm{a}, |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| \leq \mathrm{b}\right\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.5.1 (Carathéodory). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, em algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração: ver [8]

Corolário 1.5.1 (Prolongamento de solução). *Seja $D = [0,\omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |\mathrm{x}| \leq \mathrm{b}\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de:*

$$\begin{cases} X' = f(t,X) \\ X(0) = X_0, \ \ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então, φ tem um prolongamento até $[0,\omega]$.

Demonstração: Ver [9].

Proposição 1.5.1. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H, $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$, com $1 \leq p < \infty$. Então, $u \in C^0([0,T];H) \cap C^0_w([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [6].

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca). *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Diz-se que $u_\nu \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu\rangle \rightarrow \langle \varphi, u\rangle\,, \forall u \in E^{'}.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela). *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Diz-se $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ fraco $\star$ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u\rangle \rightarrow \langle \varphi, u\rangle\,, \forall u \in E.$$

Proposição 1.5.2 (Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1, e, W o espaço:*

$$W = \left\{u \in L^2\left(0,T;B_0\right);\ \ u' \in L^2\left(0,T;B_1\right)\right\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^2(0,T;B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^2\left(0,T;B\right)$ é compacta.

Demonstração: Ver [6].

Observação 1.5.1. *Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2\left(0,T;B_0\right)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2\left(0,T;B_1\right)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k\in\boldsymbol{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2\left(0,T;B\right)$.*

Lema 1.5.1. *Consideremos X um espaço de Hilbert com dual X' e Y um outro espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$. Seja:*

$$W = \{u \in L^2(0,T;X);\ \ u' \in L^2(0,T;X')\}.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))_Y = \langle u'(t),v(t)\rangle_{X,X'} + \langle u(t),v'(t)\rangle_{X,X'}\,.$$

Demonstração: Ver [6].

Lema 1.5.2 (Lema de Lions). *Sejam $\mathcal{O}$ um aberto limitado do $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, a sequência g_μ e g são funções de $L^q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, tal que:*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \;\; g_\mu \rightarrow g,$$

quase sempre em $\mathcal{O}$. Então $g_\mu \rightarrow g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [6].

Lema 1.5.3 (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma seqüência em $M^+(X, \mathcal{M})$. Então,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu,$$

sendo $M^+(X, \mathcal{M})$ a coleção de todas as funções mensuráveis, não negativas, definidas em X.

Demonstração. Ver [9].

Teorema 1.5.2 (Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja f_n uma seqüência de funções integráveis definidas em X. Suponha que:*

1. *f_n converge q.s. para uma função real, mensurável, f.*

2. *Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então, f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [1]

Teorema 1.5.3 (Representação de Riez). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que:*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall \; f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Demonstração. Ver [6].

Como conseqüência destes resultados temos as seguintes identificações:

$$i) L^2 \cong (L^2)'$$
$$ii) L^{p'} \cong (L^p)', \quad com \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdade de Sobolev). *Considere* $1 \leq p < N$. *Então:*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N)$$

com $p*$ *satisfazendo:*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Além disso, existe uma constante $C = C(p, N) = \frac{(N-1)p}{N-p}$ *satisfazendo:*

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: ver [6].

Observação 1.5.2. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N), m \geq 1,$ *inteiro, tal que:*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Demonstração. Ver [6].

Proposição 1.5.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $f \in L^p$ *e* $g \in L^{p'}$ *com*

$$p, p' \geq 1 \ \ e \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então:

$$f, g \in L^1 \ \ e \ \ \int |f.g| \leq \|f\|_{L^p}.\|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [1].

Teorema 1.5.5 (Banach-Alaoglu). *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* E' *o seu dual topológico. Então o conjunto:*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [6].

Teorema 1.5.6 (Regularidade para um problema de Dirichlet). *Sejam* Ω *um aberto de classe* C^2, *com* $\Gamma = \partial\Omega$ *limitado. Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$ *satisfazendo:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$*, sendo* C *uma constante que depende somente de* Ω*. E mais, se* Ω *é de classe* C^{m+2} *e se* $f \in H^m(\Omega)$*, então:*

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \;\; com \;\; \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m}.$$

Em particular, se $m > \frac{N}{2}$*, então* $u \in C^2(\overline{\Omega})$*. Por outro lado, se* Ω *é de classe* C^∞ *e se* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *então,* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração: Ver [9].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. Ver [9]. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.5.3. *Seja* H *um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de* H *uma seqüência de elementos* (ω_n) *de* H *tais que*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{(i)}}\ |\omega_n| = 1,\ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0,\ \forall n, m,\ m \neq n; \\ \textbf{\textit{(ii)}}\ \textit{O espaço gerado pela } (\omega_n) \textit{ é denso em } H. \end{cases}$$

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ *dá origem a uma convergência pontual.*

Proposição 1.5.4. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $1 \leq p \leq \infty$ *,* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* $L^p(\Omega)$ *convergindo para* u *em* $L^p(\Omega)$*. Então existe uma subseqüência de* (u_k)*, ainda denotada por* (u_k)*, tal que*

(i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$*, q.s. em* Ω*;*

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$*, q.s. em* $\Omega, \forall k \in \mathbb{N}$*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [9].

Lema 1.5.4 (Lema de Gronwall). *Sejam* $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e não-negativas,* $\alpha \geq 0$*. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \forall t \in [a,b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ *é limitada e se* $\alpha = 0$*, então* $\varphi \equiv 0$*.*

Demonstração. Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t)\psi(t)$. Logo,

$$\omega'(t) \leq \omega(t)\psi(t),$$

donde segue,

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t,obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)}ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Assim:

$$\int_a^t \frac{d}{ds}\ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Portanto:

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha\exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right),\ \ t \in [a,b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

Lema 1.5.5. *Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right]ds,\ \ 0 \leq t \leq T,$$

então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que:

$$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0,T_0] \ \ C_1, C_2 \geq 0.$$

***Demonstração**. Sejam $\varphi(t) = \int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right]ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2\varphi(t)$. Decorre da hipótese que:*

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\varphi(t)$$

ou ainda:

$$\gamma^2(t) \leq \left[C_1 + C_2\varphi(t)\right]^2.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue-se que:

$$\varphi^{'}(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2.$$

Logo:

$$\varphi^{'}(t) \leq Y(t) + Y^2(t). \tag{1.3}$$

Por outro lado, $Y^{'}(t) = C_2\varphi^{'}(t) \leq C_2[Y(t) + Y^2(t)]$. *Daí segue-se que:*

$$Y^{'}(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right], \ \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.4}$$

Observando que:

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] = Y^{'}(t)e^{-c_2t} + C_2Y(t)e^{-c_2t}.$$

Aplicando em (2), *segue-se que:*

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] \leq C_2Y^2(t)e^{-c_2t}. \tag{1.5}$$

Integrando a última desigualdade de 0 *até* T *e notando que* $Y(0) = C_1$, *resulta que:*

$$Y(t) \leq C_1e^{c_2t} + C_2e^{c_2t}\int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds. \tag{1.6}$$

Seja $z(t) = \int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds$. *Resulta de* (4) *que* $Y(t) \leq [C_1 + C_2z(t)]e^{c_2t}$. *Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo:*

$$z^{'}(t) = Y^2(t)e^{-c_2s}dt.$$

Logo:

$$z^{'}(t) \leq [C_1 + C_2z(t)]^2e^{c_2t},$$

donde segue-se que:

$$\frac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2z(t)]^2} \leq e^{c_2t}.$$

Integrando a última desigualdade de 0 *até* t, *obtemos:*

$$\int_0^t \frac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2z(t)]^2}dt \leq \int_0^t e^{c_2t}dt.$$

Daí segue-se que:

$$-\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} + \frac{1}{C_1} \leq \frac{e^{c_2 t}}{C_2} - \frac{1}{C_2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} \geq \frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}.$$

Agora, suponha que:

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{c_2 t}}{C_2} \iff C_2 t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Logo,

$$t < \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Seja

$$T^* = \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Temos que $T^* > 0$ e seja T_0 tal que $0 < T_0 < T^*$. Então, $0 \leq t \leq T_0$, implica que:

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1},$$

ou ainda,

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1}.$$

Assim:

$$Y(t) \leq (C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t}.$$

Por outro lado:

$$(C_1 + C_2 z(t))\, e^{c_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right] e^{c_2 T_0}.$$

Portanto:

$$Y(t) \leq C, \;\; 0 \leq t \leq T_0.$$

Desta desigualdade e $\gamma(t) = Y(t)$, segue-se o Lema.

Lema 1.5.6. *Se $\theta \in L^p(0,T_0)$ e $v \in V$, então:*

$$\xi(t,x) = \theta(t)\, v(x) \in L^p(0,T_0;V).$$

Demonstração. *Devemos mostrar que $|\xi(t,x)|_V \in L^p(0,T_0)$, ou seja,*

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_V^p \, dt < \infty.$$

Temos que:

$$\int_0^{T_0} |\xi(t,x)|_V^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)\, V(x)|_V^p \, dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, |V(x)|_V^p \, dt = |V(x)|_V^p \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt.$$

Mas, decorre da hipótese que: $\int_0^{T_0} |\theta(t)|^p \, dt < \infty$.

Assim, segue-se o Lema.

Lema 1.5.7. *Se $u_m \to u$ em $L^p(0,T_0;X)$, então*

$$\|u_m(t)\|_X \to \|u(t)\|_X \text{ em } L^p(0,T_0).$$

Demonstração. *Queremos mostrar que:*

$$|\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|_{L^p(0,T_0)}^p \to 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} |\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|_{L^p(0,T_0)}^p &= \int_0^{T_0} |\|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X|_{L^p(0,T_0)}^p \, dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|_X^p \, dt. \end{aligned}$$

Mas, decorre da hipótese que:

$$\int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|_X^p \, dt \to 0.$$

Daí, segue-se o Lema.

Capítulo 2

Existência de Solução Fraca

2.1 Resultado principal

Neste Capítulo investigaremos a existência e unicidade de solução fraca local para o sistema acoplado de EDP's, caso concreto:

$$\left\|\begin{array}{l} u''(t) - M_0\left(|\nabla u(t)|^2\right)\Delta u(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)u(t) = f(v(t)) \ \ em \ \ Q, \\ \\ v''(t) - M_2\left(|\nabla v(t)|^2\right)\Delta v(t) + M_3\left(|v(t)|^2\right)v(t) = g(u(t)) \ \ em \ \ Q, \\ \\ u(t) = v(t) = 0 \ em \ \Sigma = \Gamma \times \,]0,T[\,, \\ \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1 \ \ em \ \ \Omega, \\ \\ v(0) = v_0, \ v'(0) = v_1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

sendo Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ suave. Para cada número real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$.

E ainda, $-\Delta$ é o operador auto-adjunto não limitado definido pela terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$, onde $a(u,v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx$.

No que se segue, denotaremos por: $((\ ,\ ))$, $||\ .\ ||$, $(\ ,\ )$, $|\ .\ |$, o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.

Aqui, estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da "norma do gradiente", isto é, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$.

E assumiremos as seguintes hipóteses:

$$\cdot \ \ M_i \in C^1([0,\infty), \mathbb{R}), \ \ (\mathrm{i} = 0,1,2,3) \tag{2.2}$$

$$\cdot \ \ M_0(s), M_2(s) \geq m_0 > 0, \forall s \in [0,\infty), \tag{2.3}$$

$$\cdot \ \ M_1(s), M_3(s) \geq m_1 \geq 0, \forall s \in [0,\infty), \tag{2.4}$$

$$\cdot \ \ f(0) = g(0) = 0 \ \ e \ \ f, \ g \ \in Lip_\alpha(\mathbb{R}). \tag{2.5}$$

Considere ainda a energia associada ao sistema (2.1):

$$E(t) = |u'(t)|^2 + |v'(t)|^2 + \widehat{M_0}\big(\|u(t)\|^2\big) + \widehat{M_1}\big(|u(t)|^2\big) + \widehat{M_2}\big(\|v(t)\|^2\big) + \widehat{M_3}\big(|v(t)|^2\big)$$

onde $\widehat{M_i}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M_i(s)ds, \quad (i = 0, 1, 2, 3).$

Teorema 2.1.1. *Sejam M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ funções obedecendo as hipóteses* (2.2), (2.3), (2.4) *e f, g obedecendo a hipótese* (2.5), *e se* $\{u_0, v_0\} \in \left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)^2$, $\{u_1, v_1\} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^2$ *e* $f,\ g \in L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$. *Então existe um número fixo $T_0 > 0$ e um único par de funções $u, v : [0, T_0] \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfazendo:*

- $\{u, v\} \in \left(L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)\right)^2,$
- $\{u', v'\} \in \left(L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)\right)^2,$
- $\{u'', v''\} \in \left(L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right)\right)^2,$
- $\dfrac{d}{dt}(u', h) + M_0\left(|\nabla u|^2\right)(\nabla u, \nabla h) + M_1\left(|u|^2\right)(u, h) = (f(v), h)\,,$
  $\forall h \in V, \quad$ *no sentido* $\mathcal{D}'(0, T_0),$
- $\dfrac{d}{dt}(v', h) + M_2\left(|\nabla v|^2\right)(\nabla v, \nabla h) + M_3\left(|v|^2\right)(v, h) = (g(u), h)\,,$
  $\forall h \in V, \quad$ *no sentido* $\mathcal{D}'(0, T_0),$
- $u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,$
- $v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1.$

Demonstração:

Por simplicidade, dividiremos a demonstração do teorema nas seguintes etapas:

I - Definir o problema (2.1), em um espaço de dimensão finita conveniente, que denominamos Problema Aproximado (PA);

II - Mostrar que esse problema aproximado possui solução (local); que chamamos Solução Aproximada . Aqui, para a existência de solução local do (PA), mostraremos que este é equivalente a um sistema de EDO's de 1a. ordem, e utilizaremos o Teorema de Existência de Carathéodory;

III - Obter estimativas a priori sobre a seqüência de soluções aproximadas, que nos permitam prolongar a solução ao intervalo $[0, T_0]$;

IV - Devemos mostrar, a partir das estimativas a priori, que a seqüência de soluções aproximadas converge, numa topologia conveniente, para a solução do problema (2.1).

2.1.1 Problema Aproximado

Consideremos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ constituído de vetores próprios do operador $-\Delta$ e $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ a correspondente sequência de valores próprios.

Para cada $m = 1, 2, 3, ...,$ seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subspaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$.

O problema aproximado (2.6) associado a (2.1), consiste em encontrar uma solução sob a forma $\{u_m(t), v_m(t)\} = \left\{\sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}(t)w_j(x), \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t)w_j(x)\right\} \in V_m$, sendo os $\Psi_{jm},\ \Phi_{jm}$ de classe C^∞, determinados de modo a satisfazer o seguinte sistema:

$$\left\| \begin{array}{l} (u''_m, h_1) - M_0\left(|\nabla u_m|^2\right)(\Delta u_m, h_1) + M_1\left(|u_m|^2\right)(u_m, h_1) = (f(v_m), h_1) \quad (*) \\ (v''_m, h_2) - M_2\left(|\nabla v_m^2\right)(\Delta v_m, h_2) + M_3\left(|v_m|^2\right)(v_m, h_2) = (g(u_m), h_2) \quad (**) \\ \{u_m(0), v_m(0)\} = \{u_{0m}, v_{0m}\} \to \{u_0, v_0\} \ em\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \{u'_m(0), v'_m(0)\} = \{u_{1m}, v_{1m}\} \to \{u_1, v_1\} \ em\ H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

$\forall h_i\ (i = 1, 2) \in V_m\ e\ j = 1, ..., m,$ sendo $u_{0m},\ u_{1m},\ v_{0m},\ v_{1m}$ aproximações de $u_0,\ u_1,\ v_0,\ v_1$, respectivamente. Isto é, sendo $u_0,\ v_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, podemos aproximá-las por combinações lineares finitas dos w_j, ouseja, existem $\alpha_{jm},\ \beta_{jm} \in \mathbb{R}\,(\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{m})$ tais que:

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \to u_0,\ v_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \to v_0,\ forte\ em\ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Logo, tem-se $u_m(0) = u_{0m}\ e\ v_m(0) = v_{0m}$. Como existe uma única combinação linear dos vetores da base de V_m, segue que $\Psi_{jm}(0) = \alpha_{jm}\ e\ \Phi_{jm}(0) = \beta_{jm}\ (j = 1, 2, ..., m)$. Analogamente, como $u_1,\ v_1 \in H_0^1(\Omega)$, então existem constantes $\gamma_{jm},\ \theta_{jm} \in \mathbb{R}\,(\mathrm{j} = 1, ..., \mathrm{m})$ tais que:

$$u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{jm} w_j \to u_1,\ v_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{jm} w_j \to v_1,\ forte\ em\ H_0^1(\Omega). \tag{2.8}$$

Logo, tem-se $u'_m(0) = u_{1m}\ e\ v'_m(0) = v_{1m}$. E, como existe uma única combinação linear dos vetores da base de V_m, segue que $\Psi'_{jm}(0) = \gamma_{jm}\ e\ \Phi'_{jm}(0) = \theta_{jm}\ (j = 1, 2, ..., m)$.

Substituindo $\{u_m(t), v_m(t)\}$ em (2.6), e usando o fato de que $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$, obtemos:

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\Psi''_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)-M_0\left(|\nabla u_m(t)|^2\right)\left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Psi_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)$$
$$+M_1\left(|u_m(t)|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\Psi_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)=(f(v_m),w_i(x))$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\Phi''_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)-M_2\left(|\nabla u_m(t)|^2\right)\left(\Delta\sum_{j=1}^{m}\Phi_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)$$
$$+M_3\left(|u_m(t)|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\Phi_{jm}(t)w_j(x),w_i(x)\right)=(g(u_m),w_i(x))$$

Ou seja,

$$\begin{cases}\Psi''_{jm}(t)-\lambda_j M_0(|\nabla u_m|^2)\Psi_{jm}(t)+M_1(|u_m|^2)\Psi_{jm}(t)=(f(v_m),w_j)\\[2mm] \Psi_{jm}(0)=\alpha_{jm},\ \ \Psi'_{jm}(0)=\beta_{jm}\ (j=1,...,m)\\[2mm] \Phi''_{jm}(t)-\lambda_j M_2(|\nabla v_m|^2)\Phi_{jm}(t)+M_3(|v_m|^2)\Phi_{jm}(t)=(g(u_m),w_j)\\[2mm] \Phi_{jm}(0)=\gamma_{jm},\ \ \Phi'_{jm}(0)=\theta_{jm}\ (j=1,...,m)\end{cases} \tag{2.9}$$

Forma Matricial

O sistema (2.9), pode ser representado matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix}\Psi''_{1m}\\ \vdots\\ \Psi''_{mm}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 M_0(|\nabla u_m|^2)-M_1(|u_m|^2) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m M_2(|\nabla u_m|^2)-M_3(|u_m|^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_{1m}\\ \vdots\\ \Psi_{mm}\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}(f(v_m),w_1)\\ \vdots\\ (f(v_m),w_m)\,.\end{pmatrix}$$

ou seja,

$$X''=AX+B,$$

sendo

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 M_0(|\nabla u_m|^2) - M_1(|u_m|^2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m M_2(|\nabla u_m|^2) - M_3(|u_m|^2) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \Psi_{1m} \\ \vdots \\ \Psi_{mm} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (f(v_m), w_1) \\ \vdots \\ (f(v_m), w_m) \end{pmatrix}.$$

Fazendo:

$$Y = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix}$$

otemos a forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X' \\ AX + B \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{m\times m} & I_{m\times m} \\ A_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}_{2m\times 2m}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{Y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{m\times 1} \\ B_{m\times 1} \end{pmatrix}_{2m\times 1}}_{K}$$

Assim, (2.9) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} Y' = LY + K = F(t, Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} X(0) \\ X'(0) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.10}$$

Verifiquemos que (2.10) atende as condições de Carathéodory.

1) Fixemos Y

Vamos mostrar que L e K são mensuráveis em t.

Como M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ são contínuas, as somas $\lambda_j M_0(|\nabla u_m|^2) - M_1(|u_m|^2)$ e $\lambda_j M_2(|\nabla v_m|^2) - M_3(|v_m|^2)$ são contínuas em t $(j = 1, ..., m)$. Logo, A é mensurável em t. Portanto, L é mensurável em t.

Como $f \in Lip_\alpha(s)$ e $w_j \in L^2(\Omega)$, então $(f(v_m), w_j)$ é mensurável. Logo, B é mensurável em t. Portanto, K é mensurável em t.

2) Seja t fixo

Vamos mostrar que F é contínua em Y.

Note que K é contínua em Y, pois é constante. Para a continuidade de LY basta mostrar que A é contínua em Y.

Seja $\Pi_j(Y) = \Psi_{jm}$ $(j = 1, ..., m)$ a projeção do $\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$. É claro que Π_j é contínua. Para cada t fixo, e tomado:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}(t) w_j,$$

a função $Y \longmapsto \|u_m\|^2 = ((u_m, u_m)) = (\Delta u_m, u_m)$. Então

$$\|u_m\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}^2 \lambda_j (w_j, w_j),$$

donde segue que:

$$\|u_m\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \Psi_{jm}^2 \lambda_j$$

que pode ser escrita como:

$$Y \longmapsto \sum_{j=1}^{m} [\Pi_j(Y)]^2 \lambda_j.$$

Assim, $Y \longmapsto \|u_m(t)\|^2$ é contínua para t fixo, pois é combinação linear finita de funções contínuas. De modo análogo para $|u_m(t)|^2$. Daí, $\lambda_j M_0(|\nabla u_m|^2) - M_1(|u_m|^2)$ e $\lambda_j M_2(|\nabla v_m|^2) - M_3(|v_m|^2)$ são contínuas em Y, $(j = 1, ..., m)$. Portanto, fixado t, a função $F(t, Y)$ é contínua em Y.

3) Seja K um compacto de $[0, T] \times E$, onde E é o conjunto $E = \{Y \in \mathbb{R}^{2m \times 1}; \|Y\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq \gamma, \ \gamma > 0\}$.

Devemos mostrar que existe uma função real $m_k(t)$, integrável em $[0, T]$, tal que

$$\|F(t, Y)\|_{\mathbb{R}^{2m \times 1}} \leq m_k(t), \ \ \forall (t, Y) \in H_0^1(\Omega).$$

Por simplicidade, e devido ao fato de que em $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, todas as normas são equivalentes, denotaremos por $\|.\|_{pq}$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^{pq}$.

Como $F(t, Y) = LY + K$, temos que:

$$\|F(t, Y)\|_{2m \times 1} \leq \|LY\|_{2m \times 1} + \|K\|_{2m \times 1}.$$

Mas,

$$\|LY\|_{2m \times 1} \leq \|L\|_{2m \times 2m} \|Y\|_{2m \times 1}.$$

Logo:

$$\|F(t,Y)\|_{2m\times 1} \leq \|L\|_{2m\times 2m}\|Y\|_{2m\times 1} + \|K\|_{2m\times 1}.$$

Como $Y \in E$, temos que $\|Y\|_{2m\times 1} \leq \gamma$. Então a desigualdade acima fica:

$$\|F(t,Y)\|_{2m\times 1} \leq \gamma\|L\|_{2m\times 2m} + \|K\|_{2m\times 1}.$$

Como $M_i \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$ $(i = 0,1,2,3)$, em particular, em $[0,T]$, segue que todas as entradas da matriz A são limitadas por uma constante. Portanto, $\|L\| \leq C$.

Em relação à matriz K, todas as suas entradas, em valor absoluto, são iguais a:

$$|(f(v), w_j)| \leq |f(v)||w_j| = |f(v)|.$$

Então,

$$|F(t,Y)| \leq C + |f(v)| \equiv m_K(t),$$

sendo $m_K(t)$ integrável em $[0,T]$, pois C é constante e $f \in Lip_\alpha(s)$.

Portanto, o sistema (2.10) satisfaz as condições de Carathéodory, e então existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t)\} \in [0,t_m) \times [0,t_m)$, $t_m < T_0$.

As estimativas a priori, na próxima etapa, nos permitirão prolongar a solução $u_m(t)$ *e* $v_m(t)$ ao intervalo $[0,T_0]$.

2.1.2 Estimativas a priori

Estimativa I

Tomando-se $h_1 = 2u'_m$ e $h_2 = 2v'_m$ nas equações $(*)$ e $(**)$, respectivamente, do sistema (2.6), respectivamente, e depois somando-se, obtemos:

$$\Big(u''_m(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t), 2u'_m(t)\Big) = \Big(f\big(v_m(t)\big), 2u'_m(t)\Big)$$
$$\Big(v''_m(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t), 2v'_m(t)\Big) = \Big(g\big(u_m(t)\big), 2v'_m(t)\Big)$$

$$\begin{aligned}
&2\big(u''_m(t), u'_m(t)\big) - 2M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), u'_m(t)\big) + 2M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), u'_m(t)\big) \\
&+2\big(v''_m(t), v'_m(t)\big) - 2M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), v'_m(t)\big) + 2M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), v'_m(t)\big) \\
&= 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u'_m(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), v'_m(t)\Big)
\end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2\\
&+\frac{d}{dt}|v_m'(t)|^2 + M_2\big(\|v_m(t)\|^2\big)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2\\
&= 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u_m'(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), v_m'(t)\Big)
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\widehat{M_0}\big(\|u_m(t)\|^2\big) + \frac{d}{dt}\widehat{M_1}\big(|u_m(t)|^2\big) + \frac{d}{dt}|v_m'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\widehat{M_2}\big(\|v_m(t)\|^2\big)\\
&+\frac{d}{dt}\widehat{M_3}\big(|v_m(t)|^2\big) = 2\Big(f\big(v_m(t)\big), u_m'(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), v_m'(t)\Big)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

uma vez que, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_0}\left(\|u_m(t)\|^2\right) = M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_1}\left(|u_m(t)|^2\right) = M_1\left(|u_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_2}\left(\|v_m(t)\|^2\right) = M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{M_3}\left(|v_m(t)|^2\right) = M_3\left(|v_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|v_m(t)|^2.$$

Para o segundo membro da equação (2.11), usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a elementar e a hipótese sobre as funções f e g, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\ldots \le 2\big|f(v_m(t))\big|\ |u_m'(t)| + 2\big|g(u_m(t))\big|\ |v_m'(t)|\\
&\ldots \le \alpha_1 2|v_m(t)|\ |u_m'(t)| + \alpha_2 2|u_m(t)|\ |v_m'(t)|\\
&\ldots \le \alpha_1|v_m(t)|^2 + \alpha_1|u_m'(t)|^2 + \alpha_2|u_m(t)|^2 + \alpha_2|v_m'(t)|^2
\end{aligned}
$$

Integrando a última desigualdade de 0 a t,

$$
\begin{aligned}
&|u_m'(t)|^2 + \widehat{M_0}\big(\|u_m(t)\|^2\big) + \widehat{M_1}\big(|u_m(t)|^2\big) + |v_m'(t)|^2 + \widehat{M_2}\big(\|v_m(t)\|^2\big) + \widehat{M_3}\big(|v_m(t)|^2\big)\\
&\le \alpha_1\int_0^t |u_m'(s)|^2 + \alpha_2\int_0^t |v_m'(s)|^2 + \alpha_2\int_0^t |u_m(s)|^2 + \alpha_1\int_0^t |v_m(s)|^2 + E(0).
\end{aligned}
$$

Das convergências (2.7), (2.8) e das imersões $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que $u_{0m} \rightarrow u_0$, $v_{0m} \rightarrow v_0$ *em* $H_0^1(\Omega)$ e $u_{1m} \rightarrow u_1$, $v_{1m} \rightarrow v_1$ *em* $L^2(\Omega)$. Logo, $\widehat{M_0}\left(\|u_{0m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_0}\left(\|u_0\|^2\right)$, $\widehat{M_2}\left(\|v_{0m}\|^2\right) \rightarrow \widehat{M_2}\left(\|v_0\|^2\right)$ *em* $\mathbb{R}$ e $\widehat{M_1}\left(|u_{0m}|^2\right) \rightarrow \widehat{M_1}\left(|u_0|^2\right)$, $\widehat{M_3}\left(|v_{0m}|^2\right) \rightarrow \widehat{M_3}\left(|v_0|^2\right)$ *em* $\mathbb{R}$

De forma que, $E(0)$ é limitada.

Usando a definição de $\widehat{M_i}(s)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, e as hipóteses (2.3) *e* (2.4), obtemos

$$|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 + m_0\left[\|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2\right] + m_1\left[|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right] \leq \alpha_1 \int_0^t |u_m'(s)|^2$$
$$+\alpha_2 \int_0^t |v_m'(s)|^2 + \alpha_2 \int_0^t |u_m(s)|^2 + \alpha_1 \int_0^t |v_m(s)|^2 + E(0).$$

ou, da imersão $L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \hookrightarrow L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$, temos

$$|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 + m_0\left[\|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2\right] + m_1\left[|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2\right] \leq \alpha_1 \int_0^T |u_m'(s)|^2$$
$$+\alpha_2 \int_0^T |v_m'(s)|^2 + \alpha_2 c_1 \int_0^T \|u_m(s)\|^2 + \alpha_1 c_2 \int_0^T \|v_m(s)\|^2 + E(0).$$

Tomando-se $\alpha_3 = \max\{\alpha_1, \alpha_2, c_2\alpha_1, c_1\alpha_2\}$ e $\alpha_4 = \min\{1, m_0\}$, obtemos

$$|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2 \leq \frac{E(0)}{\alpha_4}$$
$$+\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\int_0^T \left[|u_m'(s)|^2 + |v_m'(s)|^2 + \|u_m(s)\|^2 + \|v_m(s)\|^2\right].$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos $|u_m'(t)|^2 + |v_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 + \|v_m(t)\|^2 \leq C$ (*cte.*). Isto é,

$$|u_m'(t)| \leq C,\ |v_m'(t)| \leq C,\ \|u_m(t)\| \leq C,\ \|v_m(t)\| \leq C,\ |u_m(t)| \leq C,\ |v_m(t)| \leq C.$$

Usando o teorema de Carathéodory, podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$.

Portanto, as seqüências

$$\begin{aligned} &(u_m') \text{ } e \text{ } (v_m') \text{ são ltdas. em } L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)\big),\\ &(u_m) \text{ } e \text{ } (v_m) \text{ são ltdas. em } L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Estimativa II

Tomando $h_1 = -2\Delta u'_m$ e $h_2 = -2\Delta v'_m$, nas equações de cima e de baixo, respectivamente, do sistema (2.6), obtemos:

$$\left\| \begin{array}{l} \Big(u''_m(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t), -2\Delta u'_m\Big) = \Big(f\big(v_m(t)\big), -2\Delta u'_m\Big) \\ \\ \Big(v''_m(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t), -2\Delta v'_m\Big) = \Big(g\big(u_m(t)\big), -2\Delta v'_m\Big) \end{array} \right.$$

e depois somando-se, obtemos

$$\begin{aligned} &2\big(u''_m(t), -\Delta u'_m(t)\big) - 2M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), -\Delta u'_m(t)\big) \\ &+2M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), -\Delta u'_m(t)\big) + 2\big(v''_m(t), -\Delta v'_m(t)\big) \\ &-2M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), -\Delta v'_m(t)\big) + 2M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), -\Delta v'_m(t)\big) \\ &= 2\Big(f\big(v_m(t)\big), -\Delta u'_m(t)\Big) + 2\Big(g\big(u_m(t)\big), -\Delta v'_m(t)\Big) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando a 1a. identidade de Green, fazendo algumas adaptações para os produtos internos, reescrevemos a equação (2.13) da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + M_1\left(|u_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\|v'_m(t)\|^2 \\ &+M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m(t)|^2 + M_3\left(|v_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2 = 2\big(\big(f(v_m), u'_m\big)\big) \\ &+2\big(\big(g(u_m), v'_m\big)\big) \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} &M_0\left(\|u_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + M_1\left(|u_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \\ &= \frac{d}{dt}\{M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\ \|u_m(t)\|^2\} - \frac{d}{dt}M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 \\ &-\frac{d}{dt}M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\ \|u_m(t)\|^2 \end{aligned}$$

$$\left(\textit{Análogo para } M_2\left(\|v_m(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}|\Delta v_m(t)|^2 + M_3\left(|v_m(t)|^2\right)\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|^2\right).$$

De modo que,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\{M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 + M_1\big(|u_m(t)|\big)\ \|u_m(t)\|^2\}\\
&+\frac{d}{dt}\|v_m'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\{M_2\big(\|v_m(t)\|^2\big)\ |\Delta v_m(t)|^2 + M_3\big(|v_m|\big)\ \|v_m(t)\|^2\} = 2\big(\big(f(v_m(t)), u_m'(t)\big)\big)\\
&+2\big(\big(g(u_m(t)), v_m'(t)\big)\big)\\
&+\frac{d}{dt}M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\|u_m(t)\|^2 + \frac{d}{dt}M_2\big(\|v_m(t)\|^2\big)\ |\Delta v_m(t)|^2\\
&+\frac{d}{dt}M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\|v_m(t)\|^2
\end{aligned}$$

Obs.: Trabalharemos apenas com o segundo membro da última igualdade, retornando mais adiante para a forma completa.

Usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned}
&\ldots \leq 2\|f(v_m(t))\|\ \|u_m'(t)\| + 2\|g(u_m(t))\|\ \|v_m'(t)\|\\
&+\big|M_0'\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big|\ 2\big|((u_m(t), u_m'(t)))\big|\ |\Delta u_m(t)|^2 + \big|M_1'\big(|u_m(t)|^2\big)\big|\ 2\big|(u_m(t), u_m'(t))\big|\ \|u_m(t)\|^2\\
&+\big|M_2'\big(\|v_m(t)\|^2\big)\big|\ 2\big|((v_m(t), v_m'(t)))\big|\ |\Delta v_m(t)|^2 + \big|M_3'\big(|v_m(t)|^2\big)\big|\ 2\big|(v_m(t), v_m'(t))\big|\ \|v_m(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Desde que, $M_i' \in C^0\left([0,\infty[\right)\ (i = 0,1,2,3)$, segue que

$$\begin{aligned}
\big|M_0'\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big| \leq C_1\ e\ \big|M_2'\big(\|v_m(t)\|^2\big)\big| \leq C_2\\
\big|M_1'\big(|u_m(t)|^2\big)\big| \leq C_3\ e\ \big|M_3'\big(|v_m(t)|^2\big)\big| \leq C_4
\end{aligned}$$

E, usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a hipótese sobre as funções $f\ e\ g$,

$$\begin{aligned}
&\ldots \leq 2\alpha_1\|v_m(t)\|\ \|u_m'(t)\| + 2\alpha_2\|u_m(t)\|\ \|v_m'(t)\| + C_1 2\|u_m(t)\|\ \|u_m'(t)\|\ |\Delta u_m(t)|^2\\
&+C_2 2|u_m(t)|\ |u_m'(t)|\ \|u_m(t)\|^2 + C_3 2\|v_m(t)\|\ \|v_m'(t)\|\ |\Delta v_m(t)|^2 + C_4 2|v_m(t)|\ |v_m'(t)|\ \|v_m(t)\|^2
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade elementar,

$$\begin{aligned}
&\ldots \leq \underbrace{\alpha_1\|v_m(t)\|^2}_{\leq C_5} + \alpha_1\|u_m'(t)\|^2 + \underbrace{\alpha_2\|u_m(t)\|^2}_{\leq C_6} + \alpha_2\|v_m'(t)\|^2\\
&+C_1\big(\underbrace{\|u_m(t)\|^2}_{\leq C_7} + \|u_m'(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 + C_2\big(\underbrace{|u_m(t)|^2}_{\leq C_8} + \underbrace{|u_m'(t)|^2}_{\leq C_9}\big)\ \|u_m(t)\|^2\\
&+C_3\big(\underbrace{\|v_m(t)\|^2}_{\leq C_{10}} + \|v_m'(t)\|^2\big)\ |\Delta v_m(t)|^2 + C_4\big(\underbrace{|v_m(t)|^2}_{\leq C_{11}} + \underbrace{|v_m'(t)|^2}_{\leq C_{12}}\big)\ \|v_m(t)\|^2
\end{aligned}$$

Donde,

$$\ldots \leq C_5 + \alpha_1 \|u_m'(t)\|^2 + C_6 + \alpha_2 \|v_m'(t)\|^2 + C_1\big(C_7 + \|u_m'(t)\|^2\big)\ |\Delta u_m(t)|^2 + C_2\big(C_8 + C_9\big)C_7$$
$$+C_3\big(C_{10} + \|v_m'(t)\|^2\big)\ |\Delta v_m(t)|^2 + C_4\big(C_{11} + C_{12}\big)C_{10}$$

$$\ldots \leq C_5 + \alpha_1 \|u_m'(t)\|^2 + C_6 + \alpha_2 \|v_m'(t)\|^2 + C_1 C_7 |\Delta u_m(t)|^2 + C_1 |\Delta u_m(t)|^2\ \|u_m'(t)\|^2$$
$$+C_2\big(C_8 + C_9\big)C_7 + C_3 C_{10} |\Delta v_m(t)|^2 + C_3 |\Delta v_m(t)|^2\ \|v_m'(t)\|^2 + C_4\big(C_{11} + C_{12}\big)C_{10}$$

Fazendo-se, $k_1 = C_1 C_7;\ k_2 = C_2\big(C_8 + C_9\big)C_7 + C_5 + C_4\big(C_{11} + C_{12}\big)C_{10} + C_6;\ k_3 = C_3 C_{10};\ k_5 = \max\{\alpha_1, k_1, \dfrac{C_1}{2}\}$ *e* $k_6 = \max\{\alpha_2, k_3, \dfrac{C_3}{2}\}$, obtemos

$$\ldots \leq k_2 + k_5\left[|\Delta u_m(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2 + 2|\Delta u_m(t)|^2\ \|u_m'(t)\|^2\right]$$
$$+k_6\left[|\Delta v_m(t)|^2 + \|v_m'(t)\|^2 + 2|\Delta v_m(t)|^2\ \|v_m'(t)\|^2\right]$$

Usando $2|a|^2\ |b|^2 \leq \big(|a|^2 + |b|^2\big)^2$ e considerando $\varphi_1(s) = |\Delta u_m(t)|^2 + \|u_m'(t)\|^2$ *e* $\varphi_2(s) = |\Delta v_m(t)|^2 + \|v_m'(t)\|^2$,

$$\ldots \leq k_2 + k_5\left[\varphi_1(s) + \varphi_1^2(s)\right] + k_6\left[\varphi_2(s) + \varphi_2^2(s)\right]$$

ou,

$$\ldots \leq k_2 + k_7\left[\varphi_1(s) + \varphi_2(s) + \varphi_1^2(s) + \varphi_2^2(s)\right]$$

onde $k_7 = \max\{k_5, k_6\}$. E, como $\varphi_1^2(s) + \varphi_2^2(s) \leq (\varphi_1(s) + \varphi_2(s))^2$. Logo,

$$\|u_m'(t)\|^2 + m_0|\Delta u_m(t)|^2 + m_1\|u_m(t)\|^2 + \|v_m'(t)\|^2 + m_0|\Delta v_m(t)|^2 + m_1\|v_m(t)\|^2$$
$$\leq k_2 + k_7 \int_0^t \left[(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)^2\right]$$

ou, tomando $k_8 = \min\{1, m_0\}$ e considerando as hipóteses sobre M_1 e M_3

$$\underbrace{\|u_m'(t)\|^2 + |\Delta u_m(t)|^2}_{\varphi_1} + \underbrace{\|v_m'(t)\|^2 + |\Delta v_m(t)|^2}_{\varphi_2} \leq \frac{k_2}{k_8} + \frac{k_7}{k_8}\int_0^t \left[(\varphi_1 + \varphi_2) + (\varphi_1 + \varphi_2)^2\right].$$

Observe que $\varphi_1 + \varphi_2$ é contínua em $[0, T]$, não-negativa. Então, existe $T_0 > 0$ tal que $\varphi_1 + \varphi_2 \leq c,\ \forall m,\ \forall t \in [0, T_0]$. Isto é, $|\Delta u_m(t)| \leq c,\ \|u_m'(t)\| \leq c,\ |\Delta v_m(t)| \leq c$ *e* $\|v_m'(t)\| \leq c,\ \forall m,\ \forall t \in [0, T_0]$. E, portanto,

$$(u_m')\ \textit{e}\ (v_m')\ \textit{são ltdas. em}\ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)$$
$$(\Delta u_m)\ \textit{e}\ (\Delta v_m)\ \textit{são ltdas. em}\ L^\infty\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right)$$

De (2.12) e da equivalência de normas $c_1\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2\|v\|_{H^2(\Omega)}$, para toda v em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos

$$(u_m)\ \textit{e}\ (v_m)\ \textit{são ltdas. em}\ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right).$$

Estimativa III

Tomando-se $h_1 = u''_m$ e $h_2 = v''_m$, nas equações (*) e (**), respectivamente, do sistema (2.6), e depois somando-se, obtemos:

$$\Big(u''_m(t) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\Delta u_m(t) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)u_m(t), u''_m(t)\Big) = \Big(f\big(v_m(t)\big), u''_m(t)\Big)$$
$$\Big(v''_m(t) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\Delta v_m(t) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)v_m(t), v''_m(t)\Big) = \Big(g\big(u_m(t)\big), v''_m(t)\Big),$$

$$\begin{aligned}
&\big(u''_m(t), u''_m(t)\big) - M_0\big(|\nabla u_m(t)|^2\big)\big(\Delta u_m(t), u''_m(t)\big) + M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big(u_m(t), u''_m(t)\big)\\
&+\big(v''_m(t), v''_m(t)\big) - M_2\big(|\nabla v_m(t)|^2\big)\big(\Delta v_m(t), v''_m(t)\big) + M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big(v_m(t), v''_m(t)\big)\\
&= \Big(f\big(v_m(t)\big), u''_m(t)\Big) + \Big(g\big(u_m(t)\big), v''_m(t)\Big),
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
&|u''_m(t)|^2 + |v''_m(t)|^2 \leq |f(v_m(t))|\ |u''_m(t)| + |g(u_m(t))|\ |v''_m(t)|\\
&+\big|M_0\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big|\ |\Delta u_m(t)|\ |u''_m(t)| + \big|M_1\big(|u_m(t)|^2\big)\big|\ |u_m(t)|\ |u''_m(t)|\\
&+\big|M_2\big(\|v_m(t)\|^2\big)\big|\ |\Delta v_m(t)|\ |v''_m(t)| + \big|M_3\big(|v_m(t)|^2\big)\big|\ |v_m(t)|\ |v''_m(t)|
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades $ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + c(\varepsilon)b^2,\ com\ (\varepsilon > \frac{3}{4})$ e $2ab \leq a^2 + b^2$, e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[|u''_m(s)|^2 + |v''_m(s)|^2\big] \leq \int_0^t \frac{2|u''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ C_1\ |v_m(s)| + \int_0^t \frac{2|v''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ C_2\ |u_m(s)|\\
&+\int_0^t \frac{2|u''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ \big|M_0\big(\|u_m(s)\|^2\big)\big|\ |\Delta u_m(s)| + \int_0^t \frac{2|u''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ \big|M_1\big(|u_m(s)|^2\big)\big|\ |u_m(s)|\\
&+\int_0^t \frac{2|v''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ \big|M_2\big(\|v_m(s)\|^2\big)\big|\ |\Delta v_m(s)| + \int_0^t \frac{2|v''_m(s)|}{2\sqrt{\varepsilon}}\ \sqrt{\varepsilon}\ \big|M_3\big(|v_m(s)|^2\big)\big|\ |v_m(s)|
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \big[|u''_m(s)|^2 + |v''_m(s)|^2\big] \leq \int_0^t \frac{|u''_m(s)|^2}{4\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon\ C_1^2\ |v_m(s)|^2 + \int_0^t \frac{|v''_m(s)|^2}{4\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon\ C_2^2\ |u_m(s)|^2\\
&+\int_0^t \frac{|u''_m(s)|^2}{4\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon\ \big|M_0\big(\|u_m(s)\|^2\big)\big|^2\ |\Delta u_m(s)|^2 + \int_0^t \frac{|u''_m(s)|^2}{4\varepsilon}\\
&+\int_0^t \varepsilon\ \big|M_1\big(|u_m(s)|^2\big)\big|^2\ |u_m(s)|^2 + \int_0^t \frac{|v''_m(s)|^2}{4\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon\ \big|M_2\big(\|v_m(s)\|^2\big)\big|^2\ |\Delta v_m(s)|^2\\
&+\int_0^t \frac{|v''_m(s)|^2}{4\varepsilon} + \int_0^t \varepsilon\ \big|M_3\big(|v_m(s)|^2\big)\big|^2\ |v_m(s)|^2.
\end{aligned}$$

ou,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \left[|u_m''(s)|^2 + |v_m''(s)|^2\right] &\leq \frac{3}{4\varepsilon} \int_0^t \left[|u_m''(s)|^2 + |v_m''(s)|^2\right] \\
&+\varepsilon \int_0^t \left[\left|M_0\big(\|u_m(s)\|^2\big)\right|^2 \, |\Delta u_m(s)|^2 + \left|M_2\big(\|v_m(s)\|^2\big)\right|^2 \, |\Delta v_m(s)|^2\right] \\
&+\varepsilon \int_0^t \left[\left|M_1\big(|u_m(s)|^2\big)\right|^2 \, |u_m(s)|^2 + \left|M_3\big(|v_m(s)|^2\big)\right|^2 \, |v_m(s)|^2\right] \\
&+\varepsilon \int_0^t \left[C_2^2 \, |u_m(s)|^2 + C_1^2 \, |v_m(s)|^2\right]
\end{aligned}
$$

E,

$$\left(1 - \frac{3}{4\varepsilon}\right) \int_0^t \left[|u_m''(s)|^2 + |v_m''(s)|^2\right] \leq C \ (cte.)$$

Logo, $|u_m''(s)|^2 + |v_m''(s)|^2 \leq C \ (cte.)$, isto é, $|u_m''(s)| \leq C \ (cte.)$ e $|v_m''(s)| \leq C \ (cte.)$.

Portanto,

$$(u_m'') \ e \ (v_m'') \ \textit{são ltdas. em} \ L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right).$$

2.1.3 Passagem ao limite

Das estimativas anteriores, temos que

$$
\begin{aligned}
&(u_m) \ e \ (v_m) \ \textit{são limitadas em} \ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right) \\
&(u_m') \ e \ (v_m') \ \textit{são limitadas em} \ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right) \\
&(u_m'') \ e \ (v_m'') \ \textit{são limitadas em} \ L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right)
\end{aligned}
$$

Pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subseqüência de (u_m) e (v_m), que continuaremos a denotar por (u_m) e (v_m) tal que

$$u_m \to u \ e \ v_m \to v \ em \ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \ fraco \ast \tag{2.14}$$

$$u_m' \to u' \ e \ v_m' \to v' \ em \ L^\infty\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right), \ fraco\ast \tag{2.15}$$

e, sabemos também que

$$u_m'' \to u'' \ e \ v_m'' \to v'' \ em \ L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \ fraco. \tag{2.16}$$

Do fato,

$$L^\infty(0, T; X) \hookrightarrow L^2(0, T; X)$$

e de (2.14), segue que

$$u_m \to u \ e \ v_m \to v \ em \ L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right), \ fraco$$

ou,

$$(\Delta u_m, w) \to (\Delta u, w), \ e \ (\Delta v_m, w) \to (\Delta v, w) \ \forall w \in L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right) \tag{2.17}$$

Da convergência (2.16), deduzimos que

$$(u_m'', w) \to (u'', w), \ e \ (v_m'', w) \to (v'', w) \ \forall w \in L^2\left(0, T_0; L^2(\Omega)\right), \tag{2.18}$$

De (2.14) e (2.15), segue que

$$(u_m) \ e \ (v_m) \ \text{são limitadas em} \ L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$
$$(u_m') \ e \ (v_m') \ \text{são limitadas em} \ L^2(0, T_0; H_0^1(\Omega))$$

Pelo lema de compacidade de Aubin-Lions, com $B_0 = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e $B = B_1 = H_0^1(\Omega)$, podemos extrair uma subseqüência de (u_m) e (v_m), que continuaremos denotando por (u_m) e (v_m), tal que

$$u_m \to u \ e \ v_m \to v \ forte \ em \ L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right)$$

e usando o seguinte resultado de Análise Funcional: "Se $u_m \to u$ em $L^p(0, T_0; X)$, então $\|u_m\|_X \to \|u\|_X$ em $L^p(0, T_0)$, concluímos que,

$$\|u_m\| \to \|u\| \ e \ \|v_m\| \to \|v\| \ em \ L^2(0, T_0)$$

E, passando a uma subseqüência de (u_m) e (v_m), temos que

$$\|u_m(t)\|^2 \to \|u(t)\|^2 \ e \ \|v_m(t)\|^2 \to \|v(t)\|^2, \ q.s. \ em \ [0, T_0]$$

e, sendo M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ contínua, obtemos

$$M_0(\|u_m(t)\|^2) \to M_0(\|u(t)\|^2) \ e \ M_2(\|v_m(t)\|^2) \to M_2(\|v(t)\|^2), \ q.s. \ em \ [0, T_0] \tag{2.19}$$

Usando (2.17) e (2.19), concluímos que

$$\begin{aligned} &M_0(\|u_m(t)\|^2)((u_m(t), h_1)) \to M_0(\|u(t)\|^2)((u(t), h_1)) \ e \\ &M_2(\|v_m(t)\|^2)((v_m(t), h_2)) \to M_2(\|v(t)\|^2)((v(t), h_2)) \ em \ L^2\left(0, T_0; H_0^1(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Para a convergência dos outros termos não-lineares, note que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D(0,T_0)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
&M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t),h_1) \to M_1(|u(t)|^2)(u(t),h_1) \;\; e \\
&M_3(|v_m(t)|^2)(v_m(t),h_2) \to M_3(|v(t)|^2)(v(t),h_2) \; em \; L^2\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right).
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Multiplicando-se as equações (*) e (**) em (2.6) por $\theta(t) \in D(0,T_0)$ e integrando de 0 a T_0, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T_0} (u_m''(t),h)\theta(t)dt - \int_0^{T_0} M_0(\|u_m(t)\|^2)(\Delta u_m(t),h_1)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M_1(|u_m(t)|^2)(u_m(t),h_1)\theta(t)dt \\
&= \int_0^{T_0} (f(v_m(t)),h_1)\theta(t)dt
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T_0} (v_m''(t),h_2)\theta(t)dt - \int_0^{T_0} M_2(\|v_m(t)\|^2)(\Delta v_m(t),h_2)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M_3(|v_m(t)|^2)(v_m(t),h_2)\theta(t)dt \\
&= \int_0^{T_0} (g(u_m(t)),h_2)\theta(t)dt
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

Tomando o limite quando $m \to \infty$, e usando (2.18), (2.20) e (2.21), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{T_0} (u''(t),h_1)\theta(t)dt - \int_0^{T_0} M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t),h_1)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M_1(|u(t)|^2)(u(t),h_1)\theta(t)dt \\
&= \int_0^{T_0} (f(v(t)),h_1)\theta(t)dt \\
&\int_0^{T_0} (v''(t),h_2)\theta(t)dt - \int_0^{T_0} M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v(t),h_2)\theta(t)dt + \int_0^{T_0} M_3(|u(t)|^2)(v(t),h_2)\theta(t)dt \\
&= \int_0^{T_0} (g(u(t)),h_2)\theta(t)dt
\end{aligned}
$$

$\forall \theta(t) \in D(0,T_0), \; h_1,h_2 \in V_{m_0}, \; m_0 \; fixo.$

Mas,

$$\int_0^{T_0}(u''(t),h_1)\theta(t)dt = (u'(t),h_1)\theta(t)\Big|_0^{T_0} - \int_0^{T_0}(u'(t),h_1)\theta'(t)dt = -\langle (u'(t),h_1),\theta'(t)dt\rangle$$
$$= -\left\langle (\frac{d}{dt}u'(t),h_1),\theta(t)dt\right\rangle$$

$$\int_0^{T_0}(v''(t),h_2)\theta(t)dt = (v'(t),h_2)\theta(t)|_0^{T_0} - \int_0^{T_0}(v'(t),h_2)\theta'(t)dt = -\langle (v'(t),h_2),\theta'(t)dt\rangle$$
$$= -\left\langle (\frac{d}{dt}v'(t),h_2),\theta(t)dt\right\rangle$$

$$-\int_0^{T_0} M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t),h_1)\theta(t)dt = -\left\langle M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t),h_1),\theta(t)\right\rangle$$

$$-\int_0^{T_0} M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v(t),h_2)\theta(t)dt = -\left\langle M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v(t),h_2),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^{T_0} M_1(|u(t)|^2)(u,h_1)\theta(t)dt = \left\langle M_1(|u(t)|^2)(u(t),h_1),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^{T_0} M_3(|v(t)|^2)(v(t),h_2)\theta(t)dt = \left\langle M_3(|v(t)|^2)(v(t),h_2),\theta(t)\right\rangle$$

$$\int_0^{T_0} (f(v(t)),h_1)\,\theta(t)dt = \langle (f(v(t)),h_1)\,,\theta(t)\rangle$$

$$\int_0^{T_0} (g(u(t)),h_2)\theta(t)dt = \langle (g(u(t)),h_2),\theta(t)\rangle$$

Como V_{m_0} é denso em $H_0^1(\Omega)$, reescrevemos (2.22) e (2.23),

$$\left\langle (\frac{d}{dt}u'(t),h),\theta(t)\right\rangle - \left\langle M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t),h),\theta(t)\right\rangle + \left\langle M_1(|u(t)|^2)(u,h),\theta(t)\right\rangle$$

$$= \langle (f(v(t)),h),\theta(t)\rangle\,, \quad \forall\theta\in D(0,T)\ e\ \forall h\in H_0^1(\Omega)$$

$$\left\langle (\frac{d}{dt}v'(t),h),\theta(t)\right\rangle - \left\langle (M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v(t),h),\theta(t)\right\rangle + \left\langle M_3(|v(t)|^2)(v(t),h),\theta(t)\right\rangle$$

$$= \langle (g(u(t)),h),\theta(t)\rangle\,, \quad \forall\theta\in D(0,T)\ e\ \forall h\in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(u'(t),h_1) - M_0(\|u(t)\|^2)(\Delta u(t),h_1) + M_1(|u(t)|^2)(u(t),h_1) = (f(v(t)),h_1) \ em \ D'(0,T_0),$$

$\forall h_1 \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(v'(t),h_2) - M_2(\|v(t)\|^2)(\Delta v(t),h_2) + M_3(|v(t)|^2)(v(t),h_2) = (g(u(t)),h_2) \ em \ D'(0,T_0),$$

$\forall h_2 \in H_0^1(\Omega)$.

2.1.4 Condições iniciais

De resultados anteriores temos que

$$u,v \in L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$$
$$u',v' \in L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right)$$
$$u'',v'' \in L^2\left(0,T_0;L^2(\Omega)\right)$$

e, usando resultados de regularidade, concluímos que

$$u,v \in C^0\left([0,T_0];H_0^1(\Omega)\right)$$
$$u',v' \in C^0\left([0,T_0];L^2(\Omega)\right)$$

De forma que, $u(0), v(0)$, $u'(0), v'(0)$ faz sentido.

Consideremos $\theta \in C^1([0,T_0])$, com $\theta(0)=1$ e $\theta(T_0)=0$.

Como

$$u'_m \to u' \ e \ v'_m \to v', \quad em \quad L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right) \tag{2.24}$$

então,

$$((u'_m(t),w)) \to ((u'(t),w)) \ e \ ((v'_m(t),w)) \to ((v'(t),w)), \quad \forall w \in L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right).$$

Tomando $w(t)=\theta(t)h$, com $h \in H_0^1(\Omega)$ e integrando de 0 a T_0, obtemos

$$\int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((u_m(t),h))\theta(t)dt \to \int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((u(t),h))\theta(t)dt$$

$$\int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((v_m(t),h))\theta(t)dt \to \int_0^{T_0}\frac{d}{dt}((v(t),h))\theta(t)dt.$$

Fazendo as integrações por partes,

$$-((u_m(0),h)) - \int_0^{T_0} ((u_m(t),h))\theta'(t)dt \to -((u(0),h)) - \int_0^{T_0} ((u(t),h))\theta'(t)dt \tag{2.25}$$

$$-((v_m(0),h)) - \int_0^{T_0} ((v_m(t),h))\theta'(t)dt \to -((v(0),h)) - \int_0^{T_0} ((v(t),h))\theta'(t)dt \tag{2.26}$$

De (2.14), obtemos que

$$\int_0^{T_0} ((u_m(t),h))\varphi dt \to \int_0^{T_0} ((u(t),h))\varphi dt \ e \ \int_0^{T_0} ((v_m(t),h))\varphi dt \to \int_0^{T_0} ((v(t),h))\varphi dt,$$

$$\forall h \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in L^1(0,T_0). \tag{2.27}$$

E, da convergência dominada de Lebesgue, concluímos

$$((u_m(0),h)) \to ((u(0),h)) \ e \ ((v_m(0),h)) \to ((v(0),h)) \tag{2.28}$$

E, como

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ e \ v_m(0) = v_{0m} \to v_0 \ em \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \tag{2.29}$$

obtemos,

$$((u_m(0),h)) \to ((u_0,h)), \quad ((v_m(0),h)) \to ((v_0,h)), \forall h \in H_0^1(\Omega) \tag{2.30}$$

Isto é, $u(0) = u_0 \ e \ v(0) = v_0$.

Para provarmos $u'(0) = u_1 \ e \ v'(0) = v_1'$, usamos as convergências (2.8) e (2.15), e de forma análoga, obtemos

$$((u_m'(0),h)) \to ((u_1,h)), \quad ((v_m'(0),h)) \to ((v_1,h)), \quad \forall h \in L^2(\Omega) \tag{2.31}$$

Portanto, $u'(0) = u_1 \ e \ v'(0) = v_1$.

Capítulo 3

Unicidade da Solução Fraca

Sejam $\{u(t), v(t)\}, \{w(t), z(t)\} : [0, T_0] \rightarrow L^2(\Omega)$ funções vetoriais soluções do problema (0.1) nas condições do Teorema Principal, e considere $q(t) = u(t) - w(t)$ *e* $r(t) = v(t) - z(t)$. Então,

$$q, r \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{3.1}$$

$$q', r' \in L^\infty(0, T_0; H_0^1(\Omega)) \tag{3.2}$$

$$q'', r'' \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega)) \tag{3.3}$$

Sendo $\{u(t), v(t)\}$ e $\{w(t), z(t)\}$ soluções do sistema, temos que

$$\left\| \begin{array}{l} u''(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) = f(v(t)) \\ \\ v''(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) = g(u(t)) \end{array} \right.$$

e

$$\left\| \begin{array}{l} w''(t) - M_0(\|w(t)\|^2)\Delta w(t) + M_1(|w(t)|^2)w(t) = f(z(t)) \\ \\ z''(t) - M_2(\|z(t)\|^2)\Delta z(t) + M_3(|z(t)|^2)z(t) = g(w(t)) \end{array} \right.$$

Subtraindo, correspondentemente, as equações de cima e de baixo dos dois sistemas, encontramos

$$\begin{aligned} &u''(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) - w''(t) + M_0(\|w(t)\|^2)\Delta w(t) \\ &-M_1(|w(t)|^2)w(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &v''(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) - z''(t) + M_2(\|z(t)\|^2)\Delta z(t) \\ &-M_3(|z(t)|^2)z(t) = g(u(t)) - g(w(t)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Somando e subtraindo os termos $M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t)$, $M_1(|u(t)|^2)w(t)$ na eq. (3.4), e

$M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t)$, $M_3(|v(t)|^2)z(t)$ na eq. (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}
&q''(t) - \left[M_0(\|u(t)\|^2)\Delta u(t) - M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t) - M_0(\|w(t)\|^2\Delta w(t)\right] \\
&-M_0(\|u(t)\|^2)\Delta w(t) + M_1(|u(t)|^2)u(t) - M_1(|u(t)|^2)w(t) + M_1(|u(t)|^2)w(t) \\
&-M_1(|w(t)|^2)w(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&r(t)'' - \left[M_2(\|v(t)\|^2)\Delta v(t) - M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t) - M_2(\|z(t)\|^2\Delta z(t)\right] \\
&-M_2(\|v(t)\|^2)\Delta z(t) + M_3(|v(t)|^2)v(t) - M_3(|v(t)|^2)z(t) + M_3(|v(t)|^2)z(t) \\
&-M_3(|z(t)|^2)z(t) = g(u(t)) - g(w(t)) \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Obs.: a partir daqui o processo de desenvolvimento para obtenção de resultados será feito apenas para a eq. (3.6), uma vez que é análogo para a equação (3.7).

Agrupando alguns termos adequadamente na eq. (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
&q''(t) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta q(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)q(t) - \left[M_0\left(\|u(t)\|^2\right) - M_0\left(\|w(t)\|^2\right)\right]\Delta w(t) \\
&+\left[M_1\left(|u(t)|^2\right) - M_1\left(|w(t)|^2\right)\right]w(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Sendo $M_i \in C^1\left[0,\infty\right[\ (i = 0,1,2,3)$, do Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
&q''(t) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\Delta q(t) + M_1\left(|u(t)|^2\right)q(t) - M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right]\Delta w(t) \\
&+M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right]w(t) = f(v(t)) - f(z(t)) \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde $\|u(t)\|^2 < \xi_1 < \|w(t)\|^2$ e $|u(t)|^2 < \xi_2 < |w(t)|^2$.

Pela regularidade da solução obtida, compondo com $2q'(t)$, em $L^2\left(0,T_0;H_0^1(\Omega)\right)$, a equação (3.9) , obtemos

$$\begin{aligned}
&(q''(t),2q'(t)) - M_0\left(\|u(t)\|^2\right)(\Delta q(t),2q'(t)) + M_1\left(|u(t)|^2\right)(q(t),2q'(t)) \\
&-M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right](\Delta w(t),2q') + M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right](w(t),2q'(t)) \\
&= (f(v(t)) - f(z(t)),2q'(t))
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 \\
&-2M_0'(\xi_1)\left[\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right](\Delta w(t),q'(t)) + 2M_1'(\xi_2)\left[|u(t)|^2 - |w(t)|^2\right](w(t),q'(t)) \\
&= (f(v(t)) - f(z(t)),2q'(t))
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2$$
$$\leq 2\,|M_0'(\xi_1)|\;\left|\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right|\;|\Delta w(t)|\;|q'(t)|$$
$$+2\,|M_1'(\xi_2)|\;\left||u(t)|^2 - |w(t)|^2\right|\;|w(t)|\;|q'(t)| + |f(v(t)) - f(z(t))|\;2\,|q'(t)|$$

Note que,

$$\left|\|u(t)\|^2 - \|w(t)\|^2\right| = |\|u(t)\| + \|w(t)\||\;\;|\|u(t)\| - \|w(t)\|| \leq k_1\|q(t)\|,$$
$$(k_1 = \|u(t)\| + \|w(t)\| \geq |\|u(t)\| + \|w(t)\||)$$

e

$$\left||u(t)|^2 - |w(t)|^2\right| = ||u(t)| + |w(t)||\;\;||u(t)| - |w(t)|| \leq k_2|q(t)|,$$
$$(k_2 = |u(t)| + |w(t)| \geq ||u(t)| + |w(t)||)$$

e da hipótese sobre f, temos

$$\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 \leq 2C_0k_1\,\|q(t)\|\;\;|q'(t)|$$
$$+2C_1k_2\,|q(t)|\;\;|q'(t)| + |v(t) - z(t)|\;\;2C_2\,|q'(t)|$$

$$\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2 \leq 2C_0k_1\,\|q(t)\|\;\;|q'(t)|$$
$$+2C_1k_2\,|q(t)|\;\;|q'(t)| + |v(t)|\;2C_2\,|q'(t)|\;\;+|z(t)|\;2C_2\,|q'(t)|\,.$$

Aplicando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2+b^2$ e tomando $C_3 = C_2|v(t)|^2+C_2|z(t)|^2$ e $C_5 = C_0k_1 + C_1k_2 + 2C_2$, obtemos

$$\frac{d}{dt}|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\frac{d}{dt}\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)\frac{d}{dt}|q(t)|^2$$
$$\leq C_5\left[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 + |q'(t)|^2\right] + C_3$$

ou,

$$\frac{d}{dt}\left[|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] \leq C_5\left[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 + |q'(t)|^2\right]$$
$$+C_3 + \frac{d}{dt}M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + \frac{d}{dt}M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2$$

Ainda,

$$\frac{d}{dt}\left[|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] \leq C_5\left[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 + |q'(t)|^2\right]$$
$$+C_3 + \left|M_0'\left(\|u(t)\|^2\right)\right|\;2\,|((u(t), u'(t)))|\;\;\|q(t)\|^2 + \left|M_1'\left(|u(t)|^2\right)\right|\;2\,|(u(t), u'(t))|\;\;|q(t)|^2$$

Usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwartz e observando as limitações para $\|u(t)\|^2, |u(t)|^2, \|u'(t)\|^2,\ |u'(t)|^2,\ |M_0'(\|u(t)\|^2)|\ e\ |M_1'(|u(t)|^2)|$, encontramos

$$\frac{d}{dt}\left[|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2\right] \leq C_6\left[\|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 + |q'(t)|^2\right]$$
$$+C_3$$

onde $\alpha_1 = |M_0'(\|u(t)\|)|\ \ 2\|u(t)\|\ \ \|u'(t)\|,\ \alpha_2 = |M_1'(|u(t)|)|\ \ 2|u(t)|\ \ |u'(t)|\ \ e\ \ C_6 = \max\{C_5 + 2\alpha_1, C_5 + 2\alpha_2\}$.

Integrando a última desigualdade acima,

$$|q'(t)|^2 + M_0\left(\|u(t)\|^2\right)\|q(t)\|^2 + M_1\left(|u(t)|^2\right)|q(t)|^2 \leq \int_0^t C_3 ds$$
$$+C_6\int_0^t\left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right]ds + M_0(\|u(0)\|^2)\|q(0)\|^2 + M_1(|u(0)|^2)|q(0)|^2$$

Das hipóteses sobre M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, obtemos

$$|q'(t)|^2 + m_0\|q(t)\|^2 + m_1|q(t)|^2 \leq \int_0^t C_3 ds + C_6\int_0^t\left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right]ds$$

Tomando $m_2 = \min\{1, m_0, m_1\}$, temos que

$$|q'(t)|^2 + \|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 \leq cte. + cte.\int_0^t\left[\|q(s)\|^2 + |q(s)|^2 + |q'(s)|^2\right]ds$$

Usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$|q'(t)|^2 + \|q(t)\|^2 + |q(t)|^2 = 0$$

Donde, segue que $|q(t)| = 0$, ou seja, $q(t) = 0$.

Logo, $u(t) = w(t),\ \forall t \in [0, T_0]$. Analogamente, $v(t) = z(t),\ \forall t \in [0, T_0]$.

Considerações Finais

Ressaltamos que os resultados obtidos nesta dissertação de Mestrado relacionados com o sistema acoplado não linear do tipo Klein-Gordon com não linearidades do tipo Kirchhoff-Carrier, são inéditos e de grande relevância na área das Equações Diferenciais Parciais em domínios limitados. O problema pode ser generalizado para o caso abastrato, sem grandes dificuldades.

Existem diversos problemas em abertos relacionados com o nosso problema, os quais estudaremos num futuro breve visando o doutorado em EDP, tais como estudar o sistema acoplado, em domínios com fronteira móvel, em domínios exteriores, em domínios não-cilíndricos porém no exterior, solução periódica em domínios limitados ou não, controlabilidade exata, interna, pontual, controlabilidade aproximada, desigualdades variacionais entre outros problemas nos quais poderemos estudar.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[2] CARRIER, G.F. *On the vibration problem of elastic string.* Q.J. Appl. Math 3,pp151-165, 1945.

[3] FERREIRA, J., MATOS, M.P. & PEREIRA, D.C. *Global solutions to Klein-Gordon type equations with non-linearities of Kirchhoff-Carrier type.* Publicado no Journal of Diferential Equations.(Pré-print)

[4] FERREIRA, J., MATOS, M.P. & PEREIRA, D.C. *Stability for a coupled system of wave equations of Kirchhoff type with nonlocal boundary conditions.* Publicado no Eletronic Journal of Diferential Equations, Vol. 2003, No. 84, pp. 1-17. ISSN: 1072-6691.

[5] LIMA, G.J.M. *Sobre a Equação de Klein-Gordon com Não-Linearidade do Tipo Kirchhoff-Carrier.* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2004.

[6] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des problémes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.

[7] MATOS, M.P., FEREIRA, J., SANTOS, M. L. & PEREIRA, D.C. *Hidden Regularity for the Hiperbolc-Parabolic Equations.* (To Appear).

[8] MEDEIROS, L.A., MELO, E. A. *A Integral de Lebesgue.* Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, 1989.

[9] MIRANDA, M.M. & MEDEIROS, L.A. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos No. 25, IM-UFRJ, 1993.

[10] RIVERA, J.E.M. *Introdução às Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* IM-UFRJ, 2004.