



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Heleno da Silva Cunha

**Existência e unicidade de solução fraca
para um sistema de EDP's em domínio tempo-dependente**

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ferreira

**Belém
2005**

Heleno da Silva Cunha

Existência e unicidade de solução fraca
para um sistema de EDP's em domínio tempo-dependente

Dissertação apresentada ao
corpo docente do Programa de
Pós-Graduação em Matemática
e Estatística\CCEN\UFPA,
como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre em
Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais
Orientador: Prof. Dr. Jorge Ferreira

Belém
2005

Heleno da Silva Cunha

**Existência e unicidade de solução fraca
para um sistema de EDP's em domínio tempo-dependente**

Esta Dissertação, foi julgada e aprovada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

Belém, 14 de Dezembro de 2005

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jorge Ferreira
Universidade Federal de São João del Rei
Orientador

Prof. Dr. João dos Santos Protázio,
Escola Superior Madre Celeste
Examinador

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará
Examinador

Ao meu pai, in memoriam

Agradecimentos

A primeira pessoa a quem quero agradecer é ao Professor Jorge (Capitão), não só pela orientação, amizade, compreensão, incentivo... mas principalmente por ter apostado em mim. Também devo agradecimento ao professor Mauro, pessoa chave na execução desse trabalho. Para completar o quadro de professores do mestrado, também sou grato ao professor Protázio, velho amigo.

Quanto aos colegas do mestrado, quero dizer que sem a companhia deles o percurso seria mais difícil. Valeu pelos dias estressantes, pelos porres e horas de distração... Para não ser injusto, vai um forte abraço a todos: Renato (Patrick), Alessandro (Jou), Sílvia, Reiville, Paula, Helena (minha chará), Irazel (Zazaéu), Antenor (o homem que adora tomar banho), Pedro, Baena, Lindomar (cuidado para não furarem teu olho!), Sebastião (Sabalev), Marcio e Albedir (Auberíndio).

À Telma, nossa querida secretária, e o professor Marcus, nosso sábio coordenador.

Ao Walter Kikuchi, a pessoa que me incentivou a enverdar pela matemática.

Ao professor José Miguel, que deu uma "maõzinha" na topologia diferencial.

E para finalizar quero agradecer à minha família, em especial aos meus irmãos, a quem dedico este trabalho; ao tio Nonato (Natico); à minha mãe, é claro; à Janaina (Dindinha); à minha Vó Eunice, a quem devo tudo.

“... me sustentei sobre o ombro de gigantes”.

Isaac Newton, em carta a Hooke.

RESUMO

Cunha, Heleno da Silva. Existência e unicidade de um sistema de EDP's em um domínio tempo-dependente. 2005. Dissertação (Mestrado em Matemática) - CCEN - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

Neste trabalho abordaremos a questão da existência e unicidade de solução fraca para um sistema de equações diferenciais parciais da onda, em um domínio tempo-dependente. Devido a natureza variável do domínio, faz-se necessário recorrer à técnicas de topologia diferencial. Para sermos mais precisos, o conceito de ISOTOPIA emprega-se para transformar o domínio tempo-dependente, por meio de um difeomorfismo conveniente, em um domínio fixo. A técnica de solução empregada foi o método de Faedo-Galerkin.

Palavras Chaves: Existência, Unicidade, Solução Fraca, Isotopia.

SUMÁRIO

RESUMO	vii
LISTA DE FIGURAS	x
1 Introdução	1
2 Elementos de Topologia Diferencial	7
2.1 Isotopia	7
2.2 Campos de Vetores e Difeotopias	8
3 Elementos de Análise Funcional e Espaços de Sobolev	10
3.1 Espaços de Banach	10
3.2 Convergência Fraca	11
3.3 Teorema de Hanh-Banach	11
3.4 Espaços Reflexivos	12
3.5 Topologia Fraca Estrela	12
3.6 Os Espaços L^p	13
3.6.1 Teorema da Representação de Riez e Convergência Fraca em L^p	14
3.7 Distribuições	14
3.7.1 Espaço das Funções Teste	14
3.8 Espaços de Sobolev	15
3.8.1 Os espaços $W^{m,p}$	15
3.8.2 Desigualdade de Poincaré	16
3.9 Distribuições Vetoriais	16
3.10 Teoremas de Compacidade	18
3.11 Teorema do Traço	19
3.11.1 Os espaços $H^s(\Gamma)$	19
3.11.2 Teorema do Traço em $H^m(\mathbb{R}^{n-1})$	20
3.11.3 Espaços Intermediários	21
3.11.4 Espaços Fracionários de Sobolev $W^{s,p}$	22
3.11.5 Os espaços $W^{s,p}(\Gamma)$ e o Teorema do Traço	23
4 O Sistema	26
4.1 Considerações iniciais	26
4.2 Formulação Fraca do Problema	28
4.3 Definição de Solução do Problema em Domínio Móvel	29

4.4	Existência do Difeomorfismo Global	31
4.5	Solução no Domínio Cilíndrico	33
4.5.1	Mudança de Variável nas Equações	34
4.5.2	Mudança de Variável nas Condições de Fronteira	37
4.5.3	Definição de Solução do Problema em Domínio Fixo	38
4.6	Teorema de Existência e Unicidade de Solução Fraca	41
4.6.1	O Problema Aproximado	41
4.6.2	Primeira Estimativa à Priori	43
4.6.3	Segunda Estimativa à Priori	49
4.6.4	Passagem ao Limite	57
4.6.5	Convergência dos Dados Iniciais	59
4.6.6	Unicidade	60
4.7	Retorno ao Domínio \tilde{Q}_T : Existência e Unicidade de Solução Fraca	61
4.8	Sistema com Condição de Dirichlet Não-Homogênea	62
A	Outros Resultados	65
A.1	Teorema de Carathéodory	65
	BIBLIOGRAFIA	67

LISTA DE FIGURAS

4.1	Modelo para o domínio \tilde{Q}_T	27
4.2	Cilindro de altura α	28
4.3	Modelo para o domínio $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\}$	64

Capítulo 1

Introdução

O principal resultado deste trabalho é um teorema de existência e unicidade para um sistema acoplado de equações diferenciais parciais de onda definido em um domínio tempo-dependente.

Abordar problemas de EDP's com domínios tempo-dependentes esbarra na inexistência de uma estrutura de traço bem definida. Várias técnicas surgiram para atacar problemas desse tipo. No presente trabalho, adotaremos a seguinte tática, a saber:

- Obtenção de um difeomorfismo entre o domínio não-cilíndrico tempo-dependente e outro cilíndrico;
- mudança de variável nas equações e nas condições de fronteira;
- resolução do sistema transformado definido em domínio cilíndrico;
- resgate das principais propriedades obtidas no sistema definido no domínio cilíndrico para sistema definido no domínio tempo-dependente.

Ressaltamos que o difeomorfismo procurado, deve manter o caráter do problema, tanto em classe, quanto em condições de fronteira, etc. Nesse sentido, o tipo de domínio tempo-dependente desempenha papel fundamental, posto que o difeomorfismo procurado age diretamente sobre ele. O ambiente natural, isto é, as técnicas utilizadas para a obtenção do difeomorfismo encontram-se no âmbito da TOPOLOGIA DIFERENCIAL. Vale a pena lembrar que o próprio teorema do traço também tem caráter topológico.

Devido a diversidade de tipos de domínios tempo-dependente e técnicas conhecidas, várias classes de problemas em análise surgiram nos últimos anos. Cada uma dessas classes abrange considerável quantidade de importantes problemas. A corrida a problemas definidos em domínios tempo-dependente logo tornou-se uma das fronteiras de pesquisa em análise. Problemas clássicos de análise logo viram suas devidas versões adaptadas a domínios tempo-dependentes. Daí a relevância de nosso estudo.

Como dissemos acima, existem vários tipos de domínios tempo-dependentes a considerar. Em nosso caso particular, trabalhamos com os chamados domínios "time-like"*. Vários autores abordaram problemas definidos em domínios "time-like". Vejamos um breve resumo das principais referências que inspiraram esse esse trabalho. A descrição de tais trabalhos ficará restrita à apresentação do problema, definição do domínio e listagem dos principais resultados.

- **Em 1973, Cooper-Bardos [1]** estudaram as equações

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f; \\ u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u + u = f \quad (\rho > 0), \end{cases}$$

definidas em um domínio não-cilíndrico $Q \subset \mathbb{R}^n \times (0, T)$, T finito.

Denotando por Q_{t_0} ($0 < t_0 < T$) a interseção de Q com o hiperplano $P_{t_0} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t = t_0\}$, por $\Omega(t) = \overline{Q} \cap P_t$ e por $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$. Definimos por $\Sigma = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma(t)$ a fronteira lateral de Q , a qual supõe-se uma variedade n -dimensional de classe C^1 . O domínio Q diz-se:

$$\begin{cases} \text{crescente quando, } \Omega(r) \subset \Omega(s), \text{ para } r \leq s; \\ \text{decrecente quando, } \Omega(r) \supset \Omega(s), \text{ para } r \leq s; \end{cases}$$

Nestas condições prova-se que Σ é "time-like". E os principais resultados são:

1. Existência e unicidade para a equação

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, \text{ em } Q \\ u(0, x) = u_0, \quad u_t(0, x) = u_1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_\Sigma = \frac{\partial u}{\partial x_i}|_\Sigma = 0, \quad (0 \leq i \leq n) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega(0)), \quad u_1 \in L^2(\Omega(0)), \quad f \in L^2(Q) \end{cases}$$

2. Existência e unicidade para a equação

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^\rho u = f \\ u(0, x) = u_0, \quad u_t(0, x) = u_1, \\ u|_\Sigma = 0, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega(0)), \quad u_1 \in L^2(\Omega(0)), \quad f \in L^2(Q) \end{cases}$$

O método empregado foi da penalização de Lions.

* veja a definição (4.1.1)

- **Em 1974, Inoue [5]** estudou a equação $u_{tt} - \Delta u + u^3 = f$. Mais precisamente:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u^3 = f, & x \in \Omega(t) \\ u(x, 0) = u_0, & x \in \Omega(0) \\ u_t(x, 0) = u_1 \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega(t) \end{cases}$$

Defini-se:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(t) \times \{t\} \cup \mathbb{R}^3 \times [0, T] \\ \partial_L \tilde{Q}_T = (\bigcup_{0 \leq t \leq T} \partial\Omega(t) \times \{t\}) \end{cases}$$

Ao domínio impõe-se a condição: o ângulo $\theta(x, t)$ entre o vetor normal exterior unitário $n(x, t)$ a $\partial_L \tilde{Q}_T$ e o vetor $(0, 0, 0, 1)$ é tal que $\frac{\pi}{4} \leq \theta(x, t) \leq \frac{3\pi}{4}$ e $|\langle (0, 0, 0, 1), n(x, t) \rangle| < \frac{1}{2}$.

Posto isso, mostra-se a existência de um difeomorfismo hiperbólico entre o domínio tempo-dependente \tilde{Q}_T e um domínio cilíndrico Q_T .

Os principais resultados são existência, unicidade e regularidade de solução. O método empregado foi de Faedo-Galerkin.

- **Em 1974 Cooper [4]** Estudou a equação homogênea da onda $u_{tt} - \Delta u = 0$ em um domínio exterior tempo-dependente $B(t)$, com a condição de fronteira $u = 0$ em $\partial B(t)$.

Para cada $t \in [0, +\infty)$ supõe-se $B(t)$ um compacto de \mathbb{R}^3 com fronteira $\partial B(t)$ suave. Assume-se ainda a existência de constantes $0 < b < r_0$ tais que

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq b\} \subset B(t) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq r_0\}^\dagger$$

Sejam:

$$\begin{cases} \Omega(t) = \mathbb{R}^3 \setminus B(t) \\ Q = \bigcup_{0 < t < +\infty} \Omega(t) \times \{t\} \\ \Sigma = \bigcup_{0 < t < +\infty} \partial\Omega(t) \times \{t\}, \text{ fronteira lateral, a qual supõe-se uma variedade } C^\infty \end{cases}$$

Supõe-se, por último, que a fronteira lateral é "time-like".

[†] Esta condição significa que cada $B(t)$ está entre duas bolas compactas centradas na origem.

Os principais resultados são:

1. Existência e unicidade de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{em } Q \\ u = 0, & \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = f(x), & \text{em } \Omega(0) \\ u_t(x, 0) = g(x), & \text{em } \Omega(0) \\ f \in H_0^1(\Omega(0)), g \in L^2(\Omega(0)) \end{cases}$$

2. Decaimento da energia.

- **Em 1990, Sikorav [9]** estudou a equação linear de onda $u_{tt} - \Delta u = f$ em domínio tempo-dependente. Mais precisamente, a seguinte EDP:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ u = 0, & \text{em } \Sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{em } \Sigma \end{cases}$$

Para cada $t \in [0, T]$ tem-se $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1$. Então, define-se $\tilde{Q}_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(t) \times \{t\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\Sigma' = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_0(t) \times \{t\}$ e $\Sigma = \Gamma_1 \times [0, T]$. Supõe-se ainda a existência de abertos Ω e $\Omega_0(t)$ tais que $\partial\Omega = \Gamma_1$, $\partial\Omega_0(t) = \Gamma_0(t)$ e $\Omega(t) = \Omega \setminus \overline{\Omega_0(t)}$. A fronteira lateral móvel Σ' é "time-like". Os principais resultados são:

1. Existência e unicidade de solução fraca de:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ u = 0, & \text{em } \Sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, & \text{em } \Sigma \\ u(y, 0) = u_0, u_t(y, 0) = u_1 \end{cases}$$

sendo $u_0 \in H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0))$, $u_1 \in L^2(\Omega(0))$ e $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t)))$.

2. Regularidade no bordo.

Deve-se ressaltar que o trabalho de Sikorav [9] é a principal referência desta dissertação e seguimos de perto as técnicas ali contidas.

- **Em 1996, Ferreira-Lar'kin [6]** estudaram uma EDP hiperbólica-parabólica em domínio não cilíndrico. Mais precisamente

$$\begin{cases} K_1(x, t)u_{tt} + K_2(x, t)u_t - \Delta u + f_1(t)|u|^p u = f, & \text{em } \widehat{Q} \\ u = 0, & \text{em } \widehat{\Sigma}_t \\ u(x, 0) = u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1 \end{cases}$$

sendo \widehat{Q} um domínio não-cilindrico de \mathbb{R}^{n+1} e $\widehat{\Sigma}_t$ sua fronteira lateral. As funções K_1, K_2 são reais e definidas em \widehat{Q} .

Vamos descrever o domínio não-cilíndrico \widehat{Q} . Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira Σ suficientemente suave. Então definimos, $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = K(t)y, y \in \Omega\}$, $K \in C^4(0, +\infty)$. Vamos representar a fronteira de cada Ω_t por Γ_t . O domínio \widehat{Q} é definido como:

$$\widehat{Q} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)\} = \bigcup_{0 \leq t < +\infty} \Omega_t \times \{t\}$$

e a fronteira lateral Σ_t , por:

$$\Sigma_t = \bigcup_{0 \leq t < +\infty} \Gamma_t \times \{t\}$$

Em [6] os autores obtiveram existência e unicidade de solução regular e o método empregado foi o de Faedo-Galerkin.

- **Em 2004, Cacalcante et al [3]** estudaram o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \rho_1(x)u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ \rho_2(x)v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = 0, & \text{em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma_0 \\ u + \int_0^t g_1(t-s) \frac{\partial u}{\partial v}(s) ds = v + \int_0^t g_2(t-s) \frac{\partial v}{\partial v}(s) ds = 0, & \text{em } \Gamma_1 \times (0, +\infty) \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) \\ (\sqrt{\rho_1}u_t(0), \sqrt{\rho_2}v_t(0)) = (\sqrt{\rho_1}u^1, \sqrt{\rho_2}v^1) \end{cases}$$

sendo as funções $\rho_1, \rho_2 \geq 0$ e Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^n com fronteira partida em parte disjuntas Γ_0 e Γ_1 .

Os resultados obtidos foram existência e unicidade de solução fraca, decaimento exponencial e polinômial.

Vejamos como o trabalho está organizado.

No capítulo 2, descrevemos os conceitos e resultados referente à topologia diferencial utilizados para demonstrar a existência do difeomorfismo adequado entre o domínio não-cilíndrico tempo-dependente e um domínio cilíndrico. No capítulo 3, apresenta-se os elementos de análise funcional, distribuições e espaços de Sobolev necessários, além de fixar as notações empregadas. O capítulo 4 é o mais importante do trabalho, pois está devotado aos objetivos centrais que nos propomos a fazer: existência e unicidade para um sistema acoplado de EDP's de onda definido em um domínio não-cilíndrico tempo-dependente; é neste capítulo que apresenta-se o problema, as hipóteses e demonstram-se os resultados mais relevantes.

Capítulo 2

Elementos de Topologia Diferencial

Neste capítulo apresenta-se um breve resumo dos conceitos topológicos utilizados no trabalho. A referencia para o estudo mais aprofundado do tema e onde pode-se encontrar as demonstrações dos teoremas aqui enunciados, estão contidas no livro de (Hirsh?)

2.1 Isotopia

Definição 2.1.1. *Uma isotopia entre duas variedades M e N é uma aplicação $F : M \times I \rightarrow N$, em que cada aplicação*

$$F_t : M \longrightarrow N$$

$$x \longrightarrow F(x, t)$$

é um mergulho, $\forall t \in I$.

Intuitivamente, uma isotopia é uma família a um parâmetro de mergulhos entre M e N . Lembrando que um mergulho é uma aplicação diferenciável injetiva com derivada injetiva em todos os pontos.

Definição 2.1.2. *O traço de uma isotopia é a aplicação*

$$\hat{F} : M \times I \longrightarrow N \times I$$

$$(x, t) \longrightarrow (F(x, t), t)$$

Note que o traço de uma isotopia é um mergulho * e preserva a variável tempo.

Se $F : M \times I \rightarrow N$ é uma isotopia, dizemos que os mergulhos F_0 e F_1 são isotópicos. Quando M é uma subvariedade de N e F_0 é a aplicação inclusão dizemos que F é uma isotopia de M em N .

* Reciprocamente, todo mergulho é o traço de uma isotopia

Definição 2.1.3. Quando $M = N$, $F_0 = Id_M$, F_t é um mergulho, para todo $t \in I$, chamamos a isotopia de difeotopia ou ambiente isotópico.

2.2 Campos de Vetores e Difeotopias

Agora, veremos que os campos de vetores da variedade produto $M \times I$ tem uma importante conexão entre as difeotopias de M .

Cada ponto $m \in M$ pertence a um único $arc\hat{F}(x \times I) := \{F(x, t) \in M; t \in I\}$. Os campos de vetores tangentes a esses arcos formam um campo de vetores não nulo X_F em $M \times I$. E existe $H : M \times I \rightarrow TM$ tal que

$$X_F(x, t) = (H(x, t), 1) \in M_x \times \mathbb{R} = T_{(x,y)}(M \times I).$$

A isotopia F é o fluxo Φ do campo X_F aplicado a $M \times 0$.

Definição 2.2.1. Um campo de vetores tempo-dependente é uma aplicação $G : M \times I \rightarrow TM$. Quando a métrica riemanniana for completa e $|G(x, t)| < K$, para uma certa constante K , diremos que G é de velocidade limitada em M .

Temos então o seguinte teorema

Teorema 2.2.1. Seja G um campo de vetores tempo-dependente em M com velocidade limitada. Então, existe uma única difeotopia $F : M \times I \rightarrow M$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = G(F(x, t), t).$$

Definição 2.2.2. suporte de um campo de vetores $G : M \times I \rightarrow I$ é o fecho do conjunto $\{x \in M; G(x, t) \neq 0\}$.

$$suppG = \overline{\{x \in M; G(x, t) \neq 0\}}.$$

Quando $suppG$ é compacto, então G tem velocidade limitada.

Teorema 2.2.2. Todo campo de vetores tempo-dependente de suporte compacto gera uma difeotopia. Em todo campo de vetores tempo dependente em uma variedade compacta gera uma difeotopia.

Definição 2.2.3. O suporte, $\text{supp}F \subset M$, da isotopia $F : M \times I \rightarrow N$ é o fecho do conjunto $\{x \in M; F(x, t) \neq F(x, 0), \forall t \in I\}$

$$\text{supp}F = \overline{\{x \in M; F(x, t) \neq F(x, 0), \forall t \in I\}}.$$

Teorema 2.2.3. Se M é uma sub-variedade compacta da variedade N , $F : M \times I \rightarrow N$ é uma isotopia de M e $F(M \times I) \subset \partial N$ ou $F(M \times I) \subset N - \partial N$. Então, F se estende a uma difeotopia com suporte compacto em N .

Capítulo 3

Elementos de Análise Funcional e Espaços de Sobolev

Este capítulo contém resultados clássicos de análise funcional e espaços de Sobolev utilizados no trabalho, assim como estabelece os conceitos básicos e notações adotadas. As demonstrações dos resultados enunciados podem ser encontradas em [8] e/ou [2].

3.1 Espaços de Banach

Definição 3.1.1. *Um espaço vetorial V é dito normado, quando existe uma função $N : V \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de norma, tal que:*

1. $N(x) \geq 0, \forall x \in V$ e $N(x) = 0$, somente quando $x = 0$;
2. $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \forall x, y \in V$;
3. $N(\alpha x) = |\alpha|N(x), \forall x \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

A primeira propriedade diz que a função norma nunca é negativa, a segunda propriedade é chamada de desigualdade triângular e a terceira estabelece o caráter homogêneo da função norma. Tendo a função norma a disposição, então o espaço vetorial V torna-se um espaço métrico, basta por $d(x, y) = N(x - y)$.

Definição 3.1.2. *Um espaço vetorial normado e completo para norma induzida é chamado de espaço de Banach.*

Definição 3.1.3. *Denotaremos por V^* o conjunto das funções $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:*

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear e contínua}\}$$

O conjunto V^* é chamado de espaço dual de V .

O espaço dual V^* possui uma norma natural:

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|x\|_V \leq 1} |f(x)| \quad (3.1)$$

Teorema 3.1.1. *O espaço dual V^* com a métrica induzida pela norma (3.1) é um espaço de Banach.*

3.2 Convergência Fraca

Definição 3.2.1. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um espaço de Banach V converge fraco para $x \in V$, quando:*

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \quad \forall f \in V^*$$

A convergência forte, isto é, a induzida pela norma implica em convergência fraca. No entanto a recíproca é falsa, no caso geral, valendo no caso de dimensão finita. Pensando a topologia fraca de outra maneira, ela se trata da topologia "menos fina" que faz as funções lineares de V em \mathbb{R} contínuas.

3.3 Teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.3.1. *Seja V um espaço vetorial e p uma semi-norma, isto é,*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in V \text{ e } \alpha > 0;$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in V.$$

Sejam G um subespaço de V e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que, $g(x) < p(x)$, $\forall x \in G$. Então, existe uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in G;$$

$$f(x) < p(x), \quad \forall x \in V.$$

A função f é dita uma extensão da função g .

3.4 Espaços Reflexivos

Uma vez construído o espaço dual V^* e este sendo um espaço vetorial, podemos pensar no seu dual V^{**} , o bidual. Temos então:

$$V^{**} = \{f : V^* \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear e contínua}\}$$

O espaço bidual V^{**} , possui uma norma natural, dada por:

$$|f|_{V^{**}} = \sup_{\substack{g \in V^* \\ |g|_{V^*} \leq 1}} |f(g)| \quad (3.2)$$

Os espaços dual e bidual podem ser relacionados através da seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} J : V & \rightarrow & V^{**} \\ x & \mapsto & J(x) : V^* \rightarrow \mathbb{R} \\ & & f \mapsto f(x) \end{array}$$

ou seja $J(x) : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\langle J(x), f \rangle = f(x), \forall f \in V^*$.

A função J é uma isometria entre os espaços V e V^{**} . De fato:

$$|J(x)|_{V^{**}} = \sup_{\substack{f \in V^* \\ |f|_{V^*} \leq 1}} |\langle J(x), f \rangle| = \sup_{\substack{f \in V^* \\ |f|_{V^*} \leq 1}} |\langle f, x \rangle| = |x|_V$$

Assim, concluímos que J também se trata de uma aplicação injetiva. A isometria J é denominada de projeção canônica. Quando a aplicação J é sobrejetora o espaço é chamado de REFLEXIVO.

3.5 Topologia Fraca Estrela

A topologia fraca estrela é a "menos fina" na qual as funções de V^{**} são contínuas. Dizemos uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco estrela se para cada $x \in V$, tivermos:

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

Definição 3.5.1. *dizemos que um espaço normado V é separável, quando existe um subconjunto enumerável e denso.*

Teorema 3.5.1. *Toda sequência de funcionais lineares contínuos e limitados, definidos em um espaço reflexivo, possui uma subsequência que converge fraco estrela.*

Os espaços duais gozam das seguintes propriedades:

- V é reflexivo se, e somente se, V^* também o é;
- Se V^* é separável, então V também o é;
- V é reflexivo e separável se, e somente se, V^* também o é.

Teorema 3.5.2 (Banach-Alaoglu-Boubaki). *Se V é um espaço reflexivo e separável. Então, a bola unitária fechada é compacta na topologia fraco estrela.*

Este teorema é fundamental neste trabalho. No entanto o usaremos de forma implícita através do corolário abaixo.

Corolário 3.5.1. *Um espaço V é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada possui uma subsequência convergindo fraco estrela.*

3.6 Os Espaços L^p

Lema 3.6.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções não-negativas. Suponha que:*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx < \infty.$$

Então, a função definida por:

$$f(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

possui as seguintes propriedades:

1. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$;
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f dx < \liminf_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx$.

Definição 3.6.1. *O suporte de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é:*

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

E representamos por $C_0(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas que possuem suporte compacto contido em Ω .

Teorema 3.6.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então o conjunto $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Teorema 3.6.2 (Desigualdade de Hölder). *Tomemos $0 < p < 1$ e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sejam f e g tais que $|f|^p \in L^1(\Omega)$ e $|g|^q \in L^1(\Omega)$. Então:*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

Teorema 3.6.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$, com $p > 1$. Então:*

$$\left[\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

A desigualdade de Minkowski verifica que a função $f \mapsto \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$ é uma norma.

3.6.1 Teorema da Representação de Riez e Convergência Fraca em L^p

Teorema 3.6.4 (Teorema da Representação de Riez). *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n e T um operador linear limitado definido em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma função $w \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que:*

$$T(v) = \int_{\Omega} w(x)v(x)dx, \quad \forall v \in \Omega.$$

De posse do teorema da representação de Riez é possível caracterizar a convergência fraca nos espaços L^p . Dito de outra maneira, uma sequência u_n converge fracamente para uma função u , em L^p , se e somente se:

$$\int_{\Omega} u_n v dx \rightarrow \int_{\Omega} u v dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Teorema 3.6.5. *Toda sequência limitada em L^p , $p > 1$, possui uma sub-sequência que converge fraca em $L^p(\Omega)$.*

3.7 Distribuições

3.7.1 Espaço das Funções Teste

Definição 3.7.1. *Denotaremos por $C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid D^\alpha f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k\}$ e por $C^\infty(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid D^\alpha f \in C^\infty(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$*

Definição 3.7.2 (Suporte de uma função). *O suporte de uma função é o conjunto denotado por $\text{supp}f$ e definido como:*

$$\text{supp}f = \overline{\{x \in \text{Dom}f \mid f(x) \neq 0\}}$$

Seja $K \subset \Omega$ um compacto. Vamos denotar por

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}f \subset K\}.$$

3.8 Espaços de Sobolev

3.8.1 Os espaços $W^{m,p}$

Definição 3.8.1 (Derivada Fraca). *Diremos que uma função u possui derivadas fracas em $L^p(\Omega)$, se existem funções v_i tais que:*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi.$$

Convencionando as seguintes notações, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i; \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}; \\ D^\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Para um número $1 \leq p \leq \infty$, definimos:

$$\begin{aligned} |u|_{m,p} &= \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{quando } 1 \leq p < \infty, \\ |u|_{m,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{\infty}, \quad \text{quando } p = \infty. \end{aligned}$$

Agora definimos o espaço $W^{m,p}$ como sendo:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\} \quad (3.3)$$

As principais propriedades dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$ estão reunidas nos teoremas abaixo.

Teorema 3.8.1. *Sejam Ω um aberto de \mathbb{R}^n , $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

1. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são completos;*
2. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são separáveis, reflexivos e uniformemente convexos.*

Um espaço de fundamental importância é:

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{\{u \in C^m(\Omega) \mid |u|_{W^{m,p}} < \infty\}}^{| \cdot |_{W^{m,p}}}.$$

Vale a seguinte inclusão:

$$W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega).$$

Definimos ainda, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ com sendo o fecho dos espaço $C_0^\infty(\Omega)$, com respeito a norma de $W^{m,p}(\Omega)$. O dual do espaço é denotado por $W^{-m,p'}(\Omega)$

3.8.2 Desigualdade de Poincaré

A desigualdade de Poincaré é utilizada para adotar no espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ uma outra norma, a saber $|\nabla u|_{L^p(\Omega)}$. No entanto esta desigualdade não se aplica a qualquer domínio.

Teorema 3.8.2 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado numa direção. Então, existe uma constante positiva $C = C(\Omega, p)$ tal que:*

$$|u|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C |\nabla u|_{L^p(\Omega)}$$

3.9 Distribuições Vetoriais

Denotaremos por $L^p(a, b, X)$ o conjunto:

$$L^p(a, b, X) = \{f \text{ mensurável} \mid s \mapsto |f|_X \in L^p(a, b)\}$$

O espaço acima munido da norma:

$$|f|_{L^p(a,b,X)} = \left[\int_a^b |f(s)|_X ds \right]^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach. Quando X é reflexivo, $L^p(a, b; X)$ também o é. Se $p > 1$, então o dual de $L^p(a, b, X)$ se identifica com $L^{p'}(a, b; X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por último, se X é reflexivo, então $L^p(a, b; X)$ também o será.

Definição 3.9.1. *Seja P uma partição de $[a, b]$, isto é $P = \{a = a_1, a_2, \dots, a_m = b\}$. Diremos que uma função $f : [a, b] \rightarrow X$ é de variação limitada quando:*

$$\text{Var}(f, [a, b]) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^m |f(a_k) - f(a_{k-1})|_X < \infty.$$

Em que \mathcal{P} denota o conjunto das partições de $[a, b]$. Denotaremos por $VB(a, b, X)$ o conjunto das funções de variação limitada em X .

Teorema 3.9.1. *Seja X um espaço reflexivo e seja f uma função de variação limitada. Então, f é derivável quase sempre e:*

$$\frac{df}{dt} \in L^1(a, b, X).$$

Mais ainda:

$$\int_a^b \left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds \leq \text{Var}(f, [a, b]),$$

$$\left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds \leq \frac{d}{dt} \text{Var}_f(s), \text{ quase sempre em }]a, b[$$

Definição 3.9.2. *Diremos que uma função $f :]a, b[\rightarrow X$ é absolutamente contínua sobre X , se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que para toda sequência de subintervalos $]a_i, b_i[$, disjuntos dois a dois, verifica:*

$$\sum_{i=1}^m |a_i - b_i| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^m |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon$$

Assim como no caso de funções escalares, as funções absolutamente integráveis também são de variação limitada. Além do mais, a aplicação $s \mapsto V_f(s)$ é absolutamente contínua e:

$$V_f(s) = \int_a^b \frac{d}{dt} V_f(s) ds.$$

Seja $\mathcal{D}((a, b); X)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido no intervalo $[a, b]$ e tomando valores em X .

Definição 3.9.3. *Diremos que uma função $f \in L^p(a, b; X)$ possui derivada fraca em $L^p(a, b; X)$, se existe uma função $v \in L^p(a, b; X)$ tal que:*

$$\int_a^b f(s)\alpha'(s)ds = - \int_a^b v(s)\alpha(s)ds, \quad \forall \alpha \in \mathcal{D}(a, b).$$

Definimos o espaço

$$W^{1,p}(a, b; X) = \{f \in L^p(a, b; X) \mid f \text{ possui derivadas fraca em } L^p(a, b; X)\}.$$

Este espaço munido da norma abaixo torna-se um espaço de Banach:

$$|f|_W^p = |f|_{L^p(a,b;X)} + |f'|_{L^p(a,b;X)}$$

3.10 Teoremas de Compacidade

O principal resultado desta secção é o teorema de compacidade de Albin-Lions, embora não se aplique neste trabalho, sua utilidade em problemas não lineares é fundamental.

Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach, sendo B_0 e B_1 reflexivos e tais que $B_0 \subset B \subset B_1$, sendo a imersão de B_0 em B compacta.

Definimos os espaço:

$$\mathcal{W} = \{v \in L^{p_0}(0, T; B_0) \mid v' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\},$$

para T finito e $1 < p_0, p_1 < \infty$. O espaço \mathcal{W} munido da norma abaixo é Banach.

$$|v|_{\mathcal{W}} = |v|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + |v'|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

Lema 3.10.1. *Sejam $B_0 \subset B \subset B_1$ espaços de Banach, com a imersão de B_0 em B compacta. Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta) > 0$ tal que:*

$$|v|_B \leq \eta |v|_{B_0} + C(\eta) |v|_{B_1}.$$

Teorema 3.10.1 (Albin-Lions). *Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$ e como no lema acima. Então, a imersão de \mathcal{W} em $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta.*

O teorema de Albin-Lions pode ser melhorado. Para sermos mais precisos, temos o teorema de Kim:

Teorema 3.10.2. *Seja u_n uma sequência de funções tais que:*

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u, \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H^\beta(\Omega)), \\ u' &\rightarrow u', \text{ fraco em } L^\infty(0, T; H^\alpha(\Omega)). \end{aligned}$$

Para $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Então:

$$u_n \rightarrow u \text{ forte em } C(0, T; H^r(\Omega))$$

para todo $r \leq \beta$.

3.11 Teorema do Traço

As funções que compõem os espaços com os quais estamos trabalhando são as integráveis à Lebesgue, por isso ao se falar da restrição de uma função à fronteira de um conjunto pode gerar disparidades, uma vez que estas funções diferem à menos de um conjunto de medida nula e a fronteira de qualquer conjunto possui medida nula. O conceito de traço e o teorema do traço vem justamente para contornar essa dificuldade. A base para construção do conceito de traço repousa nos chamados espaços fracionários.

3.11.1 Os espaços $H^s(\Gamma)$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n ; denotaremos por Γ a sua fronteira, a qual suporemos uma hipersuperfície n -dimensional diferenciável de classe C^m . Construiremos os espaços $H^s(\Gamma)$ para $s < m$.

Seja (h_i, V_i) , $i = 1, \dots, n$ uma família de cartas locais para Γ e seja α_i uma partição da unidade associada a $V_i \cap \Gamma$. Toda função sobre Γ pode ser escrita como:

$$u = \sum_{i=1}^n (\alpha_i u)$$

A função $h_i^* u(x) := u(h_i(x))$ está definida sobre um quadrado Q_0 e sobre Γ . Assim, a função $h_i^* \alpha_i u$ pode ser definida sobre \mathbb{R}^{n-1} da seguinte maneira:

$$h_i^* u(x) = \begin{cases} u(h_i(x)), & \text{em } Q_0 \\ 0, & \text{fora de } Q_0 \end{cases}$$

Define-se:

$$H^s(\Gamma) = \{u \mid h_i^* \alpha_i u \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}), \forall i = 1, \dots, n\}$$

Verifica-se que o espaço H^s é um espaço de Hilbert.

3.11.2 Teorema do Traço em $H^m(\mathbb{R}^{n-1})$

Vamos denotar por:

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$$

Os principais resultados são:

Teorema 3.11.1. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \gamma : H^m(\mathbb{R}_+^n) &\rightarrow \prod_{i=1}^{m-1} H^{m-i-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto (u^1(x', 0), \dots, u^{m-1}(x', 0)) \end{aligned}$$

é linear, contínua e sobrejetiva

Corolário 3.11.1. *Seja f uma função tal que:*

$$\begin{aligned} f &\in L^2(0, \infty; H^1(\mathbb{R}^n)), \\ f' &\in L^2(0, \infty; L^2(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

Então:

$$f \in C(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(0, \infty; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n))$$

Corolário 3.11.2. *Seja f uma função tal que:*

$$f \in L^p(a, b; H^s(\mathbb{R}^n)) \cap L^q(a, b; H^r(\mathbb{R}^n)).$$

Então:

$$f \in L^1(a, b; H^u(\mathbb{R}^n)),$$

para

$$\frac{1}{l} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q},$$

$$u = \lambda s + (1-\lambda)r, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

3.11.3 Espaços Intermediários

A peça fundamental no teorema do traço são os espaços intermediários, os quais faremos aqui uma breve introdução.

Sejam B_1 e B_2 espaços de Banach contidos no espaço X . Seja $S = B_1 + B_2$ o espaço soma, de Banach, munido da norma:

$$|u|_S = \inf\{|b_1|_{B_1} + |b_2|_{B_2} \mid u = b_1 + b_2, b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}.$$

Introduzimos agora o espaço:

$$\mathcal{W}^{p,\nu} = \{f : [0, +\infty \rightarrow B_1 \mid t^n f \in L^p(0, +\infty; B_1), t^n f' \in L^p(0, +\infty; B_2)\},$$

o qual é completo com a norma abaixo:

$$|u|_{\mathcal{W}^{p,\nu}} = \max\{|t^n f|_{L^p(a,b;B_1)}, |t^n f'|_{L^p(a,b;B_2)}\}.$$

Lema 3.11.1. Denotemos por $\theta = \frac{1}{p} + \nu$. Se $0 < \theta < 1$, então para toda $f \in \mathcal{W}^{p,\nu}$, existe o limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = b, \quad \text{em } S$$

Agora estamos em condições de definir o espaço dos traços.

Definição 3.11.1 (Espaço dos Traços). *Sejam ν, p como no lema anterior. Então, definimos:*

$$T^{\nu,p} = \{f(0) \mid f \in \mathcal{W}^{\nu,p}\}.$$

O espaço dos traços munido da norma

$$|u|_{T^{\nu,p}} = \inf\{|u|_{\mathcal{W}^{\nu,p}} \mid u = f(0), f \in \mathcal{W}^{\nu,p}\}$$

é completo.

Verifica-se ainda que o espaço $C^\infty([0, +\infty[; B_1)$ é denso em $\mathcal{W}^{\nu,p}$.

Teorema 3.11.2. *Sejam $\lambda = \frac{1}{p} + \nu$, p, q e λ satisfazendo $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $0 < \lambda < 1$.*

Então:

$$T^{\nu,p}(L^q(\Omega), L^p(\Omega)) \subset L^r(\Omega)$$

$$\text{em que } \frac{1}{r} = \frac{1-\lambda}{q} + \frac{\lambda}{p}$$

Uma vez definidos os espaços $T^{\nu,p}$, o próximo passo é caracterizá-los.

Seja o espaço

$$\mathcal{T} = \{v \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \sum_{i=1}^n \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} |T_t^i v - v|_{\mathbb{R}^n}^p dt < \infty\},$$

sendo $T_t^i u(x) = u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)$,

o qual, munido da norma

$$|v|_{\mathcal{T}}^p = |v|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty t^{(\nu-1)p} |T_t^i v - v|_{\mathbb{R}^n}^p dt < \infty,$$

torna-se um espaço de Banach. Mais ainda, o espaço \mathcal{T} é um espaço intermediário entre $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$, isto é, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{T} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$

Daqui em diante, para facilitar a notação, vamos representar $T^{\nu,p}(W^{1,p}(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$ simplesmente por $T^{\nu,p}$.

O próximo teorema caracteriza o espaço \mathcal{T} e isso permite observá-lo como em espaço intermediário de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.11.3. *Seja $0 < \nu + \frac{1}{p} < 1$. Então vale a seguinte identidade:*

$$\mathcal{T} = T^{\nu,p},$$

sendo as respectivas normas equivalentes.

3.11.4 Espaços Fracionários de Sobolev $W^{s,p}$

De posse dos espaços intermediários discutidos na subseção anterior, estamos em condições de definir os espaços fracionários de Sobolev $W^{s,p}$, quando $s \in \mathbb{R}$.

Definição 3.11.2 (Espaços Fracionários de Sobolev). *Denotemos por $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ aos espaços:*

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \text{ se, } m = s \in \mathbb{N};$$

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \mid D^\alpha u \in T^{1-\sigma-\frac{1}{p},p}, \text{ sendo } |\alpha| = m \text{ e } s = m + \sigma, 0 < \sigma < 1\}$$

Os espaços fracionários de Sobolev são espaços de Banach, para tanto basta muni-los da norma:

$$|u|_{W^{s,p}}^p = |u|_{W^{m,p}}^p + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|_{T^{1-\sigma-\frac{1}{p},p}}^p.$$

Mais ainda, os espaços fracionários de Sobolev são reflexivos para todo $s \in \mathbb{R}$ e seu dual topológico é o espaço $W^{-s,p}$.

3.11.5 Os espaços $W^{s,p}(\Gamma)$ e o Teorema do Traço

Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n , denotaremos por Γ a sua fronteira, qual será, por hipótese, uma variedade de dimensão $n - 1$ e classe C^m .

Definiremos os espaços $W^{s,p}$ para $s < m$. Sejam (h_i, V_i) ($i = 1, \dots, \nu$) uma família de cartas locais de Γ e seja α_i a família de partições da unidade associada a $V_i \cap \Gamma$. Então, toda função u , definida sobre Γ pode ser escrita como:

$$u = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i u.$$

As funções $h_i^* u(x) = v(h_i(x))$ estão definidas sobre um quadrado Q_0 . Então, definimos:

$$h_i^* u(x) = \begin{cases} u(h_i(x)), & \text{em } Q_0 \\ 0, & \text{fora de } Q_0 \end{cases}$$

Definimos, então o espaço:

$$W^{s,p}(\Gamma) = \{u \mid h_i^*(\alpha_i u) \in W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1}), \forall j = 1, \dots, \nu\}$$

O espaço acima é um espaço de Banach, quando munido da norma:

$$|u|_{W^{s,p}(\Gamma)} = \sum_{i=1}^n |h_i^*(\alpha_i u)|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Seja Ω um aberto de classe C^m . Definimos os espaço:

$$W^{s,p}(\Omega)\{w|_{\Omega} \mid w \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)\},$$

o qual munido da norma

$$\|w\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \mid v = w \text{ em } \Omega\}$$

é um espaço de Banach.

Temos o seguinte resultado de densidade.

Teorema 3.11.4. *Sejam $s = m + \sigma$, sendo m um inteiro e $0 < \sigma < 1$, e Ω um aberto de classe C^{m+1} . Então, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{s,p}(\Omega)$.*

Agora estamos em ponto para enunciar o teorema do traço, vale resaltar que embora a versão apresentada seja para abertos limitados do \mathbb{R}^n , a mesma pode ser estendida para abertos limitados em uma direção.

Teorema 3.11.5 (Teorema do Traço). *Seja γ a aplicação*

$$\gamma : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} \mathcal{D}(\Omega)$$

dada por

$$\gamma(\varphi) = (\gamma_0(\varphi), \gamma_1(\varphi), \dots, \gamma_{m-1}(\varphi)) = (\varphi|_{\Omega}, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\Omega}, \dots, \frac{\partial^{m-1} \varphi}{\partial \nu^{m-1}}|_{\Omega}).$$

Então, Γ admite uma extensão contínua:

$$\gamma : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\Gamma).$$

Ou seja existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{m-1} |\gamma_k(w)|_{W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \leq C \|w\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

para toda função $w \in W^{m,p}(\Omega)$.

Corolário 3.11.3. *Seja f uma função tal que:*

$$f \in L^p(0, +\infty; W^{1,p}(\Omega)),$$

$$f' \in L^p(0, +\infty; L^p(\Omega)).$$

Então:

$$f \in C(0, +\infty; W^{1-\frac{1}{p}, p}(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; W^{1-\frac{1}{p}, p}(\Omega))$$

Capítulo 4

O Sistema

4.1 Considerações iniciais

O objetivo deste trabalho é estudar o seguinte sistema de equações diferenciais em um domínio tempo-dependente:

$$\begin{cases} \rho_1(y)u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = f, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2(y)v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = g, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ u = v = 0, & \text{em } \Gamma_0(t) \quad (\text{Condição de Dirichlet}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, & \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{Condição de Robin}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Sendo $\tilde{Q}_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(t) \times \{t\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\partial\Omega(t) = \Gamma_0(t) \cup \Gamma_1$ e $\rho_1, \rho_2 \geq d > 0$. Como se pode observar a fronteira de cada $\Omega(t)$ está partida em $\Gamma_0(t)$ (parte móvel) e Γ_1 (parte fixa).

Seja $\Sigma' = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_0(t) \times \{t\}$ e assumiremos que Σ' se trata de uma hipersuperfície n -dimensional suave.

Definição 4.1.1 (time-like). *Tomando $(y, t) \in \Sigma'$, denotando por $v(y, t) = (v_y, v_t)$ a normal exterior a Σ' no ponto (y, t) . A superfície Σ' é "time-like", se:*

$$|v_t| < |v_y|, \forall (y, t) \in \Sigma' \quad (4.2)$$

Vamos supor que existem $\Omega_0(t)$ e Ω tais que:

$$\partial\Omega_0(t) = \Gamma_0(t); \quad (4.3)$$

$$\partial\Omega = \Gamma_1; \quad (4.4)$$

$$\Omega(t) = \Omega - \bar{\Omega}_0(t). \quad (4.5)$$

Tomando $\Sigma = \Gamma_1 \times \{t\}$, acrescentaremos as hipóteses

$$d(\Sigma', \Sigma) > 0 \quad (4.6)$$

$$\overline{\Omega_0(t)} \cap \Gamma_1 = \emptyset \quad (4.7)$$

Um modelo geométrico de domínio "time-like", nestas condições, pode ser observado no trabalho de Cooper-Bardos [1] e ilustrado na figura (4.1).

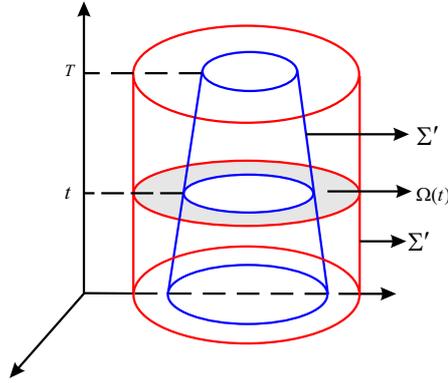


Figura 4.1 Modelo para o domínio \tilde{Q}_T

O lema a seguir estabelece as condições necessárias para definir os espaços de Sobolev tempo-dependentes nos quais trabalharemos.

Lema 4.1.1. *Fixado $T > 0$, seja $t \in [0, T]$. Então, existem uma constante $\alpha(T) > 0$, um intervalo $[t_1, t_2]$ contendo t , com $t_2 - t_1 = \alpha(T)$ e um domínio aberto $O_t \neq \emptyset$ tais que*

$$O_t \subset \bigcap_{t_1 \leq \tau \leq t_2} \Omega_0(\tau).$$

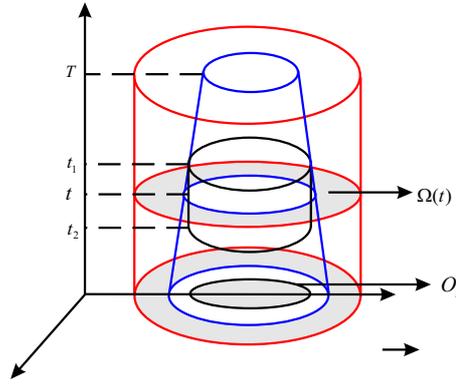
Demonstração

Seja α um número de Lebesgue para o compacto $[0, T]$. Dado $t \in [0, T]$, então t pertence a um intervalo aberto $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ com $t_2 - t_1 = \alpha$. Como $[t_1, t_2]$ é compacto a intersecção $\bigcap_{t_1 \leq \tau \leq t_2} \Omega_0(\tau)$ é aberta e não vazia. Assim basta tomar O_t aberto em $\bigcap_{t_1 \leq \tau \leq t_2} \Omega_0(\tau)$.

Intuitivamente, o lema nos informa que o domínio \tilde{Q}_T comporta um cilindro de altura α .

De posse desse lema é possível obter a desigualdade de Poincaré-Friedrichs tempo-dependente

$$|v|_{L^2(\Omega_0(t))} \leq \left[\int_{\Omega(t)} \|\nabla v\|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

Figura 4.2 Cilindro de altura α

E assim definir nos espaços de Sobolev tempo-dependentes $H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t)) = \{v \in H^1(\Omega(t)) \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_0(t)\}$ a sua respectiva norma

$$\left[\int_{\Omega(t)} \|\nabla v\|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

O espaço $H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))$ estende-se naturalmente e de forma contínua a $H^1(\Omega)$, basta por $v = 0$ no interior de $\Omega_0(t)$, $\forall v \in H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))$.

Defini-se então os espaços de Hilbert:

$$L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))); \quad (4.10)$$

$$L^2(0, T; L^2(\Omega(t))). \quad (4.11)$$

e suas respectivas normas:

$$\left(\int_0^T \int_{\Omega(t)} \|\nabla v\|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (4.12)$$

$$\left(\int_0^T \int_{\Omega(t)} |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.13)$$

4.2 Formulação Fraca do Problema

A formulação fraca do sistema, consiste em acoplar dados iniciais. Considere, então o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = f, \text{ em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2 v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = g, \text{ em } \tilde{Q}_T \\ u = v = 0, \text{ em } \Sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \text{ em } \Sigma \\ u(y, 0) = u_0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) = u_1 \\ v(y, 0) = v_0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = v_1 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

sendo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0, v_0 \in H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0)); \\ u_1, v_1 \in L^2(\Omega(0)); \\ \rho_1, \rho_2 \in W^{1,\infty}(\Omega(t)) \text{ e } \rho_1, \rho_2 > d > 0; \\ f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))). \end{array} \right. \quad (4.15)$$

4.3 Definição de Solução do Problema em Domínio Móvel

Para o estabelecimento do conceito de solução fraca, trabalharemos com a primeira equação do sistema (4.14), sendo os cálculos para a segunda equação do sistema (4.14) análogos.

Seja $\varphi \in H_{\Gamma_0(t)}(\Omega(t))$, com $\varphi(T) = 0$. Multiplicando a primeira equação de 4.14 por φ e integrando de 0 a T temos:

$$\int_0^T \rho_1 u_{tt} \varphi dt - \int_0^T \Delta u \varphi dt + \alpha \int_0^T (u - v) \varphi dt = \int_0^T f \varphi dt.$$

Integrando por partes,

$$-u_t \rho_1 \varphi|_0^T + \int_0^T u_t (\rho_1 \varphi)_t dt - \int_0^T \Delta u \varphi dt + \alpha \int_0^T (u - v) \varphi dt = \int_0^T f \varphi.$$

Como $\varphi(T) = 0$, $u_t(0) = u_1$,

$$u_1 \rho_1(0) \varphi(0) + \int_0^T u_t (\rho_1 \varphi)_t dt - \int_0^T \Delta u \varphi dt + \alpha \int_0^T (u - v) \varphi dt = \int_0^T f \varphi dt.$$

Integrando em $\Omega(s)$ e aplicando o teorema de Fubinni,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} u_1 \rho_1(0) \varphi(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t (\rho_1 \varphi)_t ds dt - \int_0^T \int_{\Omega(s)} \Delta u \varphi ds dt \\ & + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f \varphi ds dt. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Grenn, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} u_1 \rho_1(0) \varphi(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t (\rho_1 \varphi)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla u \nabla \varphi ds dt \\ & - \int_0^T \int_{\partial \Omega(s)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi ds dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f \varphi ds dt. \end{aligned}$$

Como $\partial \Omega(s) = \Gamma_0(s) \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0(s) \cap \Gamma_1 = \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} u_1 \rho_1(0) \varphi(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t (\rho_1 \varphi)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla u \nabla \varphi ds dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi d\sigma dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_0(\sigma)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi d\sigma dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f \varphi ds dt. \end{aligned}$$

Mas $u = 0$ em $\Gamma_0(t)$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t}$ em Γ . Então,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} u_1 \rho_1(0) \varphi(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t (\rho_1 \varphi)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla u \nabla \varphi ds dt \\ & + \frac{1}{\zeta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi d\sigma dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f \varphi ds dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

De maneira análoga, tem-se uma expressão semelhante à equação (4.16), para a segunda equação do sistema (4.14):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(s)} v_1 \rho_2(0) \varphi(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} v_t (\rho_2 \varphi)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla v \nabla \varphi ds dt \\ & + \frac{1}{\zeta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi d\sigma dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} g \varphi ds dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Defini-se a solução do problema fraco (4.14) como sendo o par ordenado de funções (u, v) tal que:

$$\begin{cases} (u, \frac{\partial u}{\partial t}) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))) \times L^2(0, T; L^2(\Omega(t))), & u(y, 0) = u_0 \\ (v, \frac{\partial v}{\partial t}) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))) \times L^2(0, T; L^2(\Omega(t))), & v(y, 0) = u_0 \end{cases} \quad (4.18)$$

e verifica o sistema abaixo

$$\begin{cases} \int_{\Omega(s)} u_1 \rho_1(0) \varphi_1(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} u_t (\rho_1 \varphi_1)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla u \nabla \varphi_1 ds dt \\ + \frac{1}{\zeta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi_1 d\sigma dt + \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi_1 ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} f \varphi_1 ds dt. \\ \int_{\Omega(s)} v_1 \rho_2(0) \varphi_2(0) ds + \int_0^T \int_{\Omega(s)} v_t (\rho_2 \varphi_2)_t ds dt + \int_0^T \int_{\Omega(s)} \nabla v \nabla \varphi_2 ds dt \\ + \frac{1}{\zeta} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi_2 d\sigma dt - \alpha \int_0^T \int_{\Omega(s)} (u - v) \varphi_2 ds dt = \int_0^T \int_{\Omega(s)} g \varphi_2 ds dt. \end{cases} \quad (4.19)$$

para quaisquer funções $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t)))$ tais que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t)))$ e $\varphi_1(T) = \varphi_2(T) = 0$.

4.4 Existência do Difeomorfismo Global

Para resolver o sistema, vamos demonstrar a existência de um difeomorfismo que transformará o domínio tempo-dependente (não-cilíndrico) em um domínio fixo (cilíndrico). Resolveremos o sistema no domínio fixo e resgataremos a solução para o domínio móvel através do difeomorfismo.

As técnicas necessárias a demonstração do difeomorfismo foram resumidas no capítulo 1.

Definição 4.4.1. *Um difeomorfismo $\Psi : \widetilde{Q}_T \rightarrow \overline{Q}_T$, dado por $\Psi(y, t) = (\psi(y, t), t) = (\psi_1(y, t), \dots, \psi_n(y, t), t)$ é dito hiperbólico, quando a matriz abaixo é simétrica positiva.*

$$A = \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial y} \right)^T - \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial t} \right)^T. \quad (4.20)$$

Observe que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \end{bmatrix}^T$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial t}$$

Teorema 4.4.1. *Se Σ' é uma hipersfície "time-like". Então, Σ' é o traço de uma isotopia $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$, com $\max_{\Gamma_0 \times [0, T]} \left\| \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right\| < 1$.*

Demonstração

A demonstração consiste em induzir uma isotopia através de um campo de vetores em Σ' . A existência do campo de vetores oculta-se na geometria de Σ , isto é, no fato de ser "time-like".

Seja $Z = (-v_t v_y, |v_y|^2)$, então o campo $X = Z/|v_y|^2 = (Y, 1)$ está bem definido e possui a componente Y estritamente menor que um. Introduzindo a notação $V_{t_0} = \Gamma_0(t_0) \times t_0$, vemos que X é um campo de vetores não-nulo em $\partial\Sigma'$, sendo $\partial\Sigma' = V_0 \cup V_T$, adicionado os pontos interiores a V_0 e exteriores a V_T e aplicando o teorema (2.2.1), temos que existe um difeomorfismo ϕ tal que

$$\phi : \Gamma_0(0) \times [0, T] \rightarrow \Sigma'$$

dado por $\phi(x, t) = (\phi_t(x), t)$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t, t) = \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}, 1 \right) = (X, 1) \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = Y \circ \phi_t \quad (4.22)$$

Geometricamente o teorema (4.4.1) estabelece uma deformação difeomórfica entre Σ' em $\Gamma_0(0) \times [0, T]$. O lema abaixo estende o campo de vetores de Σ' , de forma que poderemos estender a deformação ϕ .

O próximo passo é estender o difeomorfismo em Σ' a todo domínio \tilde{Q}_T . Isso será feito via o lema abaixo.

Lema 4.4.1. *Existe um campo de vetores em \tilde{Y} definido em $\tilde{\Omega}$ tal que:*

- $\tilde{Y}|_{\Sigma'} = Y$;
- $\tilde{Y} \equiv 0$, em numa vizinhança de Σ' ;
- $\max_{\tilde{Q}_T} \|\tilde{Y}\| = \max_{\Sigma'} \|Y\|$.

Demonstração

Seja (V, θ) uma vizinhança tubular de Σ' , isto é, $\theta : \Sigma' \times]-1, 1[\rightarrow V$ é um homeomorfismo e $\Sigma' \times \{0\}$ é homeomorfo a Σ' .

Já que $\text{dist}(\Sigma', \Sigma) > 0$, podemos supor que $V \cap \Sigma = \emptyset$. Definimos, então \tilde{Y} , por

$$\begin{cases} \tilde{Y} = (\theta(x, u)) = \rho(|u|)Y(x, t), & \text{em } V \\ \tilde{Y} = 0, & \text{fora de } V \end{cases} \quad (4.23)$$

sendo ρ uma função "bump" com suporte compacto em $] -1, 1[$ e $\max_{u \in]-1, 1[} = \rho(0)$. Claramente, \tilde{Y} é a extensão de Y .

De posse do lema acima, podemos estender o difeomorfismo que estava definido apenas em Σ' a um difeomorfismo definido em \tilde{Q}_T . Mais uma vez utilizaremos o conceito de isotopia.

Teorema 4.4.2. *Existe um difeomorfismo Φ , que preserva a variável tempo, tal que:*

- $\Phi = Id$, em $\bar{\Omega}_0 \times [0, T]$ e numa vizinhança de Σ ;
- $\|\partial\tilde{\phi}(x, t)/\partial t\| \leq \beta < 1, \forall (x, t) \in \Omega(0) \times [0, T]$;
- Ψ é hiperbólico, sendo $\Psi = \Phi^{-1}$.

Demonstração

Pelo lema 4.4.1, existe um campo de vetores não-nulo, \tilde{Y} , em $\bar{\Omega}$. Pelo teorema (2.2.1) existe uma difeotopia $\tilde{\phi} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \bar{\Omega}$, tal que:

- $(\partial\tilde{\phi}/\partial t)(x, t) = \tilde{Y}(\tilde{\phi}(x, t), t)$;
- $\tilde{\phi}(\cdot, 0) = Id_M$;
- $\tilde{\phi} = Id_M$, numa vizinhança de Γ_1 , com $\tilde{Y} = 0$.

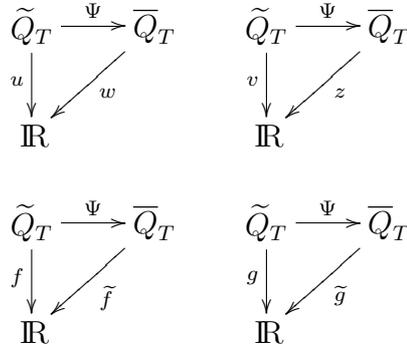
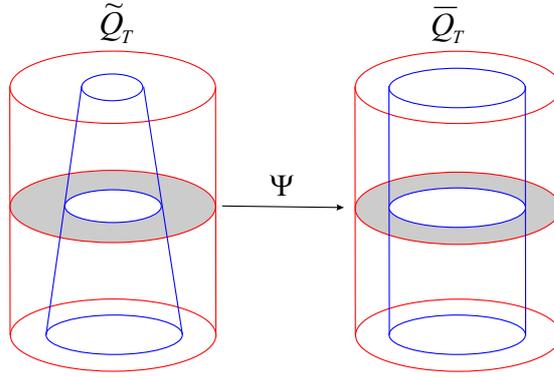
Tomando $\Phi = \tilde{\phi}|_{\bar{Q}_T}$ e $\Psi = \Phi^{-1}$ o teorema fica demonstrado.

De forma a ilustrar as idéias da deformação e com base no modelo geométrico para o domínio \tilde{Q}_T , a figura abaixo sintetiza como se processa a mudança de variável.

4.5 Solução no Domínio Cilíndrico

De posse do difeomorfismo $\Psi : \tilde{Q}_T \rightarrow \bar{Q}_T$, dado por $\Psi(y, t) = (\psi(y, t), t) = (\psi_1(y, t), \dots, \psi_n(y, t), t) = (x, t)$, vamos fazer nas equações do sistema (4.14) a mudança de variável $(x, t) = \Psi(y, t)$.

Sejam $w(x, t) = u \circ \Psi^{-1}(y, t)$, $z(x, t) = w \circ \Psi^{-1}(y, t)$, $\tilde{f}(x, t) = f \circ \Psi^{-1}(y, t)$, $\tilde{g}(x, t) = g \circ \Psi^{-1}(y, t)$, $\sigma_1(x, t) = \rho_1 \circ \Psi^{-1}(y, t)$ e $\sigma_2(x, t) = \rho_2 \circ \Psi^{-1}(y, t)$



4.5.1 Mudança de Variável nas Equações

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(w \circ \Psi)}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + w_t \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial w_t}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{\partial w_t}{\partial t} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + w_{tt} \\ &= w_{tt} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y_k} &= \frac{\partial w \circ \Psi}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k}.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Delta u &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2}.\end{aligned}$$

Assim $\rho_1 u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = f$, definida em \tilde{Q}_T , se reescreve em Q_T da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \left(w_{tt} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i^2}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \\ - \left(\sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} + \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y_k^2} \right) + \alpha(u - v) = \tilde{f}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Agora, vamos reagrupar a equação (4.24) com relação aos termos w_{tt} , w_t e w . Logo,

$$\begin{aligned}\sigma_1 w_{tt} + 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right)}_{\tilde{a}_{ij}} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) + \alpha(w - z) = \tilde{f}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Observe que

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (4.26)$$

Substituindo a equação (4.26) na equação (4.25),

$$\begin{aligned} \sigma_1 w_{tt} + 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) + \alpha(w - z) = \tilde{f}. \end{aligned}$$

Donde podemos concluir:

$$\begin{aligned} \sigma_1 w_{tt} + 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) + \alpha(w - z) = \tilde{f}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Definindo os operadores:

$$\tilde{a}_1(x, t, D) = 2\sigma_1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x, t); \quad (4.28)$$

$$\tilde{a}_2(x, t, D) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.29)$$

Sendo:

$$h_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \quad (4.30)$$

$$\tilde{b}_i(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}. \quad (4.31)$$

De forma que a equação (4.27) toma o seguinte aspecto:

$$\sigma_1 w_{tt} + \tilde{a}_1(x, t, D)w_t + \tilde{a}_2(x, t, D)w + \alpha(w - z) = \tilde{f}, \text{ em } Q_T. \quad (4.32)$$

De maneira análoga, temos para a segunda equação do sistema (4.14)

$$\sigma_2 z_{tt} + \hat{a}_1(x, t, D)z_t + \hat{a}_2(x, t, D)z - \alpha(w - z) = \tilde{g}, \text{ em } Q_T. \quad (4.33)$$

Para $\tilde{a}_1(x, t, D)$ e $\tilde{a}_2(x, t, D)$ definidos como abaixo:

$$\hat{a}_1(x, t, D) = 2\sigma_2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} h_i(x, t); \quad (4.34)$$

$$\hat{a}_2(x, t, D) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\hat{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (4.35)$$

Sendo:

$$h_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \quad (4.36)$$

$$\hat{b}_i(x, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i^2}{\partial y_k^2} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{a}_{ij}}{\partial x_j} + \sigma_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial t}; \quad (4.37)$$

$$\hat{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_k} - \sigma_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_j}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Devido às propriedades do difeomorfismo Ψ e à positividade das funções σ_1 e σ_2 , \tilde{a}_2 e \hat{a}_2 são operadores elípticos satisfazendo às seguintes propriedades:

1. $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ e $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$;
2. $\tilde{a}_{ij} = \sigma_1$ e $\hat{a}_{ij} = \sigma_2$, em uma vizinhança de Σ ;
3. existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ e $\sum_{i,j=1}^n \hat{a}_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$, para todo $(x, t) \in \bar{Q}_T$.

4.5.2 Mudança de Variável nas Condições de Fronteira

Seja $v_A = Av$. Então,

$$\frac{\partial w}{\partial v_A} = \langle \Delta w, v_A \rangle = \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} v_i \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad \text{em } \Gamma_0(0) \cup \Gamma_1$$

Pela segunda propriedade de \tilde{a}_{ij} , temos que

$$\frac{\partial w}{\partial v_A} = \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.39)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial z}{\partial v_A} = \sigma_2 \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.40)$$

Portanto, as condições

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad \text{em } \Sigma \\ \frac{\partial v}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial v}{\partial t} &= 0, \quad \text{em } \Sigma \end{aligned}$$

são ambas transformadas em

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial w}{\partial t} &= 0, \quad \text{em } \Sigma \\ \sigma_2 \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial z}{\partial t} &= 0, \quad \text{em } \Sigma \end{aligned}$$

respectivamente.

Já as condições $u = v = 0$ em Σ' são transformadas em $w = z = 0$ em $\Gamma_0(0) \times [0, T]$.

Então o sistema 4.14, definido em \tilde{Q}_T , se reescreve, via o difeomorfismo Ψ , da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 w_{tt} + \tilde{a}_1(x, t, D)w_t + \tilde{a}_2(x, t, D)w + \alpha(w - z) = \tilde{f}, \quad \text{em } Q_T \\ \sigma_2 z_{tt} + \tilde{a}_1(x, t, D)z_t + \tilde{a}_2(x, t, D)z - \alpha(w - z) = \tilde{g}, \quad \text{em } Q_T \\ \\ w = z = 0 \quad \text{em } \Sigma' \\ \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial w}{\partial t} = \sigma_2 \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad \text{em } \Sigma \\ \\ w(x, 0) = w_0 \text{ e } \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1 \\ z(x, 0) = z_0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1 \end{array} \right. \quad (4.41)$$

4.5.3 Definição de Solução do Problema em Domínio Fixo

Os cálculos do conceito de solução serão feitos sobre a primeira equação do sistema (4.41).

Denotando $V := H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0))$ e $H := L^2(\Omega(0))$.

Seja $\varphi \in V$. Multiplicando a primeira equação do sistema (4.41) por φ e integrando em $\Omega(0)$, temos:

$$\int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi + \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_1(x, t, D) w_t \varphi + \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_2(x, t, D) w \varphi + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi.$$

Substituindo os operadores \tilde{a}_1 e \tilde{a}_2 ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi + 2 \int_{\Omega(0)} \sigma_2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_t}{\partial x_i} h_i \varphi ds - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_j} (\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i}) \varphi ds \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{b}_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \varphi ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi ds. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Gauss e levando em consideração que $\partial\Omega(0) = \Gamma_0(0) \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0(0) \cap \Gamma_1 = \emptyset$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \sigma_1 \varphi}{\partial x_i} w_t ds + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_0(0)} \sigma_1 h_i \varphi w_t v_i d\theta \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \sigma_2 h_i \varphi w_t v_i d\theta + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_0(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \varphi v_j d\theta \\ & - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \varphi \eta_j d\theta + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - x) \varphi ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi ds. \end{aligned}$$

Mas, $w = 0$ em $\Gamma_0(0)$; sendo $\Psi|_{\Sigma} \equiv Id$, então $h_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Mais ainda, $\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} v_i \frac{\partial w}{\partial x_j} = \sigma_1 \frac{\partial w}{\partial v}$, em Γ_1 . Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi ds - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \varphi}{\partial x_i} w_t ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi d\theta \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - x) \varphi ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

De forma análoga, para a segunda equação do sistema (4.41), temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{tt} \varphi ds - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \sigma_2 \varphi}{\partial x_i} z_t ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial z}{\partial t} \varphi d\theta \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - x) \varphi ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi ds. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Observação 4.5.1. Denotaremos por

$$\begin{aligned}\tilde{a}(t, w, \varphi_1) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \\ \hat{a}(t, z, \varphi_2) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \\ \tilde{a}'(t, w, \varphi_1) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}'_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \\ \hat{a}'(t, z, \varphi_2) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}'_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

e assim por diante. As funções \tilde{a}_{ij} , \hat{a}_{ij} são funções C^∞ definidas no compacto \overline{Q}_T . Isso faz com que as formas bilineares \tilde{a}_{ij} , \hat{a}_{ij} , \tilde{a}'_{ij} , \hat{a}'_{ij} , etc, sejam contínuas e coercivas. Vamos denotar as constantes de continuidade e coercividade por a e A , a' e A' , respectivamente.

Defini-se a solução do sistema (4.41) como sendo o par ordenado de funções (w, z) tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (w, \frac{\partial w}{\partial t}) \in C(0, T, V) \times C(0, T, V); \\ (z, \frac{\partial z}{\partial t}) \in C(0, T, V) \times V(0, T, V); \\ w(x, 0) = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1; \\ z(x, 0) = z_0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = z_1. \end{array} \right. \quad (4.44)$$

e satisfaz ao sistema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi_1 ds - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \varphi_1}{\partial x_i} w_t ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi_1 d\theta + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1 ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - x) \varphi_1 ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi_1 ds; \\ \int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{tt} \varphi_2 ds - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i \sigma_2 \varphi_2}{\partial x_i} z_t ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} \\ \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial z}{\partial t} \varphi_2 d\theta + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2 ds + \alpha \int_{\Omega(0)} (z - x) \varphi_2 ds = \int_{\Omega(0)} \tilde{g} \varphi_2 ds. \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Para quaisquer funções $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0, T; V)$

4.6 Teorema de Existência e Unicidade de Solução Fraca

Uma vez estabelecido o conceito de solução, estamos em condições de enunciar o principal resultado desta monografia.

Teorema 4.6.1. *Sejam $(w_0, w_1), (z_0, z_1)$ pertencentes ao espaço $V \times H$ e \tilde{f}, \tilde{g} pertencentes ao espaço $L^2(0, T; H)$. Então, o sistema 4.41 admite solução única (w, z) tal que:*

$$\begin{aligned} (w, \frac{\partial w}{\partial t}) &\in C(0, T; V) \times C(0, T; H); \\ (z, \frac{\partial z}{\partial t}) &\in C(0, T; V) \times C(0, T; H); \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{\Gamma_1}, \frac{\partial z}{\partial t}|_{\Gamma_1} &\in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \end{aligned}$$

Demonstração

Vamos resolver o sistema pelo método de faedo-Galerkin. Para efeitos de organização dividiremos a demonstração nas seguintes subseções:

- O problema aproximado;
- Primeira Estimativa à Priori;
- Segunda Estimativa à Priori;
- Passagem ao Limite;
- Verificação dos dados iniciais;
- Unicidade.

4.6.1 O Problema Aproximado

Seja o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi_1 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_1) w_t + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \\
\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} w_t \varphi_1 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1 + \alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi_1 = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi_1 \\
\int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{tt} \varphi_2 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_2) z_t + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \\
\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_2} z_t \varphi_2 + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2 - \alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi_2 = \int_{\Omega(0)} \tilde{g} \varphi_2 \\
w(x, 0) = w_0, \quad z(x, 0) = z_0 \\
w_t(x, 0) = w_1, \quad z_t(x, 0) = z_1
\end{array} \right. \quad (4.46)$$

Com $\varphi_1, \varphi_2 \in V$.

Seja $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots\}$ uma base ordenada e ortonormal de $V = H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0))$, tal que cada subspaço $V^m = [\omega_1, \dots, \omega_m]$ é denso em V . Sejam as funções aproximadas

$$\begin{aligned}
w^m(x, t) &= \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \omega_l(x), \\
z^m(x, t) &= \sum_{l=1}^m \beta_l(t) \omega_l(x)
\end{aligned}$$

ambas no espaço $V^m = [\omega_1, \dots, \omega_m]$.

Agora, considerando o problema aproximado abaixo, quer-se encontrar funções $w^m, z^m \in V^m$, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt}^m \varphi_1 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_1) w_t^m + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} w_t^m \varphi_1 \\
+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1 + \alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m) \varphi_1 = \int_{\Omega(0)} \tilde{f} \varphi_1 \\
\int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{tt}^m \varphi_2 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_2) z_t^m + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_2} z_t^m \varphi_2 \\
+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2 - \alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m) \varphi_2 = \int_{\Omega(0)} \tilde{g} \varphi_2 \\
w^m(x, 0) = w_0^m, \quad z^m(x, 0) = z_0^m \\
w_t^m(x, 0) = w_1^m, \quad z_t^m(x, 0) = z_1^m
\end{array} \right. \quad (4.47)$$

Para quaisquer $\varphi_1, \varphi_2 \in V^m$ com

$$w^m(x, 0) \in V^m \text{ e } \lim_{m \rightarrow \infty} w^m(x, 0) = w(x, 0); \quad (4.48)$$

$$z^m(x, 0) \in V^m \text{ e } \lim_{m \rightarrow \infty} z^m(x, 0) = z(x, 0); \quad (4.49)$$

$$w_t^m(x, 0) \in H^m \text{ e } \lim_{m \rightarrow \infty} w_t^m(x, 0) = w_t(x, 0); \quad (4.50)$$

$$z_t^m(x, 0) \in H^m \text{ e } \lim_{m \rightarrow \infty} z_t^m(x, 0) = z_t(x, 0). \quad (4.51)$$

O sistema se encontra nas condições do teorema de existência e unicidade. Logo podemos concluir a existência de uma solução local (w^m, z^m) , definida no intervalo $[0, t_m]$.

4.6.2 Primeira Estimativa à Priori

Para primeira estimativa à priori vamos fazer $\varphi_1 = w_t^m$, $\varphi_2 = z_t^m$ e somar as duas equações do sistema (4.47). Temos, então:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega(0)} (\sigma_1 w_{tt}^m w_t^m + \sigma_2 z_{tt}^m z_t^m)}_I - 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right)}_{II} + \\ & \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i w_t^m + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_t^m \right)}_{III} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_j} + \hat{a}_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_j} \right)}_{IV} + \\ & \underbrace{\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_1} (w_t^m)^2 + \frac{1}{\sigma_2} (z_t^m)^2 \right)}_V + \underbrace{\alpha \int_{\Omega(0)} ((w^m - z^m)(w_t^m - z_t^m))}_{VI} = \\ & \underbrace{\int_{\Omega(0)} (\tilde{f} w_t^m + \tilde{g} z_t^m)}_{VII}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Vamos analisar os termos da equação (4.52) separadamente.

Análise de I: Facilmente vê-se que:

$$\int_{\Omega(0)} (\sigma_1 w_{tt}^m w_t^m + \sigma_2 z_{tt}^m z_t^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1} w_t^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2} z_t^m|_H^2) \quad (4.53)$$

Análise de II: Aplicando a regra do produto temos:

$$-2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right) = -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial (w_t^m)^2}{\partial x_i} + \frac{\partial (z_t^m)^2}{\partial x_i} \right).$$

Aplicando a fórmula de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right) &= -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial(\Omega(0))} h_i ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \eta_i. \end{aligned}$$

Sendo cada η_i um vetor normal unitário, $\forall i = 1, \dots, n$. Como $\partial(\Omega(0)) = \Gamma_1 \cup \Gamma_0(0)$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_0(0) = \emptyset$. Como estamos no espaço aproximado V^m , então w_t^m e z_t^m são ambas nulas em $\Gamma_0(0)$. Portanto a última expressão acima toma o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} h_i ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \eta_i \end{aligned}$$

As funções h_i são C^∞ no compacto \bar{Q}_T , portanto h_i e $\frac{\partial h_i}{\partial x_i}$ são limitadas por constantes positivas, $\forall i = 1, \dots, n$. Tomando por c a maior delas. Temos:

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right) &\leq c \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2) \\ &- c \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} ((w_t^m)^2 + (z_t^m)^2). \end{aligned}$$

Donde concluímos, pelas desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental, que:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_t^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_t^m) z_t^m \right) \leq \frac{c}{2} \left(|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right). \quad (4.54)$$

Análise de III: Para a expressão abaixo, observa-se que os termos \tilde{b}_i e \hat{b}_i são limitados, pois se tratam de funções C^∞ no compacto \bar{Q}_T . Tomando por \bar{c} a maior das constantes que limitam \tilde{b}_i e \hat{b}_i , temos:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i w_t^m + \Omega(0) \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_t^m \right) \leq \bar{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x_i} w_t^m + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} z_t^m \right)$$

Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental vemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i w_t^m + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_t^m \right) &\leq \frac{\bar{c}}{2} \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \right|_H^2 + |w_t^m|_H^2 + \left| \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \right|_H^2 + |z_t^m|_H^2 \right) \\ &\leq \frac{\bar{c}}{2} (|w^m|_V + |z^m|_V + |w_t^m|_H + |z_t^m|_H) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Análise de IV: Devido às propriedades dos coeficientes \tilde{a}_{ij} e \hat{a}_{ij} , as expressões de que aparecem em IV são formas bilineares contínuas e coercivas. Vamos denotar por

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t, w^m, w_t^m) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_j} \\ \hat{a}(t, z^m, z_t^m) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{a}(t, w^m, w_t^m) &= 2\tilde{a}(t, w^m, w_t^m) + \tilde{a}'(t, w^m, w^m), \\ \frac{d}{dt} \hat{a}(t, z^m, z_t^m) &= 2\hat{a}(t, z^m, z_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z^m), \end{aligned}$$

$$\text{sendo } \tilde{a}'(t, w^m, w^m) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}'_{ij} \left(\frac{\partial w^m}{\partial x_i} \right)^2 \text{ e } \hat{a}'(t, z^m, z^m) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}'_{ij} \left(\frac{\partial z^m}{\partial x_i} \right)^2.$$

Portanto a expressão IV toma o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_j} + \hat{a}_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_j} \right) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) \\ - &\frac{1}{2} (\tilde{a}'(t, w^m, w^m) + \hat{a}'(t, z^m, z^m)) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Análise de V: Temos, pelas desigualdade de Cauchy-Schwartz e fundamental, que:

$$\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} \left((w_t^m)^2 + \frac{1}{\sigma_2} (z_t^m)^2 \right) = \frac{1}{\zeta} \left(\left| \frac{w_t}{\sqrt{\sigma_1}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \left| \frac{z_t}{\sqrt{\sigma_2}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right) \quad (4.57)$$

Análise de VI: Temos pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz, fundamental e triangular:

$$\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m)(w_t^m - z_t^m) \leq \frac{\alpha}{2} (|w^m|_H^2 + |z^m|_H^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2).$$

Como o espaço V está continuamente imerso em H , existe uma constante positiva k tal que $|\cdot|_H^2 \leq k|\cdot|_V^2$. Portanto, para a desigualdade logo acima, temos:

$$\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m)(w_t^m - z_t^m) \leq \frac{\alpha}{2} (k|w^m|_V^2 + k|z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2). \quad (4.58)$$

Análise de VII: Aplicando as desigualdades fundamental e Cauchy-Schwartz, temos:

$$\int_{\Omega(0)} (\tilde{f}w_t^m + \tilde{g}z_t^m) \leq \frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) \quad (4.59)$$

Substituindo as expressões (4.53), (4.54), (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) a equação aproximada (4.6.2), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1}w_t^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2}z_t^m|_H^2 + \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) \\ & \quad + \frac{1}{\zeta} (|\frac{w_t}{\sqrt{\sigma_1}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |\frac{z_t}{\sqrt{\sigma_2}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \leq \\ & \quad \frac{c}{2} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \\ & \quad + \frac{\bar{c}}{2} (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) + \\ & \quad \tilde{a}'(t, w^m, w^m) + \hat{a}'(t, z^m, z^m) \\ & \quad + \frac{\alpha}{2} (k|w^m|_V^2 + k|z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) \\ & \quad + \frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) \end{aligned} \quad (4.60)$$

As formas bilineares $\tilde{a}'(t, w^m, w^m)$ e $\hat{a}'(t, z^m, z^m)$ também são contínuas. Portanto existem constantes $\tilde{C}', \hat{C}' > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} \tilde{a}'(t, w^m, w^m) & \leq \tilde{C}' |w^m|_V^2, \\ \hat{a}'(t, z^m, z^m) & \leq \hat{C}' |z^m|_V^2. \end{aligned}$$

Tomando $\bar{C} = \max\{\tilde{C}', \hat{C}'\}$, a desigualdade (4.60) se transforma em:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1} w_t^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2} z_t^m|_H^2 + \\
& \quad \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) \\
& + \frac{1}{\zeta} (|\frac{w_t}{\sqrt{\sigma_1}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |\frac{z_t}{\sqrt{\sigma_2}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \leq \\
& \frac{c}{2} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \\
& + \frac{\bar{c}}{2} (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) + \\
& \quad \bar{C} |w^m|_V^2 + \bar{C} |z^m|_V^2 \\
& + \frac{\alpha}{2} (k |w^m|_V^2 + k |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) \\
& + \frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2)
\end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1} w_t^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2} z_t^m|_H^2 + \\
& \quad \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) \\
& + \frac{1}{\zeta} (|\frac{w_t}{\sqrt{\sigma_1}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |\frac{z_t}{\sqrt{\sigma_2}}|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \leq \\
& \quad \frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2) \\
& + \frac{c}{2} (|w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \\
& + (\frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2} + \bar{C}) (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2) \\
& + (\frac{c}{2} + \frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}) (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2)
\end{aligned}$$

Para as funções σ_1, σ_2 temos $d \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq D$, portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_2}} \leq \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Levando à ultima desigualdade logo acima, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1} w_t^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2} z_t^m|_H^2 + \\
& \quad \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) \\
& + \left(\frac{c - \zeta \sqrt{D}}{\zeta \sqrt{D}} \right) (|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \leq \\
& \quad \frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2) \\
& \quad + \left(\frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2} + \bar{C} \right) (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2) \\
& \quad + \left(\frac{c}{2} + \frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right) (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_V^2)
\end{aligned}$$

A constante c pode ser tomada suficientemente grande, de forma que:

$$c_1 := \frac{c - \zeta \sqrt{D}}{\zeta \sqrt{D}} > 0$$

Tomando $c_2 := \max\left\{\frac{1}{2} (|\tilde{f}|_H^2 + |\tilde{g}|_H^2), \frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2}, \frac{c}{2} + \frac{\bar{c}}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right\}$. Temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{d}}{2} \frac{d}{dt} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) + c_1 (|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \\
& \leq c_2 + (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{d}}{2} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + \tilde{a}(t, w^m, w^m) + \hat{a}(t, z^m, z^m)) + c_1 \int_0^t (|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2) dt \leq \\
& \quad c_3 + \int_0^t (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) dt.
\end{aligned}$$

Devido à continuidade das formas bilineares \tilde{a}, \hat{a} , temos que:

$$\begin{aligned}
& k|w^m|_V^2 \leq \tilde{a}(t, w^m, w^m); \\
& k|z^m|_V^2 \leq \hat{a}(t, z^m, z^m).
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{d}}{2} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + k|w^m|_V^2 + k|z^m|_V^2 + c_1 \int_0^t (|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2) dt) \leq \\ & |w^m(0)|_V^2 + |z^m(0)|_V^2 + |w_t^m(0)|_H^2 + |z_t^m(0)|_H^2 + c_3 + \int_0^t (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) dt. \end{aligned}$$

Devido a convergência dos dados iniciais $|w^m(0)|_V^2$, $|z^m(0)|_V^2$, $|w_t^m(0)|_H^2$, $|z_t^m(0)|_H^2$ são limitados. Levando em conta que $c_1 \int_0^t (|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{d}}{2} (|w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2 + k|w^m|_V^2 + k|z^m|_V^2) \leq \\ & c_4 + \int_0^t (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + |w_t^m|_H^2 + |z_t^m|_H^2) dt. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwal $|w_t^m|_H^2$, $|z_t^m|_H^2$, $|w^m|_V^2$, $|z^m|_V^2$ são limitados. Portanto as soluções locais podem ser extendidas ao intervalo $[0, T]$.

Facilmente, tem-se ainda que $|w_t|_{L^2(\Gamma_1)}$ e $|z_t|_{L^2(\Gamma_1)}$ são também limitadas.

Resumindo:

$$w^m \text{ e } z^m \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; V); \quad (4.61)$$

$$w_t^m \text{ e } z_t^m \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; H); \quad (4.62)$$

$$w_t^m \text{ e } z_t^m \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)). \quad (4.63)$$

Veremos adiante, na segunda estimativa, que a limitação de w_t^m e z_t^m em H , pode ser melhoradas para uma limitação em V .

4.6.3 Segunda Estimativa à Priori

Na segunda estimativa vamos fazer $\varphi_1, \varphi_2 = \omega_l$ ($l = 1, \dots, m$) e derivar em t . Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{ttt}^m \omega_l - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i \omega_l) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \omega_l) w_{tt}^m \right) + \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}'_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_j} + \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_1} w_{tt}^m \omega_l \right) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i \omega_l + \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i \omega_l \right) + \alpha \int_{\Omega(0)} (w_t^m - z_t^m) \omega_l = \int_{\Omega(0)} \tilde{f}' \omega_l \\ \\ \int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{ttt}^m \omega_l - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i \omega_l) z_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \omega_l) z_{tt}^m \right) + \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\hat{a}'_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_j} + \hat{a}_{ij} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_2} z_{tt}^m \omega_l \right) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i \omega_l + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}'_i \omega_l \right) - \alpha \int_{\Omega(0)} (w_t^m - z_t^m) \omega_l = \int_{\Omega(0)} \tilde{g}' \omega_l \end{array} \right.$$

Multiplicando cada equação do sistema por $\alpha_l''(t)$ e $\beta_l''(t)$, respectivamente e somando em l temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{ttt}^m w_{tt} - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i w_{tt}) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}) w_{tt}^m \right) + \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}'_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_{tt}}{\partial x_j} + \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_{tt}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_1} w_{tt}^m w_{tt} \right) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i w_{tt} + \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i w_{tt} \right) + \alpha \int_{\Omega(0)} (w_t^m - z_t^m) w_{tt} = \int_{\Omega(0)} \tilde{f}' w_{tt} \\ \\ \int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{ttt}^m z_{tt} - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i z_{tt}) z_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}) z_{tt}^m \right) + \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\hat{a}'_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_{tt}}{\partial x_j} + \hat{a}_{ij} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_{tt}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_2} z_{tt}^m z_{tt} \right) + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i z_{tt} + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}'_i z_{tt} \right) + \alpha \int_{\Omega(0)} (w_t^m - z_t^m) z_{tt} = \int_{\Omega(0)} \tilde{g}' z_{tt} \end{array} \right.$$

Somando as duas equações do sistema e agrupando, temos:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega(0)} (\sigma_1 w_{ttt}^m w_{tt} + \sigma_2 z_{ttt}^m z_{tt})}_{1} + \\
& \underbrace{-2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i w_{tt}) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i z_{tt}) z_t^m \right)}_{2} - \underbrace{2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right)}_{3} \\
& \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}'_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_{tt}^m}{\partial x_j} + \tilde{a}'_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_{tt}^m}{\partial x_j} \right)}_{4} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial w_{tt}}{\partial x_j} + \tilde{a}_{ij} \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \frac{\partial z_{tt}^m}{\partial x_j} \right)}_{5} \\
& \underbrace{\int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_1} w_{tt}^m w_t^m \frac{1}{\sigma_2} z_{tt}^m z_t^m \right)}_{6} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i z_{tt}^m + \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \hat{b}'_i w_{tt}^m + \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}'_i z_{tt}^m \right)}_{7} + \\
& \underbrace{\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m)(w_{tt}^m - z_{tt}^m)}_{8} = \underbrace{\int_{\Omega(0)} (\tilde{f}' w_{tt} + \tilde{g}' z_{tt})}_{9}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Agora vamos analisar cada termo da equação acima em separado.

Análise de 1: Facilmente vê-se que:

$$\int_{\Omega(0)} (\sigma_1 w_{ttt}^m w_{tt}^m + \sigma_2 z_{ttt}^m z_{tt}^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|\sqrt{\sigma_1} w_{tt}^m|_H^2 + |\sqrt{\sigma_2} z_{tt}^m|_H^2).$$

As funções σ_1 e σ_2 , satisfazem às desigualdades $d \leq \sigma_1, \sigma_2 \leq D$, de forma que $\sqrt{d} \leq \sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2} \leq \sqrt{D}$. Donde:

$$\frac{\sqrt{d}}{2} \frac{d}{dt} (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2) \leq \int_{\Omega(0)} (\sigma_1 w_{ttt}^m w_{tt}^m + \sigma_2 z_{ttt}^m z_{tt}^m). \tag{4.65}$$

Análise de 2: Pela fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i w_{tt}^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i z_{tt}^m) z_t^m \right) &= -2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} h'_i \left(w_{tt}^m \frac{\partial w_t}{\partial x_i} + z_{tt}^m \frac{\partial z_t}{\partial x_i} \right) - \\
&= 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} h'_i (w_{tt}^m w_t^m + z_{tt}^m z_t^m) \eta_i.
\end{aligned}$$

Em que cada η_i ($i = 1, \dots, n$) é um vetor normal unitário. Limitando as funções, conforme na primeira estimativa, por c e aplicando as desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental, temos:

$$-2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i w_{tt}^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i z_{tt}^m) z_t^m \right) \leq c \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(|w_{tt}^m|^2 + \left| \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \right|^2 + |z_{tt}^m|^2 + \left| \frac{\partial z_t}{\partial x_i} \right|^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} (w_{tt}^m w_t^m + z_{tt}^m z_t^m).$$

Donde concluimos que:

$$-2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i w_{tt}^m) w_t^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h'_i z_{tt}^m) z_t^m \right) \leq c (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) - \frac{d}{dt} (|w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2) \quad (4.66)$$

Análise de 3: Pela regra do produto, temos:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) = \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_i} (w_{tt}^m)^2 + h_i \frac{\partial w_{tt}^m}{\partial x_i} w_{tt}^m + \frac{\partial h_i}{\partial x_i} (z_{tt}^m)^2 + h_i \frac{\partial z_{tt}^m}{\partial x_i} z_{tt}^m \right) \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial w_{tt}^m}{\partial x_i} w_{tt}^m = \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{tt}^m)^2$ e $\frac{\partial z_{tt}^m}{\partial x_i} z_{tt}^m = \frac{\partial}{\partial x_i} (z_{tt}^m)^2$. Então:

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) = \\ & - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) + \frac{h_i}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \right) \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Gauss:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \right) - \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \eta_i \end{aligned}$$

sendo cada η_i um vetor normal unitário as Σ_1 . Somando os termos semelhantes:

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_i} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \right) - \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \eta_i$$

Limitando as funções $\frac{\partial h_i}{\partial x_i}$, $\forall i = 1, \dots, n$, temos:

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) \leq \frac{c}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) - \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \eta_i$$

Daí, temos:

$$-\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (h_i w_{tt}^m) w_{tt}^m + \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i z_{tt}^m) z_{tt}^m \right) \leq \frac{c}{2} (|(w_{tt}^m)|_H^2 + |(z_{tt}^m)|_H^2) - \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} ((w_{tt}^m)^2 + (z_{tt}^m)^2) \eta_i \quad (4.67)$$

Análise de 4: Conforme a observação (4.5.1), note que:

$$\tilde{a}'(t, w^m, w_{tt}^m) = \frac{d}{dt}(\tilde{a}'(t, w^m, w_t^m)) - \tilde{a}''(t, w^m, w_t^m) - \tilde{a}'(t, w_t^m, w_t^m) \quad (4.68)$$

$$\hat{a}'(t, z^m, z_{tt}^m) = \frac{d}{dt}(\hat{a}'(t, z^m, z_t^m)) - \hat{a}''(t, z^m, z_t^m) - \hat{a}'(t, z_t^m, z_t^m) \quad (4.69)$$

Análise de 5: Também conforme a observação (4.5.1), vê-se que:

$$\tilde{a}(t, w_t^m, w_{tt}^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m)) - \frac{1}{2} \tilde{a}'(t, w_t^m, w_t^m) \quad (4.70)$$

$$\hat{a}(t, z_t^m, z_{tt}^m) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\hat{a}(t, z_t^m, z_t^m)) - \frac{1}{2} \hat{a}'(t, z_t^m, z_t^m) \quad (4.71)$$

Análise de 6:

$$\int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{\sigma_1} w_{tt}^m w_t^m \frac{1}{\sigma_2} z_{tt}^m z_t^m \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{w_t^m}{\sqrt{\sigma_1}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \left| \frac{z_t^m}{\sqrt{\sigma_2}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right). \quad (4.72)$$

Análise de 7: As funções $\tilde{b}_i, \hat{b}_i, \tilde{b}'_i$ e $\hat{b}'_i, \forall i = 1, \dots, n$, definidas em \bar{Q}_T , são C^∞ , portanto limitadas por uma constante \bar{c} . Temos então:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i z_{tt}^m + \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i z_{tt}^m \right) \leq \\ & \bar{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} z_{tt}^m + \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} z_{tt}^m \right). \end{aligned}$$

Pelas desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \hat{b}_i z_{tt}^m + \frac{\partial w_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i w_{tt}^m + \frac{\partial z_t^m}{\partial x_i} \tilde{b}'_i z_{tt}^m \right) \leq \\ & \frac{\bar{c}}{2} (|w_t^m|_V^2 + 2|w_{tt}^m|_H^2 + |z_t^m|_V^2 + |w^m|_V^2 + |z^m|_V^2 + 2|z_{tt}^m|_H^2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Análise de 8: Pelas desigualdades de Cauchy-Schartz, fundamental e triangular:

$$\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m)(w_{tt}^m - z_{tt}^m) \leq \frac{\alpha}{2} (|w^m|_H^2 + |z^m|_H^2 + |w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2). \quad (4.74)$$

Análise de 9: Pelas desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental:

$$\int_{\Omega(0)} (\tilde{f}' w_{tt} + \tilde{g}' z_{tt}) \leq \frac{1}{2} (|\tilde{f}'|_H^2 + |\tilde{g}'|_H^2 + |w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2) \quad (4.75)$$

Agora, vamos utilizar as igualdades e desigualdades (4.65)-(4.75), de forma que a equação (4.64) se transforma na seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{d}}{2} \frac{d}{dt} \{|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2\} + \\ & \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + \frac{1}{2} \tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) \right\} + \\ & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left| \frac{w_t^m}{\sqrt{\sigma_1}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \left| \frac{z_t^m}{\sqrt{\sigma_2}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \\ & \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} (w_{tt}^2 + z_{tt}^2) \eta_i \leq \\ & \left(\frac{3}{2} c + \bar{c} + \frac{1}{2} \right) (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2) + (c + \frac{\bar{c}}{2}) (|w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + \frac{\bar{c}}{2} (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2) + \\ & \tilde{a}''(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}''(t, z^m, z_t^m) + \frac{3}{2} \tilde{a}'(t, w_t^m, w_t^m) + \frac{3}{2} \hat{a}'(t, z_t^m, z_t^m) \\ & \frac{1}{2} (|\tilde{f}'|_H^2 + |\tilde{g}'|_H^2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Agora vamos limitar as formas bilineares do segundo membro da desigualdade. Pela

observação (4.5.1), existem constantes \tilde{A}'' , \hat{A}'' , \tilde{A}' , \hat{A}' tais que $\tilde{a}''_{ij} \leq \tilde{A}''$, $\hat{a}''_{ij} \leq \hat{A}''$, $\tilde{a}'_{ij} \leq \tilde{A}'$, $\hat{a}'_{ij} \leq \hat{A}'$. E aplicando as desigualdades de Cauchy-Schartz e fundamental temos:

$$\begin{aligned}\tilde{a}''(t, w^m, w_t^m) &\leq \frac{1}{2}\tilde{A}''(|w^m|_V^2 + |w_{tt}^m|_V^2) \\ \hat{a}''(t, z^m, z_t^m) &\leq \frac{1}{2}\hat{A}''(|z^m|_V^2 + |z_{tt}^m|_V^2) \\ \frac{3}{2}\tilde{a}'(t, w_t^m, w_t^m) &\leq \frac{3}{2}\tilde{A}'(|w_t^m|_H^2) \leq \frac{3}{2}\tilde{A}'C(|w_t^m|_V^2) \\ \frac{3}{2}\hat{a}'(t, z_t^m, z_t^m) &\leq \frac{3}{2}\hat{A}'(|z_t^m|_H^2) \leq \frac{3}{2}\hat{A}'C(|z_t^m|_V^2) \leq\end{aligned}$$

em que C é a constante de continuidade da imersão de V em H .

Assim, a desigualdade (4.76) simplifica-se em:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{d}}{2} \frac{d}{dt} \{|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2\} + \\ &\frac{d}{dt} \left\{ \tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + \frac{1}{2}\tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) \right\} + \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left| \frac{w_t^m}{\sqrt{\sigma_1}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \left| \frac{z_t^m}{\sqrt{\sigma_2}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \\ &\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} (w_{tt}^2 + z_{tt}^2) \eta_i \leq \\ &\left(\frac{3}{2}c + \bar{c} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tilde{A}'' + \frac{1}{2}\hat{A}'' \right) (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2) + \\ &\left(c + \frac{\bar{c}}{2} + \frac{3}{2}\tilde{A}'C + \frac{3}{2}\hat{A}'C \right) (|w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + \\ &\left(\frac{\bar{c}}{2} + \frac{1}{2}\tilde{A}'' + \frac{1}{2}\hat{A}'' \right) (|w^m|_V^2 + |z^m|_V^2) + \\ &\frac{1}{2} (|\tilde{f}'|_H^2 + |\tilde{g}'|_H^2)\end{aligned}\tag{4.77}$$

Para facilitar a notação vamos tomar por M a maior das constantes que aparecem no segundo membro. Então:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{d}}{2} \frac{d}{dt} \{|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2\} + \\ &\frac{d}{dt} \left\{ \tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + \frac{1}{2}\tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) \right\} + \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left| \frac{w_t^m}{\sqrt{\sigma_1}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \left| \frac{z_t^m}{\sqrt{\sigma_2}} \right|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + \\ &\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_1} \frac{h_i}{2} (w_{tt}^2 + z_{tt}^2) \eta_i \leq M (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + \\ &M (|\tilde{f}'|_H^2 + |\tilde{g}'|_H^2)\end{aligned}\tag{4.78}$$

As funções $\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}$ e h_i , $i = 1, \dots, n$, são limitadas inferiormente por constantes positivas. Tomando a menor dessas constantes por m e multiplicando por m . Temos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 \} + \\ & \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + \frac{1}{2} \tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) \right\} + \\ & \frac{d}{dt} \left\{ |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right\} + |w_{tt}|_{\Gamma_1}^2 + |z_{tt}|_{\Gamma_1}^2 \leq \\ & M_1 (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + M_2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

(Também foi levado em consideração que, pela primeira estimativa, w^m e z^m são limitadas)

Integrando de 0 a t , temos:

$$\begin{aligned} & |w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + \tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) + \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + \frac{1}{2} \tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) + \\ & |w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + \int_0^t (|w_{tt}|_{\Gamma_1}^2 + |z_{tt}|_{\Gamma_1}^2) \leq \\ & M_1 \int_0^t (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + \\ & M_3 + (\text{dados iniciais}) \end{aligned}$$

Rearumando da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & |w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + \frac{1}{2} \tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) + \frac{1}{2} \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m) + \\ & \underbrace{|w_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + |z_t^m|_{L^2(\Gamma_1)}^2}_{\text{limitado}} + \int_0^t (|w_{tt}|_{\Gamma_1}^2 + |z_{tt}|_{\Gamma_1}^2) \leq \\ & -\tilde{a}'(t, w^m, w_t^m) - \hat{a}'(t, z^m, z_t^m) + M_1 \int_0^t (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) + \\ & M_3 + (\text{dados iniciais}) \end{aligned}$$

As formas $\tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m)$, $\hat{a}(t, z_t^m, z_t^m)$, que aparecem no primeiro membro são coersivas, de forma que podemos utilizar a seguinte limitação:

$$\tilde{a}|w_t^m| \leq \tilde{a}(t, w_t^m, w_t^m) \hat{a}|w_t^m| \leq \hat{a}(t, z_t^m, z_t^m)$$

Quanto as forma $\tilde{a}'(t, w^m, w_t^m)$, $\hat{a}'(t, z^m, z_t^m)$, que aparecem no segundo membro, primeiro limitamos os coeficientes \tilde{a}'_{ij} , \hat{a}'_{ij} , depois aplicamos as desigualdades de Cauchy-Schwarz e fundamental, em seguida utilizamos as limitações de w^m , z^m , w_t^m , z_t^m , obtidas na primeira

estimativa, mais a continuidade da imersão de V e H , para verificarmos que, neste caso, são limitadas. Portanto, temos:

$$|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2 + \underbrace{\int_0^t (|w_{tt}|_{\Gamma_1}^2 + |z_{tt}|_{\Gamma_1}^2)}_{\geq 0} \leq \quad (4.80)$$

$$M_2 \int_0^t (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) +$$

$$M_4$$

Então:

$$|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2 \leq$$

$$M_2 \int_0^t (|w_{tt}^m|_H^2 + |z_{tt}^m|_H^2 + |w_t^m|_V^2 + |z_t^m|_V^2) +$$

$$M_4$$

Pelo lema de Gronwall, constatamos que:

$$w_{tt}^m \text{ e } z_{tt}^m \text{ são limitadas em } H \quad (4.81)$$

$$w_t^m \text{ e } z_t^m \text{ são limitadas em } V \quad (4.82)$$

Ainda podemos retornar a desigualdade (4.80) e verificar que:

$$w_{tt}^m \text{ e } z_{tt}^m \text{ são limitadas em } L^2(\Gamma_1) \quad (4.83)$$

4.6.4 Passagem ao Limite

Das estimativas à priori, temos o seguinte:

$$w_{tt} \text{ e } z_{tt} \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; H); \quad (4.84)$$

$$w_t \text{ e } z_t \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; V); \quad (4.85)$$

$$w_t \text{ e } z_t \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1)); \quad (4.86)$$

$$w \text{ e } z \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; V). \quad (4.87)$$

Os espaços V e H são reflexivos, então $L^\infty(0, T; V)$ e $L^\infty(0, T; H)$ também o são. Considerando a continuidade da imersão de $L^2(0, T; V)$, $L^2(0, T; H)$ e $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ em $L^\infty(0, T; V)$, $L^\infty(0, T; H)$ e $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$, respectivamente, e aplicando o teorema

(3.5.1), vemos que existem subsequências (as quais representaremos pelo mesmo índice) tais que:

$$w_{tt}^m \text{ e } z_{tt}^m \text{ convergem fraco estrela em } L^2(0, T; H); \quad (4.88)$$

$$w_t^m \text{ e } z_t^m \text{ convergem fraco estrela em } L^2(0, T; V); \quad (4.89)$$

$$w_t^m \text{ e } z_t^m \text{ convergem fraco estrela em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)); \quad (4.90)$$

$$w^m \text{ e } z^m \text{ convergem fraco estrela em } L^2(0, T; V). \quad (4.91)$$

Estas convergências equivalem a dizer que:

- $\int_{\Omega} w_{tt}^m \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} w_{tt} \varphi_1$ e $\int_{\Omega} z_{tt}^m \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} z_{tt} \varphi_2$;
 - $\int_{\Omega} w_t^m \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} w_t \varphi_1$ e $\int_{\Omega} z_t^m \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} z_t \varphi_2$;
 - $\int_{\Gamma_1} w_t^m \varphi_1 \rightarrow \int_{\Gamma_1} w_t \varphi_1$ e $\int_{\Gamma_1} z_t^m \varphi_2 \rightarrow \int_{\Gamma_1} z_t \varphi_2$;
 - $\int_{\Omega} \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega} w \varphi_1$ e $\int_{\Omega} z \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega} z \varphi_2$;
- $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V$.

Em particular, devido a regularidade dos termos envolvidos, usando a linearidade das derivadas temos:

- $\int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt}^m \varphi_1 \rightarrow \int_{\Omega(0)} \sigma_1 w_{tt} \varphi_1$;
- $2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_1) w_t^m \rightarrow 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_1) w_t$;
- $\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}$;
- $\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} w_t^m \varphi_1 \rightarrow \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} w_t \varphi_1$;
- $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w^m}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1 \rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial w}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1$;
- $\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m) \varphi_1 \rightarrow \alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi_1$;

- $\int_{\Omega(0)} \sigma_2 z_{tt}^m \varphi_2 \rightarrow \int_{\Omega(0)} \sigma_1 z_{tt} \varphi_2;$
 - $2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_2) z_t^m \rightarrow 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_2) z_t;$
 - $\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j};$
 - $\frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} z_t^m \varphi_2 \rightarrow \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} z_t \varphi_2;$
 - $\sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z^m}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2 \rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial z}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2;$
 - $-\alpha \int_{\Omega(0)} (w^m - z^m) \varphi_1 \rightarrow -\alpha \int_{\Omega(0)} (w - z) \varphi_2;$
- $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V.$

Somando os termos listados logo acima, verificamos que (w, z) , de fato, são soluções do sistema (4.41).

Aplicando o corolário (3.11.1), temos que

$$(w, \frac{\partial w}{\partial t}) \in C(0, T; V) \times C(0, T; V); \quad (4.92)$$

$$(z, \frac{\partial z}{\partial t}) \in C(0, T; V) \times C(0, T; V). \quad (4.93)$$

4.6.5 Convergência dos Dados Iniciais

De (4.92) e (4.93) constatamos que faz sentido calcular $w(\cdot, 0)$, $z(\cdot, 0)$, $w'(\cdot, 0)$ e $z'(\cdot, 0)$.

Verifica-se ainda que:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} w^m(0) = w(0);$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} z^m(0) = z(0);$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} w_t^m(0) = w_t(0);$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} z_t^m(0) = z_t(0).$$

Das aproximações (4.48), (4.49), (4.50) e (4.51) e da unicidade do limite, temos que:

$$w(\cdot, 0) = w_0;$$

$$z(\cdot, 0) = z_0;$$

$$w_t(\cdot, 0) = w_1;$$

$$w_t(\cdot, 0) = z_1.$$

4.6.6 Unicidade

Para a unicidade, vamos tomar duas soluções e verificar que são iguais. Devido a regularidade das soluções o método empregado será o da energia.

Sejam (\tilde{w}, \tilde{z}) e (\hat{w}, \hat{z}) soluções do sistema. Então, o par ordenado $(\bar{w}, \bar{z}) = (\tilde{w} - \hat{w}, \tilde{z} - \hat{z})$ é solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega(0)} \sigma_1 \bar{w}_{tt} \varphi_1 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_1) \bar{w}_t + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \tilde{a}_{ij} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_1} \bar{w}_t \varphi_1 + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_i} \tilde{b}_i \varphi_1 + \alpha \int_{\Omega(0)} (\bar{w} - \bar{z}) \varphi_1 = 0. \\ \\ \int_{\Omega(0)} \sigma_2 \bar{z}_{tt} \varphi_2 - 2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i \varphi_2) \bar{z}_t + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0)} \hat{a}_{ij} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \frac{1}{\zeta} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sigma_2} \bar{z}_t \varphi_2 + \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(0)} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x_i} \hat{b}_i \varphi_2 - \alpha \int_{\Omega(0)} (\bar{w} - \bar{z}) \varphi_2 = 0. \\ \\ \bar{w}(x, 0) = 0, \quad \bar{z}(x, 0) = 0 \\ \bar{w}_t(x, 0) = 0, \quad \bar{z}_t(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.94)$$

Para quaisquer funções $\varphi_1, \varphi_2 \in V$.

Procedendo como na primeira estimativa à priori, chegaremos na seguinte desigualdade:

$$\frac{\sqrt{d}}{2} (|\bar{w}_t|_H^2 + |\bar{z}_t|_H^2 + k|\bar{w}|_V^2 + k|\bar{z}|_V^2) \leq \int_0^t (|\bar{w}|_V^2 + |\bar{z}|_V^2 + |\bar{w}_t|_H^2 + |\bar{z}_t|_H^2) dt.$$

Donde, pelo lema de Gronwall as funções \bar{w} e \bar{z} devem ser ambas nulas. Assim, teremos $\tilde{w} = \hat{w}$ e $\tilde{z} = \hat{z}$. Provendo dessa forma a unicidade.

4.7 Retorno ao Domínio \tilde{Q}_T : Existência e Unicidade de Solução Fraca

Uma vez provado o teorema de existência e unicidade para o sistema definido em domínio cilíndrico. Vamos estabelecer um teorema semelhante, porém no domínio não cilíndrico \tilde{Q}_T . O primeiro passo será dado pelo lema abaixo.

Lema 4.7.1. *O operador $I_\Phi : L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))) \rightarrow L^2(0, T; V)$, dado por $I_\Phi(u) = u \circ \Phi$, é um isomorfismo e seu inverso $I_\Psi : L^2(0, T; V) \rightarrow L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t)))$ é dado por $I_\Psi(w) = w \circ \Psi$. O operador $J_\Phi : L^2(0, T; L^2(\Omega(t))) \rightarrow L^2(0, T; H)$, dado por $J_\Phi(u) = u \circ \Phi$ é um isomorfismo e seu inverso $J_\Psi : L^2(0, T; H) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega(t)))$ é dado por $J_\Psi(w) = w \circ \Psi$. Sendo Φ e Ψ difeomorfismos definidos no teorema (4.4.2)*

Demonstração

A demonstração será feita apenas para o operador I_Φ , uma vez que a verificação para o operador J_Ψ é análoga.

- Linearidade: Sejam $u_1, u_2 \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t)))$. Então,

$$I_\Phi(u_1 + ku_2) = (u_1 + ku_2) \circ \Phi = u_1 \circ \Phi + ku_2 \circ \Phi = I_\Phi(u_1) + kI_\Phi(u_2).$$

- Injetividade: Sejam $u_1, u_2 \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t)))$ tais que $I_{u_1} = I_{u_2}$, isto é, $u_1 \circ \Phi = u_2 \circ \Phi$. Então, $u_1 = u_2$.
- Sobrejetividade: Dada uma função $w \in L^2(0, T; V)$, basta tomar $u = w \circ \Psi$ que $I_\Phi(u) = w$.

Observação 4.7.1. *Neste trabalho estabelecemos dois conceitos de solução, uma para o sistema definido no domínio móvel e outra para o sistema definido em domínio fixo. Esses dois conceitos são equivalentes via mudança de variável para integrais. De fato, se (u, v) é solução do problema (4.14). Então, substituindo (u, v) por (Jw, Jz) , sendo J a matriz jacobiana do difeomorfismo Ψ , o sistema (4.14) transforma-se no sistema (4.41).*

Feita essa observação podemos enunciar o teorema de existência e unicidade para o sistema (4.14).

Teorema 4.7.1. *Sejam $u_0, v_0 \in H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0))$, $u_1, v_1 \in L^2(\Omega(0))$ e $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t)))$. Então, o sistema (4.14) possui uma única solução (u, v) , tal que:*

$$\begin{cases} u, v \in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))), \\ u_t, v_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))). \end{cases}$$

Mais ainda, a aplicação de

$$(H_{\Gamma_0(0)}^1(\Omega(0)))^2 \times (L^2(\Omega(0)))^2 \times (L^2(0, T; L^2(\Omega(t))))^2$$

em

$$(L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))))^2 \times L^2(0, T; L^2(\Omega(t)))^2 \times (L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)))^2$$

dada por

$$(u_0, v_0, u_1, v_1, f, g) \mapsto (u, v, u_t, v_t, u_t|_{\Gamma_1}, v_t|_{\Gamma_1})$$

é linear e contínua.

4.8 Sistema com Condição de Dirichlet Não-Homogênea

Nesta seção estudaremos a questão da existência e unicidade para o seguinte sistema com condição de Dirichlet não-homogênea, porém com dados iniciais nulos:

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = f, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2 v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = g, & \text{em } \tilde{Q}_T \\ u(y, t) = p(y, t), & \text{em } \Sigma' \\ v(y, t) = q(y, t), & \text{em } \Sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, & \text{em } \Sigma \\ u(y, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) = 0 \\ v(y, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.95)$$

$$\begin{cases} \rho_1, \rho_2 \in W^{1, \infty}(\Omega(t)) \text{ e } \rho_1, \rho_2 \geq d > 0; \\ f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))); \\ p, q \in L^2(\Sigma') \end{cases}$$

O primeiro passo para resolver o sistema (4.95) será dado pelo lema abaixo.

Lema 4.8.1. *Dado o sistema "adjunto"*

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - \Delta u + \alpha(u - v) = f, \quad \text{em } \tilde{Q}_T \\ \rho_2 v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = g, \quad \text{em } \tilde{Q}_T \\ \\ u(y, t) = 0, \quad \text{em } \Sigma' \\ v(y, t) = 0, \quad \text{em } \Sigma' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \text{em } \Sigma \\ \\ u(y, T) = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(y, T) = 0 \\ v(y, T) = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial t}(y, T) = 0 \end{array} \right. \quad (4.96)$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1, \rho_2 \in W^{1,\infty}(\Omega(t)) \text{ e } \rho_1, \rho_2 \geq d > 0; \\ f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))). \end{array} \right.$$

Então, o sistema (4.96) possui solução fraca única (u, v) , tal que

$$\begin{aligned} u, v &\in L^2(0, T; H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))); \\ u_t, v_t &\in L^2(0, T; L^2(\Omega(t))); \\ u_{tt}, v_{tt} &\in L^2(0, T; (H_{\Gamma_0(t)}^1(\Omega(t))))'; \\ u'|_{\Gamma_1}, v'|_{\Gamma_1} &\in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)); \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}, \frac{\partial v}{\partial \nu} &\in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega(t))). \end{aligned}$$

Demonstração

A idéia é promover no sistema (4.96) a mudança de variável $t \mapsto T - t$, de forma a colocá-lo em condições para aplicar o teorema (4.7.1). Sejam as funções $\tilde{u} = u(T - t)$, $\tilde{v} = v(T - t)$ e $\tilde{f} = f(T - t), \tilde{g} = g(T - t)$ e considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} + \alpha(\tilde{u} - \tilde{v}) = f, \text{ em } \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\} \\ \rho_2 \tilde{v}_{tt} - \Delta \tilde{v} - \alpha(\tilde{u} - \tilde{v}) = g, \text{ em } \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\} \\ \tilde{u}(y, t) = 0, \text{ em } \Sigma'_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_0(T-t) \times \{t\} \\ \tilde{v}(y, t) = 0, \text{ em } \Sigma'_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \Gamma_0(T-t) \times \{t\} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} + \frac{1}{\zeta} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = 0, \text{ em } \Sigma_T = \\ \tilde{u}(y, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(y, 0) = 0 \\ \tilde{v}(y, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(y, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.97)$$

Segundo o exemplo que adotamos para ilustrar as idéias, a figura (4.8) ilustra o aspecto do domínio $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\}$. Intuitivamente, é como se "virássemos de cabeça para baixo" o domínio \tilde{Q}_T .

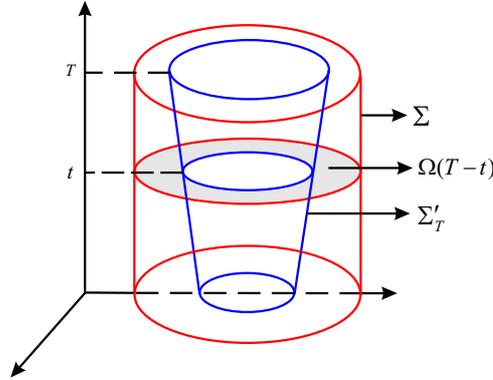


Figura 4.3 Modelo para o domínio $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\}$

Observe que o domínio $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Omega(T-t) \times \{t\}$ possui as mesmas características de \tilde{Q}_T , em particular Σ'_T é *time-like*. De forma que o teorema (4.7.1) aplica-se ao sistema (4.97), isto é, para o sistema (4.97) temos existência e unicidade se solução. Tomando a transformação inversa de $t \mapsto T-t$, verifica-se que para o sistema (4.96) também possui solução única.

Para retornar ao sistema (4.95), devemos rever o conceito de solução uma vez que a não temos mais a homogeneidade na condição de Dirichlet.

Apêndice A

Outros Resultados

A.1 Teorema de Carathéodory

Definição A.1.1. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory se:*

1. *Para cada x fixo, $f(x, t)$ é mensurável em t ;*
2. *Para cada t fixo, $f(x, t)$ é contínua em x ;*
3. *Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real e integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x, t)| \leq m_K(t)$, $\forall (x, t) \in K$.*

Teorema A.1.1 (Teorema de Carathéodory). *Sejam $R = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, a, b \geq 0\}$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory. Então, existem um intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$) e uma função $X : |t - t_0| \leq \beta \rightarrow |x - x_0| \leq b$, solução única do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Como se pode observar, o teorema de Carathéodory estabelece existência e unicidade do problema (A.1). Porém, essa solução é local, isto é, está definida em um intervalo $|t - t_0| \leq \beta$. O próximo teorema é uma condição suficiente para o prolongamento de solução.

Teorema A.1.2 (Prolongamento de Solução). *Sejam $-\infty < \omega^- < 0 < \omega^+ < +\infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq b\}$, $D = [\omega^-, \omega^+] \times B$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas condições do teorema de Carathéodory. Se φ é a solução local do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e $|\varphi(t)| \leq M$, $\forall t \in I$ onde φ está definida, para M independente de t . Então, φ pode ser prolongada ao intervalo $[\omega^-, \omega^+]$

Lema A.1.1 (Lema de Gronwall). *Seja $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções não-negativas e contínuas. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_a^t \psi(s)ds.$$

Em particular, φ é limitada, e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bardos, C; Cooper, J. *A nolinear wave equation in a time dependent domain.* J. Math. Anal. Appl. 42 (1973),29-60.
- [2] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.
- [3] Cavalcanti, M. M.; Cavalcanti, V. N. D.; Santos, M. L. *Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memuty conditions at the boundary.* Appl. Math. and Comp. 150 (2004), 439-465.
- [4] Cooper, J. *Local decay of solutions of the wave equation in the exterior of a moving body.* J. Math Anal. Appl. 49 (1975), 130-153.
- [5] Inoue, A. *Sur $\square u + u^3$ dans un Domaine Noncylindrique.* J. Math Anal. Appl. 46 (1974), 777-819.
- [6] Ferreira, J; Lar'kin, N. A. *GLOBAL SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION IN A NONCYLINDRIC DOMAINS.* Portugaliae Mathematica. Vol. 53 Fasc. 4 (1996).
- [7] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des prolèmes aux limites non linéaris.* Dunod, Paris, 1969.
- [8] Rivera, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* Rio de Janeiro: Textos de pós-graduação (LNCC), 2004
- [9] Sikorav, J. *A linear Wave Equation in a Time-Dependent Domain.* J. Math Anal. Appl. 153 (1990), 533-548.